UNE INTRODUCTION À LA C*-SIMPLICITÉ

AMAURY FRESLON

1. Introduction

Le but de cet exposé est d'introduire la notion de C*-simplicité, quelques-unes de ses propriétés et d'en donner des exemples. À l'exception de la preuve de la Proposition 2.5, aucune connaissance des algèbres d'opérateurs n'est supposée. Nous nous appuierons essentiellement sur [dlH85] et [dlH07], auxquels nous renvoyons pour des détails et des exemples supplémentaires ainsi que pour une bibliographie plus conséquente.

1.1. **C*-algèbre d'un groupe discret.** Dans tout cet exposé, les groupes considérés sont tous munis de la topologie discrète. La plupart des résultats sont cependant encore vrais (avec les adaptations nécessaires des énoncés) pour des groupes localement compacts généraux. La C*-simplicité concerne un objet topologique associé à tout groupe discret Γ appelé sa *C*-algèbre réduite*. Pour la définir, considérons d'abord l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$ des suites de carré sommable. Il est muni d'une représentation unitaire $\lambda : \Gamma \to \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ définie par

$$\lambda(g)\delta_h = \delta_{gh}$$

où $\delta_h \in \ell^2(\Gamma)$ est la fonction prenant la valeur 1 en h et 0 partout ailleurs. Cette représentation est appelée *représentation régulière gauche*. Comme toute représentation, elle s'étend à l'algèbre $\mathbb{C}[\Gamma]$ engendrée par Γ sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.1. La C*-algèbre réduite de Γ est la complétion de $\mathbb{C}[\Gamma]$ pour la norme $x \mapsto \|\lambda(x)\|_2$.

L'application $x \mapsto \|\lambda(x)\|_2$ est une norme car λ est injectif sur $\mathbb{C}[\Gamma]$. En particulier, $C^*_r(\Gamma)$ est isomorphe en tant qu'algèbre de Banach involutive à l'adhérence $\lambda(\mathbb{C}[\Gamma])$ dans $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$. Ceci montre que $C^*_r(\Gamma)$ est une *C*-algèbre* au sense suivant :

Définition 1.2. Soit H un espace de Hilbert. Une C*-algèbre est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{B}(H)$ stable par passage à l'adjoint.

1.2. **Questions de simplicité.** Soit A une C*-algèbre. Par *idéal* de A nous entendrons toujours idéal bilatère fermé. Un tel idéal est automatiquement stable par l'adjoint par [Dix69, Prop 1.8.2], donc est une sous-C*-algèbre de A. Le quotient de A par un idéal I est également une C*-algèbre. Il est donc naturel de considérer les C*-algèbres sans idéaux non triviaux comme les "blocs élémentaires" de la théorie.

Définition 1.3. Une C*-algèbre A est simple si elle n'a pas d'idéal non trivial (i.e. différent de $\{0\}$ et de A).

Inspiré par la théorie des algèbres de von Neumann, J. Dixmier a posé la question suivante :

Question 1.4 (Dixmier, 1967). *Une C*-algèbre simple est-elle engendrée par ses projections ?*

R.V. Kadison a alors suggéré que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$, où $\mathbb{F}_2$ désigne le groupe libre sur deux générateurs, est une C*-algèbre simple mais ne contient aucune projection non triviale, répondant ainsi par la négative à la question précédente. Il s'agit de la motivation initiale de R.T. Powers qui montra en 1975 dans [Pow75] que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ est simple et possède une unique trace. Il ne put cependant rien dire sur les projections de cette C*-algèbre. La réponse définitive fut donnée par M.V. Pimsner et D.V. Voiculescu en 1982 dans [PV82] où ils montrent que $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ n'a pas de projection non triviale. Les travaux de R.T. Powers ont naturellement mené à l'étude du problème suivant :

Question 1.5. *À quelle condition $C_r^*(\Gamma)$ est-elle simple ?*

Avant d'aborder cette question, nous allons l'illustrer avec un problème analogue faisant intervenir une autre algèbre d'opérateurs associée à un groupe.

