TD I – Courbes planes

1. Études de courbes en coordonnées cartésiennes

***Exercice 1.1* (Astroïde). —** On fixe un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Étudier l'arc paramétré $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, défini en coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathscr{R}$ par

$$\gamma(t) = \left(\cos^3(t), \sin^3(t)\right).$$

***Exercice 1.2* (Cardioïde). —** On fixe un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Montrer que pour tous réels p et q,
$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \text{ et } \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).$$
2. Étudier l'arc paramétré $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, défini en coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathscr{R}$ par
$$\gamma(t) = (2\cos(t) - \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t)).$$

***Exercice 1.3.* —** On fixe un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Étudier l'arc paramétré $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, défini en coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathscr{R}$ par

$$\gamma(t) = \left(t^2 + t^3, t^4\right).$$

***Exercice 1.4* (Courbe orthoptique). —** Soit $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée. On appelle *courbe orthoptique* de $\mathscr{C}$ l'ensemble des points du plan qui sont point d'intersection de deux tangentes à $\mathscr{C}$ orthogonales. Le but de cet exercice est de construire la courbe orthoptique de l'astroïde étudiée à l'exercice 1.1.

1. Donner un vecteur tangent unitaire en un point régulier quelconque de l'astroïde.
2. Donner une condition sur $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ pour que les tangentes aux points $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ soient orthogonales.
3. Calculer une équation de la tangente en un point régulier quelconque de l'astroïde.
4. Déduire de ce qui précède un paramétrage de la courbe orthoptique de l'astroïde.
5. Étudier cette courbe et la tracer sur le même dessin que l'astroïde. Cette courbe est appelée *quadrifolium*.

2. Études de courbes en coordonnées polaires

***Exercice 2.1.* —** On fixe un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Étudier l'arc paramétré $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, défini en coordonnées polaires dans le repère $\mathscr{R}$ par :

$$\rho(\theta) = 1 + 2\cos(\theta).$$

***Exercice 2.2* (Eadem mutata resurgo). —** On fixe un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $b \neq 1$ et soit $\mathscr{C}$ le support de l'arc paramétré $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini en coordonnées polaire dans le repère $\mathscr{R}$ par

$$\rho = ab^\theta.$$

Cette courbe est appelée *spirale logarithmique*.

1. Montrer que γ est birégulier.
2. Soit M un point de $\mathscr{C}$, que vaut le cosinus de l'angle entre la tangente au point M et la droite (OM) ?
3. Notons $\ell(M)$ la longueur de l'arc de courbe compris entre O et M. Calculer $\dfrac{\ell(M)}{OM}$.
4. Calculer la courbure en tout point de $\mathscr{C}$.
5. Déduire de ce qui précède une construction géométrique du centre de courbure en tout point de $\mathscr{C}$.

3. Exercices complémentaires

***Exercice 3.1* (Courbes cartésiennes). —** On fixe un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Étudier les courbes paramétrées suivantes, définies par leurs coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathscr{R}$:

1. La *cycloïde* : $x(t) = t - \sin(t)$ et $y(t) = 1 - \cos(t)$.
2. La *courbe de Lissajous* : $x(t) = \cos(3t)$ et $y(t) = \sin(4t)$.
3. $x(t) = 3t^4 - 2t^3$ et $y(t) = t^2 - t$.
4. $x(t) = te^t$ et $y(t) = \dfrac{e^t}{t}$. Étudier l'arc sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
5. $x(t) = \dfrac{e^t}{\cos(t)}$ et $y(t) = e^t \sin(t)$. Étudier l'arc sur les intarvalles $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

***Exercice 3.2* (Courbes polaires). —** On fixe un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Étudier les courbes paramétrées suivantes, définies par leurs coordonnées polaires dans le repère $\mathscr{R}$:

1. $\rho(\theta) = \dfrac{\theta - 1}{\theta + 1}$.
2. $\rho(\theta) = \dfrac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{\cos(2\theta)}$.
3. $\rho(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$.
4. $\rho(\theta) = \sin\left(\dfrac{2\theta}{3}\right)$.
5. $\rho(\theta) = \tan\left(\dfrac{2\theta}{3}\right)$.

***Exercice 3.3* (Lemniscate de Bernoulli). —** On fixe un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Étudier la courbe dont les coordonnées polaires dans le repère $\mathscr{R}$ vérifient l'équation

$$\rho^2 = \cos(2\theta).$$

***Exercice 3.4* (Courbe podaire). —** On fixe un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan ainsi qu'un point P de coordonnées $(0, a)$, où $a > 0$. Pour un réel $R > 0$, on considère l'arc paramétré $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$$

On note $\mathscr{C}$ son support, qui est le cercle de centre O et de rayon R.

1. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en tout point.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer les coordonnées du projeté orthogonal de P sur la tangente à $\mathscr{C}$ au point $\gamma(t)$.
3. En déduire un paramétrage de la *podaire* de $\mathscr{C}$ par rapport à P, c'est-à-dire le lieu des projetés orthogonaux de P sur les tangentes à $\mathscr{C}$.
4. Étudier la podaire de $\mathscr{C}$ par rapport à P dans les cas suivants :
   (a) $a = R/2$
   (b) $a = R$
   (c) $a = 2R$

***Exercice 3.5* (Plus court chemin). —** Soient $A, B \in \mathbb{R}^2$ et soit $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $\gamma(t_0) = A$ et $\gamma(t_1) = B$. Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $\|\vec{v}\| = 1$.

1. Montrer que
$$\left\langle \vec{v}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \vec{v}, \vec{\gamma}\,'(t) \right\rangle dt.$$
2. En déduire que $\left|\langle \vec{v}, \overrightarrow{AB} \rangle\right| \leqslant \ell_\gamma(t_0, t_1)$.
3. En utilisant un vecteur $\vec{v}$ bien choisi, montrer que $\ell_\gamma(t_0, t_1) \geqslant \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.
4. Quelle courbe réalise le plus court chemin entre les points A et B ?