SUR LES VARIÉTÉS DE HODGE DES HYPERSURFACES

ANIA OTWINOWSKA

0. Introduction

0.1. **Avant-propos.** Un théorème célèbre de Noether affirme que le groupe de Picard d'une surface générale de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ de degré supérieur ou égal à 4 est engendré par la classe d'une section hyperplane. Identifions le groupe de Picard d'une surface lisse $X \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ à l'espace $\mathrm{H}^{1,1}(X) \cap \mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$ des classes de Hodge ; le théorème de Noether admet alors la généralisation naturelle suivante. Soit Y une variété complexe projective lisse de dimension $2n+1$ et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible suffisamment ample sur Y. Alors une hypersurface générale X de $|\mathcal{L}| = \mathbb{P}\mathrm{H}^0(Y,\mathcal{L})$ ne possède pas de classe de Hodge non triviale : nous avons $\mathrm{H}^{n,n}(X)_{\mathrm{ev}} \cap \mathrm{H}^{2n}(X,\mathbb{Q}) = 0$, où $\mathrm{H}^{n,n}(X)_{\mathrm{ev}} = \mathrm{H}^{n,n}(X) \cap \mathrm{H}^{2n}(X,\mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ désigne un supplémentaire de l'image de $\mathrm{H}^{n,n}(Y)$ dans $\mathrm{H}^{n,n}(X)$ (la définition précise est donnée à la section 0.2.1).

La motivation principale de cet article est l'étude du *lieu de Noether-Lefschetz* paramétrant les hypersurfaces lisses $X \in |\mathcal{L}|$ qui possèdent une classe de Hodge non triviale ; c'est une réunion dénombrable de sous-variétés algébriques de l'ouvert $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} \subset |\mathcal{L}|$ paramétrant les hypersurfaces lisses. Il reflète le comportement de la cohomologie rationnelle $\mathrm{H}^{2n}(X,\mathbb{Q})$ vis-à-vis de la variation des structures de Hodge sur la cohomologie évanescente à coefficients complexes $\mathrm{H}^{2n}(X,\mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$. Son importance tient en grande partie à la conjecture de Hodge qui affirme que l'espace des classes de Hodge de X est engendré par les classes des sous-variétés algébriques de X ; les composantes du lieu de Noether-Lefschetz devraient donc paramétrer des familles non triviales de sous-variétés algébriques des hypersurfaces de $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$.

Soit plus généralement Y une variété complexe projective lisse de dimension $N+1$, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible suffisamment ample sur Y, $X \in |\mathcal{L}|$ une hypersurface lisse et $\lambda \in F^k\mathrm{H}^N(X,\mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ une classe de cohomologie évanescente, où $F^\bullet$ désigne la filtration de Hodge et $k \in \{1,\dots,N\}$. On appelle *variété de Hodge* associée à λ dans un voisinage contractile $U \subset |\mathcal{L}|$ de X le fermé analytique $\mathcal{N}^{\mathcal{L},k}_{\lambda,U}$ où l'image par transport plat de la classe λ reste dans $F^k\mathrm{H}^N(X,\mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$. Dans le cas $\lambda \in \mathrm{H}^N(X,\mathbb{Q})$ et $2k = N$, la classe λ est de Hodge, et le lieu $\mathcal{N}^{\mathcal{L},k}_{\lambda,U}$ est inclus dans le lieu de Noether-Lefschetz.

Nous montrons que *si $\mathcal{L}$ est suffisamment ample et si la codimension de la variété de Hodge $\mathcal{N}^{\mathcal{L},k}_{\lambda,U}$ associée à une classe $\lambda \in F^k\mathrm{H}^N(X,\mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ est suffisamment petite, la classe λ est une combinaison linéaire à coefficients complexes des projetés sur la cohomologie évanescente des classes de sous-variétés algébriques de X de petit degré.* En particulier, la petite codimension de $\mathcal{N}^{\mathcal{L},k}_{\lambda,U}$ force la dimension de X à être paire : nous avons $N = 2k$.

Comme corollaire, nous obtenons que *les composantes de plus petites codimensions du lieu de Noether-Lefschetz sont définies par des classes des sous-variétés algébriques*, comme le prédit la conjecture de Hodge. Cependant les classes de sous-variétés algébriques (de petit degré) sont ici caractérisées par leur seul comportement vis-à-vis de la variation des structures de Hodge sur $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$, sans qu'intervienne leur caractère rationnel.

0.2. **Énoncé du théorème principal.** Soit Y une variété complexe projective lisse de dimension $N+1$ munie d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}(1)$, soit $d \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{V}^d \subset \mathrm{H}^0(Y,\mathcal{O}(d))$ l'ouvert paramétrant (à la multiplication par un scalaire près) les hypersurfaces projectives lisses de Y de classe $c_1(\mathcal{O}(d))$. Pour tout $F \in \mathcal{V}^d$ nous notons $j_F : X_F \to Y$ l'immersion fermée de l'hypersurface correspondante.

0.2.1. *Cohomologie évanescente et sous-variétés de X_F.* Nous notons

$$\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}} = \mathrm{Ker}\,(g : \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}^{N+2}(Y, \mathbb{C})),$$

la cohomologie évanescente de X_F, où g désigne le morphisme de Gysin. Le théorème de Lefschetz difficile affirme que nous avons une somme directe orthogonale pour le cup-produit

$$\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C}) = \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}} \oplus j_F^* \mathrm{H}^N(Y, \mathbb{C}).$$

Si W est une sous-variété de X_F (c'est-à-dire un sous-schéma fermé réduit) de dimension pure n, chaque composante irréductible de W définit par dualité de Poincaré une classe dans $\mathrm{H}^{2N-2n}(X_F, \mathbb{C})$. Lorsque $2n = N$, nous notons $H(W)$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ engendré par les projections orthogonales de ces classes.

0.2.2. *Variétés de Hodge.* Nous avons une famille de structures de Hodge ($\mathcal{H}^N_{\mathbb{Z}} = R^N \pi_* \mathbb{Z}$; $\mathcal{H}^N = \mathcal{H}^N_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{V}^d}$; $F^\bullet \mathcal{H}^N$) sur $\mathcal{V}^d$, telle que pour tout $F \in \mathcal{V}^d$ l'espace $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})$ s'identifie canoniquement à la fibre en F du faisceau localement constant $\mathcal{H}^N_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$. Pour tout voisinage ouvert simplement connexe $U \subset \mathcal{V}^d$ de F, le faisceau $\mathcal{H}^N_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ restreint à U est constant et toute classe $\lambda_F \in \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})$ définit une section $\lambda \in (\mathcal{H}^N_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C})(U)$. Pour tout $G \in U$ nous notons $\lambda_G \in \mathrm{H}^N(X_G, \mathbb{C})$ la valeur de la section λ en G : c'est l'image de la classe λ_F par transport plat dans U.

Soit $F \in \mathcal{V}^d$, soit $n \in \{0, \ldots, N\}$ et soit $\lambda_F \in F^n \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ une classe de cohomologie non nulle. Nous introduisons le fermé analytique

$$\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U} = \{G \in U \mid \lambda_G \in F^n \mathrm{H}^N(X_G, \mathbb{C})\}.$$

0.2.3. *Cas N=2n.* Les variétés $\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U}$ jouent un rôle particulièrement important lorsque $2n = N$. On appelle alors lieu de Noether-Lefschetz, que nous notons $\mathcal{N}^{d,n}$, la réunion des variétés $\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U}$ pour tous les couples (λ, U) tels que la classe $\lambda \in (\mathcal{H}^{2n}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C})(U)$ est rationnelle, c'est-à-dire appartient à $(\mathcal{H}^{2n}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q})(U)$; nous avons encore

$$\mathcal{N}^{d,n} = \{G \in \mathcal{V}^d \mid \mathrm{H}^{2n}(X_G, \mathbb{Q}) \cap F^n \mathrm{H}^{2n}(X_G, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}} \neq 0\}.$$

Le lieu $\mathcal{N}^{d,n}_\lambda = \bigcup_U \mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U}$ défini par recollement est une sous-variété *algébrique* de $\mathcal{V}^d$ et $\mathcal{N}^{d,n}$ est une réunion dénombrable de variétés *algébriques* de $\mathcal{V}^d$ (*cf.* [CDK]). La conjecture de Hodge prédit que toute classe de $\mathrm{H}^{2n}(X_F, \mathbb{Q}) \cap F^n \mathrm{H}^{2n}(X_F, \mathbb{C})$ est algébrique, c'est-à-dire combinaison linéaire à coefficients rationnels de classes de sous-variétés algébriques de X_F. Si nous supposons la conjecture de Hodge vraie pour Y, le lieu de Noether-Lefschetz paramètre donc les hypersurfaces pour lesquelles la conjecture de Hodge est non triviale.

0.2.4. *Énoncé.* Nous montrons ici :

Théorème 1. *Soient $n \in \{1, \ldots, [N/2]\}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ des entiers, $F \in \mathcal{V}^d$, U un voisinage ouvert simplement connexe de F dans $\mathcal{V}^d$ et $\lambda_F \in F^n \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ une classe non nulle vérifiant*

$$\mathrm{codim}\,(\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U}, U) \leq b \frac{d^n}{n!}.$$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}^*_+$ qui ne dépend que de Y, de $\mathcal{O}(1)$ et de ε, telle que si $d \geq C b^a$, où $a = 2^{\mathrm{h}^0(Y, \mathcal{O}(1)) - 1}$, alors pour tout n, F, U et λ_F comme ci-dessus

(1) *$2n = N$ et*

(2) *il existe une sous-variété W de X_F de dimension n et de degré inférieur à $(1 + \varepsilon) b$, telle que $\lambda \in H(W)$.*

Nous pensons que le théorème 1 reste vrai pour $n \in \{[N/2]+1, \ldots, N\}$.

Le cas $2n = N$ du théorème 1 implique immédiatement le corollaire suivant, qui est une version asymptotique très faible de la conjecture de Hodge pour les hypersurfaces.

Corollaire. *Nous supposons Y de dimension $2n+1$ et que toute classe dans* $\mathrm{H}^{2n}(Y, \mathbb{Q}) \cap F^n\mathrm{H}^{2n}(Y, \mathbb{C})$ *est algébrique. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que toute classe $\lambda_F \in$* $\mathrm{H}^{2n}(X_F, \mathbb{Q}) \cap F^n\mathrm{H}^{2n}(X_F, \mathbb{C})$ *vérifiant*

$$\operatorname{codim}(\mathcal{N}_\lambda^{d,n}, \mathcal{V}^d) \leq \left(\frac{d}{C}\right)^{\frac{1}{a}} \frac{d^n}{n!},$$

où $a = 2^{\mathrm{h}^0(Y, \mathcal{O}(1))}$, est algébrique.

