

TD n° 4 – Fonctions de plusieurs variables

1. CONTINUITÉ ET DÉRIVÉES PARTIELLES PREMIÈRES

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (1) Montrer que les fonctions $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ sont continues en 0.
- (2) La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 2. Pour chacune des fonction suivantes définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dire si elle admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}^2$.

(1) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + xy + y^2}.$

(2) $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}.$

(3) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}.$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (1) Montrer que f admet des dérivées partielles au point $(0, 0)$.
- (2) La fonction f est-elle continue au point $(0, 0)$?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

- (1) On pose $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.
- (2) En utilisant un développement limité, montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

- (1) On pose, pour $r, \theta \in \mathbb{R}$, $F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Calculer les dérivées partielles de F .
- (2) En déduire l'expression générale de F , puis celle de f .

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$, $f(tx) = t^\alpha f(x)$.

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \alpha f(x).$$

2. DÉRIVÉES PARTIELLES SECONDES

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

(3) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 8. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On pose, pour $x \in \Omega$,

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x).$$

(1) Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $f_\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0)\}$ la fonction définie par

$$f_\varphi(x) = \varphi(\|x\|).$$

Calculer Δf_φ .

(2) On suppose $n = 3$. Pour $\lambda < 0$, déterminer toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\Delta f_\varphi = \lambda f_\varphi$.
On pourra montrer que la fonction $t \mapsto t\varphi(t)$ satisfait une équation différentielle simple.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

(1) On pose $F(u, v) = f(u, uv)$. Calculer les dérivées partielles secondes de F .

(2) Résoudre l'équation (1).

3. EXTREMA

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x, y) = xye^{x^2+y^2}.$$

(1) Calculer les dérivées partielles de f .

(2) Trouver les points critiques de f .

(3) Pour chaque point critique, dire si c'est un extremum local.

Exercice 11. On fixe un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, on note $A(\theta)$ le point du plan de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

(1) Pour $0 < \theta < \theta' < 2\pi$, déterminer le périmètre du triangle $A(0)A(\theta)A(\theta')$. On notera $f(\theta, \theta')$ ce nombre.

(2) On admet que parmi les triangles inscrits dans un cercle donné, il y en a au moins un dont le périmètre est maximal. Quel est ce périmètre ? En déduire tous les triangles inscrits de périmètre maximal.

Exercice 12. Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$, déterminer ses extrema locaux.

(1) $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$.

(2) $f(x, y) = x^2 + 2\alpha xy + y^2 + 2\beta x + 2\gamma y$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\alpha^2 \neq 1$.

(3) $f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$, où $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classes $\mathcal{C}^2$ telles qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\varphi'(a) = 0 = \psi'(b)$ et $\varphi''(a), \psi''(b) > 0$.