Préparation du test du 15/03/2010

Durée : 15 minutes. Calculatrices interdites, formulaire du S1 autorisé. On pourra écrire seulement la réponse directement sur la feuille.

1. Rappeler la formule d'intégration par parties.
2. Donner les valeurs de :
   (a) $\arctan 1$
   (b) $\arctan(-1)$
3. Calculer
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+(2x-3)^2}$$
à l'aide du changement de variables $u = 2x - 3$.
4. (a) Poser la division de $x^2 + x + 1$ par $x - 1$.
   (b) En déduire l'écriture de $\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ comme la somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle, dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur.
   (c) En déduire une primitive de $\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

→ **Correction en page suivante.**

Correction préparation du test du 15/03/2010

1. Il s'agit de :

$$\int_a^b u'v = -\int_a^b uv' + [uv]_a^b$$

2. (a) arctan 1 est le nombre réel compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut 1. On a donc

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

   (b) De manière générale,

$$\arctan(-x) = -\arctan x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   (la fonction arctan est une fonction impaire).
   On a donc

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

3. On a : $x = 0 \to u = -3$ et $x = 1 \to u = -1$.
   Par ailleurs $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$ donc

$$\frac{\mathrm{d}x}{1+(2x-3)^2} = \frac{\mathrm{d}u}{2(1+u^2)}$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+(2x-3)^2} &= \frac{1}{2}\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \frac{1}{2}[\arctan u]_{-3}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\arctan(-1) - \arctan(-3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4} + \arctan 3\right)
\end{aligned}$$

4. (a)

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + x + 1 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-(\,x^2 - x\,) & x + 2 \\ \cline{1-1}
2x + 1 & \\
-(\,2x - 2\,) & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}$$

   (b) On a donc :

$$x^2 + x + 1 = (x-1)(x+2) + 3$$

   d'où

$$\frac{x^2+x+1}{x-1} = x + 2 + \frac{3}{x-1}$$

   (c) Une primitive de $\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ est donc

$$\frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1|$$