L'hypothèse de rationnalité n'est utilisée ici que pour la composante non évanescente de la classe λ_F. Plutôt que de plaider en faveur de la conjecture de Hodge, le théorème 1 met donc en évidence le comportement exceptionnel des classes algébriques vis-à-vis de la variation des structures de Hodge.

Le théorème 1 est l'aboutissement de l'étude des composantes des petite codimension du lieu de Noether-Lefschetz menée dans [Gre], [V1], [V2] et [O1]. Il complète et généralise [O1], où nous avons montré dans le cas $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2n+1}$ que sous les hypothèses du théorème 1 les variétés $\mathcal{N}_{\lambda,U}^{d,n}$ sont constituées par des hypersurfaces contenant une sous-variété W de dimension n et de degré inférieur à $(1+\varepsilon)b$, mais où nous ne savions pas montrer $\lambda \in H(W)$. Le cas $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N+1}$, $n = [N/2]$ du théorème 1 résout asymptotiquement la conjecture 1 de [O1].

0.3. **Structure de la preuve.**

0.3.1. *Invariants algébriques des variétés de Hodge.* La théorie de Griffiths [Gri] et de Carlson, Green, Griffiths et Harris [CCGH] ramène l'étude des variations infinitésimales de structures de Hodge d'hypersurfaces suffisamment amples à un problème algébrique (section 1.1). Elle décrit notamment le lieu $\mathcal{N}_{\lambda,U}^{d,n}$ à l'ordre 1 au voisinage de F, et cette description est exploitée dans [GH], [Gre], [V1] et [V2].

En raffinant cette étude nous décrivons le lieu $\mathcal{N}_{\lambda,U}^{d,n}$ au voisinage de F par une suite E_r d'idéaux gradués de l'algèbre $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y(i))$ (section 1.2).

0.3.2. *Étude locale des variétés de Hodge.* Cette section généralise [O1].

Nous traduisons d'abord les propriétés géométriques du lieu $\mathcal{N}_{\lambda,U}^{d,n}$ par des propriétés algébriques des idéaux E_r (proposition 1).

D'autre part, l'étude asymptotique de la fonction de Hilbert de ces idéaux (lorsque le degré d de l'hypersurface tend vers l'infini) permet de montrer qu'il existe un entier i petit devant d tel que le lieu-base des éléments homogènes de degré i de E_0 est de dimension n (lemme 2). En affinant notre étude, nous montrons ensuite par des techniques purement algébriques que l'idéal E_0 contient l'idéal d'un sous-schéma V de Y de dimension pure n et de petit degré (proposition 2).

Nous supposons d assez grand et nous montrons grâce aux propositions 1 et 2 que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ l'idéal E_r contient le produit d'un idéal fixe (trivial lorsque V est réduit) et de la puissance $(r+1)$-ième de l'idéal I_W du schéma réduit W associé à V (proposition 3). Enfin, nous montrons $W \subset X_F$ (proposition 4).

0.3.3. *Étude globale des variétés de Hodge.* Nous étudions l'image par transport plat de la classe λ_F dans le lieu $\mathcal{V}^d(W)$ des hypersurfaces lisses contenant W. Nous identifions l'espace tangent en F à $\mathcal{V}^d(W)$ à l'espace des éléments homogènes de degré d de I_W. Nous montrons ensuite grâce aux propositions 3 et 4 que les dérivées à tout ordre en F de certaines équations de $\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U}$ le long du lieu $\mathcal{V}^d(W)$ sont nulles (et même de toutes les équations dans le cas où V est réduit). Nous en déduisons par un argument d'unicité du prolongement analytique que la représentation de monodromie de $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$ engendrée par λ est contenue dans un petit sous-espace de $H^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ (proposition 5).

La fin de la preuve repose alors sur un énoncé de topologie que nous avons montré dans [O2] : pour tout sous-schéma fermé W de X_F dont l'idéal est engendré en degré petit devant d, l'action de monodromie de $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$ est triviale sur $H(W)$ et irréductible sur son orthogonal dans $H^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ (proposition 6). La proposition 5 implique alors que la projection orthogonale de λ sur $H(W)^\perp$ est nulle, ce qui implique le théorème 1.

0.3.4. *Remarque.* Dans [O1] nous conjecturons le résultat du théorème 1 avec une borne sur d linéaire en b, alors que la borne que nous obtenons n'est que polynomiale en b : l'obstruction essentielle pour obtenir une borne linéaire vient de ce que nous ne savons pas borner linéairement en b le degré du plus grand générateur de I_W ; la borne polynomiale est obtenue grâce au lemme 5.

1. Invariants algébriques des variétés de Hodge

Les notations sont celles de la section 0.2.2. Posons

$$S^i = \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y(i)), \quad S = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} S^i \qquad \text{et} \qquad K^i = \mathrm{H}^0(Y, \Omega_Y^{N+1} \otimes \mathcal{O}_Y(i)), \quad K = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} K^i,$$

si bien que K est un S-module gradué de type fini. Plus généralement, pour tout S-module gradué M nous notons $M^i \subset M$ les éléments homogènes de degré i.

1.1. Rappels sur les lieux de Hodge.

Nous rappelons brièvement une théorie exposée en détail dans [Gri] et [CCGH].

1.1.1. *Théorie de Griffiths.* Nous avons une application résidu surjective

$$\mathrm{res} : \mathrm{H}^{N+1}(Y \setminus X_F, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in K^{kd}$, la forme différentielle $\frac{\omega}{F^k} \in \mathrm{H}^0(Y \setminus X_F, \Omega^{N+1}_{Y\setminus X_F})$ définit une classe $\left[\frac{\omega}{F^k}\right] \in \mathrm{H}^{N+1}(Y \setminus X_F, \mathbb{C})$. Nous notons $\phi_{F,k}(\omega) = \mathrm{res}\left[\frac{\omega}{F^k}\right]$ son image dans $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$.

Griffiths a montré que si d est plus grand qu'une constante $C \in \mathbb{R}^*_+$ qui ne dépend que de Y et de $\mathcal{O}(1)$, cette construction donne pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ des applications surjectives

$$\phi_{F,k} \colon K^{kd} \to F^{N+1-k}\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$$

où nous avons posé $F^k\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}} = F^k\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C}) \cap \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ pour $k \in \{1, \dots, N+1\}$ et $F^k\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}} = \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ pour $k \leq 0$.

Nous supposerons dorénavant $d \geq C$.

1.1.2. *Équations locales des variétés de Hodge.* Comme $F^k\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ est l'orthogonal de $F^{N+1-k}\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ pour le cup-produit, la surjectivité de $\phi_{F,k}$ implique pour tout $\mu_F \in \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$

$$\mu_F \in F^k\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \omega \in K^{kd}, \quad \mu_F \smile \phi_{F,k}(\omega) = 0,$$

où $\smile$ désigne le cup-produit.

Supposons $\mu_F \in F^k \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$. Alors pour tout $G \in U$

$$G \in \mathcal{N}^{d,k}_{\mu,U} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \omega \in K^{kd}, \qquad \mu_G \smile \phi_{G,k}(\omega) = 0.$$

La variété $\mathcal{N}^{d,k}_{\mu,U} \subset U$ est donc définie par $\dim(K^{kd})$ équations posssiblement redondantes.

1.2. **Déformations à tout ordre des lieux de Hodge.** Nous fixons désormais $n \in \{1, \ldots, N\}$, $F \in \mathcal{V}^d$, U un voisinage ouvert simplement connexe de F dans $\mathcal{V}^d$ et $\lambda_F \in F^n \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$.

1.2.1. *Définition.* Pour tout $r \in \mathbb{N}$ nous posons

$$E_r = \left\{ P \in S^\bullet \mid \forall \omega \in K^{(n+r+1)d-\bullet},\ \lambda_F \smile \phi_{F,n+r+1}(P\omega) = 0 \right\}.$$

L'idéal E_0 a été étudié dans [Gre] et l'idéal E_1 dans [O1].

1.2.2. *Description alternative des idéaux E_r.* Nous choisissons des cycles $\gamma_{F,i}$, $i \in \{1, \ldots, t\}$, $t = \mathrm{h}_N(X_F)$, dont les classes $[\gamma_{F,i}]$ forment une base de $\mathrm{H}_N(X_F, \mathbb{Q})$. Nous notons $\lambda_F^\vee \in \mathrm{H}_N(X_F, \mathbb{C})$ l'image de $\lambda_F \in \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ par la dualité de Poincaré et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ les coordonnées complexes de $\lambda_F^\vee$: nous avons $\lambda_F^\vee = \sum_{i=1}^t \lambda_i [\gamma_{F,i}]$.

Nous choisissons ensuite des cycles $\mathrm{Tub}\,\gamma_i$, $i \in \{1, \ldots, t\}$, à support dans $Y \setminus X_F$ dont les classes $[\mathrm{Tub}\,\gamma_i]$ sont les images des $[\gamma_{F,i}]$ par l'application tube : $\mathrm{H}_N(X_F, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}_{N+1}(Y \setminus X_F, \mathbb{Z})$.

Quitte à restreindre le voisinage $U \subset \mathcal{V}^d$ de F, nous supposons que pour tout $G \in U$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, t\}$ nous avons $X_G \cap \mathrm{Tub}\,\gamma_i = \emptyset$. La classe de $\mathrm{Tub}\,\gamma_i$ dans $\mathrm{H}_{N+1}(Y \setminus X_G, \mathbb{Z})$ s'identifie alors à l'image par l'application tube de $[\gamma_{G,i}] \in \mathrm{H}_N(X_G, \mathbb{Z})$, image de $[\gamma_{F,i}] \in \mathrm{H}_N(X_F, \mathbb{Z})$ par transport plat dans U.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\omega \in K^{kd}$ nous avons donc

$$\lambda_G \smile \phi_{G,k}(\omega) = \sum_{i=1}^t \lambda_i \int_{\gamma_{G,i}} \phi_{G,k}(\omega) = \sum_{i=1}^t \lambda_i \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_i} \frac{\omega}{G^k}.$$

En particulier, nous en déduisons pour tout $r \in \mathbb{N}$

$$E_r = \left\{ P \in S^\bullet \mid \forall \omega \in K^{(n+r+1)d-\bullet},\ \sum_{i=1}^t \lambda_i \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_i} \frac{P\omega}{F^{n+r+1}} = 0 \right\}.$$

1.2.3. *Interprétation géométrique.* L'idéal $E_r \subset S$ décrit le lieu $\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U}$ à l'ordre $r+1$ au voisinage de F. Plus précisément, si $\tau_F \colon T_F U \to S^d$ désigne l'isomorphisme canonique, pour tout $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r+1}) \in (T_F U)^{r+1}$ les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall \omega \in K^{nd}$, $\frac{\partial}{\partial \vec{v}_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \vec{v}_{r+1}} (G \mapsto \lambda_G \smile \phi_{G,n}(\omega))(F) = 0$

(2) $\tau_F(\vec{v}_1) \cdots \tau_F(\vec{v}_{r+1}) \in E^{d(r+1)}_{r+1}$.

