Préparation du test du 23/02/2010

Durée : 15 minutes. Calculatrices interdites, formulaire du S1 autorisé. Écrire seulement la réponse directement sur la feuille.

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $[1;3]$ telles que :

$$\forall x \in [1,3] \;\; 0 \leq f(x) \leq x \text{ et } -1 \leq g(x) \leq 2.$$

   (a) Encadrer $f - 2g$ sur l'intervalle $[1,3]$.

   (b) En déduire un encadrement entre deux réels de $\displaystyle\int_1^3 (f-2g)$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{-2+\sin^2(x)}$$

   (a) Encadrer f entre deux réels sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

   (b) En déduire un encadrement entre deux réels de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f$.

3. Calculer :

$$\int_0^1 xe^{-2x} \mathrm{d}x$$

→ **Correction en page suivante.**

Correction préparation du test du 23/02/2010

1. (a) On a : $2 \geq -2g(x) \geq -4$ donc par addition d'inégalités, $-4 \leq f(x) - 2g(x) \leq 2 + x$.
   (b) On en déduit :

$$\int_1^3 (-4)\mathrm{d}x \leq \int_1^3 (f-2g) \leq \int_1^3 (2+x)\mathrm{d}x$$
$$(-4)\times(3-1) \leq \int_1^3 (f-2g) \leq \left[2x + \frac{x^2}{2}\right]_1^3$$
$$-8 \leq \int_1^3 (f-2g) \leq 6 + \frac{9}{2} - \left(2 + \frac{1}{2}\right)$$
$$-8 \leq \int_1^3 (f-2g) \leq 8$$

2. Rappel : $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$.
   (a) On a, pour tout x réel : $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$.
   D'où $-2 \leq -2 + \sin^2(x) \leq -1$ (ici nous ajoutons -2 donc les $\leq$ sont conservés), et donc :

$$-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{-2+\sin^2(x)} \geq -\frac{1}{1}$$

   (nous sommes passés à l'inverse avec deux bornes de même signe donc les $\leq$ sont changés en $\geq$).
   (b) On en déduit, en intégrant l'inégalité précédente sur $[0, 2\pi]$:

$$-\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\mathrm{d}x \geq \int_0^{2\pi} \frac{1}{-2+\sin^2(x)}\mathrm{d}x \geq -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x$$

   soit :

$$-\pi \geq \int_0^{2\pi} \frac{1}{-2+\sin^2(x)}\mathrm{d}x \geq -2\pi$$

3. Intégrons par parties :

$$\left\{\begin{array}{c} u'(x) = e^{-2x} \\ v(x) = x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} u(x) = \dfrac{e^{-2x}}{-2} \\ v'(x) = 1 \end{array}\right.$$

   Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-2x}\mathrm{d}x &= -\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\mathrm{d}x + \left[\frac{e^{-2x}}{-2}x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}e^{-2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}e^{-2} \\
&= -\frac{1}{4}(e^{-2}-1) - \frac{1}{2}e^{-2} \\
&= -\frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$