LE PROGRAMME D'ELLIOTT ET LA CONJECTURE DE TOMS-WINTER

AMAURY FRESLON

1. Introduction

Le but de cet exposé est de présenter à un public non-spécialiste [1] quelques idées concernant la *Conjecture de Toms-Winter*. Sa formulation et les travaux qui ont mené à sa preuve désormais presque complète sont indissociables du *Programme d'Elliott*, un ambitieux projet de classification d'une certaine classe de C*-algèbres. Nous présenterons donc d'abord les grandes lignes de ce programme afin de pouvoir ensuite motiver un énoncé de la Conjecture de Toms-Winter. Ce document étant un simple support pour une présentation orale, il ne comporte que très peu de référence quand le sujet en demanderais beaucoup. Le lecteur intéressé est renvoyé à la synthèse [12] pour plus de détails et une bibliographie plus complète du sujet.

2. Le programme d'Elliott

Le Programme d'Elliott est un programme de classification d'une vaste classe de C*-algèbres par des invariants issus de la K-théorie. Initié en 1989 par G. Elliott dans l'article [4], il est aujourd'hui en un sens complet grâce à deux résultats récents [5] et [10] qui couronnent presque trente années de travaux par de très nombreux auteurs.

2.1. C*-algèbres et nucléarité.

Nous commençons par introduire le cadre général des C*-algèbres. Il existe de nombreuses références sur le sujet. Afin de rester concis, nous nous rapporterons toujours à [2] pour ce qui concerne la théorie des C*-algèbres et à [8] pour la K-théorie.

Définition 2.1. Une C*-algèbre est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach [2] A munie d'une involution $x \mapsto x^*$ telle que pour tout $x \in A$,

$$\|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Elle est dite

— *Unifère* si elle possède un neutre multiplicatif,
— *Séparable* si elle possède une partie dénombrable dense pour la topologie de la norme,
— *Simple* si elle ne possède pas d'idéal bilatère fermé non-trivial.

L'involution permet de définir une notion de positivité : un élement est *positif* s'il est de la forme x^*x. C'est là l'un des éléments essentiels de la théorie des C*-algèbres. De plus, la compatibilité de l'involution avec la norme donne des outils de théorie spectrale : par exemple, un élément est positif si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$ (voir [2, Prop II.3.1.2]).

1. N'ayant a priori aucune connaissance des algèbres d'opérateurs
2. C'est-à-dire une algèbre munie d'une norme sous-multiplicative complète.

Dans la suite nous supposerons toujours les trois propriétés de la définition précédente vérifiées. La première simplifie quelques énoncés mais peut-être retirée sans grande difficulté. La seconde permet de faire des raisonnements d'approximation par des parties finies et est essentielle. La troisième peut cependant sembler un peu moins naturelle. Pour l'expliquer, commençons par donner des exemples :

— Soit X un espace topologique compact et soit $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues à valeur dans $\mathbb{C}$. Munie de l'involution définie par $f^* : x \mapsto \overline{f(x)}$ et de la norme définie par
$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\},$$
c'est une C*-algèbre unifère qui est séparable si et seulement si X l'est. Le *Théorème de Gel'fand-Naimark commutatif* [2, Thm II.2.2.4] affirme que toute C*-algèbre commutative unifère est de cette forme, d'où la notion d'*espace compact non-commutatif*. Notons qu'une telle C*-algèbre est loin d'être simple : ses idéaux bilatères fermés sont en bijection avec les ouverts de X.

— Soit H un espace de Hilbert et soit $B(H)$ l'algèbre des applications linéaires continues de H dans H. Toute sous-algèbre de $B(H)$ fermée pour la norme subordonnée est une C*-algèbre pour l'involution donnée par le passage à l'adjoint. Le *Théorème de Gel'fand-Naimark* [2, Cor II.6.4.10] affirme que toute C*-algèbre est de cette forme.

Les C*-algèbre simples sont en un sens les "plus non-commutatives", c'est-à-dire les plus éloignées des espaces topologiques usuels. Dans certains cas, on peut d'ailleurs décomposer les C*-algèbres non-simples comme des "champs continus" de C*-algèbres simples sur un espace classique. Il est donc raisonnable de les considérer comme des briques élémentaires de la théorie et de chercher à les classifier.