Définition 1.6. L'*algèbre de von Neumann* de Γ est le bicommutant $L(\Gamma) = C_r^*(\Gamma)'' \subset \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$

La notion de simplicité n'est pas adaptée aux algèbres de von Neumann. Le bon analogue est la *factorialité* : $L(\Gamma)$ est un facteur si son centre est réduit à $\mathbb{C}.1_{L(\Gamma)}$. Il existe une caractérisation très simple de la factorialité.

Proposition 1.7. *L'algèbre de von Neumann de Γ est un facteur si et seulement si toutes les classes de conjugaison non triviales de Γ sont infinies.*

2. La C*-simplicité

2.1. **Définition et premières propriétés.** Pour simplifier l'exposé, donnons un nom à la propriété qui nous intéresse.

Définition 2.1. On dit que Γ est C*-simple si $C_r^*(\Gamma)$ est simple.

Une première façon d'étudier cette propriété est d'exploiter des résultats sur les C*-algèbres simples. On peut par exemple, en combinant ces résultats avec les propriétés des groupes discrets, obtenir des propriétés de permanence de la C*-simplicité. Nous renvoyons à [dlH07] pour les références des preuves de ces résultats.

Proposition 2.2. *La C*-simplicité satisfait aux propriété de permanence suivantes :*
- *Un produit direct de groupes C*-simple est C*-simple.*
- *Une limite inductive de groupes C*-simples est C*-simple.*
- *Un sous-groupe d'indice fini d'un groupe C*-simple est C*-simple.*
- *Si Γ possède un sous-groupe d'indice fini C*-simple et si toutes les classes de conjugaison non triviales de Γ sont infinies, alors Γ est C*-simple.*

Les preuves de ces résultats reposent essentiellement sur des techniques d'algèbres d'opérateurs. Pour mieux voir le lien entre la C*-simplicité et la géométrie des groupes, il est utile de reformuler la définition 2.1.

2.2. **Lien avec les représentations unitaires.** La C*-simplicité peut s'exprimer comme une propriété des représentations unitaires de Γ. Cette caractérisation repose sur la notion de représentation *faiblement contenue* dans une autre. Pour expliquer cette notion, il est utile d'associer aux représentations unitaires de Γ des complétions de $\mathbb{C}[\Gamma]$.

Définition 2.3. Soit ρ une représentation unitaire de Γ, on note $C^*_\rho(\Gamma)$ l'adhérence de $\mathbb{C}[\Gamma]$ pour la norme $x \mapsto \|\rho(x)\|$.

En particulier, $C^*_r(\Gamma) = C^*_\lambda(\Gamma)$.

Définition 2.4. Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations unitaires de Γ. On dit que ρ_1 est faiblement contenue dans ρ_2 et on note $\rho_1 \prec \rho_2$ si $\|\rho_1(x)\| \leqslant \|\rho_2(x)\|$ pour tout $x \in \mathbb{C}[\Gamma]$. On dit que ρ_1 et ρ_2 sont équivalentes et on note $\rho_1 \sim \rho_2$ si $\rho_1 \prec \rho_2$ et $\rho_2 \prec \rho_1$.

Autrement dit, $\rho_1 \prec \rho_2$ si et seulement si l'identité de $\mathbb{C}[\Gamma]$ se prolonge en une surjection continue $C^*_{\rho_2}(\Gamma) \to C^*_{\rho_1}(\Gamma)$. Grâce à cette notion, nous pouvons donner une caractérisation de la C*-simplicité ne faisant pas intervenir les C*-algèbres.

Proposition 2.5. *Un groupe Γ est C*-simple si et seulement si toute représentation unitaire faiblement contenue dans la représentation régulière est équivalente à la représentation régulière.*

Démonstration. Supposons que Γ est C*-simple et soit $\rho \prec \lambda$. Alors, le noyau de la surjection continue $C^*_\lambda(\Gamma) \to C^*_\rho(\Gamma)$ est trivial. Comme tout $*$-homomorphism injectif est isométrique, on a $\rho \sim \lambda$.

