Préparation du test du 09/04/2010

Durée : 15 minutes. Calculatrice et formulaire du S1 ***autorisés****. On pourra écrire seulement la réponse directement sur la feuille.*

1. On rappelle que
$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
   (a) À l'aide de la méthode des trapèzes à 5 sous-intervalles, trouver une valeur approchée de $\ln 2$. On fera figurer sur la copie le tableau de valeurs utilisé pour le calcul, en arrondissant tout à 3 décimales près.

   (b) Encadrer $\frac{1}{x^3}$ entre deux réels, pour $x \in [1; 2]$.

   (c) Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Déduire de la question précédente un réel K tel que
$$|f''(x)| \leq K \quad \forall x \in [1; 2]$$
   (d) A partir de la valeur approchée trouvée à la question a), trouver un encadrement de $\ln 2$ entre deux réels.
   On rappelle que, avec les notations du cours utilisées pour présenter la méthode des trapèzes,
$$\varepsilon_n = K\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$
   (e) Déterminer n entier minimal pour obtenir un encadrement de $\ln 2$ à 10^{-1} près à l'aide de la méthode des trapèzes à n sous-intervalles.

2. (a) Compléter les " ?" dans l'écriture : $\sin^3 x = ? \times \sin x = (1 - ?^2) \times \sin x$.

   (b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale
$$\int_0^\pi \sin^3 x \mathrm{d}x$$
   (on pourra utiliser le changement de variable $u = \cos x$).

→ Correction en page suivante.

Correction préparation du test du 09/04/2010

1. (a) Le pas vaut $\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{2-1}{5}=0,2$; on dispose le tableau vu en cours :

x_i	$f(x_i)$ ou $f(x_i)/2$
1	$\dfrac{1}{\mathbf{2}}=0,5$
$1,2$	$0,833$
$1,4$	$0,714$
$1,6$	$0,625$
$1,8$	$0,556$
2	$\dfrac{0,5}{\mathbf{2}}=0,25$
Somme	$3,478$
$\times 0,2$	$\mathbf{0,696}$

Attention aux arrondis : l'inverse de $1,8$ est $0,55555...$ il est donc arrondi à $0,55\mathbf{6}$; de même pour le résultat : $0,6956...$ est arrondi à $0,69\mathbf{6}$.
La valeur approchée donnée par la méthode des trapèzes à 5 sous-intervalles est donc $0,696$.

(b) On a successivement :

$$1\leq x\leq 2$$
$$1^3\leq x^3\leq 2^3$$
$$\frac{1}{2^3}\leq\frac{1}{x^3}\leq\frac{1}{1^3}$$

d'où finalement

$$\frac{1}{8}\leq\frac{1}{x^3}\leq 1$$

(c) Soit $x\in[1;2]$. On a $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ et $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$. Comme x est positif, x^3 l'est également et ainsi

$$|f''(x)|=\frac{2}{x^3}$$

On a donc par la question précédente :

$$|f''(x)|\leq 2\times 1=2$$

donc $K=2$ convient.

(d) On a $a=1$, $b=2$, $n=5$; ainsi

$$\varepsilon_5=\frac{(2-1)^3}{12\times 5^2}\times 2=\frac{1}{6\times 25}=0,006666...$$

Nous arrondissons ε_5 par excès : $\varepsilon_5\leq 0,007$.
Ainsi par un théorème du cours on obtient l'encadrement suivant de $\ln 2$:

$$0,696-0,007\leq\ln 2\leq 0,696+0,007$$

soit :

$$0,689\leq\ln 2\leq 0,703$$

(e) L'amplitude de l'encadrement obtenu avec la méthode des trapèzes à n sous-intervalles est :

$$2\varepsilon_n=\frac{(2-1)^3}{6\times n^2}\times 2$$

et on cherche n pour que cette amplitude soit inférieure ou égale à 10^{-1}. Ainsi il faut :

$$\frac{1}{3n^2}\leq 10^{-1}$$

d'où

$$n^2\geq\frac{10}{3}$$

donc

$$n\geq\sqrt{\frac{10}{3}}$$

et $n=2$ convient.

2. (a) $\sin^3 x=\sin^2 x\times\sin x=(1-\cos^2 x)\times\sin x$

(b) On a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\sin^3 x\mathrm{d}x &= \int_0^\pi(1-\cos^2 x)\sin x\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x-\int_0^\pi\cos^2 x\sin x\mathrm{d}x\\ &= [-\cos x]_0^\pi-\int_1^{-1}(-u^2)\mathrm{d}u \text{ (changement de variables } u=\cos x)\\ &= -\cos\pi+\cos 0+\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^{-1}\\ &= 1+1-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Errata correction feuille 4, exercice 6, question 5. : on a :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\cos^3 x\mathrm{d}x &= \int_0^\pi(1-\sin^2 x)\cos x\mathrm{d}x=[\sin x]_0^\pi-\int_0^\pi\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x\\ &= \sin\pi-\sin 0-\int_0^{\mathbf{0}}u^2\mathrm{d}u=0-0-0=0\end{aligned}$$

car $\sin\pi=\sin 0=0$.