La catégorie des C*-algèbres séparables, simples et unifère est encore trop vaste pour tenter une classification au moyen de la K-théorie (qui sera définie à la sous-section 2.2). Il faut donc une hypothèse supplémentaire et l'une des intuitions d'Elliott était que la nucléarité suffirait pour obtenir une classification complète. Cette propriété est importante pour trois raisons :

— Elle admet plusieurs caractérisations de natures différentes,
— C'est un analogue de la notion de moyennabilité en théorie des groupes,
— Dans le cas des algèbres de von Neumann, elle permet une classification complète [3].

Pour l'introduire, il nous faut d'abord la notion de positivité complète. Pour définir cela, commençons par une construction élémentaire. Soit H un espace de Hilbert et soit $n \in \mathbb{N}$, alors on a un isomorphisme
$$M_n(B(H)) \simeq B(H^{\oplus n}).$$
Par restriction, on en déduit que pour toute C*-algèbre $A \subset B(H)$ l'ensemble $M_n(A)$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans A est naturellement muni d'une structure de C*-algèbre. Il est facile de voir que cette structure ne dépend pas du plongement de A dans $B(H)$.

Définition 2.2. Une application linéaire $\varphi : A \to B$ entre deux C*-algèbres est dite *complètement positive* si pour tout entier n, l'application dilatée
$$\varphi^{(n)} : M_n(A) \longrightarrow M_n(B)$$

3. Il s'agit des travaux fondateurs d'A. Connes

eſt positive, c'eſt-à-dire envoie les éléments positifs sur les éléments positifs.

La nucléarité peut être vue comme une propriété d'approximation par des C*-algèbres de dimension finie, l'approximation se faisant via des applications complètement positives.

Définition 2.3. Une C*-algèbre A eſt dite *nucléaire* s'il exiſte une conſtante $C > 0$ telle que pour toute partie finie $\mathcal{F}$ de A et pour tout $\varepsilon > 0$, il exiſte une C*-algèbre de dimension finie F et des application complètement positives $\varphi : A \to F$ et $\psi : F \to A$ telles que
— $\|\varphi\|, \|\psi\| \leqslant C$,
— Pour tout $x \in \mathcal{F}$, $\|x - \psi \circ \varphi(x)\| \leqslant \varepsilon$.

Le fait d'uiliser des applications complètements positives au lieu de morphismes de C*-algèbres permet à cette définition de décrire une classe beaucoup plus large de C*-algèbres. Si on imposait à φ et ψ d'être des morphismes, on obtiendrait les C*-algèbres AF (voir la définition 2.11).

2.2. **L'invariant d'Elliott.** L'outil essentiel pour classifier les C*-algèbres eſt la *K-théorie*. Il s'agit d'une extension au cadre non-commutatif de la K-théorie classique des espaces topologiques. Cette dernière classifie les fibrés veɛtoriels complexes de dimension finie sur un espace topologique X. Le *Théorème de Swann* [9] affirme que ces fibrés sont en correspondance avec les modules projeɛtifs de type fini sur $C(X)$ (via le modules des seɛtions continues), c'eſt-à-dire avec les projeɛtions des algèbres $M_n(C(X))$.

Il faut donc considérer, pour une C*-algèbre A, les projeɛteurs de toutes les algèbres $M_n(A)$. Pour simplifier, on introduit l'algèbre $M_\infty(A)$ des matrices infinies à coefficients dans A dont seul un nombre fini de coefficients sont non-nuls [4].

Définition 2.4. Soit A une C*-algèbre. Une *projeɛtion* eſt un élément p vérifiant $p^2 = p = p^*$. On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des projeɛtions de A. Deux projeɛtions $p, q \in \mathcal{P}(A)$ sont dites *homotopes* s'il exiſte une fonɛtion continue $f : [0,1] \to \mathcal{P}(A)$ telle que $f(0) = p$ et $f(1) = q$. On définit alors $V(A)$ comme le quotient de $\mathcal{P}(M_\infty(A))$ par la relation d'homotopie.