Réciproquement, soit I un idéal dans $C^*_r(\Gamma)$ soit J le noyau de la surjection canonique π : $C^*_m(\Gamma) \to C^*_r(\Gamma)$, où $C^*_m(\Gamma)$ est la C*-algèbre enveloppante de $\mathbb{C}[\Gamma]$. Par définition $I' = \pi^{-1}(I)$ est un idéal de $C^*_m(\Gamma)$ contenant J. Soit $\psi : C^*_m(\Gamma) \to C^*_m(\Gamma)/I'$ la surjection continue associée et soit H un espace de Hilbert tel qu'il existe un $*$-homomorphisme injectif $\phi : C^*_m(\Gamma)/I \to \mathcal{B}(H)$ (voir [Dix69, Par 2.6.1] pour la preuve de l'existence d'un tel plongement). La restriction de $\phi \circ \psi$ à $\Gamma \subset \mathbb{C}[\Gamma]$ est une représentation unitaire ρ telle que le noyau de la surjection continue $C^*_m(\Gamma) \to C^*_\rho(\Gamma)$ est précisément I'. Comme $J \subset I'$, $\rho \prec \lambda$ ce qui par hypothèse implique $\rho \sim \lambda$. Donc, $I' = J$ et $I = \{0\}$. □

La C*-simplicité est donc une propriété de rigidité des représentations unitaires, comme la propriété (T) de Kazhdan. En particulier, un groupe C*-simple est "loin d'être moyennable". Afin de donner un énoncé précis, nous avons besoin d'une propriété de l'induction pour la preuve de laquelle nous renvoyons par exemple à [BdlHV08, Thm F.3.5].

Lemme 2.6. *Soit Λ un sous-groupe de Γ et soit ρ_1, ρ_2 des représentations de Λ telles que $\rho_1 \prec \rho_2$. Alors,*

$$\mathrm{Ind}_\Lambda^\Gamma(\rho_1) \prec \mathrm{Ind}_\Lambda^\Gamma(\rho_1).$$

Proposition 2.7. *Si Γ est C*-simple, alors il n'a pas de sous-groupe distingué moyennable non-trivial.*

Démonstration. Soit Λ un sous-groupe distingué moyennable de Γ. On sait que $1_\Lambda \prec \lambda_\Lambda$. En remarquant que

$$\mathrm{Ind}_\Lambda^\Gamma(1_\Lambda) = \lambda_{\Gamma/\Lambda} \text{ et } \mathrm{Ind}_\Lambda^\Gamma(\lambda_\Lambda) = \lambda_\Gamma$$

et en utilisant la propriété 2.6, on obtient $\lambda_{\Gamma/\Lambda} \prec \lambda_\Gamma$. Mais alors, le noyau de la surjection continue $C^*_r(\Gamma) \to C^*_{\lambda_{\Gamma/\Lambda}}(\Gamma) = C^*_r(\Gamma/\Lambda)$ est un idéal non-trivial. □

Tout groupe discret Γ contient un unique sous-groupe distingué moyennable maximal (c'est le sous-groupe distingué engendré par tous les sous-groupes normaux moyennables) appelé *radical moyennable*. La proposition 2.7 affirme donc que le radical moyennable de Γ est trivial si Γ est C*-simple. En particulier, le seul groupe moyennable C*-simple est le groupe trivial.

2.3. **La propriété de Dixmier.** Dans tout cet exposé, on appelle *trace* sur une C*-algèbre A tout état tracial normalisé, c'est-à-dire une application linéaire $\tau : A \to \mathbb{C}$ telle que
— $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour tous $a, b \in A$.
— $\tau(a^*a) \geqslant 0$ pour tout $a \in A$.
— $\tau(1_A) = 1$.
Remarquons qu'une telle application est toujours continue. Dans son étude de la simplicité pour les C*-algèbres, J. Dixmier a isolé la propriété suivante.

Définition 2.8. Une C*-algèbre A a la *propriété de Dixmier* si pour tout $a \in A$,

$$\overline{\text{co}}\{uau^*, u \in \mathcal{U}(A)\} \cap \mathbb{C}.1_A \neq \emptyset,$$

où $\overline{\text{co}}$ désigne l'enveloppe convexe fermée et $\mathcal{U}(A)$ est l'ensemble des éléments de A qui sont unitaires.