Remarquons que $E_r \neq S$ dès que $\lambda_F \notin F^{n+r+1} \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$.

1.2.4. *Point de vue dual.* Pour tout $r \in \mathbb{N}$ nous pouvons définir le module gradué

$$M_r = \left\{ \omega \in K^\bullet \mid \forall P \in S^{(n+r+1)d-\bullet},\ \lambda_F \smile \phi_{F,n+r+1}(P\omega) = 0 \right\}.$$

L'espace $\phi_{F,n+r+1}\left(M_r^{(n+r+1)d}\right)$ est alors l'espace $\bigoplus_{i \in \{n+r+1, \ldots, N\}} H^{i,N-i}(\lambda_F)$ étudié dans [CCGH] et [GH].

L'idéal E_r est l'annulateur du module K/M_r et la forme linéaire $\omega \mapsto \lambda_F \smile \phi_{F,n+r+1}(\omega)$ sur $K^{(n+r+1)d}$ induit une dualité parfaite

$$(K/M_r)^\bullet \otimes (S/E_r)^{(n+r+1)d-\bullet} \to \mathbb{C}.$$

1.2.5. *Les idéaux $E_{r,i}$.* Le S-module gradué K est de type fini ; il est donc engendré en degré inférieur à un entier $m \in \mathbb{N}$ qui ne dépend que de Y et de $\mathcal{O}_Y(1)$.

Posons $u = \dim K^m$ et choisissons une base $(\omega_1, \dots, \omega_u)$ de K^m. Pour tout $i \in \{1, \dots, u\}$ posons

$$E_{r,i} = \left\{ P \in S^\bullet \mid \forall Q \in S^{(n+r+1)d-m-\bullet},\ \lambda_F \smile \phi_{F,n+r+1}(PQ\omega_i) = 0 \right\}.$$

L'idéal $E_{r,i}$ est l'annulateur du module $S\omega_i/(M_r \cap S\omega_i)$. Lorsque $E_{r,i} \neq S$, la forme linéaire $P \mapsto \lambda_F \smile \phi_{F,n+r+1}(P\omega_i)$ sur $S^{(n+r+1)d-m}$ est non nulle et l'idéal $E_{r,i}$ est Gorenstein de degré du socle $(n+r+1)d - m$ (voir section 5.1.2 pour la définition d'un idéal Gorenstein). Nous avons

$$E_r = \bigcap_{i=1}^{u} E_{r,i}.$$

2. Description locale des variétés de Hodge

2.1. **Propriétés des idéaux E_r issues de la géométrie.** Dans cette section nous énonçons les propriétés algébriques des idéaux E_r qui résultent de leur interprétation géométrique.

Les notations sont celles de la section 1.2. Pour tout idéal $I \subset S$ et pour $r \in \mathbb{N}$ nous notons $(I)^r$ la puissance r-ième de I (par opposition à I^r, qui désigne l'ensemble des éléments homogènes de degré r de I).

2.1.1. *Dérivation des éléments de S.* Soit $C_Y^* \subset \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}(1))^\vee$ le cône privé de l'origine de $Y \subset \mathbb{P}\mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}(1))^\vee$. Soit $\pi : C_Y^* \to Y$ la projection naturelle. Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, soit $h_a : C_Y^* \to C_Y^*$ l'homothétie de rapport a. Soit $\mathcal{T}_Y$ le faisceau tangent de Y et soit $\mathcal{T}_{C_Y^*}$ le faisceau tangent de C_Y^*. Enfin, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ nous notons $\widetilde{T}^i \subset \mathrm{H}^0(C_Y^*, \mathcal{T}_{C_Y^*})$ le sous-espace des sections $\widetilde{v}$ vérifiant $(h_a)_* \widetilde{v} = a^{-i}\widetilde{v}$ pour tout $a \in \mathbb{C}^*$. Si nous identifions S à un sous-anneau de l'anneau des fonctions sur C_Y^* alors le S-module gradué $\widetilde{T} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \widetilde{T}^i$ définit un faisceau localement libre $\widetilde{\mathcal{T}}_Y$ sur Y (si bien que $\mathrm{H}^0(Y, \widetilde{\mathcal{T}}_Y \otimes \mathcal{O}_Y(i)) = \widetilde{T}_i$) qui s'insère dans la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to \widetilde{\mathcal{T}}_Y \to \mathcal{T}_Y \to 0.$$

La dérivée de Lie le long d'un champ de vecteurs sur C_Y^* donne pour tous les entiers relatifs i et j une application

$$\widetilde{T}^i \times S^j \to S^{i+j}, \quad (\widetilde{v}, P) \mapsto L_{\widetilde{v}} P.$$

2.1.2. *Énoncé.* La proposition 1 ci-dessous est une adaptation de la proposition 3 de [O1] qui traite le cas $Y = \mathbb{P}^{N+1}$ et $n = N/2$. La première assertion est une traduction algébrique de la transversalité de Griffiths. La seconde est une conséquence de la formule de Leibniz pour la dérivation et s'inspire de l'énoncé (3.4.6) de [V2]. Enfin la troisième traduit le fait que les formes différentielles exactes ont une classe de cohomologie nulle. La preuve de la proposition 1 occupe la section 4.

Proposition 1. *Pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ nous avons, avec la convention $E_{-1} = S$,*

1. $E_r = (E_{r+1} : F)$.
2. *Pour un point générique F de $(\mathcal{N}_{\lambda,U}^{d,n})^{\mathrm{red}}$ nous avons* $(E_r)^2 \tau_F \left(T_F\, (\mathcal{N}_{\lambda,U}^{d,n})^{\mathrm{red}} \right) \subset E_{r+1}$.
3. *Pour tout $P \in E_r^\bullet$ et pour tout $\widetilde{v} \in \widetilde{T}^j$ nous avons*

$$(L_{\widetilde{v}} P) F - (n+r+1) P L_{\widetilde{v}} F \in E_{r+1}^{\bullet+d+j}.$$

2.1.3. *Les idéaux E_r et l'idéal jacobien.* Le S-module $\widetilde{T}$ est de type fini, il est donc engendré en degré inférieur à un entier $s \in \mathbb{N}$ qui ne dépend que de Y et de $\mathcal{O}_Y(1)$. Soit J_F l'idéal jacobien de F, engendré par F et par les dérivées partielles $L_{\widetilde{v}}F$, $\widetilde{v} \in \widetilde{T}$, donc engendré en degré inférieur à $d+s$. Comme X_F est lisse, l'idéal J_F est sans points base. Les assertions 1 et 3 de la proposition 1 (pour $r=-1$ et P=1) impliquent donc

Corollaire. *$J_F \subset E_0$; en particulier E_0^{d+s} est sans points-base.*

2.2. **Étude asympotique de la fonction de Hilbert des idéaux E_r.** Dans cette section nous considérons le problème purement algébrique suivant.

2.2.1. *Donnée aglébrique.* Soit S l'algèbre graduée d'un schéma projectif lisse Y de dimension $N+1$ muni d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}_Y(1)$. Nous fixons des entiers strictement positifs u, s, m, b, d et $n \in \{1,\dots,N\}$. Nous considérons les idéaux homogènes $I \subset S$ vérifiant

(1) I^{d+s} est sans points base,
(2) il existe un entier $D \geq (n+1)d - m$ et des idéaux Gorenstein I_i, $i \in \{1,\dots,u\}$ de degré du socle D tels que $I = \bigcap_{i=1}^u I_i$ et
(3) $\dim(S^d/I^d) \leq b\frac{d^n}{n!}$

2.2.2. *Motivation.* Nous adoptons les notations de la section 1.2. Nous supposons de plus

$$\operatorname{codim}(\mathcal{N}_{\lambda,U}^{d,n}, U) \leq b\frac{d^n}{n!}$$

comme dans l'hypothèse du théorème 1. L'énoncé du théorème 1 étant stable par transport plat, nous pouvons supposer sans perdre en généralité $F \in \mathcal{N}_{\lambda,U}^{d,n}$ générique et par conséquent

$$\lambda_F \notin F^{n+1}\mathrm{H}^N(X_F,\mathbb{C})$$

(si $\lambda_F \in F^{n+1}\mathrm{H}^N(X_F,\mathbb{C})$ pour F générique, nous aurions $\operatorname{codim}(\mathcal{N}_{\lambda,U}^{d,n+1}, U) \leq \frac{b(n+1)}{d}\frac{d^{n+1}}{(n+1)!}$, l'étude de $\mathcal{N}_{\lambda,U}^{d,n+1}$ se heurterait à une contradiction pour $d > b(n+1)$ dès la proposition 2). Nous avons alors $E_r \neq S$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

L'idéal $I = E_0$ vérifie alors la donnée algébrique 2.2.1 et les idéaux E_r vérifient l'assertion 2 de la donnée algébrique 2.2.1. En effet, l'assertion 1 pour E_0 est donnée par le corollaire de la proposition 1. L'assertion 2 pour E_r résulte par la section 1.2.5 de ce que $E_r \neq S$. Enfin, l'assertion 3 pour E_0 résulte des isomorphismes $\tau_F : T_F U \simeq S^d$ et $\tau_F : T_F\mathcal{N}_{\lambda,U}^{d,n} \simeq E_0^d$. Nous verrons aussi que les idéaux E_r ne sont pas loin de vérifier l'assertion 3.

Les entiers u, s et m ainsi que l'algèbre S ne dépendent que de Y et de $\mathcal{O}_Y(1)$.

