Feuille 2 – Fonctions de deux variables : limites, continuité, dérivées partielles et extrema locaux

Exercice 1

Déterminer si les fonctions suivantes ont une limite en $(0,0)$, et, le cas échéant, calculer cette limite.

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$
2. $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y}$
5. $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{e^x - e^y}$
6. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2-y^2}$
7. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2-y^2}$ au point $(2,-2)$
8. $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^2}$
9. $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$
10. $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$
11. $f(x,y) = xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$
12. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
13. $f(x,y) = x\arctan\dfrac{y}{x}$
14. $f(x,y) = \dfrac{e^x-e^y}{x-y}$
15. $f(x,y) = \dfrac{xy}{3+x^2y^2}$

Exercice 2

Calculer les dérivées partielles, par rapport à x et par rapport à y, des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^3y + 5xy^2 - 4xy + y$
2. $f(x,y) = xy$
3. $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+2y^2}$
4. $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2}$
5. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$
6. $f(x,y) = \cos(xy)$
7. $f(x,y) = x\sin y$
8. $f(x,y) = \exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$
9. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$
10. $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$
11. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-xy}$
12. $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$

Exercice 3

Calculer, si elles existent, les dérivées partielles des fonctions suivantes. Indiquer si ces fonctions sont C^1.

1. $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point (x_0,y_0) :

1. $f(x,y) = x^2+y^2$; $(x_0,y_0) = (1,1)$
2. $f(x,y) = x^2+y^2$; $(x_0,y_0) = (0,0)$
3. $f(x,y) = \sin(xy)$; $(x_0,y_0) = \left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \dfrac{\sqrt{\pi}}{3}\right)$

Exercice 5

Indiquer brièvement pourquoi les fonctions suivantes sont C^2. Déterminer les points critiques des fonctions suivantes. Pour chaque point critique (x_0,y_0), calculer la matrice hessienne de f en (x_0,y_0) et indiquer la nature du point (x_0,y_0) pour f.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - x + xy + \dfrac{y^2}{2}$
2. $f(x,y) = x^2y^3(3x+2y+1)$
3. $f(x,y) = x^2 - 2xy + y - z + yz$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner l'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. Calculer les dérivées partielles secondes croisées en 0 et montrer que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$$

3. f est-elle C^2 ?