Feuille 1 – Fonctions de deux variables : courbes de niveau

Exercice 1

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dont l'expression est donnée.

1. $f(x,y) = 2xy + \dfrac{4}{x}$
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - y\ln x$
4. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$
5. $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$
6. $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$
7. $f(x,y) = \sqrt{y-x}$

Exercice 2

Dessiner l'allure des courbes de niveau de chacune des fonctions f données. On prendra $(x,y) \in [-4;4] \times [-4;4]$ et on tracera (sauf pour 6.) les lignes de niveau $0, 1, 2, -1$ et -2.

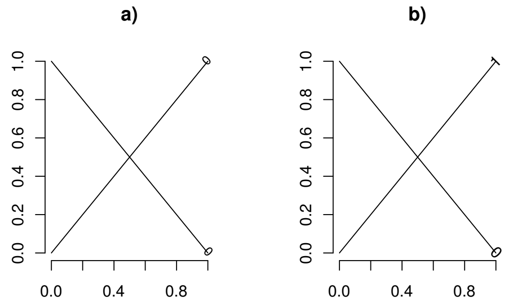
1. $f(x,y) = x + y^2$
2. $f(x,y) = x^2 + 2y$
3. $f(x,y) = x^2 + 2y^2$
4. $f(x,y) = x^2 - y^2$
5. $f(x,y) = y^2 - x^4$
6. (niveaux 0, 0.1, 0.2 et 0.3) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$
7. $f(x,y) = xy^2$
8. $f(x,y) = x^2y$
9. $f(x,y) = 2x + 3y - 5$
10. $f(x,y) = -x + \ln y$
11. $f(x,y) = \sqrt{y-x}$

Exercice 3

Associer chaque fonction à ses courbes de niveau (cf. annexe).

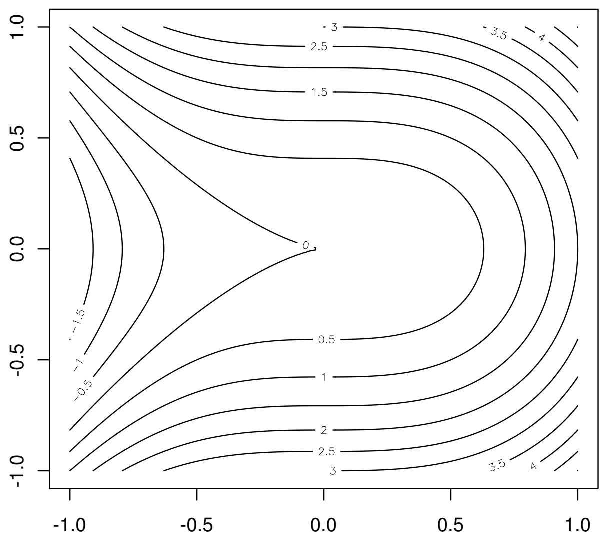
Exercice 4

De ces deux graphiques, un seul peut être la représentation des courbes de niveau d'une fonction. Lequel et pourquoi ?



Exercice 5

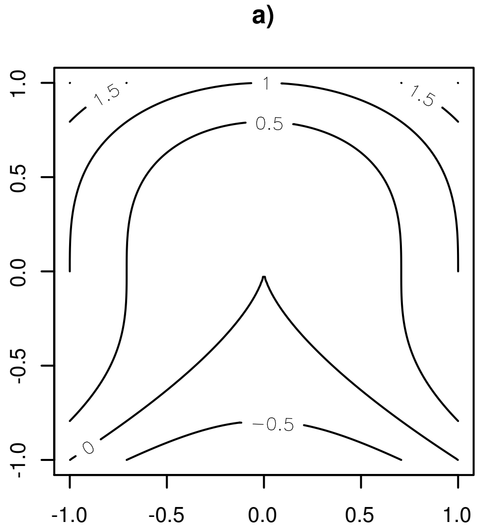
Le graphique ci-dessous est la représentation de courbes de niveau d'une fonction f dont l'expression est de la forme $f(x,y) = ax^3 + by^2$. Retrouver a et b.