2.2.3. *Énoncé.* L'assertion 1 de proposition 2 ci-dessous généralise la proposition 1 de [O1] qui traite le cas $Y = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{N+1}$ et I Gorenstein. Elle repose sur la comparaison pour $k \to \infty$ entre la fonction de Hilbert $k \mapsto \dim S^k/I^k$ et la dimension des lieux base des systèmes linéaires $I^k \subset S^k$. L'assertion 2 repose sur une majoration asymptotique de la régularité des idéaux $\sqrt{I_V}$ et $\mathfrak{q}$ au sens de Bayer et Mumford. La preuve de la proposition 2 occupe la section 5.

Proposition 2. *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ qui ne dépend que de ε, S, u, s et m, telle que pour tout $d \geq Cb$ et pour tout idéal homogène $I \subset S$ vérifiant la donnée algébrique 2.2.1 l'assertion suivante est vraie.*

Il existe un schéma $V \subset Y$ de dimension pure n et de degré inférieur à $(1+\varepsilon)b$ tel que

(1) *l'idéal I_V de V est inclus dans I*
(2) *les idéaux I_W et $\mathfrak{q}$ sont engendrés en degré inférieur à Cb^a, où I_W désigne l'idéal de $W = V^{\mathrm{red}}$, $\mathfrak{q}$ est défini ci-dessous et $a = 2^{\mathrm{h}^0(Y,\mathcal{O}(1))-1}$.*

2.2.4. *Définition de l'idéal* $\mathfrak{q}$. Comme V est de dimension pure n, I_V est une intersection finie d'idéaux primaires de hauteur n notés $\mathfrak{P}_i$, et I_W est une intersection finie d'idéaux premiers notés $\mathfrak{p}_i$, où $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{P}_i}$. Pour tout i, nous notons b_i la longueur de l'anneau artinien $(S/I_V)_{\mathfrak{p}_i} = (S/\mathfrak{P}_i)_{\mathfrak{p}_i}$ et δ_i le degré du schéma $V(\mathfrak{p}_i)$. Nous avons $(\mathfrak{p}_i)^{b_i} \subset \mathfrak{P}_i$; soit $\beta_i < b_i$ le plus grand entier tel que $(\mathfrak{p}_i)^{\beta_i} \not\subset \mathfrak{P}_i$. Nous posons $\mathfrak{q} = \prod_i (\mathfrak{p}_i)^{\beta_i}$ et $\beta = \sum_i \beta_i \delta_i$. Nous avons $\beta \leq \sum_i \delta_i(b_i - 1) = \deg V - \deg V^{\mathrm{red}} \leq (1-\varepsilon)b$.

Nous avons $\mathfrak{q} I_W \subset I_V$ et si V est réduit, alors $\mathfrak{q} = S$.

2.3. **Les idéaux E_r et le schéma V.** Les notations sont celles de la section 1.2. Nous supposons satisfaites les hypothèses de la section 2.2.2. Comme $F \in \mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U}$ est générique nous pouvons supposer sans perdre en généralité que F vérifie l'assertion 2 de la proposition 1.

L'idéal E_0 vérifie la donnée algébrique 2.2.1. Nous fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$ et nous supposons $d \geq Cb^a$, où $a = 2^{\mathrm{h}^0(Y,\mathcal{O}(1))-1}$ et où C est la constante donnée par la proposition 2. Nous notons V et $W = V^{\mathrm{red}}$ les schémas associés à E_0 par la proposition 2.

La proposition 3 et la proposition 4 ci-dessous généralisent alors respectivement le lemme 2 et le théorème 2 de [O1]. Les preuves occupent respectivement les sections 6 et 7.

Proposition 3. *Il existe une constante $C \in \mathbb{R}^*_+$ qui ne dépend que de ε, de Y et de $\mathcal{O}_Y(1)$ telle que pour tout $d \geq Cb^a$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$ nous avons $\mathfrak{q}(I_W)^{r+1} \subset E_r$.*

Proposition 4. *Supposons $n \leq [N/2]$. Il existe une constante $C \in \mathbb{R}^*_+$ qui ne dépend que de ε, de Y et de $\mathcal{O}_Y(1)$ telle que pour tout $d \geq Cb^a$ nous avons $F \in I_W$.*

3. Description globale des variétés de Hodge

3.1. **Notations et rappels de topologie.** Les notation sont celle de la section 0.2.1.

Le groupe $\pi_1(\mathcal{V}^d, F)$ agit par monodromie sur $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})$. Plus précisément, la théorie de Lefschetz affirme que la représentation de monodromie de $\pi_1(\mathcal{V}^d, F)$ sur $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})$ est somme directe de la représentation triviale sur $j_F^* \mathrm{H}^N(Y, \mathbb{C})$ et d'une représentation irréductible sur $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$.

Si W est une sous-variété de X_F de dimension n, nous notons $\mathcal{V}^d(W) \subset \mathcal{V}^d$ l'espace paramétrant les hypersurfaces lisses contenant W. Nous étudions l'action de monodromie de $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$ sur $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})$: pour tout sous-ensemble $E \subset \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ nous notons $H(E) \subset \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ la $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$-représentation engendrée par E et $E^\perp \subset \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ l'orthogonal de E pour le cup-produit.

3.2. **Étude de $H(\lambda_F)$.** Nous adoptons les notations et les hypothèses des sections 2.3 et 3.1. Nous supposons $d \geq Cb^a$, où $C \in \mathbb{R}^*_+$ est une constante vérifiant les propositions 2, 3 et 4.

L'idée de la proposition 5 ci-dessous est de considérer les équations de $\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U}$ données par les éléments de degré nd de $\mathfrak{q}K$ (voir la section 1.1.2). La proposition 3 implique alors que les dérivées en F à tout ordre le long de $T_F\mathcal{V}^d(W)$ de ces équations sont nulles. Par unicité du prolongement analytique nous en déduisons une condition sur les images par transport plat dans $\mathcal{V}^d(W)$ de la classe λ_F.

Proposition 5. $H(\lambda_F) \subset \phi_{F,n}(\mathfrak{q}K^{nd})^\perp$.

Preuve. — Soient $Q \in \mathfrak{q}$ et $\omega \in K$ des éléments homogènes dont la somme des degrés est nd. Comme $\lambda_F \in F^n\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})$, nous avons $\lambda_F \smile \phi_{F,n}(Q\omega) = 0$.

Lemme 1. *Soit U_W un voisinage simplement connexe de F dans $\mathcal{V}^d(W)$. Pour tout $G \in U_W$ nous avons $\lambda_G \smile \phi_{G,n}(Q\omega) = 0$, où λ_G désigne l'image de λ_F dans $\mathrm{H}^N(X_G, \mathbb{C})$ par transport plat dans U_W.*

Preuve. — La fonction $U_W \to \mathbb{C}$, $G \mapsto \lambda_G \smile \phi_{G,n}(Q\omega)$ est analytique et s'annule en $G = F$. Par unicité du prolongement analytique, il suffit de montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout $\vec{v} \in T_F U_W$ nous avons $\left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\right)^{r+1}(G \mapsto \lambda_G \smile \phi_{G,n}(Q\omega))(F) = 0$.

Or d'après la section 1.2.2, nous avons

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\right)^{r+1}(G \mapsto \lambda_G \smile \phi_{G,n}(Q\omega))(F) &= \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\right)^{r+1}\left(G \mapsto \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_i} \frac{Q\omega}{G^n}\right)(F) \\ &= \frac{(-1)^{r+1}(n+r)!}{(n-1)!} \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_i} \frac{\tau_F(\vec{v})^{r+1} Q\omega}{F^{r+n+1}}.\end{aligned}$$

Comme $\vec{v} \in T_F U_W$, donc $\tau_F(\vec{v}) \in I_W$ et donc $(\tau_F(\vec{v}))^{r+1}Q \in (I_W)^{r+1}\mathfrak{q}$, d'après la proposition 3 nous avons $(\tau_F(\vec{v}))^{r+1}Q \in E_r$, donc $\left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\right)^{r+1}(G \mapsto \lambda_G \smile \phi_{G,n}(Q\omega))(F) = 0$. □

Fin de la preuve de la proposition 5. — Soit $p_W : \widetilde{\mathcal{V}^d(W)} \to \mathcal{V}^d(W)$ le revêtement universel de $\mathcal{V}^d(W)$ et soit $\widetilde{F} \in p_W^{-1}(F)$. Pour tout $G \in \mathcal{V}^d(W)$ et $\widetilde{G} \in p_W^{-1}(G)$ nous notons $\lambda^{\widetilde{F},\widetilde{G}} \in \mathrm{H}^N(X_G, \mathbb{C})$ l'image de λ_F par transport plat le long de l'image par p_W d'un chemin reliant $\widetilde{F}$ à $\widetilde{G}$. Le lieu $\widetilde{\mathcal{N}_{\lambda,\mu}} = \{\widetilde{G} \in \widetilde{\mathcal{V}^d(W)} \mid \lambda^{\widetilde{F},\widetilde{G}} \smile \phi_{G,n}(Q\omega) = 0\}$ est un sous-fermé analytique de $\widetilde{\mathcal{V}^d(W)}$; comme $\widetilde{\mathcal{V}^d(W)}$ est irréductible, le lemme 1 implique $\widetilde{\mathcal{N}_{\lambda,\mu}} = \widetilde{\mathcal{V}^d(W)}$. En particulier, $\widetilde{\mathcal{N}_{\lambda,\mu}}$ contient $p_W^{-1}(F)$, ce qui implique $H(\lambda_F) \subset \phi_{F,n}(Q\omega)^{\perp}$. □

Remarque. — Lorsque V est réduit la proposition 5 donne $H(\lambda_F) \subset F^n\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$. Plus précisément, la preuve implique qu'alors $\mathcal{V}^d(W)$ est inclus dans $\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U}$.

3.3. **Un énoncé de monodromie.** Nous adoptons les notations des sections 3.1 et 0.2.1. Pour toute sous-variété W de X_F de dimension n l'espace $H(W)$ est $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$-invariant, et comme $H(W) \subset \mathrm{H}^{n,n}(X_F)_{\mathrm{ev}}$, le théorème d'indice de Hodge implique que la restriction du cup-produit à $H(W)$ est non dégénérée et nous avons l'égalité de $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$-modules $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}} = H(W) \oplus H(W)^{\perp}$.

