Un raisonnement en famille.

13 décembre 1999

1 Introduction

Soient X, Y et B des variétés complexes lisses; soient $\pi_X : X \to B$ et $\pi_Y : Y \to B$ des morphismes propres et lisses; soient enfin $\gamma \in \mathbb{N}^*$ et $\Gamma \in \mathrm{CH}_\gamma(X \times_B Y)$ un cycle algébrique.

Pour tout $b \in B$, on note $X_b :\, = X \times_B b$, et $Y_b :\, = Y \times_B b$ les fibres de π_X et π_Y; et $i : b \to B$, $i_{X,b} : X_b \to X$ et $i_{Y,b} : Y_b \to Y$ les immersions fermées. Enfin, on note $\Gamma_b :\ X \vdash Y$ la correspondance induite par la restriction de Γ à $X_b \times Y_b$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que

- pour tout $i \in \{0, \cdots, k-1\}$ il existe un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie $H_i \subset \mathrm{CH}_{i+\dim B}(X)_\mathbb{Q}$ tel que pour tout $b \in B$ on a :

$$\mathrm{CH}_i(X_b)_\mathbb{Q} \subset {i_{X,b}}^* H_i.$$

- il existe un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H \subset \mathrm{CH}_{k+\gamma-\dim X_b}(Y)_\mathbb{Q}$ et un ouvert $U \subset B$ tel que pour tout $b \in U$ on a :

$$(\Gamma_b)_*(\mathrm{CH}_k(X_b)_\mathbb{Q}) \subset {i_{Y,b}}^* H.$$

Nouis allons montrer le théorème suivant.

Théorème 1 *Sous les hypothèses ci-dessus, pour tout $b \in B$, on a :*

$$(\Gamma_b)_*(\mathrm{CH}_k(X_b)_\mathbb{Q}) \subset {i_{Y,b}}^* H.$$

L'intérêt du théorème **??** est illustré par le corollaire suivant.

Corollaire 1 *Soit $X \to B$ une famille lisse de variétés complexes projectives. On suppose que pour tout $b \in B$ on a $\mathrm{CH}_i(X)_{\mathbb{Q},\,\mathrm{hom}} = 0$ pour $i \in \{0, \cdots, k-1\}$, et que pour $b \in B$ générique on a $\mathrm{CH}_k(X)_{\mathbb{Q},\,\mathrm{hom}} = 0$. Alors pour tout $b \in B$ on a $\mathrm{CH}_k(X)_{\mathbb{Q},\,\mathrm{hom}} = 0$.*

2 Preuve du théorème ??.

Nous allons d'abord montrer que la première hypothèse implique la proposition suivante.

Proposition 1 *Il existe*

- *une variété propre et lisse D de dimension pure* $\dim X - k$*;*
- *un morphisme propre $j : D \to X$ tel que le restriction de $\pi_X \circ j : D \to B$ à n'importe quelle composante connexe de D est dominante;*
- *un cycle* $\Gamma_1 \in \mathrm{CH}_{\dim X}(D \times_B X)$

tels que pour tout $b \in B$ l'application

$$(\Gamma_{1,b})_* : \mathrm{CH}_0(D_b)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{CH}_k(X)_{\mathbb{Q}}$$

est surjective, où D_b est une désingularisée de la fibre de D au dessus de $b \in B$, et où $\Gamma_{1,b}$ est l'image réciproque de Γ_1 dans $\mathrm{CH}_{\dim X_b}(D_b \times X_b)$*.*

Soit $\Delta_{X,B} \in \mathrm{CH}_{\dim X}(X \times_B X)$ la classe de la diagonale, image directe de X par le plongement $\delta_{X,B} : X \hookrightarrow X \times_B X$. Un argument standard développé par Bloch et Srinivas [**?**] et généralisé par Paranjape [**?**] permet de montrer :