On montre aisément (voir [8, Prop 2.3.2]) que l'opération qui à deux projeɛtions $p, q \in \mathcal{P}(M_\infty(A))$ associe la projeɛtion $p \oplus q$ définie de la manière suivante :

$$p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

eſt compatible avec l'homotopie, de sorte que $V(A)$ possède une ſtruɛture de semi-groupe. On peut de plus montrer que ce semi-groupe eſt abélien. Il exiſte une façon canonique de produire un groupe abélien à partir d'un semi-groupe abélien (appelé son *groupe de Grothendieck*) en considérent les différences formelles d'élements, de manière similaire à la conſtruɛtion usuelle de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$ [5].

4. Autrement dit la limite induɛtive algébrique de la suite d'algèbres $M_n(A)$ avec comme applications conneɛtante $x \mapsto \mathrm{diag}(x, 0)$. Ou encore le produit tensoriel algèbrique (au-dessus de $\mathbb{C}$) $A \otimes M_\infty(\mathbb{C})$ où $M_\infty(\mathbb{C})$ eſt l'algèbre des applications linéaires de rang fini sur $\ell^2(\mathbb{N})$.

5. Étant donné un semi-groupe S, il suffit de considérer le quotient de $S \times S$ par la relation $(a,b) \sim (a',b')$ si $a + b' = a' + b$.

Définition 2.5. Le groupe de Grothendieck associé à $V(A)$ est noté $K_0(A)$ et appelé 0-*ième groupe de K-théorie de* A. L'image de $V(A)$ dans $K_0(A)$ est noté $K_0^+(A)$. Le triplet $(K_0(A), K_0^+(A), [1_A])$ forme un groupe abélien partiellement ordonné avec unité [6] appelé *K-théorie ordonnée de* A.

Il existe une façon standard de construire à partir de la théorie cohomologique K_0 une suite $(K_i)_{i\geqslant 0}$ de théories cohomologiques donnant lieu à une suite exacte longue : en prenant des suspensions.

Définition 2.6. Soit A une C*-algèbre. Sa *suspension* est la C*-algèbre $SA = C_0(\mathbb{R}, A)$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans A nulles à l'infini. Pour tout $i \geqslant 0$, on pose $S^{i+1} = S(S^iA)$.

On pose alors $K_i(A) = K_0(S^iA)$. Comme dans le cas topologique, il n'y a en fait que deux groupes de K-théorie (voir [8, Thm 11.1.2]) :

Théorème 2.7 (Périodicité de Bott). *Il existe une équivalence naturelle entre les foncteurs* K_* *et* K_{*+2}.

Nous disposons donc deux invariants issus de la K-théorie : le groupe abélien ordonné $(K_0, K_0^+, [1])$ et le groupe abélien K_1. Cela suffit dans certains cas, mais il existe de nombreux exemples de C*-algèbres séparables, simples, unifères, nucléaires non-isomorphes possédant la même K-théorie. Il faut donc ajouter un ingrédient supplémentaire.

Définition 2.8. Un *état* sur une C*-algèbre unifère A est une forme linéaire $\tau : A \to \mathbb{C}$ positive. Il est dit *tracial* si pour tout $x, y \in A$, $\tau(xy) = \tau(yx)$. On note $\mathcal{T}(A)$ l'ensemble des états traciaux de A.

Tout état tracial τ induit un morphisme de groupe

$$\widetilde{\tau} : K_0(A) \to \mathbb{R}$$

positif sur $K_0^+(A)$ et tel que $\widetilde{\tau}([1_A]) = 1$, autrement dit un *état* sur le groupe ordonné $(K_0(A), K_0^+(A), [1_A])$. On note r_A l'application envoyant τ sur $\widetilde{\tau}$.

Définition 2.9. Soit A une C*-algèbre, son *invariant d'Elliott* $\mathrm{Ell}(A)$ est défini par

$$\mathrm{Ell}(A) = ((K_0(A), K_0^+(A), [1_A]), K_1(A), \mathcal{T}(A), r_A).$$

Le Programme d'Elliott, formulé pour la première fois explicitement dans [4], vis à trouver la plus grande classe de C*-algèbres séparables, simples et nucléaires possible qui soit entièrement classifiée par l'invariant d'Elliott.

2.3. **Deux résultats de classification.** Nous allons maintenant donner deux résultats de classification qui ont eu une grande importance dans le developpement de ce sujet. Ils sont tous deux traités en détail dans [7] auquel nous renvoyons le lecteur intéressé. Avant cela, donnons un résultat totalement élémentaire qui règle le cas de la dimension finie :

Proposition 2.10. *Soit* A *une C*-algèbre simple de dimension finie. Alors il existe un entier* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $A \simeq M_n(\mathbb{C})$.