La propriété de Dixmier n'est pas facile à exploiter en elle-même, mais en présence d'une trace elle donne un critère de simplicité.

Lemme 2.9. *Soit A une C*-algèbre possédant la propriété de Dixmier et admettant une trace* fidèle τ. *Alors, A est simple et τ est l'unique trace sur A.*

Démonstration. Soit I un idéal de A et $x \in I$ non nul. On pose $a = x^*x$ et comme τ est fidèle, $\tau(a) \neq 0$. Par la propriété de Dixmier, il existe $\nu \in \mathbb{C}$ tel que $\nu.1_A \in \overline{\text{co}}\{uau^*, u \in \mathcal{U}(A)\}$. Or, par tracialité, $\tau(uau^*) = \tau(a)$ pour tout unitaire u donc par continuité τ est constante sur $\overline{\text{co}}\{uau^*, u \in \mathcal{U}(A)\}$. On en déduit que $\nu = \tau(a) \neq 0$. Ainsi, $\overline{\text{co}}\{uau^*, u \in \mathcal{U}(A)\}$ contient un élément inversible. Comme d'autre part il est inclus dans I, $I = A$.

De plus, toute trace est constante sur $\overline{\text{co}}\{uau^*, u \in \mathcal{U}(A)\}$ pour tout a dans A, donc coïncide avec τ. □

Remarque 2.10. U. Haagerup et L. Zsido ont montré dans [HZ84] que réciproquement, si A est une C*-algèbre simple et possède au plus une trace, alors A a la propriété de Dixmier.

Remarque 2.11. Tout simplexe de Choquet est l'ensemble des états traciaux d'une C*-algèbre simple (et même d'une algèbre AF) par un résultat de E.G. Effros [Eff81]. Une C*-algèbre simple n'a donc pas nécessairement la propriété de Dixmier.

3. Quelques exemples

Dans cette section nous allons donner quelques exemples de groupes C*-simples. Leur point commun est que la preuve de la C*-simplicité peut se faire en utiliser un argument combinatoire assez simple que nous allons d'abord détailler.

3.1. **La propriété de Powers.** La technique de R.T. Powers dans [Pow75] pour prouver la C*-simplicité du groupe libre sur deux générateurs repose sur un propriété combinatoire relativement simple. Cette propriété a été abstraite afin de pouvoir être appliquée dans d'autres cas.

Définition 3.1. Un groupe Γ a la *propriété de Powers* si pour tout ensemble fini non-vide $F \subset \Gamma \setminus \{e\}$ et pour tout entier $N \geqslant 1$, il existe une partition $\Gamma = A \sqcup B$ et des éléments $g_1, \ldots, g_N \in \Gamma$ tels que
— $fA \cap A = \emptyset$ pour tout $f \in F$.
— $g_i B \cap g_j B = \emptyset$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant N$.

Indépendament de son lien à la C*-simplicité, la propriété de Powers a plusieurs conséquences remarquables sur la structure du groupe Γ.

Proposition 3.2. *Soit Γ un groupe possédant la propriété de Powers, alors*
(1) *Toutes les classes de conjugaison non triviales de Γ sont infinies.*
(2) *Γ n'est pas moyennable.*
(3) *Γ contient un semi-groupe libre sur deux générateurs.*

Démonstration. (1) Soit f un élément non trivial de Γ dont la classe de conjugaison F est finie. Soient A, B, g_1, g_2, g_3 les objets donnés par la propriété de Powers appliquée à F et $N = 3$. Pour $j = 2, 3$, $g_1 B$ est disjoint de $g_j B$ donc inclus dans $g_j A$. De plus, pour tout $f' \in F$, $f'A$ est disjoint de A donc inclus dans B. Ainsi,

$$fg_1 B \subset fg_j A = g_j(g_j^{-1} f g_j)A = g_j f' A \subset g_j B.$$

Il s'ensuit que $fg_1 B \subset g_2 B \cap g_3 B \neq \emptyset$, une contradiction.
(2) Soit m une moyenne invariant sur Γ et soient A, B, g_1, g_2, g_3 les objets donnés par la propriété de Powers appliquée à un ensemble F contenant un élément non trivial et $N = 3$. Pour $f \in F$, on a

