TD II – Coniques

1. Définitions des coniques

***Exercice 1.1* (Foyer et directrice).** — On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = 5$ et soit F le point de coordonnée $(1, -1)$. On considère la conique $\mathscr{C}$ de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité $e = 1/3$.

1. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$.
2. Donner une équation de l'axe focal de $\mathscr{C}$ ainsi que les coordonnées de son centre.
3. Donner une équation de la seconde directrice ainsi que les coordonnées du second foyer.
4. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

***Exercice 1.2* (Équation polaire).** — On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Pour chacune des équations polaires suivantes, décrire la courbe associée.

1. $\rho = \dfrac{1}{2 + \cos(\theta)}$.
2. $\rho = \dfrac{1}{1 - \sin(\theta)}$.
3. $\rho = \dfrac{1}{2 - \cos(\theta)}$.

***Exercice 1.3* (Équation polynomiale).** — On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soit P un polynôme de degré trois à coefficients réels. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $P(x) = P(y)$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion d'une droite dont on donnera une équation et d'une courbe du second degré.
2. On suppose que la courbe du second degré de $\mathscr{C}$ non dégénérée, montrer qu'il s'agit d'une ellipse et calculer son excentricité et son paramètre.

2. Études géométriques de coniques

Exercice 2.1. — On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soit $\mathscr{C}$ une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b.

1. Donner une paramétrisation cartésienne de $\mathscr{C}$.
2. Donner l'expression de la courbure en un point quelconque de $\mathscr{C}$.
3. Quels sont les points de plus forte et de plus faible courbure ? Donner les coordonnées des centres de courbure dans ces cas.

***Exercice 2.2* (Orthoptique d'une parabole).** — Soit $\mathscr{C}$ une parabole de paramètre p.

1. Donner une paramétrisation cartésienne de $\mathscr{C}$ dans son repère au sommet.
2. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point quelconque.
3. À quelle condition deux tangentes à $\mathscr{C}$ sont-elles orthogonales ?
4. En déduire la *courbe orthoptique* de $\mathscr{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des points d'intersections de deux tangentes à $\mathscr{C}$ orthogonales.

Exercice 2.3. — On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < b < a$. Pour $\lambda \notin \{a, b\}$, on note $\mathscr{C}_\lambda$ la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1.$$

1. Quelle est la nature de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ en fonction de λ ?
2. Quand $\mathscr{C}_\lambda$ est une conique, calculer les coordonnées des ses foyers.
3. Donner un vecteur normal à $\mathscr{C}_\lambda$ en un point (x_0, y_0) quelconque.
4. Montrer que si, pour $\lambda \neq \mu$, $\mathscr{C}_\lambda$ et $\mathscr{C}_\mu$ ont une intersection non vide, alors leurs tangentes aux points d'intersection sont orthogonales.

3. Exercices complémentaires

***Exercice 3.1* (Courbes du second degré).** — On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Pour chacune des équation suivantes, décrire la courbe du second degré associée.

1. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$.
2. $(x - y + 1)^2 + (x + y - 1)^2 = 0$.
3. $(x + y + 1)(x - y + 3) = 3$.
4. $4x^2 + 6xy + 4y^2 + 2x - 2y = -1$.
5. $2xy - 2x + 4y - 5 = 0$.

Exercice 3.2. — On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Soit $\mathscr{C}$ une hyperbole et soit M un point de $\mathscr{C}$.

1. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point M.
2. Montrer que cette tangente rencontre les deux asymptotes de $\mathscr{C}$. On notera P et Q les points d'intersection.
3. Montrer que M est le milieu du segment $[PQ]$.

Exercice 3.3. — On rappelle que si $\mathscr{C}$ est une courbe du plan, sa courbe orthoptique est l'ensemble des points d'intersection de deux tangentes à $\mathscr{C}$ orthogonales.

1. Donner une paramétrisation de la courbe orthoptique à une hyperbole.
2. Donner une paramétrisation de la courbe orthoptique à une ellipse.
3. Étudier les deux courbes paramétrées précédentes.

***Exercice 3.4* (Champ de force centrale).** — On fixe un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré. On note $\rho(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées polaires de $\gamma(t)$ dans le repère $\mathcal{R}$ et on pose, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\vec{v}_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. On suppose pour tout $t \in I$, $\vec{\gamma}''(t)$ est colinéaire à $\vec{u}_\theta(t)$.

1. Donner l'expression de $\vec{\gamma}'(t)$ et $\vec{\gamma}''(t)$ dans la base $(\vec{u}_{\theta(t)}, \vec{v}_{\theta(t)})$.
2. Montrer qu'il existe une constante C (appelée *constante des aires*) telle que pour tout $t \in I$,

$$\rho(t)^2\theta'(t) = C.$$

3. On suppose qu'il existe une fonction $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ telle que pour tout $t \in I$, $\rho(t) = r \circ \theta(t)$ et on pose $q = 1/r$. Montrer la *première formule de Binet* :

$$\vec{\gamma}'(t) = C\left(q \circ \theta(t)\vec{v}_{\theta(t)} - q' \circ \theta(t)\vec{u}_{\theta(t)}\right).$$

4. En déduire la *seconde formule de Binet* :

$$\vec{\gamma}''(t) = -C^2 q \circ \theta(t)^2 \left(q \circ \theta(t) + q'' \circ \theta(t)\right)\vec{u}_{\theta(t)}.$$

5. On suppose maintenant qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$,

$$\vec{\gamma}''(t) = \frac{-\mu}{d(O, \gamma(t))^2}\vec{u}_{\theta(t)}.$$

Montrer que le support de γ est une conique.