Remarquons qu'une C*-algèbre de dimension finie est automatiquement séparable, nucléaire et unifère.

6. Un *groupe ordonné* est la donnée d'un groupe G et d'une partie $G^+ \subset G$ (appelée cone positif) contenant 0, stable par addition et telle que $G^+ \cap (-G^+) = \{0\}$ et $G^+ - G^+ = G$. Une unité est un élément $u \in G^+$ tel que pour tout $x \in G$, il existe $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $x \leqslant n.u$.

2.3.1. *Algèbres approximativement de dimension finie.* Le premier résultat est celui qui fut à l'origine du programme d'Elliott et concerne les C*-algèbres qui sont approchable en un sens fort par des C*-algèbres de dimension finie.

Définition 2.11. Une C*-algèbre est dite *approximativement de dimension finie* (abrégé en AF) si c'est une limite inductive de C*-algèbres de dimension finie.

La définition peut être reformulée en un renforcement de la nucléarité : toute partie finie est contenue à ε près dans une sous-algèbre de dimension finie pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier, une telle C*-algèbre est automatiquement séparable et nucléaire. De plus, grâce à une propriété de continuité de la K-théorie, $K_1(A) = 0$. De fait, la seule donnée de la K-théorie ordonnée suffit à retrouver la structure de A. Il s'agit là du premier résultat de G. Elliott [3] qui lui a inspiré le programme de classification :

Théorème 2.12 (Elliott)**.** *Les C*-algèbres AF simples sont classifiées par* $(K_0, K_0^+, [1])$.

2.3.2. *Algèbres purement infinies.* Le second résultat concerne une classe beaucoup plus grande et complexe que la précédente : les C*-algèbres purement infinies. Le théorème de classification fut une avancée surprenante et essentielle pour le programme d'Elliott car elle fait déjà intervenir tous les outils et les grandes idées du résultat général. La définition des C*-algèbres qui nous intéressent nécessite quelques notions supplémentaires concernant les projections. Étant données deux projections p et q d'une C*-algèbre A, on note $q \leqslant p$ si $qp = q = pq$. De plus, deux projections sont dites *équivalentes au sens de Murray-von Neumann* s'il existe $v \in A$ tel que $v^*v = p$ et $vv^* = q$.

Définition 2.13. Soit p une projection d'une C*-algèbre A. Elle est dite
— *Infinie* s'il existe $q \sim p$ telle que $q < p$,
— *Proprement infinie* s'il existe $q \sim p \sim q'$ telles que $q, q' < p$ et $q \perp q'$,
— *Finie* si elle n'est pas infinie.

Dans une C*-algèbre simple, toute projection infinie est proprement infinie (voir [2, Prop V.2.3.1]). Une C*-algèbre dont l'unité est proprement infinie est elle-même dite *proprement infinie*. L'idée de la définition d'une C*-algèbre purement infinie est de renforcer cette propriété en demandant que toute sous-algèbre soit également proprement infinie. Cette condition est cependant trop forte, car une C*-algèbre peut contenir beaucoup de sous-algèbres, parfois très exotiques. Il faut donc se restreindre à des sous-algèbres particulières.

Définition 2.14. Une sous-algèbre B d'une C*-algèbre A est dite *héréditaire* si pour tout $x \in B$ et $y \in A$ vérifiant $x - y \geqslant 0$, on a $y \in B$. Une C*-algèbre simple est dite *purement infinie* si toute sous-algèbres héréditaire est proprement infinie.

Comme un état tracial prend la même valeur sur des projections équivalentes au sens de Murray-von Neumann, une C*-algèbre proprement infinie (donc a fortiori une C*-algèbre purement infinit) n'a pas d'état tracial. Voici quelques exemples :

Exemple 2.15 (Algèbres de Cuntz)**.** Soit $n \geqslant 2$ un entier et soit $\mathcal{O}_n$ la C*-algèbre universelle engendrée par des éléments $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tels que
— $s_i^* s_i = 1$ pour tout i,

— $\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1$.

