

Feuille de TD n° 8 - Extrema.

Exercice 1.

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, *infinie à l'infini*, c'est-à-dire vérifiant la propriété

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum global sur \mathbb{R}^n .

2. Conclure que si f est continue et vérifie

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

alors f admet un maximum global sur \mathbb{R}^n .

3. Montrer que le résultat de la question 1 reste vrai si f est définie dans un ensemble fermé non borné $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et vérifie

$$\forall M > 0, \exists R > 0 \text{ t.q. } x \in X, \|x\| \geq R \implies f(x) \geq M$$

(i. e. $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty, x \in X} f(x) = +\infty$).

Exercice 2.

Étudier les extrema et les points de selle des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
3. $f(x, y) = y(x^2 + (\log(y))^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$;
4. $f(x, y) = 2y^2 - x(x-1)^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
5. $f(x, y) = xy(x-1)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
6. $f(x, y) = \cos(x) \cosh(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, où $\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$.

Exercice 3.

Montrer que

$$x^2 + y^2 + e^{xy} \geq 1, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 harmonique, c'est-à-dire vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que si la matrice Hessienne de f ne s'annule en aucun point de \mathbb{R}^2 , alors f n'admet pas d'extremums relatifs.

Exercice 5.

Déterminer

$$\min_{x>0, y>0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \right).$$

Exercice 6.

Soit $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$. Déterminer, s'il existe, le maximum de F sur l'ensemble

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + 2y \leq 1\}.$$

Exercice 7.

Soit $A \in \mathcal{M}^n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x).$$

1. Montrer que $\nabla J(x) = Ax - b, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $J(x) \rightarrow +\infty, \|x\| \rightarrow +\infty$.
3. Conclure que J admet un minimum global sur \mathbb{R}^n . Quelle est la valeur de ce minimum ?