Corrigé de l'examen – première session

Courbes planes

Exercice 1. — Avant toute chose, il convient de faire attention au fait suivant : l'arc paramétré est $\gamma : \theta \mapsto \rho(\theta)\overrightarrow{u}_\theta$. Comme $\overrightarrow{u}$ est 2π-périodique, la fonction γ n'est pas 3π-pérodique comme ρ mais 6π-périodique. L'intervalle d'étude peut être réduit grâce aux symétries suivantes :

- La fonction ρ est 3π-périodique et $\overrightarrow{u}_{\theta+3\pi} = \overrightarrow{u}_{\theta+\pi} = -\overrightarrow{u}_\theta$. Il suffit donc de faire l'étude sur un intervalle de longueur 3π. Nous prendrons $[-3\pi/2, 3\pi/2]$.
- $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ et $\vec{u}_{-\theta} = \sigma_1(\vec{u}_\theta)$, où σ_1 est la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, il suffit donc de faire l'étude sur l'intervalle $[0, 3\pi/2]$.
- $\rho\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) = \rho(\theta)$ et $\vec{u}_{3\pi/2-\theta} = \sigma_2(\vec{u}_\theta)$, où σ_2 est la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$, il suffit donc de faire l'étude sur $[0, 3\pi/4]$.

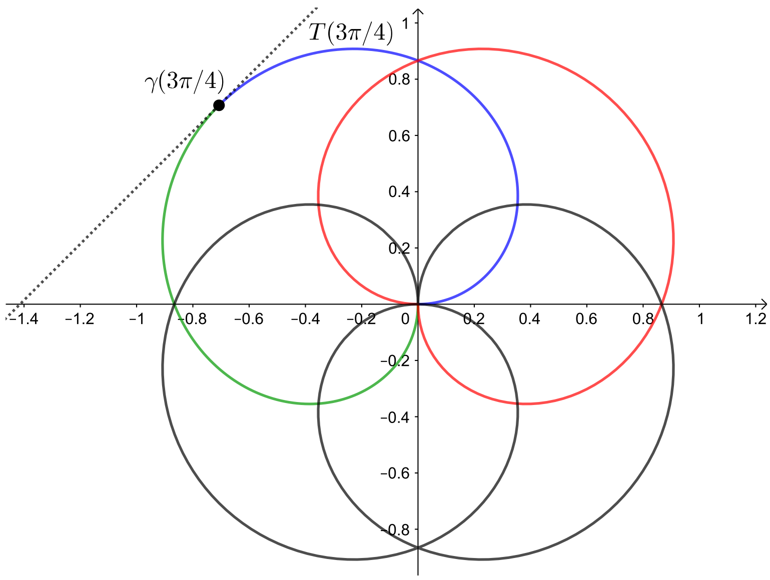
Étudions maintenant la fonction ρ. On a, pour tout $\theta \in [0, 3\pi/4]$, $\rho'(\theta) = \dfrac{2}{3}\cos\left(\dfrac{2\theta}{3}\right) > 0$. De plus, $\rho(\theta) \geqslant 0$ sur cet intervalle. Pour nous aider à tracer la courbe, calculons quelques valeurs :

$$\rho(0) = 0 \text{ et } \rho\left(\frac{2\theta}{3}\right) = 1$$

ainsi que les tangentes aux extrêmités :

$$\overrightarrow{\gamma}'(0) = \rho(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho'(0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\gamma}'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \rho\left(\frac{3\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + \rho'\left(\frac{3\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant tracer le support de cet arc paramétré. La partie correspondant à $[0, 3\pi/4]$ est en bleu. La partie correspondant à $[3\pi/4, 3\pi/2]$, en vert, est obtenue par rélfexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$. La partie correspondant à $[-3\pi/2, 0]$, en rouge, est obtenue par réflexion par rapport à l'axe des ordonnées. Le reste de la courbe, en noir, s'obtient par symétrie par rapport à l'origine du repère.



Coniques

Exercice 2. — **1.** D'après le cours, une équation de $\mathcal{C}(M, R)$ est $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

2. Un point de coordonnées (α, β) appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $\beta = 0$. Si ce point appartient de plus au cercle $\mathcal{C}(M, R)$, on a

$$(\alpha - x_0^2 + y_0^2 = R^2$$
$$(\alpha - x_0)^2 = R^2 - y_0^2$$

Pour qu'il y ait deux points d'intersections, il faut et il suffit donc que $R^2 > y_0^2$.

3. D'après ce qui précède, les points M' et M'' ont pour coordonnées $(\alpha_+, 0)$ et $(\alpha_-, 0)$, où

$$\alpha_\pm = x_0 \pm \sqrt{R^2 - y_0^2}.$$

La distance entre les deux points est alors donnée par

$$d(M, M') = |\alpha_+ - \alpha_-| = 2\sqrt{R^2 - y_0^2}.$$

4. Un point de coordonnées (α, β) appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si $\alpha = 0$. Si ce point appartient de plus au cercle $\mathcal{C}(M, R)$, on a $x_0^2 + (\beta - y_0)^2 = R^2$. Pour que l'axe des ordonnées soit tangent au cercle, il faut et il suffit que cette équation ait une unique solution, ce qui est équivalent à $x_0^2 = R^2$.