$$m(A \sqcup fA) = 2m(A) \leqslant 1 \text{ and } m(g_1 B \sqcup g_2 B \sqcup g_3 B) = 3m(B) \leqslant 1,$$

d'où

$$1 = m(\Gamma) = m(A \sqcup B) = m(A) + m(B) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1,$$

une contradiction.
(3) Soit $a \in \Gamma$ tel que $a^2 \neq e$ (un tel élément existe car si tous les éléments sont d'ordre 2 alors Γ est abélien, donc moyennable et n'a pas la propriété de Powers). Soient A, B, g_1 et g_2 les objets associés à la propriété de Powers appliquée à $F = \{a, a^2\}$ et $N = 2$ et posons $b = g_1^{-1} g_2$. En particulier, $bB \cap B = g_1^{-1}(g_2 B \cap g_1 B) = \emptyset$ et on a les inclusions :

$$\begin{array}{ccccc} abB & \subset & aA & \subset & B \\ a^2 bB & \subset & a^2 A & \subset & B \end{array}$$

Nous allons montrer que ab et $a^2 b$ engendrent un semi-groupe libre. Pour cela, considérons une relation positive de longueur minimale entre ab et $a^2 b$ de la forme

$$a^{k_1} b a^{k_2} b \ldots a^{k_r} b = a^{l_1} b a^{l_2} b \ldots a^{l_s} b \tag{1}$$

avec $r, s \geqslant 0$ et $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots l_s \in \{1, 2\}$. Si $r > 0$, alors

$$(a^{k_1} b a^{k_2} b \dots a^{k_r} b)B \subset (a^{k_1} b)B$$

car ab et $a^2 b$ stabilisent tous les deux B. De même, si $s > 0$ alors

$$(a^{l_1} b a^{l_2} b \dots a^{l_s} b)B \subset (a^{l_1} b)B.$$

Or, comme $bB \subset A$ et $abB \subset B$, leurs images par a sont des sous-ensembles disjoints de B. L'égalité (1) implique donc que $r = s = 0$ ou que $k_1 = l_1$. Le second cas contredit la minimalité de (1), d'où le résultat. □

Remarque 3.3. Une conséquence immédiate du point (1) est que Γ n'a pas de sous-groupe distingué fini et, par la Proposition 1.7, que $L(\Gamma)$ est un facteur. Le point (2) combiné avec l'alternative de Tits montre que tout sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ qui a la propriété de Powers contient un groupe libre. En fait, une application (plus subtile que dans le point (3)) du "lemme du ping-pong" permet de montrer que tout groupe de Powers contient un groupe libre sur deux générateurs.

3.2. **Application à la C*-simplicité.** Bien qu'intéressante en elle-même, la propriété de Powers est avant tout un outil pour prouver la C*-simplicité, comme nous allons maintenant le montrer.

Théorème 3.4 (Powers). *Soit Γ un groupe possédant la propriété de Powers, alors Γ est C*-simple et possède une unique trace.*

Démonstration. Nous allons en fait montrer que $C^*_r(\Gamma)$ a la propriété de Dixmier. Comme τ est une trace fidèle, on en déduira le résultat par le Lemme 2.9. Remarquons pour commencer qu'il suffit de vérifier la propriété de Dixmier pour un élément a de la forme x^*x. Soit donc $\nu = \tau(a) > 0$ et soi $\varepsilon > 0$. Considérons un élément auto-adjoint Y' de $\mathbb{C}[\Gamma]$ tel que

$$\|a - Y'\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

et posons $Y = Y' - \tau(Y').1_{C^*_r(\Gamma)}$. Il existe des scalaires $y_1, \dots, y_n$ et des éléments $f_1, \dots, f_n \in \Gamma$ tels que