Alors $\mathcal{O}_n$ est séparable, simple, nucléaire et purement infinie. On peut également définir la C*-algèbre $\mathcal{O}_\infty$ engendrée par une infinité d'élements $(s_i)_{i\geqslant 1}$ tels que
— $s_i^* s_i = 1$ pour tout i,
— les projections $s_i s_i^*$ sont deux à deux orthogonales.
Cette C*-algèbre est également séparable, simple, nucléaire et purement infinie.

Le théorème de classification fait intervenir une nouvelle hypothèse, automatiquement satisfaite par les algèbres AF mais cruciale dans ce nouveau cadre. Il s'agit du *Théorème des Coefficients Universels*, une propriété reliant la K-théorie à sa version bivariante (appelée *KK-théorie*). Son énoncé nécessitant d'introduire beaucoup d'outils, nous ne le donnerons pas ici et renvoyons à [1, Ch 23].

Théorème 2.16 (Kirchberg-Phillips). *Les C*-algèbres séparables, simples, nucléaires, purement infinies vérifiant le Théorème des Coefficients Universels sont classifiés par l'invariant* (K_0, K_1).

L'un des ingrédients essentiels de la preuve est le fait que pour une C*-algèbre séparable, simple et nucléaire A, être purement infinie est équivalent à "absorber $\mathcal{O}_\infty$" au sens où $A \simeq A\otimes\mathcal{O}_\infty$ [7].

3. La conjecture de Toms-Winter

3.1. L'algèbre de Jiang-Su. Une idée naturelle pour étendre la classification de Kirchberg-Phillips est de chercher un analogue de la C*-algèbre $\mathcal{O}_\infty$ adapté à la présence de projections finies. Les propriétés essentielles de $\mathcal{O}_\infty$ sont :
— Elle a la même K-théorie que $\mathbb{C}$, c'est-à-dire $K_0(\mathcal{O}_\infty) = \mathbb{Z}$ et $K_1(\mathcal{O}_\infty) = 0$,
— Elle est *fortement auto-absorbante*, $\mathcal{O}_\infty \otimes \mathcal{O}_\infty \simeq \mathcal{O}_\infty$ avec un isomorphism approximativement unitairement équivalent à l'inclusion du premier facteur.

Une C*-algèbre $\mathcal{Z}$ finie de dimension infinie vérifiant ces deux propriétés a été définie par X. Jiang et H. Su à la fin des années 90 dans [6] et il s'est rapidement avéré qu'elle était presque indispensable au programme d'Elliott. Rappelons qu'un groupe ordonné (G, G^+) est dit *faiblement non-perforé* si pour tout $x \in G$ et $n \geqslant 1$, $nx \in G^+$ implique $x \in G^+$.

Théorème 3.1 (Gong, Jiang, Su). *Soit A une C*-algèbre séparable, simple, nucléaire dont la K-théorie ordonnée est faiblement non-perforée. Alors,*

$$\mathrm{Ell}(A) \simeq \mathrm{Ell}(A\otimes\mathcal{Z}).$$

Ainsi, toute C*-algèbre classifiable par l'invariant d'Elliott doit être $\mathcal{Z}$-stable. L'algèbre de Jiang-Su ne possède pas de présentation simple par générateur et relations comme l'algèbre de Cuntz

7. Le symbole $\otimes$ désigne le produit tensoriel au-dessus de $\mathbb{C}$ mais est ici a priori ambigu puisqu'il faudrait choisir une complétion du produit tensoriel algébrique. Toutefois, la nucléarité assure qu'il n'existe qu'une seule complétion qui soit une C*-algèbre.

$\mathcal{O}_\infty$. Elle est construite comme limite inductive (non-explicite) de *dimension-drop algebras* primitives [8], c'est-à-dire de C*-algèbres de la forme

$$Z_{p,q} = \left\{ f : [0,1] \to M_p(\mathbb{C}) \otimes M_q(\mathbb{C}) \mid f(0) \in M_p(\mathbb{C}) \otimes 1_{M_q(\mathbb{C})} \text{ et } f(1) \in 1_{M_p(\mathbb{C})} \otimes M_q(\mathbb{C}) \right\}$$

avec p et q premiers entre eux [9]. Remarquons que $A \otimes \mathcal{Z}$ a toujours une K-théorie ordonnée faiblement non-perforé. De plus, dans tous les contre-exemples au programme de classification (certains ont une K-théorie ordonnée faiblement non-perforée) la $\mathcal{Z}$-stabilité est mise en défaut. Il apparut donc nécessaire de la prendre comme hypothèse. Notons que toute C*-algèbre séparable, simple, nucléaire purement infinie est $\mathcal{Z}$-stable. De fait, après de nombreuses années de travail mené par de nombreuses personnes, le résultat suivant a été obtenu :

