Première année informatique | Juin 2012

Examen Arithmétique

Tout document et calculatrice sont interdits
durée : 2h00
Les exercices peuvent être traités dans le désordre

Exercice 1 *(2 points)*
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses (justifier soigneusement les réponses)

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Si $7b - 9a = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$. a et b premiers entre eux équivaut à $ppcm(a, b) = ab$.
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. S'il existe u et v entiers relatifs tels que $au + bv = 4$ alors $pgcd(a, b) = 4$.
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$. Si a et b ne sont pas premiers entre eux , alors a divise b ou b divise a.

Exercice 2 *(7 points)*

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide-Bezout calculez $d = pgcd(315, 14)$ et trouvez des coefficients $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $315\,u + 14\,v = d$.
2. $\overline{14}$ est-il inversible dans $\mathbb{Z}/315\mathbb{Z}$? Si oui donner son inverse, sinon, donnez le plus petit entier x non nul tel que $14x = 0$ dans $\mathbb{Z}/315\mathbb{Z}$.
3. Combien $\mathbb{Z}/315\mathbb{Z}$ a-t-il d'éléments inversibles? Combien $\mathbb{Z}/315\mathbb{Z}$ a-t-il de diviseurs de zéro?
4. Calculez 311^{434} (mod 315).
5. Résoudre dans $\mathbb{Z}/315\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{14}x = \overline{2}$ puis l'équation $\overline{14}x = \overline{7}$.

<u>TSVP</u>

Exercice 3 *(5 points) On se place dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$*

1. *Soit $P = X^3 + 2X^2 + 2X + 4$, P est-il irréductible dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$, sinon le factoriser en un produit de facteurs irréductibles. Justifiez votre réponse.*
2. *Soit $F = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]/(P)$, F est-il un corps?*
3. *Donnez la forme et le nombre des éléments de F.*
4. *Soit $G = 2X^2 + X + 1$, prouvez (sans calculer l'inverse) que G est inversible dans F.*
5. *Prouvez que $H = 4X^2 + 3$ est un diviseur de zéro dans F et déterminez un polynôme I non nul tel que $H \times I \equiv 0[mod\, P]$.*

Exercice 4 *(3 points)*

1. Montrer que : $n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0\ [mod\ 7]$
2. Soit n un entier supérieur à 2. montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
3. Soit $a = 2^3 \times 3^4 \times 5$, donner la décomposition en produit de facteurs premiers de $[\phi(a)]^2$ et $\phi(a^2)$.

Exercice 5 *(3 points)*
On note $E = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(P)$ avec $P = X^3 + X + 1$. Donnez l'ensemble des éléments inversibles de E.