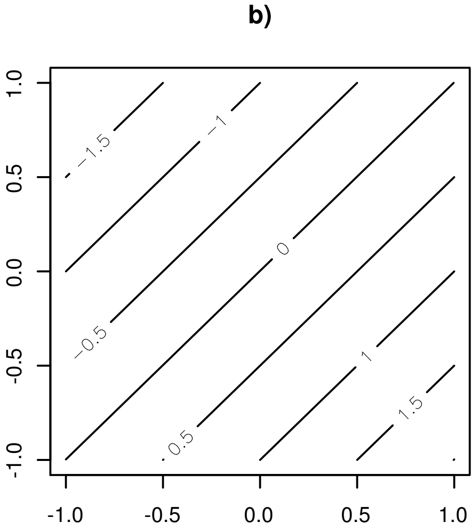


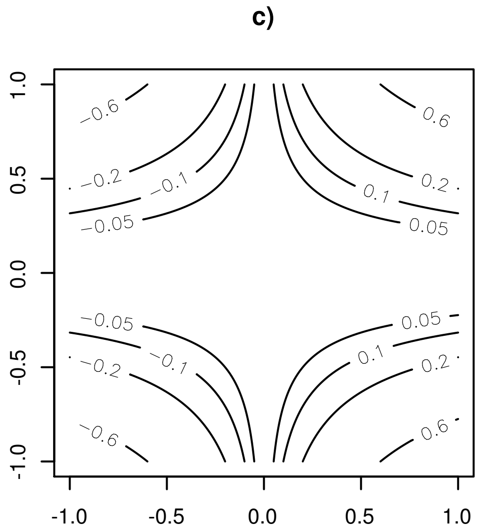
Exercice 6

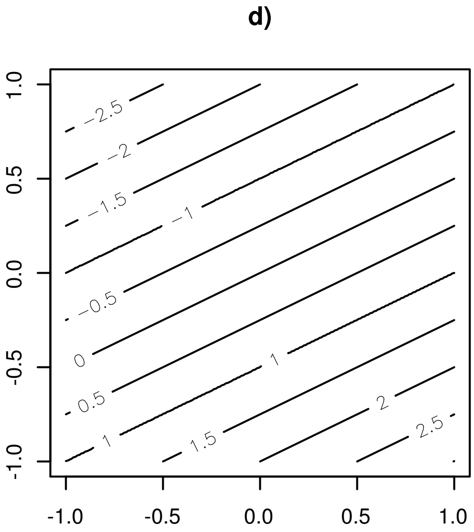
1. Trouver une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ dont la ligne de niveau 0 est l'union des courbes d'équation $y = \sqrt{x}$ et $y = -\sqrt{x}$.
2. Dessiner l'allure des lignes de niveau 1 et -1 de cette fonction.
3. Peut-on trouver d'autres fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ possédant la propriété de la question 1. ? Si oui en donner quelques unes.

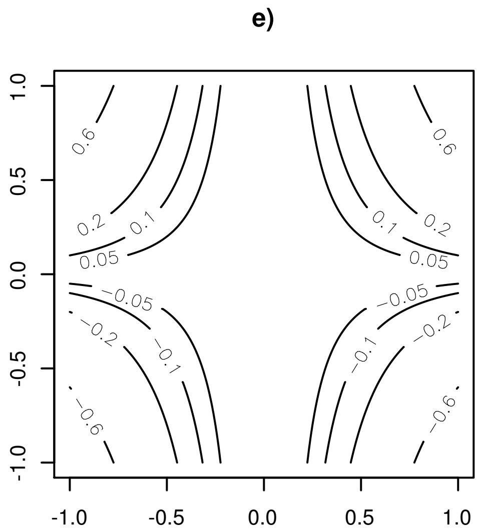
Annexe Exercice 3











$$f(x,y) = x - y$$
$$g(x,y) = x^2 y$$
$$h(x,y) = x^2 + y^3$$
$$i(x,y) = x - 2y$$
$$j(x,y) = xy^2$$