$$Y = \sum_{k=1}^{n} y_k \lambda(f_k) + \overline{y}_k \lambda(f_k)^*.$$

Posons $F_0 = \{f_1, \dots, f_n\}$ (comme $\tau(Y) = 0$, $f_i \neq e$ pour tout i) et $F = F_0 \cup F_0^{-1}$. Soient $A, B, g_1, \dots, g_5$ les objets associés à la propriété de Powers appliquée à F et $N = 5$. Pour $1 \leqslant i \leqslant 5$ on identifie $\ell^2(g_i A)$ à un sous-espace fermé M_i de $\ell^2(\Gamma)$ et on note P_i la projection orthogonale associée. Par la propriété de Powers, $\lambda(g_i)^* M_i \subset \ell^2(A)$, donc

$$\lambda(g_i) Y \lambda(g_i)^*(M_i) \subset \lambda(g_i) Y(\ell^2(A)) \subset \lambda(g_i)\ell^2(B) \subset \ell^2(g_i B) = M_i^{\perp}$$

et pour tout $\xi \in \ell^2(\Gamma)$,

$$\begin{aligned}
|\langle \lambda(g_i) Y \lambda(g_i)^* \xi, \xi \rangle| &\leqslant |\langle \lambda(g_i) Y \lambda(g_i)^* \xi, P_i(\xi) \rangle| + |\langle \lambda(g_i) Y \lambda(g_i)^* \xi, (1 - P_i)(\xi) \rangle| \\
&= |\langle \lambda(g_i) Y \lambda(g_i)^* (1 - P_i)(\xi), P_i(\xi) \rangle| \\
&\leqslant 2\|Y\| \|(1 - P_i)(\xi)\| \|\xi\|.
\end{aligned}$$

Posons maintenant

$$Z = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} \lambda(g_i) Y \lambda_{g_i}^*.$$

et considérons un vecteur $\xi \in \ell^2(\Gamma)$ de norme 1. Comme les projections $(1-P_i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$ sont deux à deux orthogonales, il existe un indice i_0 tel que $\|(1-P_{i_0})(\xi)\|^2 \leqslant 1/5$. On a alors

$$\begin{aligned} |\langle Z\xi,\xi\rangle| &\leqslant \frac{1}{5}\left(\left|\langle \lambda(g_{i_0})Y\lambda(g_{i_0})^*\xi,\xi\rangle\right| + \sum_{i\neq i_0} |\langle \lambda(g_i)Y\lambda(g_i)^*\xi,\xi\rangle|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+4\right)\|Y\|. \end{aligned}$$

La constante apparaissant dans la dernière inégalité étant strictement plus petite que 1, on a montré que tout élément auto-adjoint de trace nulle pouvait être moyenné pour obtenir un élément auto-adjoint de trace nulle et de norme strictement plus petite. En itérant ce procédé, on peut donc trouver un entier m et des éléments $g_1,\ldots,g_m \in \Gamma$ tels que

$$\left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \lambda(g_i)Y\lambda(g_i)^*\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda(g_i)a\lambda(g_i)^* - \nu.1_{C_r^*(\Gamma)}\right\| &\leqslant \left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda(g_i)(a-Y')\lambda(g_i)^*\right\| + \left\|\tau(Y').1_{C_r^*(\Gamma)} - \tau(a).1_{C_r^*(\Gamma)}\right\| \\ &+ \left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda(g_i)(Y'-\tau(Y').1_{C_r^*(\Gamma)})\lambda(g_i)^*\right\| \\ &= 2\left\|a-Y'\right\| + \left\|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_{g_i}Y\lambda(g_i)^*\right\| \\ &\leqslant 2\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

et $\nu.1_{C_r^*(\Gamma)} \in \overline{\text{co}}\{uau^*, u\in\mathcal{U}(A)\} \neq \emptyset$. □

Remarque 3.5. Comme le montre la preuve, pour qu'un groupe soit C*-simple avec une unique trace il suffit en fait qu'il ait la propriété de Powers pour $N=5$ (et toute partie finie F).