Théorème 3.2 (Classification des C*-algèbres $\mathcal{Z}$-stables)**.** *Les C*-algèbres séparables, simples, nucléaires, $\mathcal{Z}$-stables satisfaisant le Théorème des Coefficients Universels sont classifiées par l'invariant d'Elliott.*

Une fois encore le Théorème de Coefficients Universels est nécessaire. Cette hypothèse semble technique et superflue, d'autant plus qu'il n'existe pas à ce jour d'exemple de C*-algèbre nucléaire ne le satisfaisant pas. Pour que la classification soit vraiment complète, il faudrait encore soit prouver que le Théorème de Coefficients Universels découle des autres hypothèses, soit trouver des exemples classifiables qui ne le satisfont pas.

3.2. **Formulation de la conjecture.** W. Winter a été l'un des principaux artisans du programme d'Elliott et sans doute celui dont les travaux ont été le plus déterminants. En particulier, il a introduit des notions de dimensions topologiques pour les C*-algèbres afin de mieux comprendre les propriétés de régularité qu'une C*-algèbre devait satisfaire pour être classifiable.

Définition 3.3. Une C*-algèbre A est de *dimension nucléaire* au plus d si pour toute partie finie $\mathcal{F}$ de A et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une C*-algèbre de dimension finie F et des application complètement positives $\varphi : A \to F$ et $\psi : F \to A$ telle que

— $\|\varphi\| \leqslant 1$,

— Il existe une décomposition $F = F_0 \oplus \cdots \oplus F_d$ telle que pour toute $0 \leqslant i \leqslant d$, $\psi_{|F_i}$ est complètement positive et vérifie $\psi_{|F_i}(x)\psi_{|F_i}(y) = 0$ dès que $xy = 0$,

— Pour tout $x \in \mathcal{F}$, $\|x - \psi \circ \varphi(x)\| \leqslant \varepsilon$.

Le plus petit entier d tel que A soit de dimension nucléaire au plus d est appelé *dimension nucléaire* de A et noté $\dim_{\mathrm{nuc}}(A)$.

Cette définition s'inspire de celle de dimension de recouvrement : un espace topologique X est de dimension de recouvrement au plus d si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement tel que tout point appartient à au plus $d+1$ parties de ce sous-recouvrement. De fait, on peut montrer que $\dim_{\mathrm{nuc}}(C(X)) = \dim(X)$.

8. Plus précisément, toute limite inductive de telles algèbres qui est simple est isomorphe à $\mathcal{Z}$.

9. On peut montrer (voir [6]) que ces C*-algèbres n'ont pas de projection non-trivial, un propriété dont hérite $\mathcal{Z}$. Par contre elles sont loin d'être simples : leur spectre est homéomorphe à l'intervalle $[0,1]$. Ceci n'empêche pas leur limite $\mathcal{Z}$ d'être simple.

La Conjecture de Toms-Winter, qui est plutôt un programme à l'intérieur du programme d'Elliott, vise à comprendre le lien entre la $\mathcal{Z}$-stabilité (qui est de nature analytique) et la dimension nucléaire finie (qui est de nature topologique). Une étude fine de certains exemples a suggéré que ces deux propriétés étaient liées à une troisième, de nature algébrique, que nous introduisons maintenant :

Définition 3.4. Soient $a, b \in M_\infty(A)_+$. On note $a \precsim b$ s'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments telle que

$$\|v_n b v_n^* - a\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On note $a \sim b$ si $a \precsim b$ et $b \precsim a$. L'ensemble des classes d'équivalences est noté $\mathrm{Cu}(A)$ et appelé *semi-groupe de Cuntz* de A [10].