Nous supposons $n \in \{1, \ldots, [N/2]\}$ et nous notons $e \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que W est engendré en degré strictement inférieur à e. Remarquons que lorsque W est donné par la proposition 2, nous avons $e \leq Cb^a + 1$. Nous avons montré dans [O2] :

Proposition 6. *Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ qui ne dépend que de Y et de $\mathcal{O}_Y(1)$, telle que pour tout $d \geq Ce$ la $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$-représentation de monodromie sur $\mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$ est*

(1) *irréductible pour $N > 2n$;*

(2) *somme directe d'une représentation triviale sur $H(W)$ et d'une représentation irréductible sur $H(W)^{\perp}$ pour $N = 2n$.*

3.4. **Preuve du théorème 1.** Nous adoptons les hypothèses du théorème 1. Nous fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et nous supposons $d \geq Cb^a$, où $C \in \mathbb{R}_+^*$ est une constante vérifiant les propositions 5 et 6.

Nous avons $\phi_{F,n}(\mathfrak{q}K^{nd}) \neq 0$ (en effet, si nous choisissons par exemple $\omega \in K^{d-\beta}$ et $Q \in \mathfrak{q}^{\beta}$ tels que la section $Q\omega \in K^d$ ne s'annule pas sur X_F, la classe $\phi_{F,n}(F^{n-1}Q\omega) = \mathrm{res}\left[\frac{Q\omega}{F}\right]$ est non nulle), donc $\phi_{F,n}(\mathfrak{q}K^{nd})^{\perp} \neq \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$.

Si $2n < N$, l'assertion 1 de la proposition 6 implique $H(\lambda_F) = \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$, or la proposition 5 implique $\phi_{F,n}(\mathfrak{q}K^{nd})^{\perp} = \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$, contradiction : la classe λ_F n'existe pas.

Si $2n = N$, supposons par l'absurde $\lambda_F \notin H(W)$. Il existe alors des classes $\gamma_F \in H(W)$ et $\nu_F \in H(W)^{\perp} \setminus \{0\}$ telles que $\lambda_F = \gamma_F + \nu_F$. D'une part, comme dim $H(W)^{\perp} > 1$, l'assertion 2 de la proposition 6 implique que la $\pi_1(\mathcal{V}^d(W), F)$-représentation sur $H(W)^{\perp}$ est irréductible et non triviale, donc $H(\lambda_F) = \mathbb{C}\gamma_F \oplus H(W)^\perp$, ce qui implique $H(W)^\perp \subset H(\lambda_F) \subset \phi_{F,n}(\mathfrak{q}K^{nd})^\perp$ d'après la proposition 5. D'autre part nous avons $H(W) \subset F^n \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}} \subset \phi_{F,n}(\mathfrak{q}K^{nd})^\perp$. Nous avons donc $H(W)^\perp \oplus H(W) \subset \phi_{F,n}(\mathfrak{q}K^{nd})^\perp$, donc $\phi_{F,n}(\mathfrak{q}K^{nd})^\perp = \mathrm{H}^N(X_F, \mathbb{C})_{\mathrm{ev}}$, contradiction. Donc $\lambda_F \in H(W)$. □

4. Preuve de la proposition 1

L'assertion 1 de la proposition 1 est évidente.

4.1. **Preuve de l'assertion 2.** Pour tout $G \in \mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U}$ définissons l'idéal $E_r(G)$ associé à la classe λ_G, par analogie avec l'idéal $E_r = E_r(F)$ associé à la classe λ_F. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ posons

$$\mathcal{E}_r^k = \left\{ (P, G) \in S^k \times (\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U})^{\mathrm{red}} \mid P \in E_r^k(G) \right\}.$$

Nous choisissons un point lisse $F \in (\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U})^{\mathrm{red}}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe un voisinage lisse $U_{r,k}$ de F dans $(\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U})^{\mathrm{red}}$ tel que la restriction de la projection $pr_k : \mathcal{E}_r^k \to (\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U})^{\mathrm{red}}$ à $pr_k^{-1}(U_{r,k})$ est un fibré trivial.

Soient i et j deux entiers positifs, $P \in E_r^i$, $Q \in E_r^j$ et $R = \tau_F(\vec{r})$, avec $\vec{r} \in T_F\,(\mathcal{N}^{d,n}_{\lambda,U})^{\mathrm{red}}$: nous devons montrer $PQR \in E_{r+1}$.

Posons $U_{r,i,j} = U_{r,i} \cap U_{r,j}$: nous avons des fibrés triviaux $pr_i : pr_i^{-1}(U_{r,i,j}) \to U_{r,i,j}$ et $pr_j : pr_j^{-1}(U_{r,i,j}) \to U_{r,i,j}$, ils possèdent donc des sections $\mathbf{P} : U_{r,i,j} \to pr_i^{-1}(U_{r,i,j})$ et $\mathbf{Q} : U_{r,i,j} \to pr_j^{-1}(U_{r,i,j})$, telles que $\mathbf{P}(F) = P$ et $\mathbf{Q}(F) = Q$; nous identifions ces sections à des fonctions analytiques $\mathbf{P} : U_{r,i,j} \to S^i$ et $\mathbf{Q} : U_{r,i,j} \to S^j$ telles que $\mathbf{P}(G) \in E_r^i(G)$ et $\mathbf{Q}_i(G) \in E_r^j(G)$ pour tout $G \in U_{r,i,j}$.

Pour tout $\omega \in K^{(n+r+1)d-i-j}$ la fonction

$$U_{r,i,j} \to \mathbb{C}, \qquad G \mapsto \sum_{i=1}^{t} \lambda_i \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_i} \frac{\mathbf{P}(G)\mathbf{Q}(G)\omega}{G^{n+r+1}}$$

est identiquement nulle ; en la dérivant en F le long du vecteur $\vec{r}$ nous obtenons l'égalité

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_i} \left(\frac{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \vec{r}}(F) Q\omega}{F^{n+r+1}} + \frac{P \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \vec{r}}(F)\omega}{F^{n+r+1}} - (n+r+1)\frac{RPQ\omega}{F^{n+r+2}} \right) = 0.$$

Comme $P \in E_r^i$ et $Q \in E_r^j$, les deux premiers termes sont nuls, ce qui implique l'assertion 2. □

4.2. **Preuve de l'assertion 3.** Notons $\mathcal{K}_{C_Y^*}$ le faisceau canonique de C_Y^*. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ notons $\widetilde{K}^i \subset \mathrm{H}^0(C_Y^*, \mathcal{K}_{C_Y^*})$ le sous-espace des sections ω vérifiant $h_a^*\omega = a^i\omega$ pour tout $a \in \mathbb{C}^*$. Si $\vec{e} \in \widetilde{T}^1$ désigne le champ d'Euler (radial et invariant par homothétie), nous avons pour tout $i \in \mathbb{Z}$ des isomorphismes canoniques $\mathrm{Int}_{\vec{e}} : \widetilde{K}^i \to K^i$.

Soient $P \in E_r$, $\widetilde{v} \in \widetilde{T}$ et $\omega \in \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \widetilde{K}_j$ des éléments homogènes dont la somme des degrés est égale à $(n+r+1)d$. Nous avons l'égalité des $(N+1)$-formes différentielles homogènes de degré 0 sur $C_Y^* \setminus \pi^{-1}(X_F)$:

$$L_{\widetilde{v}}\left(\frac{P\omega}{F^{n+r+1}}\right) = \frac{PL_{\widetilde{v}}\,\omega}{F^{n+r+1}} + \frac{(L_{\widetilde{v}}P)\omega}{F^{n+r+1}} - (n+r+1)\frac{(L_{\widetilde{v}}F)P\omega}{F^{n+r+2}}.$$

Nous étudions l'image par $\mathrm{Int}_{\vec{e}}$ de cette égalité, que nous interprétons comme une égalité entre formes différentielles sur $Y \setminus X_F$.

En appliquant deux fois la formule de Cartan-Lie $L = D \circ \mathrm{Int} + \mathrm{Int} \circ D$ à l'image par $\mathrm{Int}_{\vec{e}}$ du membre de gauche, nous obtenons successivement :

$$\mathrm{Int}_{\vec{e}}\, L_{\widetilde{v}} \left(\frac{P\omega}{F^{n+r+1}} \right) = \mathrm{Int}_{\vec{e}}\, D \,\mathrm{Int}_{\widetilde{v}} \left(\frac{P\omega}{F^{n+r+1}} \right) = -D\, \mathrm{Int}_{\vec{e}} \mathrm{Int}_{\widetilde{v}} \left(\frac{P\omega}{F^{n+r+1}} \right)$$

(la première égalité résulte de ce que $D\left(\frac{P\omega}{F^{n+r+1}}\right) = 0$, puisque ω est de degré maximal, et la seconde de ce que $L_{\vec{e}} \mathrm{Int}_{\widetilde{v}} \left(\frac{P\omega}{F^{n+r+1}}\right) = 0$, puisque la forme différentielle $\mathrm{Int}_{\widetilde{v}}\left(\frac{P\omega}{F^{n+r+1}}\right)$ est invariante par homothétie). En particulier, la forme $\mathrm{Int}_{\vec{e}}\, L_{\widetilde{v}} \left(\frac{P\omega}{F^{n+r+1}}\right)$ est exacte.

Nous avons donc

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_i} \left(\frac{P \mathrm{Int}_{\vec{e}}\, L_{\widetilde{v}}\, \omega}{F^{n+r+1}} + \frac{(L_{\widetilde{v}}P) \mathrm{Int}_{\vec{e}}\, \omega}{F^{n+r+1}} - (n+r+1) \frac{(L_{\widetilde{v}}F) P \mathrm{Int}_{\vec{e}}\, \omega}{F^{n+r+2}} \right) = 0.$$

Comme $P \in E_r^{\bullet}$, le premier terme est nul, donc

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \int_{\mathrm{Tub}\,\gamma_i} \frac{(L_{\widetilde{v}}P) F \mathrm{Int}_{\vec{e}}\omega - (n+r+1)(L_{\widetilde{v}}F) P \mathrm{Int}_{\vec{e}}\omega}{F^{n+r+2}} = 0.$$

Ceci implique l'assertion 3, par définition de l'idéal E_{r+1}. □

5. Preuve de la proposition 2

5.1. **Notations et rappels.** Les notations sont celles de la section 2.2.1. Nous posons $A = \dim S^1 = \mathrm{h}^0(Y, \mathcal{O}(1))$ et nous notons $\mathfrak{S}$ l'algèbre des polynômes à A variables. Le plongement $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{A-1}$ donné par $\mathcal{O}_Y(1)$ identifie S à un quotient de $\mathfrak{S}$.