Remarque 3.6. Dans son article [Ken15], M. Kennedy montre que tout groupe C*-simple a la *"Powers averaging property"*. Il ne s'agit pas de la propriété de Powers donnée par le Définition 3.1 mais de la propriété utilisée dans la preuve du Théorème 3.4 : pour tout $a \in C_r^*(\Gamma)$ et pour tout

$\varepsilon > 0$, il existe un entier $m \geqslant 1$ et des éléments $g_1, \dots, g_m \in \Gamma$ tels que
$$\left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda(g_i) a \lambda(g_i)^* - \tau(a).1_{C_r^*(\Gamma)} \right\| \leqslant \varepsilon.$$
Cette propriété est strictement plus faible que la propriété de Powers puisqu'elle est satisfaite par les groupes de Burnside non moyennables (dont tous les éléments sont de torsion).

3.3. **Exemples de groupes de Powers.** Nous allons maintenant donner des exemples de groupes possédant la propriété de Powers et qui sont donc C*-simples.

Lemme 3.7. *Le groupe libre $\mathbb{F}_2$ sur deux générateurs a la propriété de Powers.*

Démonstration. On note a et b les générateurs de $\mathbb{F}_2$. Soit $F \in \mathbb{F}_2 \setminus \{e\}$ une partie finie non vide et soit $N \geqslant 1$ un entier. Il existe un entier $m > 0$ tel que pour tout $f \in F$, l'écriture réduite de $a^m b b^{-m}$ commence par une puissance strictement positive de a. Soit A' l'ensemble des éléments de $\mathbb{F}_2$ dont l'écriture réduite commence par $a^{-m}b^{\alpha}$ pour $\alpha \neq 0$, soit $A = A' \amalg \{a^{-m}\}$ et soit $B = \Gamma \setminus A$. Posons également, pour $1 \leqslant i \leqslant N$, $g_i = b^i a^m$. Par définition, $fA \cap A = \emptyset$ pour tout $f \in F$. De plus, comme l'écriture réduite d'un élément de B commence par une puissance de b différente de $-m$, $g_i x$ est de la forme $s^i t^{\alpha} w'$ avec $\alpha \neq 0$ et w' ne commençant pas par a^{-1} pour tout $x \in B$. Donc, $g_i B \cap g_j B = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $\mathbb{F}_2$ a la propriété de Powers. □

Corollaire 3.8. *Le groupe libre $\mathbb{F}_2$ sur deux générateurs est C*-simple et possède une unique trace.*

On peut obtenir plus d'exemples en exploitant des propriétés dynamiques et en particulier la notion suivante d'homéomorphisme hyperbolique.

Définition 3.9. Soit X un espace topologique séparé. Un homéomorphisme ϕ de X est dit *hyperbolique* s'il a deux points fixes s_ϕ et r_ϕ tels que pour tout voisinage S de s_ϕ et tout voisinage R de r_ϕ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$\phi^n(X \setminus S) \subset R$$
$$\phi^{-n}(X \setminus R) \subset S$$
Deux homéomorphismes hyperboliques sont dits *transverses* s'ils n'ont pas de point fixe communs.

Remarquons qu'un homéomorphisme hyperbolique a par définition exactement deux points fixes.

Définition 3.10. Une action de Γ sur un espace topologique séparé X est dite
— *Fortement hyperbolique* s'il existe deux éléments de Γ qui agissent par des homéomorphismes hyperboliques transverses.
— *Fortement fidèle* si pour toute partie finie $F \subset \Gamma \setminus \{e\}$ il existe $x \in X$ tel que $f.x \neq x$ pour tout $f \in F$.

Une action par homéomorphismes de Γ sur un espace séparé X étant fixée, on dira qu'un élément de Γ est hyperbolique s'il agit par un homéomorphisme hyperbolique. On a alors un critère pour la propriété de Powers, du à M.R. Bridson et P. de la Harpe [BdlH04].

