Feuille 4 – Équations différentielles

Exercice 1 : Cas homogène

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $3y'(x) = 5y(x)$
2. $y'(x) + 2xy(x) = 0$
3. $(1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = 0$
4. $x^2y'(x) + y(x) = 0$
5. $x^2y'(x) - y(x) = 0$
6. $\cos(x)y'(x) + \sin(x)y(x) = 0$ (sur $I =]0; \pi/2[$)
7. $x(x - 1)y'(x) + 2y(x) = 0$
8. $x(x - 1)y'(x) - 2y(x) = 0$

Exercice 2 : Cas inhomogène

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles donnés :

1. $(1 + x)y'(x) - 2y = \ln(1 + x)$ sur $I =]-1; +\infty[$.
2. $y'(x) + 2xy = 2x$ sur $I = \mathbb{R}$ avec la condition $y(0) = 2$.
3. $y'(x) + 2y(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ $(I = \mathbb{R})$
4. $xy'(x) - 2y(x) = \sqrt{x}$ $(I =]0; +\infty[)$
5. $x^2y'(x) + y(x) = 1$ $(I =]0; +\infty[)$
6. $x^2y'(x) + y(x) = 1$ $(I = \mathbb{R})$
7. $y'(x) + y(x) = 2x + 3$ $(I = \mathbb{R})$
8. $y'(x) + y(x) = 1 - \exp(-x)$ sur $I = \mathbb{R}$ avec la condition $y'(0) = 0$; on pourra chercher une solution particulière de la forme : $x \mapsto 1 - g(x)\exp(-x)$.

Exercice 3 : Cas inhomogène et recollement

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $xy'(x) - 2y(x) = x^3$
2. $(1 - x)y'(x) - y(x) = x$
3. $xy'(x) + 2y(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

Exercice 4 : Modèle de prix

On s'intéresse au prix $p(t)$ d'un objet à l'instant t, régi par l'équation différentielle suivante : $p'(t) = k(D(t) - S(t))$, où :

$$D(t) = ap(t) + b, \quad S(t) = cp(t) + d$$

On suppose $k > 0$, $a < 0$ et $c > 0$.

1. Ecrire p en fonction de k, a, b, c, d et $p(0)$.
2. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} p(t)$.
3. Déterminer p^* tel que $ap^* + b = cp^* + d$. Interpréter.

Exercice 5

Estimation des paramètres Le nombre (en milliers) d'individus dans une culture de bactéries à l'instant t est modélisé par $y(t)$, où y est solution de l'équation différentielle : $y'(t) = ky(t)$ où $k > 0$.

1. On sait que $y(1) = 10$ et $y(2) = 20$.
   Retrouver k et $y_0 = y(0)$.
2. On dispose de trois informations *bruitées* : $y(1) \approx 9$, $y(1.5) \approx 16$ et $y(2) \approx 21$.
   Estimer k et y_0 à l'aide d'un critère de moindres carrés.

Exercice 6 : Dynamique des populations

On s'intéresse au nombre $N(t)$ d'individus dans un milieu à un instant t. Le premier modèle pour N a été proposé par Malthus (1766-1834) :

$$N'(t) = kN(t)$$

avec $k > 0$. Autrement dit le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus de la population.

Ce modèle a pour solution $t \mapsto N(t) = N(0)e^{kt}$, qui a pour limite $+\infty$ pour $t \to +\infty$. Ce modèle n'est pas très réaliste si les individus ont besoin, pour se développer, de consommer des ressources en quantité limitée (mais renouvelable) dans le milieu.

Ainsi, Verhulst (1804-1849) propose de modifier le modèle de Malthus en faisant varier le coefficient de proportionnalité k en fonction des ressources disponibles à chaque instant, ce nombre de ressources étant modélisé comme une fonction affine décroissante de N.

On obtient ainsi le modèle paramétrisé par k, R, a et N_0 :

$$\begin{cases} N'(t) = k(R - aN(t))N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que (1) admet une unique solution N.
2. Montrer que cette solution ne s'annule pas.
3. On peut alors considérer $u(t) = \dfrac{1}{N(t)}$. Exprimer $y(t)$ et $y'(t)$ en fonction de $u(t)$, et en déduire une équation différentielle satisfaite par u.
4. Résoudre cette équation différentielle.
5. En déduire $N(t)$ en fonction des paramètres.
6. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} N(t)$.
7. Tracer l'allure du graphe de N pour $k = 1$, $a = 1$, $R = 10$ et différentes valeurs de N_0 : $N_0 = 1$, $N_0 = 5$ et $N_0 = 15$.

Remarque : le modèle étudié ici s'appelle *modèle de Verhulst* ou *modèle logistique* ; sa solution est appelée *fonction logistique*. Les courbes ayant l'allure de celle de N pour $N_0 = 1$ sont appelées *sigmoïdes*.