5.1.1. *Lieu-base d'un idéal.* Soit $I \subset S$ un idéal homogène. Pour tout $i \in \{0, \ldots, N+1\}$ nous notons $l_i(I) \in \mathbb{N} \cup \infty$ le plus petit nombre $l \in \mathbb{N} \cup \infty$ tel que le lieu-base de I^l est de dimension inférieure ou égale à $N - i$ (en convenant que la partie vide est de dimension -1). De manière équivalente $l_i(I)$ est le plus grand nombre $l \in \mathbb{N} \cup \infty$ tel que le lieu-base de I^{l-1} est de dimension supérieure ou égale à $N - i + 1$. Nous avons $l_0(I) \leq \cdots \leq l_{N+1}(I)$. L'idéal I est sans points base si et seulement si $l_{N+1}(I) < \infty$; le cas échéant l'idéal I contient une intersection complète de multidegré $(l_0(I), \ldots, l_{N+1}(I))$.

5.1.2. *Idéaux Gorenstein.* Nous disons que l'idéal $I \subset S$ est Gorenstein de degré du socle D si $I^{D+1} = S^{D+1}$ et s'il existe une forme linéaire $\Lambda \in (S^D)^\vee$ telle que pour tout $d \in \{0, \ldots, D\}$ nous avons

$$I^d = \{P \in S^d \mid \forall Q \in S^{D-d},\ \Lambda(PQ) = 0\}.$$

Remarquons que l'idéal $I \subset S$ est Gorenstein si et seulement si sa préimage dans $\mathfrak{S}$ l'est. La forme linéaire Λ induit alors pour tout $d \in \{0, \ldots, D\}$ un isomorphisme canonique $S^d/I^d \simeq (S^{D-d}/I^{D-d})^\vee$.

Soient I et I' deux idéaux Gorenstein associés aux formes linéaires $\Lambda \in (S^D)^\vee$ et $\Lambda' \in (S^{D'})^\vee$. Supposons $I \subset I'$ (donc $D \geq D'$). Alors l'image de Λ' dans $(S^{D'}/I^{D'})^\vee$ s'identifie via l'isomorphisme induit par Λ à un polynôme $\bar{F} \in S^{D-D'}/I^{D-D'}$. Pour tout polynôme $Q \in S^{D'}$, nous avons $\Lambda'(Q) = \Lambda(QF)$, où $F \in S^{D-D'}$ est un relevé de $\bar{F}$. Nous avons donc $I' = (I : F)$.

5.1.3. *Intersections complètes.* Soit $I \subset S$ un idéal homogène intersection complète sans points base. Lorsque S est une algèbre de polynômes, l'idéal I est Gorenstein de degré du socle $\sum_{i=0}^{N+1}(l_i(I) - 1)$. Pour S quelconque l'idéal I n'est pas en général Gorenstein. Cependant, il existe toujours une constante C qui ne dépend que de S telle que I coïncide avec S en degré $\sum_{i=0}^{N+1} l_i(I) + C$.

5.2. **Généralisation des résultats de** [O1]. Les notations sont celles des sections 2.2.1 et 5.1.

Les lemmes 2 et 3 ci-dessous généralisent respectivement le lemme 1 et la proposition 1 de [O1] auquels leurs preuves se ramèment. Ces lemmes serviront dans les sections 6 et 7. L'assertion 1 du lemme 3 est l'assertion 1 de la proposition 2. Les assertions 2 et 3 du lemme 3 serviront à la preuve de l'assertion 2 de la proposition 2, qui occupe la section 5.3.

Lemme 2. *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe une constante $C \in \mathbb{N}^*$ qui ne dépend que de ε, S, u et m, telle que pour tout $d \geq Cb$ et pour tout idéal homogène $I \subset S$ vérifiant les assertions 2 et 3 de la donnée algébrique 2.2.1, nous avons $l_j(I) \leq \varepsilon d$ pour tout $j \in \{0, \ldots, N-n\}$.*

Preuve. — Dans le cas où l'idéal I est Gorenstein, la preuve du lemme 2 est calquée sur celle du lemme 1 de [O1]. Le cas général s'en déduit : considérons l'idéal $\prod_{i=1}^{u} I_i \subset I$: pour tout $j \in \{0, \ldots, N-n\}$ nous avons $l_j(I) \leq l_j(\prod_{i=1}^{u} I_i) \leq \sum_{i=1}^{u} l_j(I_i)$; le lemme 2 pour les idéaux Gorenstein I_i, $i \in \{1, \ldots, u\}$ et pour $\frac{\varepsilon}{u}$ au lieu de ε donne $l_j(I_i) \leq \frac{\varepsilon}{u} d$, donc $l_j(I) \leq \varepsilon d$. □

Lemme 3. *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe une constante $C \in \mathbb{N}^*$ qui ne dépend que de ε, S, u, s et m, telle que pour tout $d \geq Cb$ et pour tout idéal homogène $I \subset S$ vérifiant la donnée algébrique 2.2.1, il existe un schéma $V \subset Y$ de dimension pure n et de degré inférieur à $(1+\varepsilon)b$, d'idéal $I_V \subset S$, tel que les assertions suivantes sont vraies*

1. *$I_V \subset I$,*
2. *$\mathfrak{I}_V = (\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{A-n-1} : \mathcal{G})$, où $\mathfrak{I}_V$ désigne la préimage de I_V dans $\mathfrak{S}$, où les $\mathcal{F}_i$, $i \in \{1, \ldots, A-n-1\}$ sont des polynômes homogènes de $\mathfrak{S}$ de degré au plus $\deg V$ en intersection complète, et où $\mathcal{G}$ est un polynôme homogène de $\mathfrak{S}$ de degré au plus $(A-n-1)\deg V + C$,*
3. *les idéaux I et I_V coïncident en degré inférieur à $d - (A-n-1)\deg V - C$.*

Preuve. — Dans le cas où l'idéal I est Gorenstein, la preuve du lemme 3 est calquée sur celle de la proposition 1 de [O1]. Nous allons en déduire le cas général.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, u\}$ l'idéal I_i est défini par une forme linéaire $\Lambda_i \in (S^D)^\vee$. Soit $L \subset (S^D)^\vee$ l'espace vectoriel engendré par les Λ_i ; posons $L^* = L \setminus \{0\}$. Pour tout $\Lambda \in L^*$, l'idéal I_Λ associé à Λ est Gorenstein et vérifie la donnée algébrique 2.2.1 ; soit V_Λ le schéma associé. Posons $V = \bigcup_{i=1}^{u} V_{\Lambda_i}$. C'est un schéma de dimension pure n et comme $I = \bigcap_{i=1}^{u} I_i$, son idéal coïncide avec I en degré inférieur à $d - (A-n-1)\deg\, V - C$.

Comme $I = \bigcap_{\Lambda \in L^*} I_\Lambda$, nous avons $V = \bigcup_{\Lambda \in L^*} V_\Lambda$. Pour tout sous-schéma strict V' de V, l'espace $\{\Lambda \in L^* \mid V_\Lambda \subset V'\} \cup \{0\}$ est donc un sous-espace vectoriel strict de L ; pour $\Lambda \in L^*$ n'appartenant pas à un nombre fini de sous-espaces vectoriels stricts paramétrés par les sous-schémas stricts de V de dimension pure n nous avons donc $V_\Lambda = V$. Le lemme 3 pour I_Λ implique alors le lemme 3 pour I. □

5.3. **Les idéaux I_W et $\mathfrak{q}$ sont engendrés en petit degré.** Dans cette section nous montrons l'assertion 2 de la proposition 2. Nous supposons vérifiées les hypothèses numériques de la proposition 2. Les notations sont celles de la section 2.2.4.

Lemme 4. (1) *Pour tout $j \in \{0, \ldots, N-n\}$ nous avons $l_j(\mathfrak{q}) \leq \beta$.*

(2) *Pour $Q \in \mathfrak{q}^\beta$ générique nous avons $I_W = (I_V : Q)$.*

Preuve. — Comme $V(\mathfrak{p}_i)$ est réduit et que l'idéal $\mathfrak{p}_i$ contient en degré δ_i les équations des cônes de base $V(\mathfrak{p}_i)$, les schémas $V(\mathfrak{p}_i)$ et $V\left({\mathfrak{p}_i}^{\delta_i}\right)$ ont même point générique.

L'espace $\prod_i \left({\mathfrak{p}_i}^{\delta_i}\right)^{\beta_i}$ a donc pour lieu-base le schéma $\bigcup_i V\left({\mathfrak{p}_i}^{\delta_i}\right)$ de dimension n. Or $\prod_i \left({\mathfrak{p}_i}^{\delta_i}\right)^{\beta_i} \subset \mathfrak{q}^\beta$, donc $V(\mathfrak{q}^\beta) \subset \bigcup_i V\left({\mathfrak{p}_i}^{\delta_i}\right)$ ce qui implique l'assertion 1.

Comme $\mathfrak{p}_i S_{\mathfrak{p}_i} = {\mathfrak{p}_i}^{\delta_i} S_{\mathfrak{p}_i}$ et $(\mathfrak{p}_i)^{\beta_i} S_{\mathfrak{p}_i} \not\subset \mathfrak{P}_i S_{\mathfrak{p}_i}$, nous avons $\left({\mathfrak{p}_i}^{\delta_i}\right)^{\beta_i} S_{\mathfrak{p}_i} \not\subset \mathfrak{P}_i S_{\mathfrak{p}_i}$. Donc pour $Q_i \in \left({\mathfrak{p}_i}^{\delta_i}\right)^{\beta_i}$ générique $Q_i S_{\mathfrak{p}_i} \not\subset \mathfrak{P}_i S_{\mathfrak{p}_i}$. Donc $(\mathfrak{P}_i S_{\mathfrak{p}_i} : Q_i)$ est un idéal strict de $S_{\mathfrak{p}_i}$. Donc

$(\mathfrak{P}_i S_{\mathfrak{p}_i} : Q_i) \subset \mathfrak{p}_i S_{\mathfrak{p}_i}$. Comme $(\mathfrak{P}_i : Q_i)$ est primaire, nous en déduisons $(\mathfrak{P}_i : Q_i) \subset \mathfrak{p}_i$. Réciproquement, comme $Q_i \in (\mathfrak{p}_i)^{\beta_i}$, nous avons $Q_i\mathfrak{p}_i \subset (\mathfrak{p}_i)^{\beta_i+1} \subset \mathfrak{P}_i$, donc $\mathfrak{p}_i \subset (\mathfrak{P}_i : Q_i)$. Finalement $\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{P}_i : Q_i)$. Posons $Q = \prod_i Q_i$. L'assertion 2 résulte de ce que $I_W = \bigcap_i \mathfrak{p}_i = \bigcap_i (\mathfrak{P}_i : Q_i) = (I_V : Q)$. □

