Devoir du 20/05/2011

Durée : 45 minutes. Calculatrices et documents interdits. Sauf mention contraire, les réponses doivent être justifiées, par un calcul et/ou par un raisonnement s'appuyant sur les résultats du cours.

1. Démontrer que, pour tous entiers a, b et c, si a divise b et b divise c, alors a divise c.
2. *On rappelle que φ désigne la fonction d'Euler.* Les réponses à (a) et (b) n'ont pas à être justifiées.
   (a) Pour n entier naturel, donner la définition de $\varphi(n)$.
   (b) Donner la décomposition de 1176 en produit de facteurs premiers.
   (c) Calculer $\varphi(1176)$.
3. Calculer $3^{101} \mod 8$.
4. Montrer que quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $27^n - 3^{n+2}$ est un multiple de 4.
5. Soit l'équation :
$$55x + 24y = 1 \tag{1}$$
   d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   (a) Donner une solution particulière de (1).
   (b) Résoudre (1).
   (c) Donner la solution particulière (x, y) de (1) telle que $240 \leq x \leq 250$.
6. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x \equiv 1 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv -1 \mod 7 \end{cases}$
   Faire figurer la vérification de votre solution.

Corrigé du devoir d'arithmétique du 20/05/2011

1. Soient a, b et c tels que a divise b et b divise c. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $b = ka$ et $c = k'b$. D'où $c = (k'k)a$ donc a divise c.
2. (a) $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers compris entre 1 et n premiers avec n.
   (b) $1176 = 2^3 \times 3 \times 7^2$.
   (c) $\varphi(1176) = \varphi(2^3 \times 3 \times 7^2) = \varphi(2^3) \times \varphi(3) \times \varphi(7^2) = (2^3 - 2^2) \times (3-1) \times (7^2 - 7) = 4 \times 2 \times 42 = 336$.
3. On a $3^2 \equiv 1 \mod 8$ d'où $3^{101} \equiv (3^2)^{50} \times 3 \mod 8 \equiv 3 \mod 8$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $27 \equiv 3 \mod 4$ donc $27^n \equiv 3^n \mod 4$. Par ailleurs $3^{n+2} \equiv 3^n \times 3^2 \mod 4 \equiv 3^n \times 1 \mod 4$. Ainsi $27^n - 3^{n+2} \equiv 0 \mod 4$ et $27^n - 3^{n+2}$ est un multiple de 4.
5. (a) Disposons les calculs de l'algorithme d'Euclide étendu :

a	b	r	q	u	v
				1	0
				0	1
55	24	7	2	1	-2
24	7	3	3	-3	7
7	3	1	2	7	-16

   On a donc $7 \times 55 + (-16) \times 24 = 1$, donc une solution particulière est $(7, -16)$.

   (b) Soit (x, y) une solution de l'équation proposée. En soustrayant les deux relations :

$$\begin{cases} 55\times \quad 7 + 24\times \quad -16 & = 1 \\ 55 \quad x + 24 \quad y & = 1 \end{cases}$$

   On trouve :

$$55(x-7) + 24(y+16) = 0$$

   Soit :

$$55(x-7) = -24(y+16) \quad (*)$$

   Ainsi 55 divise $24(y+16)$. Comme 55 est premier avec 24, 55 divise $y+16$ d'après le lemme de Gauss. Ainsi $y + 16 = 55k$ pour $k \in \mathbb{Z}$. En reportant dans $(*)$ on trouve :

$$55(x-7) = -24 \times 55k$$

   d'où

$$x = 7 - 24k$$

   Ainsi toute solution de l'équation proposée est de la forme $(7-24k, 55k-16)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On vérifie facilement que tout couple de cette forme est solution. L'ensemble des solutions est donc $\{(7-24k, 55k-16)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

   (c) On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $240 \leq 7 - 24k \leq 250$, soit $-\frac{233}{24} \geq k \geq -\frac{243}{24}$. On voit que $k = -10$ est la seule solution. Ainsi le couple cherché est $(7+240, -550-16) = (247, -566)$.
6. On a :

   $21 - 2 \times 10 = 1$ donc $21 \equiv \begin{cases} 1 \mod 2 \\ 0 \mod 3 \\ 0 \mod 7 \end{cases}$;

   $3 \times 5 - 14 = 1$ donc $-14 \equiv \begin{cases} 0 \mod 2 \\ 1 \mod 3 \\ 0 \mod 7 \end{cases}$;

   $7 - 6 = 1$ donc $-6 \equiv \begin{cases} 0 \mod 2 \\ 0 \mod 3 \\ 1 \mod 7 \end{cases}$

   Ainsi $x = 21 - 14 - (-6) = 13$ est solution particulière du système considéré. Comme $2 \times 3 \times 7 = 42$, l'ensemble des solutions de ce système est $\{13 + 42k; k \in \mathbb{Z}\}$.

   Vérification. On a : $13 \equiv 1 \mod 2$ (car 13 est impair), $13 \equiv 1 \mod 3$ (car $13 = 3 \times 4 + 1$) et $13 \equiv -1 \mod 7$ (car $14 = 2 \times 7 - 1$).