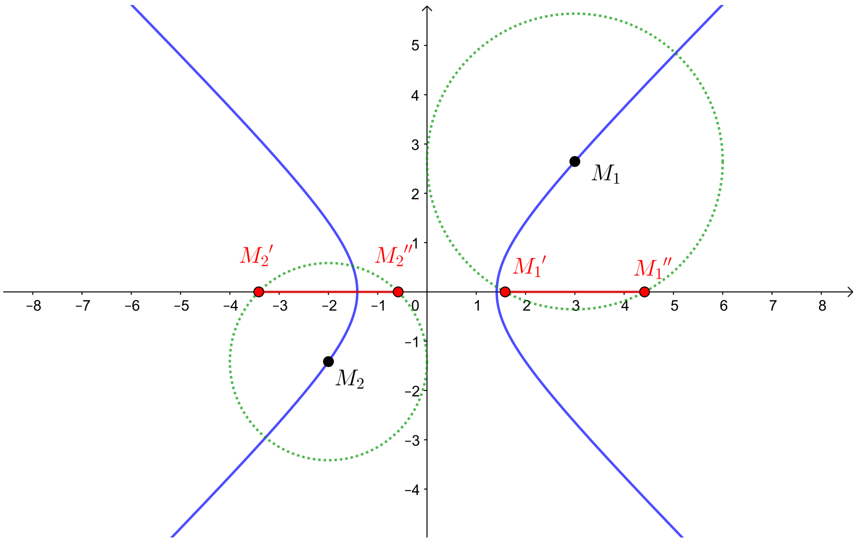
5. En combinant les deux relations précédentes on obtient l'équation $2\sqrt{x_0^2 - y_0^2} = \lambda$ ce qui en élevant au carré donne

$$x_0^2 - y_0^2 = \frac{\lambda^2}{2}.$$

6. Il s'agit de l'équation d'une hyperbole. Avec les notations du cours, $a = b = \lambda^2/2$, d'où l'excentricité et le paramètre :

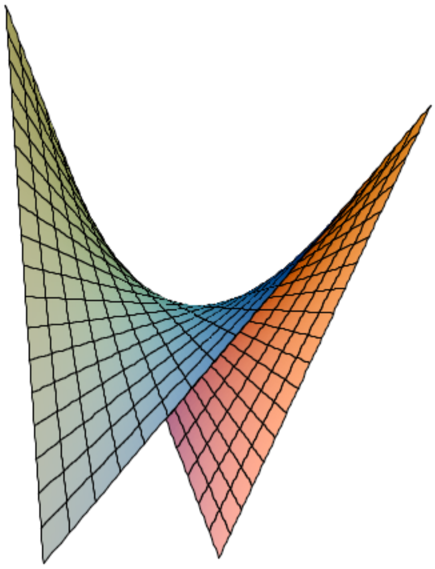
$$e = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{2} \text{ et } p = \frac{b^2}{a} = \frac{\lambda^2}{2}.$$

Voici une représentation graphique pour $\lambda = 2$:



Surfaces

Exercice 3. — La surface $\mathcal{S}$ est appelée *paraboloïde hyperbolique*. En voici une représentation graphique :



1. Calculons les dérivées partielles premières de φ :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

ainsi que leur produit vectoriel

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{pmatrix} -t \\ -s \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La norme de ce vecteur est $\sqrt{1+s^2+t^2}$, le vecteur normal est donc

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2+t^2}} \begin{pmatrix} -t \\ -s \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons les dérivées partielles secondes de φ :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t}.$$

On en déduit les formes fondamentales :

$$\Phi_1(h,k) = h^2(1+t^2) + k^2(1+s^2) + 2hkst$$

et

$$\Phi_2(h,k) = \frac{2}{\sqrt{1+s^2+t^2}} hk$$

3. Pour calculer la courbure de Gauss, il suffit d'après le cours de faire le quotient des déterminants des formes fondamentales, ce qui donne

$$\begin{aligned} K(s,t) &= \frac{\det(\Phi_2)}{\det(\Phi_1)} \\ &= \frac{-(1+s^2+t^2)^{-1}}{(1+t^2)(1+s^2) - s^2t^2} \\ &= \frac{-(1+s^2+t^2)^{-1}}{1+s^2+t^2+s^2t^2-s^2t^2} \\ &= \frac{-(1+s^2+t^2)^{-1}}{1+s^2+t^2} \\ &= \frac{-1}{(1+s^2+t^2)^2} \end{aligned}$$

4. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x,y) = xy$. Alors, $\mathcal{S}$ est le graphe de F. Calculons les dérivées partielles premières et secondes de F :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y, \ \frac{\partial F}{\partial y} = x, \ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} = 1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}.$$

D'après le cours, on a

$$K(x,y,z) = \frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}\right)^2}{\left(1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right)^2} = \frac{-1}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Le point de paramètre (s,t) ayant pour coordonnées (s,t,st), on retrouve bien le résulat de la question précédente.