Théorème 2 *Il existe*

- *une variété $D' \subset Y$ de codimension pure k, de désingularisée $D \xrightarrow{j} X$, et un cycle*
$$\Gamma_1 \in \mathrm{CH}_{\dim X}(D \times_B X);$$
- *pour tout $\mu \in \{1, \cdots, k-1\}$*
  - *des variétés $V^{\mu,\nu} \subset X$, $\nu \in \{1, \cdots, r_\mu\}$ vérifiant* $\operatorname{codim} V^{\mu,\nu} = \mu$*;*
  - *des variétés $P_{\mu,\nu} \subset X$, $\nu \in \{1, \cdots, r_\mu\}$ vérifiant* $\dim P_{\mu,\nu} = \mu$ *et $[P_{\mu,\nu}] \in H_\mu$;*
  - *des entiers relatifs $\lambda_{\mu,\nu}$, $\nu \in \{1, \cdots, r_\mu\}$*

  et un cycle
$$\Gamma_2 = \sum_{\substack{\mu \in \{1, \cdots, k-1\} \\ \nu \in \{1, \cdots, r_\mu\}}} \lambda_{\mu,\nu} \, [V^{\mu,\nu} \times_B P_{\mu,\nu}];$$
- *un entier N strictement positif*

tels que
$$N \cdot \Delta_{X,B} = (j \times_B \mathrm{Id}_X)_* \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

La restriction de $\Delta_{X,B}$ à $X_b \times X_b$ est la classe de la diagonale $\delta_{X_b} \in \mathrm{CH}_{\dim X_b}(X_b \times X_b)$. Soit D_b une désingularisée de $j^{-1}(X_b)$ et soient $j_b : D_b \to X_b$ et $i_{D,b} : D_b \to D$ les morphismes naturels. Soient $\Gamma_{1,b} \in \mathrm{CH}_\bullet(D_b \times X_b)$ (où $\bullet = \dim X$ si D_b est de la dimension attendue) et $\Gamma_{2,b} \in \mathrm{CH}_{\dim X}(X_b \times X_b)$ les images réciproques de Γ_1 et Γ_2.

Le diagramme suivant est commutatif, et le carré est cartésien.

$$\begin{tikzcd}
D_b \times X_b \arrow[dr] \arrow[drr, "i_{D,b} \times_B \mathrm{Id}_{X_b}"] \arrow[ddr, "j_b \times \mathrm{Id}_{X_b}"'] & & \\
& D \times_B X_b \arrow[r] \arrow[d] & X_b \times X_b \arrow[d, "\mathrm{Id}_{X_b} \times_B \mathrm{Id}_{X_b}"] \\
& D \times_B X \arrow[r, "j \times_B \mathrm{Id}_X"'] & X \times_B X
\end{tikzcd}$$

Comme le morphisme $\pi_{D_b} \times \mathrm{Id}_{X_b} : D_b \times X_b \to D \times_B X_b$ est un éclatement, on montre facilement que pour tout $Z \in \mathrm{CH}(X_b \times X_b)$ on a $(j \times_B \mathrm{Id}_X)^!(Z) = (\pi_{D_b} \times \mathrm{Id}_{X_b})_*(i_{D,b} \times_B \mathrm{Id}_{X_b})^*(Z)$ dans $\mathrm{CH}(D \times_B X_b)$. En utilisant le théorème de changement de base cartésien (*cf.* [**?**], th. 8.1.1.(d), p 132), et grâce à une chasse au diagramme on a:

$$(\mathrm{Id}_{X_b} \times_B \mathrm{Id}_{X_b})^*(j \times_B \mathrm{Id}_X)_*\Gamma_1 = (j_b \times \mathrm{Id}_{X_b})_*(i_{D,b} \times_B \mathrm{Id}_{X_b})^*\Gamma_1.$$

D'après le théorème **??** on en déduit:

$$N \cdot \Delta_{X_b} = (j_b \times \mathrm{Id}_{X_b})_*\Gamma_{1,b} + \Gamma_{2,b}.$$

