Feuille 3 – Fonctions de deux variables : extrema locaux (suite)

Exercice 1

Une entreprise fabrique un produit qu'elle vend dans deux pays différents. Soit n_1 le nombre de produits vendus dans le premier pays, n_2 le nombre de produits vendus dans le second.

Les nombres de produits vendus n_1 et n_2 sont reliés aux prix de vente p_1 et p_2 dans chaque pays de la façon suivante :

$$p_1 = 60 - 2n_1, \quad p_2 = 120 - 4n_2$$

Le coût de fabrication de ces produits pour la firme est : $C = 50 + 40(n_1 + n_2)$.

Déterminer n_1 et n_2 pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal.

Exercice 2

1. Trouver les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$ sous la contrainte : $x + 2y = 24$.
2. Trouver les points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 3x + 2y + 5xy$ sous la contrainte : $x^2 + y^2 = 1$; déterminer si possible leur nature.
3. Mêmes questions sous la contrainte : $x^2 - y^2 = 1$.

Exercice 3

On cherche r et h tels que le cylindre de rayon r et de hauteur h soit de surface minimale et de volume $v_0 > 0$ (fixé).

1. Formuler le problème comme un problème d'optimisation sous contraintes.
2. Trouver le(s) point(s) critique(s) de ce problème. et déterminer si possible leur nature.

Exercice 4

Maximiser $2x^2 + 4xy + 4y^2$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$:

1. à l'aide de multiplicateurs de Lagrange ;
2. en formulant le problème comme la maximisation d'une forme quadratique sous contrainte de norme.