Théorème 3.11 (Bridson – de la Harpe). *Soit Γ un groupe agissant sur un espace topologique séparé X et soit X_0 l'ensemble des points de X fixés par un élément hyperbolique de Γ. Si l'action de Γ est fortement hyperbolique sur X et fortement fidèle sur X_0, alors Γ a la propriété de Powers.*

Démonstration. Soit $F \subset \Gamma \setminus \{1\}$ une partie finie non vide et soit $N > 0$. Comme le conjugué d'un homémorphisme hyperbolique par un homéomorphisme hyperbolique transverse est encore hyperbolique et transverse aux deux premiers, il existe trois éléments hyperboliques deux à deux transverses ϕ, ϕ' et ϕ''. De plus, l'action étant fortement fidèle sur X_0, on peut choisir ϕ de telle sorte que $f.r_\phi \neq r_\phi$ pour tout $f \in F$. Il existe alors un voisinage V de r_ϕ tel que $fV \cap V = \emptyset$ pour tout $f \in F$. Soient $g_1, \ldots, g_N$ des conjugués de ϕ' par des puissances de ϕ'' de sorte qu'ils soient deux à deux transverses et tous transverses à ϕ. Quitte à les conjuguer par une puissance de ϕ, on peut supposer que s_{ϕ_i} et r_{ϕ_i} sont dans V pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$. De plus, on peut supposer (quitte à remplacer chaque g_i par une puissance positive de lui-même) qu'il existe pour tout i des voisinages S_i de s_{ϕ_i} et R_i de r_{ϕ_i} respectivement qui sont deux à deux disjoints et tels que pour tout i,

$$g_i(X \setminus V) \subset R_i. \tag{2}$$

Soit $x \in X$, on pose alors $A = \{g \in \Gamma, g.x \in V\}$ et $B = \{g \in \Gamma, g.x \notin V\}$. Par (2), $g_i B \cap g_j B = \emptyset$ pour $i \neq j$. De plus, par construction $fA \cap A = \emptyset$ pour tout $f \in F$. On a donc prouvé la propriété de Powers. □

Le théorème 3.11 permet de prouver que les groupes suivants sont de Powers :

— Les produits libres non triviaux et en particulier les groupes libres sur au moins deux générateurs (en utilisant l'action sur la frontière de l'arbre de Bass-Serre).

— Les sous-groupes non résolubles de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (en utilisant l'action sur la frontière du plan hyperbolique).

— Les groupes hyperboliques non élémentaires (au sens de Gromov) qui sont sans torsion (en utilisant l'action sur la frontière de Gromov du graphe de Cayley).

Ces techniques sont "de rang 1" et il est naturel de chercher des exemples en rang supérieur. Dans ce contexte, M. Bekka, M. Cowling et P. de la Harpe ont montré dans [BCdlH94] que si G est un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact et de centre trivial, alors tout sous-groupe Zariski-dense Γ est C*-simple quand il est vu comme un groupe discret. En particulier, tout réseau dans un tel groupe de Lie est C*-simple.

Références

[BCdlH94] B. Bekka, M. Cowling, and P. de la Harpe, *Some groups whose reduced C*-algebra is simple*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **80** (1994), 117–134.

[BdlH04] M.R. Bridson and P. de la Harpe, *Mapping class groups and outer automorphism groups of free groups are C*-simple*, J. Funct. Anal. **212** (2004), no. 1, 195–205.

[BdlHV08] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette, *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge university press, 2008.

[Dix69] J. Dixmier, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthiers-Villard, 1969.

[dlH85] P. de la Harpe, *Reduced C*-algebras of discrete groups which are simple with a unique trace*, Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory (Springer, ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1132, 1985.

[dlH07] ______, *On simplicity of reduced C*-algebras of groups*, Bull. London Math. Soc. **39** (2007), no. 1, 1–26.

[Eff81] E.G. Effros, *Dimensions and C*-algebras*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, no. 46, 1981.

[HZ84] U. Haagerup and L. Zsido, *On the Dixmier property for C*-algebras*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **298** (1984), no. 8, 173–176.

[Ken15] M. Kennedy, *Characterizations of C*-simplicity*, Arxiv preprint arXiv :1509.01870 (2015).

[Pow75] R.T. Powers, *Simplicity of the C*-algebra associated with the free group on two generators*, Duke Math. J **42** (1975), no. 1, 151–156.

[PV82] M.V. Pimsner and D.V. Voiculescu, *K-groups of reduced crossed products by free groups*, J. Operator Theory **8** (1982), no. 1, 131–156.