Cette égalité s'interprète en termes de correspondances :

$$N \cdot (\mathrm{Id}_{X_b})_* = (\Gamma_{1,b})_* \circ j_b^* + (\Gamma_{2,b})_*.$$

Soit $Z \in CH_k(X_b)$. Notons $P^b_{\mu,\nu}$ et $V_b^{\mu,\nu}$ les images réciproques des variétés $P_{\mu,\nu}$ et $V^{\mu,\nu}$ dans X_b; notons aussi $p_1, p_2 : X_b \times X_b \to X_b$ les projections. Grâce aux propriétés élémentaires du produit d'intersection (*cf.* [**?**], th.6.2, p.98) on a :

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{2,b})_*(Z) &= p_{2*}\left(\sum_{\substack{\mu \in \{1,\cdots,k-1\} \\ \nu \in \{1,\cdots,r_\mu\}}} \lambda_{\mu,\nu}\ [V_b^{\mu,\nu} \times P^b_{\mu,\nu}] \cdot {p_1}^*[Z] \right) \\
&= \sum_{\substack{\mu \in \{1,\cdots,k-1\} \\ \nu \in \{1,\cdots,r_\mu\}}} \lambda_{\mu,\nu}\ p_{2*}\left({p_2}^*[P^b_{\mu,\nu}] \cdot {p_1}^*[V_b^{\mu,\nu}] \cdot {p_1}^*[Z] \right) \\
&= \sum_{\substack{\mu \in \{1,\cdots,k-1\} \\ \nu \in \{1,\cdots,r_\mu\}}} \lambda_{\mu,\nu}\ [P_{\mu,\nu}] \cdot (p_{2*} \circ {p_1}^*)[Z \cdot V_b^{\mu,\nu}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque $Z \cdot V_b^{\mu,\nu}$ est de dimension strictement positive, et donc $(p_{2*} \circ p_1{}^*)[Z \cdot V_b^{\mu,\nu}] = 0$.

Ainsi, pour tout $b \in B$ l'application

$$\begin{array}{rccc} (\Gamma_{1,b})_* \circ j_b^* : & CH_k(X_b)_{\mathbb{Q}} & \to & CH_k(X_b)_{\mathbb{Q}} \\ & Z & \mapsto & NZ \end{array}$$

est surjective. Pour montrer la proposition **??**, il suffit maintenant de montrer que chaque composante connexe de D domine B. Cela résulte du lemme suivant. ♡

Lemme 1 *Soient D, X et B des variétés connexes lisses, $\pi : X \to B$ un morphisme lisse et $j : D \to X$ un morphisme propre tels que $\pi \circ j : D \to B$ n'est pas dominant. Soit Z une sous-variété de X contenue dans une fibre $X_b := X \times_B b$. Alors $j^*(Z) = 0$ dans $\mathrm{CH}(j^{-1}(Z))$.*

On note R la fermeture de $(\pi \circ j)(D)$ dans B et $S := \pi^{-1}(R)$ l'image réciproque de R dans X, si bien que $j : D \to X$ se factorise en $D \overset{j_S}{\to} S \hookrightarrow X$ (où le morphisme j_S est propre).

Si Z ne rencontre pas S, on a $j^{-1}(Z) = 0$ et le lemme est vrai.

Supposons donc $Z \subset S$. Dans le cas où l'immersion $S \hookrightarrow X$ est régulière on peut calculer directement $j^*(Z)$ à l'aide de la formule d'excès: la classe d'excès relative à l'immersion $S \hookrightarrow X$ est image réciproque par π de la classe de $R \hookrightarrow B$ et son intersection avec Z est nulle. Le cas général procède de la même idée: on se ramène au cas lisse par une construction classique, due à Fulton (*cf.* [**?**], chap. 8, p 130).

