Préparation du test du 23/04/2010

Durée : 15 minutes. Calculatrices interdites, formulaire du S1 autorisé. ***Sauf pour la question 4****, on pourra écrire seulement la réponse directement sur la feuille.*

1. Compléter :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ est convergente si et seulement si } \alpha \text{ ....}$$
2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Si oui, donner sa valeur.
   On pourra faire le changement de variable $u = \ln t$.
3. (a) Donner $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \arctan t$.

   (b) Donner la nature, et le cas échéant la valeur, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

   (c) On admet que $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \arctan t = -\frac{\pi}{2}$.

   Donner la nature, et le cas échant la valeur, de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
4. **Dans cette question, on fera figurer les détails du raisonnement sur la copie.**
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est-elle convergente ?

→ **Correction en page suivante.**

Correction préparation du test du 23/04/2010

1. Cf. correction feuille 6, exercice 1 : l'intégrale est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Soit $M > 1$. On a :
$$\int_1^M \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{\ln M} u\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\ln M} = \frac{(\ln M)^2}{2} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
Donc l'intégrale n'est pas convergente ; il n'y a pas lieu de calculer sa valeur.
3. (a) Vu en cours : $\arctan t$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ quand $t \to +\infty$.

   (b) Soit $M > 0$. On a :
$$\int_0^M \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^M = \arctan M - \arctan 0 = \arctan M \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$
   (on rappelle que $\arctan 0 = 0$).
   Donc l'intégrale proposée est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

   (c) Etudions $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Soit $M < 0$. On a :
$$\int_M^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan 0 - \arctan M = -\arctan M$$
   Quand M tend vers $-\infty$, cette quantité tend vers $-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$.
4. Soit $M > 0$. Calculons :
$$\int_0^M \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
La fonction à intégrer est de la forme $k\dfrac{u'}{u}$ avec $k = 1/2$, $u = 1+t^2$. D'où :
$$\int_0^M \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right]_0^M = \frac{1}{2}\left(\ln(1+M^2) - 0\right)$$
et cette quantité tend vers $+\infty$ quand M tend vers $+\infty$.
L'intégrale proposée est donc divergente.