TD n° 1 – Ensembles et logique, applications et dénombrement

1. Résolution d'équations

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(**1**) $|x-1| = 2x-5$.

(**2**) $|3-2x| = 3$.

(**3**) $|2x+3| = |x-1|$.

(**4**) $|2x+3+|x-1|| = 3$.

(**5**) $-2x^2+13|x|-18 = 0$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(**1**) $\sqrt{x+7} = 5-x$.

(**2**) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1} = 5$.

(**3**) $\sqrt{5-x^2} = x-3$.

(**4**) $\sqrt{x^2-7} = \sqrt{1-x^2}$.

(**5**) $\sqrt{-3x^2-4x-1} = -x$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(**1**) $\ln[(x+2)(x-2)] = \ln(2x+11)$.

(**2**) $\ln(x+2)+\ln(x-2) = \ln(2x+11)$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2e^{-x}-6e^{x} = 1$.

2. Dénombrement

Exercice 5. On tire successivement deux cartes sans remise d'un jeu de trente-deux cartes.

(**1**) Quelle est le nombre N de possibilités d'obtenir deux rois successivement ?

(**2**) Après avoir remis les deux cartes précédentes dans le paquet, on tire maintenant quatre cartes sans remise. Quel est le nombre M de possibilités d'obtenir les quatre rois ?

Exercice 6. Un groupe de trente-deux personnes se retrouve et chacune serre la main de toutes les autres personnes présentes. Combien de poignées de main sont échangées au total ?

Exercice 7. Quatre personnes A, B, C et D se retrouvent au restaurant autour d'une table carrée. Quel est le nombre N de dispositions possibles de ces quatre personnes autour de la table si l'on considère uniquement les positions relatives des personnes les unes par rapport aux autres.

Exercice 8. Un club de trente-deux personnes doit élire parmi ses membres son bureau constitué d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Quel est le nombre N de bureaux possibles ?

Exercice 9. Un club de trente-deux membres (dix-huit hommes et quatorze femmes) doit élire parmi ses membres son bureau constitué d'un président, d'un vice-président nécessairement de sexe opposé à celui du président, d'un secrétaire et d'un gardien nécessairement de sexe masculin. Quel est le nombre N de bureaux possibles ?

Exercice 10. On veut ranger sur une étagère sept romans : *Les Misérables*, *Notre-Dame de Paris*, *Le colonel Chabert*, *La peau de chagrin*, *L'étranger*, *La peste* et *La chute*. Quel est le nombre N de façons de les ranger en les gardant groupés par auteur [1] ?

1. Les deux premiers livres sont de Victor Hugo, les deux suivants d'Honoré de Balzac et les trois derniers d'Albert Camus.

Exercice 11. Calculer le nombre d'anagrammes des mots suivants :

(**1**) Cheval.

(**2**) Mouton.

(**3**) Mississippi.

3. Raisonnement par récurrence

Exercice 12. Démontrer par récurrence les énoncés suivants :

(**1**) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

(**2**) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

Exercice 13. Démontrer par récurrence les énoncés suivants :

(**1**) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

(**2**) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$

Exercice 14. Démontrer par récurrence les énoncés suivants :

(**1**) Pour tout $n \geqslant 0$, $2^n > n$.

(**2**) Pour tout $n \geqslant 4$, $n! \geqslant n^2$.

4. Ensembles finis

Exercice 15. Montrer que quels que soient trois ensembles finis A, B et C, on a l'égalité

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C)\\ &\quad - [\mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(C \cap A)]\\ &\quad + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Exercice 16. Soit E_n un ensemble fini de cardinal n. Montrer que le nombre de couples (A, B) de sous-ensembles de E_n tels que $A \subset B \subset E_n$ est égal à 3^n.

Exercice 17. Soient n et k deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Soit E_n un ensemble fini de cardinal n et soit F_k un ensemble fini de cardinal k.

(**1**) Montrer que le nombre d'injections de F_k dans E_n est égal à $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

(**2**) Soit F_n un ensemble de même cardinal n que E_n. Déduire de ce qui précède le nombre de bijections de F_n dans E_n.

Exercice 18. Soit $A \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 45 et soit $B \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des diviseurs de 55. Décrire explicitement l'ensemble $A \cap B$.