Soient $\psi : \tilde{R} \to B$ une désingularisation de R et $\phi : \tilde{S} \to X$ la désingularisation de S telle que $\tilde{S} = S \times_R \tilde{R}$. Les immersions suivantes sont régulières :

$$\begin{array}{ll} \delta_{\tilde{R}} : \tilde{R} \to \tilde{R} \times \tilde{R} & \qquad (\mathrm{Id} \times \psi) \circ \delta_{\tilde{R}} : \tilde{R} \to \tilde{R} \times B \\ \delta_{\tilde{S}} : \tilde{S} \to \tilde{S} \times \tilde{S} & \qquad (\mathrm{Id} \times \phi) \circ \delta_{\tilde{S}} : \tilde{S} \to \tilde{S} \times X. \end{array}$$

Soit $b' \in \tilde{R}$ un point tel que $\psi(b') = b$. Les fibres X_b et $X_{b'} := X \times_B b' \subset \tilde{S}$ sont canoniquement isomorphes; soit $\tilde{Z}$ l'image de Z par cet isomorphisme. On pose d'autre part $\tilde{D} := D \times_S \tilde{S}$. Nous allons maintenant appliquer la formule d'excès au diagramme cartésien ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z} \times_{\tilde{S}} \tilde{D} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{Z} \times \tilde{D} \arrow[d] \\ \tilde{S} \arrow[r, "\delta_{\tilde{S}}"'] \arrow[d] & \tilde{S} \times \tilde{S} \arrow[d, "\phi \times Id"'] \\ \tilde{S} \arrow[r, "(\phi \times Id) \circ \delta_{\tilde{S}}"'] & X \times \tilde{S} \end{tikzcd}$$

D'après [?], th. 6.3, p 102, on a :

$$\begin{aligned}((\phi \times Id) \circ \delta_{\tilde{S}})^!(\tilde{Z} \times \tilde{D}) &= \delta_{\tilde{S}}^!(\tilde{Z} \times \tilde{D}) \cap c_r(\mathcal{N}(\tilde{S}, \tilde{S} \times \tilde{S}), \mathcal{N}(\tilde{S}, \tilde{X} \times \tilde{S})) \\ &= \delta_{\tilde{S}}^!(\tilde{Z} \times \tilde{D}) \cap \pi^* c_r(\mathcal{N}(\tilde{R}, \tilde{R} \times \tilde{R}), \mathcal{N}(\tilde{R}, B \times \tilde{R})) \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque $c_r(\mathcal{N}(\tilde{R}, \tilde{R}\times\tilde{R}), \mathcal{N}(\tilde{R}, B\times\tilde{R}))$ est la classe d'un cycle à support dans un fermé strict de B qu'on peut choisir de manière à ce qu'il ne rencontre pas b.

Ainsi la classe $((\phi\times Id)\circ\delta_{\tilde{S}})^!(\tilde{Z}\times\tilde{D}) \in \mathrm{CH}_\bullet(\tilde{Z}\times_{\tilde{S}}\tilde{D})$ est nulle. Mais par construction on a $\tilde{Z}\times_{\tilde{S}}\tilde{D} = j^*(Z)\times_S \tilde{S}$ et la classe $((\phi\times Id)\circ\delta_{\tilde{S}})^!(\tilde{Z}\times\tilde{D})$ s'envoie sur $j^*(Z)$ dans $\mathrm{CH}_\bullet(j^{-1}(Z))$. On a donc $j^*(Z) = 0$, ce qui achève la preuve du lemme **??**. ♡

Fin de la preuve du théorème ??.

Soit $b \in B$ et soit $Z \in \mathrm{CH}_k(X_b)$. D'après la proposition **??**, il existe un cycle $Z_D \in \mathrm{CH}_0(D_b)_{\mathbb{Q}}$ tel que $\Gamma_{1,b}(Z_D) = Z$. On pose $Z_D = \sum_{\substack{i\in\{1,\cdots,r\}\\ j\in\{1,\cdots,r_i\}}} \alpha_{i,j}x_{i,j}$, avec $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}^*$ et $x_{i,j} \in D_{i,b}$.