Lemme 5. *Il existe une constante C qui ne dépend que de ε, S, u, s et m, telle que les idéaux I_W et $\mathfrak{q}$ sont engendrés en degré inférieur à Cb^a, où $a = 2^{A-1}$.*

Preuve. — D'après l'assertion 2 du lemme 3, nous avons $\mathfrak{I}_V = (\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{A-n-1} : \mathcal{G})$, où les $\mathcal{F}_i$ sont en intersection complète et vérifient $\deg \mathcal{F}_i \leq (1+\varepsilon)b$, et où $\deg \mathcal{G} \leq (A-n+1)(1+\varepsilon)b + C'$, où C' est la constante donnée par le lemme 3. Notons $\mathfrak{I}_W$ la préinage de $I_W \subset S$ dans $\mathfrak{S}$. L'assertion 2 du lemme 4 implique $\mathfrak{I}_W = (\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{A-n-1} : \mathcal{G}\mathcal{Q})$, où $\mathcal{Q}$ désigne une préimage de $Q \in S$ dans $\mathfrak{S}$, et où $\deg \mathcal{G}\mathcal{Q} = \deg \mathcal{G} + \deg \mathcal{Q} \leq (A-n+1)(1+\varepsilon)b + C' + (1+\varepsilon)b \leq (A-n+2)(1+\varepsilon)b + C'$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S}/\mathfrak{I}_W[-\deg \mathcal{G}\mathcal{Q}] \xrightarrow{\cdot \mathcal{G}\mathcal{Q}} \mathfrak{S}/(\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{A-n-1}) \longrightarrow \mathfrak{S}/(\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{A-n-1}, \mathcal{G}\mathcal{Q}) \longrightarrow 0$$

implique que la régularité au sens de Mumford-Castelnuovo (*cf.* [Ba-Mu], définition 3.2) de $\mathfrak{I}_W$ est majorée par celle des idéaux $(\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{A-n-1})$ et $(\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_{A-n-1}, \mathcal{G}\mathcal{Q})$. Or ces idéaux sont engendrés en degré inférieur à $(A-n+2)(1+\varepsilon)b + C'$. D'après [Ba-Mu], théorème 3.7, la régularité de $\mathfrak{I}_W$ est donc majorée par $(2(A-n+2)(1+\varepsilon)b + C')^{2^{A-2}}$; donc $\mathfrak{I}_W$ est engendré en degré inférieur à $(2(A-n+2)(1+\varepsilon)b + C')^{2^{A-2}}$, ce qui démontre le lemme 5 pour I_W.

Pour tout i nous notons $\mathcal{G}_i$ une préimage dans $\mathfrak{S}$ d'un élément générique de $\mathfrak{p}_i^{\delta_i}$. Nous posons $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}\prod_{j\neq i} \mathcal{G}_j$: nous avons alors $\deg \mathcal{Q}_i \leq \deg V$ et $\mathfrak{p}_i = (I_V : \mathcal{Q}_i)$. En remplaçant $\mathcal{Q}$ par $\mathcal{Q}_i$ dans le raisonnement ci-dessus nous obtenons que l'idéal $\mathfrak{p}_i$ est engendré en degré inférieur à $(2(A-n+2)(1+\varepsilon)b+C')^{2^{A-2}}$. Comme $\sum_i \beta_i \leq (1+\varepsilon)b$, l'idéal $\mathfrak{q} = \prod_i (\mathfrak{p}_i)^{\beta_i}$ est donc engendré en degré inférieur à $(1+\varepsilon)b(2(A-n+2)(1+\varepsilon)b + C')^{2^{A-2}}$, ce qui démontre le lemme 5 pour $\mathfrak{q}$. □

6. Preuve de la proposition 3

Nous invitons le lecteur à supposer V réduit en première lecture (nous avons alors $\mathfrak{q} = S$).

Soit γ le plus petit entier tel que les idéaux I_W et $\mathfrak{q}$ sont engendrés en degré inférieur ou égal à γ. D'après l'assertion 2 de la proposition 2, nous avons $\gamma \leq Cb^a$, où C est une constante qui ne dépend que de Y, de $\mathcal{O}_Y(1)$ et de ε.

Sans perdre en généralité nous supposons $\varepsilon < \frac{1}{2N}$. Il existe alors une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ qui ne dépend que de Y, de $\mathcal{O}_Y(1)$ et de ε, telle que pour tout $d \geq Cb^a$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ nous avons $\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}b \leq d$, $2(r+1)\gamma \leq rd$ et

$$(1) \qquad (n+r+1)d - m - 2(r+1)\gamma > (n+1)(d+s) + (N-n+1)\varepsilon rd + C',$$

où C' est la constante définie à la section 5.1.3. Nous supposons $d \geq Cb^a$.

La preuve de la proposition 3 procède par approximations successives : le lemme 8 ci-dessous peut être considéré comme une version affaiblie de la proposition 3.

Lemme 6. *Pour tout $L \in S^{\leq 2(r+1)\gamma}$ soit $L \in E_r$, soit l'idéal $(E_r : L)$ est distinct de S en degré $(n+1)(d+s) + (N-n+1)\varepsilon rd + C'$.*

Preuve. — Supposons $L \notin E_r$, donc $(E_r : L) \neq S$. Alors il existe $i \in \{1, \ldots, u\}$ tel que $(E_{r,i} : L) \neq S$: l'idéal $(E_{r,i} : L)$ est Gorenstein de degré du socle $(n+r+1)d - m - \deg L$. Comme $\deg L \leq 2(r+1)\gamma$, l'inégalité (1) implique que $(E_{r,i} : L)$, donc à fortiori $(E_r : L)$ sont distincts de S en degré $(n+1)(d+s) + (N-n+1)\varepsilon rd + C'$. □

Lemme 7. *Pour tout $L \in E_{r-1}$ dont les dérivées partielles $L_{\widetilde{v}}L$, $\widetilde{v} \in \widetilde{T}$ appartiennent à E_{r-1}, nous avons $l_j(E_r : L) \leq d + s$ pour tout $j \in \{0, \ldots, N+1\}$.*

Preuve. — Comme $L \in E_{r-1}$, l'assertion 1 de la proposition 1 implique $F \in (E_r : L)$. Pour tout $\widetilde{v} \in \widetilde{T}$, comme $L_{\widetilde{v}}L \in E_{r-1}$, l'assertion 3 de la proposition 1 implique alors $L_{\widetilde{v}}F \in (E_r : L)$. Donc $J_F \subset (E_r : L)$ et d'après la section 2.1.3, l'idéal $(E_r : L)$ est sans point base en degré $d+s$. □

Lemme 8. *Pour $r \geq 1$ nous avons $\left(E_{r-1}^{\leq (r+1)\gamma}\right)^2 \subset E_r$.*

Preuve. — Soit $L \in (E_{r-1})^2$ tel que $\deg L \leq 2(r+1)\gamma$. D'une part, l'assertion 2 de la proposition 1 implique $\Theta \subset (E_r : L)$, donc $\dim\left(S^d/(E_r : L)\right) \leq \dim\left(S^d/\Theta\right) \leq b\frac{d^n}{n!}$. Comme $2(r+1)\gamma \leq rd$, l'idéal $(E_r : L)$ est intersection des idéaux $(E_{r,i} : L)$ de degré du socle $(n+r+1)d - \deg L \geq (n+1)d - m$ et l'idéal $(E_r : L)$ satisfait les hypothèses 2 et 3 de la donnée algébrique 2.2.1. D'après le lemme 2 nous avons donc $l_j(E_r : L) \leq \varepsilon d \leq \varepsilon r d$ pour tout $j \in \{0, \ldots, N-n\}$. D'autre part, le lemme 7 implique $l_j(E_r : L) \leq d+s$ pour tout $j \in \{N-n+1, \ldots, N+1\}$. L'idéal $(E_r : L)$ contient donc une intersection complète sans point base dont la somme des degrés est inférieure à $(N-n+1)\varepsilon r d + (n+1)(d+s)$. La section 5.1.3 et le lemme 6 impliquent alors $L \in E_r$. □

Fin de la preuve de la proposition 3. Nous procédons par récurrence sur r.

Pour $r = 0$ la proposition 3 résulte de la proposition 2 et de ce que $\mathfrak{q} I_W \subset I_V$.

Supposons $r > 0$ et l'énoncé vrai pour $r-1$: nous avons $\mathfrak{q}(I_W)^{r+1} \subset E_{r-1}$, et comme l'idéal $\mathfrak{q}(I_W)^r$ est engendré en degré inférieur à $(r+1)\gamma$, $\mathfrak{q}(I_W)^{r+1} \subset E_{r-1}^{\leq (r+1)\gamma}$.

Soit $L \in \mathfrak{q}(I_W)^{r+1}$; nous pouvons supposer $\deg L \leq (r+2)\gamma$, donc $\deg L \leq 2(r+1)\gamma$. D'une part l'hypothèse de récurrence et le lemme 8 donnent $(\mathfrak{q})^2(I_W)^{2r} \subset \left(E_{r-1}^{\leq (r+1)\gamma}\right)^2 \subset E_r$, et donc $\mathfrak{q}(I_W)^{r-1} \subset (E_r : L)$. L'assertion 1 du lemme 4 et le fait que W est de dimension pure n et de degré inférieur à $(1+\varepsilon)b$ impliquent alors $l_j(E_r : L) \leq r(1+\varepsilon)b \leq \varepsilon r d$ pour tout $j \in \{0, \ldots, N-n\}$. D'autre part L et ses dérivées partielles $L_{\widetilde{v}}L$, $\widetilde{v} \in \widetilde{T}$, appartiennent à $\mathfrak{q}(I_W)^r$, donc à E_{r-1}. Le lemme 7 implique alors $l_j(E_r : L) \leq d+s$ pour tout $j \in \{N-n+1, \ldots, N+1\}$. L'idéal $(E_r : L)$ contient donc une intersection complète sans point base dont la somme des degrés est inférieure à $(N-n+1)\varepsilon r d + (n+1)(d+s)$. La section 5.1.3 et le lemme 6 impliquent alors $L \in E_r$. □

7. Preuve de la proposition 4

7.1. **Préliminaires.** Les notation sont celles de la section 0.2.2. Le faisceau inversible $\mathcal{O}_Y(1)$ définit un plongement $Y \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{A-1}$, où $A = \mathrm{h}^0(Y, \mathcal{O}_Y(1))$. Soit $\mathbf{G} = \mathrm{Gr}_{\mathbb{C}}(A-n-2, A)$ la grassmanienne ; pour tout $l \in \mathbf{G}$, soit $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{A-1}$ l'espace linéaire de codimension $n+2$ associé et pour tout schéma $Z \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{A-1} \setminus L$, soit $C(Z, l) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{A-1}$ le cône projectif de sommet L et de base Z.