Comme son nom l'indique, $\mathrm{Cu}(A)$ est un semi-groupe abélien partiellement ordonné. En général, beaucoup d'information se perd quand on considère son groupe de Grothendieck [11], c'est pourquoi on l'étudie directement en tant que semi-groupe. La relation précédente n'est pas directement compatible avec les états traciaux. Cependant, on peut construire à partir de tout $\tau \in \mathcal{T}(A)$ une *fonction de dimension* d_τ qui a un sens sur $\mathrm{Cu}(A)$ en posant

$$d_\tau(a) = \lim_{n\to+\infty} \tau(a^{1/n}).$$

Il est facile de voir que si $[a] \leqslant [b]$, alors $d_\tau(a) \leqslant d_\tau(b)$ pour tout $\tau \in \mathcal{T}(A)$. La propriété qui va nous intéresser est une sorte de réciproque :

Définition 3.5. Une C*-algèbre A a la *propriété de comparaison stricte des éléments positifs* si pour tous $[a], [b] \in \mathrm{Cu}(A)$ vérifiant $d_\tau(a) < d_\tau(b)$ pour tout $\tau \in \mathcal{T}(A)$, on a $[a] \leqslant [b]$.

En étudiant une classe de C*-algèbre contenant des exemples et des contre-exemples au programme d'Elliott (les *C*-algèbres de Villadsen du premier type*) dans [11], A. Toms et W. Winter ont constaté que les propriétés cruciales que nous venons de définir étaient toujours soit toutes les trois vérifiées soit toutes les trois mises en défaut. Cette observation les mena à la conjecture suivante :

Conjecture 3.6 (Toms-Winter). *Soit A une C*-algèbre séparable, simple et nucléaire de dimension infinie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) A est de dimension nucléaire finie,

(2) A est $\mathcal{Z}$-stable,

(3) A possède la propriété de comparaison stricte des éléments positifs.

10. Il existe une autre définition possible utilisant $A \otimes \mathcal{K}$ (où $\mathcal{K}$ désigne la C*-algèbre des opérateurs compacts sur $\ell^2(\mathbb{N})$) au lieu de $M_\infty(A)$. Les semi-groupes obtenus ne sont pas identiques mais on des propriétés proches. Nous nous contenterons donc ici de cette définition.

11. Par exemple, on peut montrer que $\mathrm{Cu}(A)$ contient toujours $V(A)$ mais que celui-ci est "absorbé" dans le groupe de Grothendieck par son complémentaire $\mathrm{Cu}(A)_+ = \mathrm{Cu}(A) \setminus V(A)$.

Bien qu'étant à l'origine appuyée par peu d'exemples, cette conjecture est maintenant presque entièrement démontrée, plus précisément, seule l'implication (3) $\Rightarrow$ (2) n'est à ce jour démontrée que sous une hypothèse supplémentaire, à savoir que l'ensemble des points extrêmaux de $\mathcal{T}(A)$ forme un compact de dimension finie.

Références

1. B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Mathematical Research Institute Publications, vol. 5, Cambridge Univ. Pr., 1998.
2. ———, *Operator algebras*, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 122, Springer, 2006.
3. G. Elliott, *On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras*, J. Algebra **38** (1976), no. 1, 29–44.
4. ———, *On the classification of C*-algebras of real rank zero*, J. Reine Angew. Math. **443** (1993), 179–219.
5. G.A. Elliott, G. Gong, H. Lin, and Z. Niu, *On the classification of simple amenable C*-algebras with finite decomposition rank, II*, arXiv preprint arXiv :1507.03437 (2015).
6. X. Jiang and H. Su, *On a simple unital projectionless C*-algebra*, Amer. J. Math. (1999), 359–413.
7. M. Rørdam, *Classification of nuclear, simple C*-algebras*, Classification of nuclear C*-algebras. Entropy in operator algebras, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 122, Springer, 2002, pp. 1–145.
8. M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen, *An Introduction to K-theory for C*-algebras*, Cambridge Univ. Pr., 2000.
9. R. Swan, *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), no. 2, 264–277.
10. A. Tikuisis, S. White, and W. Winter, *Quasidiagonality of nuclear c*-algebras*, Ann. of Math. **185** (2017), no. 2, 229–284.
11. A. Toms and W. Winter, *The Elliott conjecture for Villadsen algebras of the first type*, J. Funct. Anal. **256** (2009), no. 5, 1311–1340.
12. W. Winter, *Structure of nuclear C*-algebras : From quasidiagonality to classification, and back again*, arXiv preprint arXiv :1712.00247 (2017).