Pour tout revêtement fini $\rho : B' \to B$, on note $\rho_i : D'_i \to D_i$, $\rho_D : D' \to D$ et $\rho_{D,b} : D'_b \to D_b$ les revêtements fini de D_i, D et de D_b induits. Si $b' \in B'$ est un point vérifiant $\rho(b') = b$, on note $D'_{i,b'} := D'_i \times_{B'} b'$ la fibre de D'_i. On a un isomorphisme canonique $\rho_{i\,|D'_{i,b'}} : D'_{i,b'} \simeq D_{i,b}$. On note $x' \in D'_{i,b'}$ l'image réciproque d'un point $x \in D_{i,b}$ par cet isomorphisme, et $Z'_D \in \oplus_{i=1}^r \mathrm{CH}_0(D'_{i,b})_{\mathbb{Q}}$ l'image réciproque de Z_D.

Quitte à restreindre B, on peut supposer que B est une courbe lisse rencontrant U, grâce au théorème de Bertini. Il existe alors un revêtement fini $\rho : B' \to B$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et un point $b' \in B'$ vérifiant $\rho(b') = b$ tels que pour tout $x_{i,j} \in D_{i,b}$ il existe une section $\sigma_{i,j} : B' \to D'_i$, telle que $\sigma_{i,j}(b') = x'_{i,j}$. Soit $C_{i,j} \subset D'_i$ l'image de $\sigma_{i,j}$; soit $C := \frac{1}{n}\sum_{\substack{i\in\{1,\cdots,r\}\\ j\in\{1,\cdots,r_i\}}} \alpha_{i,j}C_{i,j} \in \mathrm{CH}_1(D')_{\mathbb{Q}}$ et soit $C_{b'}$ la restriction de C à $D'_{b'}$.

D'une part, par définition, on a $(\Gamma_{1,\beta}\circ\rho_{D,\beta})_*(C_b) = Z$.

D'autre part, par la seconde hypothèse du théorème **??**, pour tout $\beta' \in B'$ tel que $\rho(\beta') = \beta \in U$, on a :

$$(\Gamma_\beta \circ \Gamma_{1,\beta} \circ \rho_{D,\beta})_*(C_{\beta'}) \in i^*_{Y,\beta}H.$$

Par l'argument standard developpé par Bloch et Srinivas [?] et généralisé par Paranjape [?], on en déduit qu'il existe

- un cycle $W_1 \in \mathrm{CH}_1(D')_{\mathbb{Q}}$ tel que $(\Gamma\circ\Gamma_1\circ\rho_D)_*(W_1) \in H$;
- un cycle $W_2 \in \mathrm{CH}_1(D')_{\mathbb{Q}}$ ne dominant pas B

tels que pour tout $\beta' \in B'$ on a :

$$(\Gamma_\beta \circ \Gamma_{1,\beta} \circ \rho_{D,\beta})_*(C_{\beta'}) = (\Gamma_\beta \circ \Gamma_{1,\beta} \circ \rho_{D,\beta})_*(W_{1,\beta'} + W_{2,\beta'}),$$

où $W_{1,\beta'}$ et $W_{2,\beta'}$ sont les images réciproques de W_1 et de W_2 dans $\mathrm{CH}_1(D'_{\beta'})$. Or, d'après le lemme **??** (appliqué aux composantes connexes d'une désingularisée de W_2), on a $W_{2,\beta'} = 0$. Finalement, on a :

$$(\Gamma_b)_*(Z) = (\Gamma_b \circ \Gamma_{1,b} \circ \rho_{D,b})_*(W_{1,b}) \in i^*_{Y,b} H,$$

ce qui achève la preuve du théorème **??**. ♡

Références

[B-S] S.Bloch, V.Srinivas. *Remarks on correspondences and algebraic cycles.* Amer. J. of Math. 105, p 1235-1253, (1980).

[F] W.Fulton. *Intersection theory* Ergebnisse der Math. (1984).

[P] K.Paranjape. *Cohomological and cycle-theoretic connectivity.* Annals of Math. 139, série 2, p 641-660 (1994).