Épreuve Compléments Maths

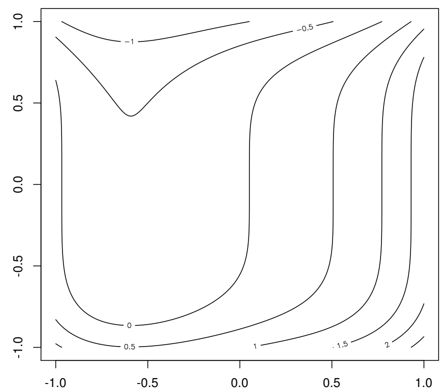
Lundi 27 février 2012 – Durée : 2 h.

Le sujet comporte DEUX FEUILLES, formant 7 exercices indépendants.

Tous documents autorisés, calculatrices et autres appareils électroniques interdits.
Sauf mention contraire, vos résultats doivent être justifiés, par un calcul détaillé et/ou un raisonnement clair s'appuyant sur les résultats donnés en cours. La qualité de la rédaction et la précision des explications fournies entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

1. Dessiner l'allure des courbes de niveau 0 et 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \sin x - y$.
2. Dessiner l'allure de la courbe de niveau 0 de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = -x + \ln y$.
3. Le tracé ci-contre est la représentation en courbes de niveau d'une fonction h. Lire graphiquement, sans justifier, une approximation de $h(-0.5, 0.5)$.



Exercice 2

Déterminer si chacune des fonctions suivantes a une limite en $(0, 0)$. Calculer cette limite le cas échéant.

1. $f(x, y) = \dfrac{\exp x - \exp y}{x - y}$
2. $g(x, y) = \dfrac{\exp - \exp y}{\sin x - \sin y}$
3. $h(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{y + x^4}$
4. $k(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \dfrac{\sin(x)y - \cos(xy)}{x^2 + y^2 + 1}$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. Mêmes questions pour $f(x, y) = \tan(xy) - xy \tan(x) \tan(y)$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer, en détails, que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et le calculer.
4. Montrer que f n'a pas de dérivée partielle par rapport à y en $(0, 0)$.
5. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f en $(1, 1)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = -x^2 + 2y^2 + x^4$.

1. Déterminer les trois points critiques de f.
2. En chacun des points critiques, écrire la matrice hessienne de f.
3. Déterminer la nature de chacun de ces points critiques.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 - 5xy$.

1. Déterminer le point critique de f sous la contrainte $x - y = 1$.
2. Déterminer la nature de ce point critique.

Exercice 7

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)y'(x) + y(x) = 0$
2. $(1+x^2)y'(x) + y(x) = 1$
3. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$
4. $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x$ (on pourra montrer que $x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4}$ est solution particulière)
5. $x^3y'(x) - 2y(x) = 0$ (chercher d'abord les solutions définies sur $]0;+\infty[$, puis sur $]-\infty;0[$ et enfin sur $\mathbb{R}$)