Épreuve Compléments Maths

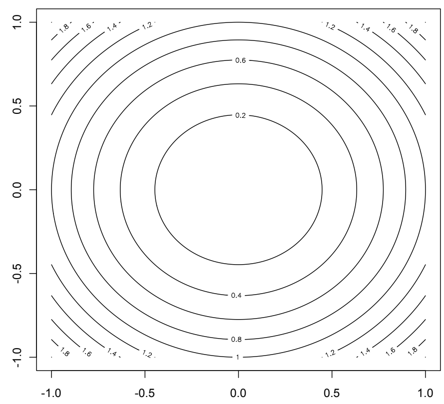
Vendredi 18 février 2011 – Durée : 2 h.

Le sujet comporte DEUX FEUILLES, formant 7 exercices indépendants.

Tous documents autorisés, calculatrices et autres appareils électroniques interdits.
Sauf mention contraire, vos résultats doivent être justifiés, par un calcul détaillé et/ou un raisonnement clair s'appuyant sur les résultats donnés en cours. La qualité de la rédaction et la précision des explications fournies entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

1. Dessiner l'allure des courbes de niveau -1, 0 et 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \ln x + 2y$.
2. Même question avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = x + 2\ln y$.
3. Le tracé ci-contre est la représentation en courbes de niveau d'une fonction h.
   (a) Lire graphiquement, sans justifier, une approximation de $h(0,-1)$.
   (b) On sait que soit $h(x,y) = 2xy$, soit $h(x,y) = x^2 + y^2$. Quelle est la bonne formule définissant h ? *Une réponse non justifiée à cette question ne rapportera aucun point.*



Exercice 2

Déterminer si chacune des fonctions suivantes a une limite en $(0,0)$. Calculer cette limite le cas échéant.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$
2. $g(x,y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x + y^4}$
3. $h(x,y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{x - y}$
   Rappel : $\tan'(x) = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$
4. $k(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{1 + xy}{1 + x^2}\right)$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. Mêmes questions pour $f(x,y) = xy\cos(xy)$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer, en détails, que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et le calculer.
4. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f en $(1,1)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. En chacun des points critiques, écrire la matrice hessienne de f.
3. Déterminer la nature du point critique $(0,0)$ pour f.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 - 5xy$.

1. Déterminer le point critique de f sous la contrainte $x - y = 1$.
2. Déterminer la nature de ce point critique.

Exercice 7

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) - y(x) = e^{2x}$
2. $(1+x^4)y'(x) + 4x^3y(x) = 0$ (faire apparaître la vérification de votre résolution)
3. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$
4. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x$ (on pourra montrer que $x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4}$ est solution particulière)
5. $x^2y'(x) - y(x) = 0$ (chercher d'abord les solutions définies sur $]0;+\infty[$, puis sur $]-\infty;0[$ et enfin sur $\mathbb{R}$)