

# CONTROLE ARITHMETIQUE (MAT 4)

durée : 2 heures

Sans calculatrice et sans document

## Exercice 1

1. *Énoncer le petit théorème de Fermat.*
2. *Définir la fonction  $\varphi$  d'Euler et énoncer le théorème d'Euler.*

## Exercice 2

Résoudre le système

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$$

## Exercice 3

1. *Utiliser l'algorithme d'Euclide-Bezout pour calculer le pgcd de 73 et 28 et en déduire un couple d'entiers relatifs  $(u, v)$  tels que  $73u + 28v = \text{PGCD}(73, 28)$ .*
2. *Trouver tous les couples d'entiers relatifs  $(x, y)$  tels que  $73x + 28y = 2$ .*
3. *On se place dans  $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ .*
  - a) *Donner tous les diviseurs de zéro de  $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ .*
  - b) *Donner tous les éléments inversibles de  $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ .*
  - c) *A quelle classe de  $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$  appartient 73 ?*
  - d) *Déterminer l'inverse de  $\overline{17}$  dans  $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$  en utilisant la question 1).*

## Exercice 4

On se place dans  $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ .

1.  *$\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$  est-il un corps ?*
2. *Montrer que 25 est inversible dans  $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$  et donner son inverse.*
3. *Donner le nombre d'éléments inversibles dans  $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ .*
4. *Donner le nombre d'éléments diviseurs de zéro dans  $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ .*
5. *Donner un diviseur de zéro de  $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$  qui ne divise pas 36.*
6. *Est-ce que  $7^{542} - 13$  est divisible par 36 ?*

## Exercice 5

Soient, dans  $\mathbb{Z}_3[X]$ , les polynômes  $P = X^3 + X + 1$  et  $Q = X^3 + 2X + 2$ . On pose  $E = \mathbb{Z}_3[X]/(P)$  et  $F = \mathbb{Z}_3[X]/(Q)$ .

1. *Donner la forme et le nombre des éléments des ensembles  $E$  et  $F$  ?*

2. *Les ensembles  $E$  et  $F$  sont-ils des corps ? Pourquoi ?*
3. *Quel est l'inverse de  $(X + 2)$  dans  $F$  ?*
4.  *$(X + 2)$  a-t-il un inverse dans  $E$  ? Pourquoi ?*
5. *Donner la forme des diviseurs de zéro dans  $E$ .*