Devoir du 20/05/2010

Durée : 45 minutes. Calculatrices et documents interdits. Les réponses doivent être justifiées, par un calcul et/ou par un raisonnement s'appuyant sur les résultats du cours.

1. (a) Énoncer le théorème d'Euler.
(b) Calculer $\varphi(20)$.
(c) En déduire le reste de la division euclidienne de 3^{10} par 20.
2. Montrer que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $27^n - 3^{n+2}$ est un multiple de 4.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $2x + 4y = 7$.
4. (a) Donner une solution particulière de l'équation $55x + 24y = 1$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
(b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $55x + 24y = 1$.
(c) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $55x + 24y = 2$.
(d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$:
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{55} \\ x \equiv 2 \pmod{24} \end{cases}$$

On donne (tout n'est pas utile) : $55 \times 2 \times 7 - 16 \times 24 = 386$; $55 \times 7 - 2 \times 16 \times 24 = -383$
et $55 \times 24 = 1320$.

Corrigé du devoir d'arithmétique du 20/05/2010

1. (a) Soient a et n deux entiers premiers entre eux. Alors : $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$.
 (b) $\varphi(20) = \varphi(2^2 \times 5) = \varphi(2^2) \times \varphi(5) = (2^2 - 2^1) \times (5 - 1) = 8$.
 (c) On a $10 = 8 + 2$ donc $3^{10} \equiv 3^8 \times 3^2 \pmod{20} \equiv 1 \times 9 \pmod{20}$ par le théorème d'Euler. Le reste est donc 9.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $27 \equiv 3 \pmod 4$ donc $27^n \equiv 3^n \pmod 4$. Par ailleurs $3^{n+2} \equiv 3^n \times 3^2 \pmod 4 \equiv 3^n \times 1 \pmod 4$. Ainsi $27^n - 3^{n+2} \equiv 0 \pmod 4$ et $27^n - 3^{n+2}$ est un multiple de 4.
3. PGCD(2,4)=2 ne divise pas 7, l'équation n'a donc pas de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
4. (a) Disposons les calculs de l'algorithme d'Euclide étendu :

a	b	r	q	u	v
				1	0
				0	1
55	24	7	2	1	-2
24	7	3	3	-3	7
7	3	1	2	7	-16

On a donc $7 \times 55 + (-16) \times 24 = 1$, donc une solution particulière est $(7, -16)$.

- (b) Soit (x, y) une solution de l'équation proposée. En soustrayant les deux relations :

$$\begin{cases} 55x - 7 + 24y - 16 = 1 \\ 55x - 7 + 24y = 1 \end{cases}$$

On trouve :

$$55(x - 7) + 24(y + 16) = 0$$

Soit :

$$55(x - 7) = -24(y + 16) \quad (*)$$

Ainsi 55 divise $24(y + 16)$. Comme 55 est premier avec 24, 55 divise $y + 16$ d'après le lemme de Gauss. Ainsi $y + 16 = 55k$ pour $k \in \mathbb{Z}$. En reportant dans (*) on trouve :

$$55(x - 7) = -24 \times 55k$$

d'où

$$x = 7 - 24k$$

Ainsi toute solution de l'équation proposée est de la forme $(7 - 24k, 55k - 16)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On vérifie facilement que tout couple de cette forme est solution. L'ensemble des solutions est donc $\{(7 - 24k, 55k - 16) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

- (c) En multipliant par 2 la solution particulière trouvée au a) et en suivant le même raisonnement qu'au b), on trouve que l'ensemble des solutions est $\{(14 - 24k, 55k - 32) ; k \in \mathbb{Z}\}$.
- (d) En écrivant la relation $55 \times 7 + 24 \times (-16) = 1$ modulo 55 puis modulo 24, on trouve que :

$$55 \times 7 \equiv \begin{cases} 1 & \pmod{24} \\ 0 & \pmod{55} \end{cases} \quad 24 \times (-16) \equiv \begin{cases} 1 & \pmod{55} \\ 0 & \pmod{24} \end{cases}$$

Ainsi, par le théorème des restes chinois les solutions de l'équation proposée sont les $x \in \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$x \equiv 1 \times (-16) \times 24 + 2 \times 7 \times 55 \pmod{(55 \times 24)} \equiv 386 \pmod{1320}$$

L'ensemble des solutions peut encore s'écrire : $\{386 + 1320k ; k \in \mathbb{Z}\}$.