Lemme 9. *Soit $M \subset X_F$ une variété de dimension $n-1$. Alors pour $l \in \mathbf{G}$ générique, les variétés $C(M, l)$ et X_F sont transverses en tout point de M.*

Preuve. — Posons

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x,l) \in M \times \mathbf{G} \mid x \in L\} \qquad \text{et} \\ \Gamma_2 &= \{(x,l) \in M \times \mathbf{G} \setminus \Gamma_1 \mid T_x C(x,l) + T_x X_F \neq T_x \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{A-1}\}. \end{aligned}$$

D'une part nous avons $\dim \Gamma_1 = \dim \mathbf{G} + \dim M - \mathrm{codim}\,(L, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{A-1}) = \dim \mathbf{G} - 3$.

D'autre part, pour tout $(x,l) \in X_F \times \mathbf{G} \setminus \Gamma_1$, le sous-espace vectoriel $T_x C(x,l) + T_x X_F$ de $T_x \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{A-1}$ est défini par une matrice de $A-1$ lignes et $(A-n-2)+N$ colonnes dont les coefficients dépendent de (x,l) ; la condition $T_x C(x,l) + T_x X_F \neq T_x \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{A-1}$ équivaut à l'annulation de ses mineurs de taille $(A-1)\times(A-1)$, ce qui donne $N-n$ conditions indépendantes. Nous avons donc $\dim\Gamma_2 = \dim\mathbf{G} + \dim M - (N-n) = \dim\mathbf{G} - (N-2n+1)$.

Posons $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Comme $N \geq 2n$, nous avons donc $\dim\Gamma < \dim\mathbf{G}$; la projection de Γ sur $\mathbf{G}$ a donc pour image un fermé strict de $\mathbf{G}$ et le lemme 9 est vrai pour tout $l \in \mathbf{G}$ n'appartenant pas à ce fermé. □

Nous adoptons les notations de la section 2.1.1. Pour tout $y \in Y$, $\widetilde{y} \in \pi^{-1}(y)$ et $\widetilde{v} \in \widetilde{T}$, le vecteur $\pi_*\widetilde{v}(\widetilde{y}) \in T_yY$ ne dépend du choix de $\widetilde{y}$ que par la multiplication par un scalaire. Nous pouvons donc poser

$$\widetilde{T}(l) = \{\widetilde{v} \in \widetilde{T} \mid \forall y \in Y,\ \pi_*\widetilde{v}(\widetilde{y}) \in T_y(C(y,l)\cap Y)\}.$$

C'est un S-module de type fini ; il est donc engendré en degré inférieur à un entier relatif $t(l)$. Notons t la valeur de $t(l)$ pour $l \in \mathbf{G}$ général ; c'est un entier qui ne dépend que de Y et de $\mathcal{O}(1)$.

Lemme 10. *Soit Z une sous-variété irréductible de Y de dimension pure n et de degré α. Alors si $Z \not\subset X_F$, pour $l \in \mathbf{G}$ général, l'idéal $\left(I_Z, F, L_{\widetilde{v}}F \mid \widetilde{v} \in \widetilde{T}(l)\right)$ coïncide avec S en degré $(N-n+1)\alpha + d + n(d+t) + C'$, où C' est la constante définie à la section 5.1.3.*

Preuve. — Posons $I = \left(I_Z, F, L_{\widetilde{v}}F \mid \widetilde{v} \in \widetilde{T}(l)\right)$. Comme Z est de dimension pure n, pour $l \in \mathbf{G}$ générique la variété $C(Z,l)\cap Y$ est une hypersurface de Y de degré α dont l'équation appartient à I_Z ; nous en déduisons $l_i(I) \leq l_i(I_Z) \leq \alpha$ pour $i \in \{0,\dots,N-n\}$.

Comme Z est irréductible et que $Z \not\subset X_F$, nous avons $\dim Z \cap X_F = n-1$, et comme $F \in I$, nous en déduisons $l_{N-n+1} \leq d$.

Enfin, le lemme 9 appliqué à $M = Z \cap X_F$ implique que si $l \in \mathbf{G}$ est générique alors pour tout $y \in Z \cap X_F$ nous avons $T_yX_F \not\subset T_y(C(y,l)\cap Y)$. Donc si $\widetilde{T}(l)$ est engendré en degré inférieur à t, il existe $\widetilde{v} \in \widetilde{T}(l)^{\leq t}$ et $\widetilde{y} \in \pi^{-1}(y)$ tels que $\pi_*\widetilde{v}(\widetilde{y}) \notin T_yX_F$ et donc $L_{\widetilde{v}}F(y) \neq 0$. Donc pour $l \in \mathbf{G}$ général l'idéal $\left(L_{\widetilde{v}}F \mid \widetilde{v} \in \widetilde{T}(l)^{\leq t}\right)$ ne s'annule pas sur $Z \cap X_F$ et nous avons $l_i(I) \leq d+t$ pour $i \in \{N-n+2,\dots,N+1\}$.

Finalement $\sum_{i=0}^{N+1} l_i \leq (N-n+1)\alpha + d + n(d+t)$, ce qui implique le lemme 10. □

7.2. **Preuve de la proposition 4.** Nous adoptons les notations des sections 2.2, 5.3 et 7.1.

Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ qui ne dépend que de Y, de $\mathcal{O}_Y(1)$ et de ε, qui vérifie la proposition 3 et telle que pour tout $d \geq Cb^a$ nous avons

$$(N-n+1)\alpha + d + n(d+t) + C' \quad < \quad (n+2)d - m - r, \quad \text{et} \tag{2}$$
$$r + t \quad \leq \quad d - (A-n-1)(1+\varepsilon)b + C'' + t, \tag{3}$$

où C' est la constante définie à la section 5.1.3, où C'' est la constante du lemme 3 et où $r \in \mathbb{N}^*$ vérifie $r \leq 2(1+\varepsilon)b$. Nous supposons $d \geq Cb^a$.

Soit $Z \subset W$ une composante irréductible ; nous devons montrer $Z \subset X_F$. Ceci résulte du lemme 10 ci-dessus, des lemmes 11 et 12 ci-dessous et de l'inégalité (2). □

Soit Z' l'adhérence de $W \setminus Z$ dans W : nous avons $W = Z \cup Z'$. Comme les schémas Z, Z' et $V(\mathfrak{q})$ sont de dimension pure n, pour $l \in \mathbf{G}$ générique les schémas $C(Z,l)$, $C(Z',l)$ et $C(V(\mathfrak{q}),l)$ sont des hypersurfaces de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{A-1}$ transverses à Y. Posons $\alpha = \deg Z$ et $\alpha' = \deg Z'$. Alors $\deg C(Z,l) = \alpha$, $\deg C(Z',l) = \alpha'$ et $\deg C(V(\mathfrak{q}),l) = \beta$. Notons $P_l \in S^\alpha$, $P'_l \in S^{\alpha'}$ et $Q_l \in S^\beta$ les équations respectives de leurs intersections avec Y (définies à la multiplication par un scalaire près). Posons $R_l = P_l {P'_l}^2 Q_l$ et $r = \deg R_l$. Nous avons $r = \alpha + 2\alpha' + \beta \leq 2(1+\varepsilon)b$.

Le lecteur pourra supposer V irréductible et réduit en première lecture : si V est irréductible alors $Z = W$ et l'hypersurface $C(Z',l)$ est vide ; si V est réduit alors $W = V$ et l'hypersurface

$C(V(\mathfrak{q}),l) \cap Y$ est vide ; donc si V est irréductible et réduit alors $P'_l = Q_l = 1$, $r = \deg V$ et R_l est une équation de $C(V,l)$.

Lemme 11. *Pour $l \in \mathbf{G}$ générique $\left(I_Z, F, L_{\widetilde{v}}F \mid \widetilde{v} \in \widetilde{T}(l)\right) \subset (E_1 : R_l)$.*

Preuve. — D'une part, pour tout $K \in I_Z$ nous avons $KP'_l \in I_W$, donc $KR_l \in \mathfrak{q}(I_W)^2$, donc $KR_l \in E_1$ par la proposition 3, donc $I_Z \subset (E_1 : R_l)$. D'autre part, comme $P_l P'_l Q_l \in I_V$, donc $R_l \in I_V$, la proposition 2 implique $R_l \in E_0$ et l'assertion 1 de la proposition 1 implique $F \in (E_1 : R_l)$. Enfin, comme R_l s'annule sur $C(V,l)$, pour tout $\widetilde{v} \in \widetilde{T}(l)$, $L_{\widetilde{v}}R_l$ s'annule sur $C(V,l)$, donc $L_{\widetilde{v}}R_l \in I_V$. La proposition 2 implique $L_{\widetilde{v}}R_l \in E_0$ et l'assertion 3 de la proposition 1 implique $L_{\widetilde{v}}F \in (E_1 : R_l)$. □

Lemme 12. *Pour $l \in \mathbf{G}$ général l'idéal $(E_1 : R_l)$ est distinct de S en degré $(n+2)d - m - r$.*

Preuve. — Nous avons $I_Z = \mathfrak{p}_i$ pour un certain i. Alors $Q_l \notin (\mathfrak{p}_i)^{\beta_i+1}$, donc $R_l \notin (\mathfrak{p}_i)^{\beta_i+2}$, donc il existe $\widetilde{v} \in \widetilde{T}^{\leq t}$ tel que $L_{\widetilde{v}}R_l \notin (\mathfrak{p}_i)^{\beta_i+1}$, donc $L_{\widetilde{v}}R_l$ ne s'annule pas sur $C(V((\mathfrak{p}_i)^{\beta_i+1}),l)$. Comme pour $l \in \mathbf{G}$ générique $C(V((\mathfrak{p}_i)^{\beta_i+1}),l)$ est une composante irréductible de $C(V,l)$, $L_{\widetilde{v}}R_l$ ne s'annule pas sur $C(V,l)$ et $L_{\widetilde{v}}R_l \notin I_V$. Comme $\deg L_{\widetilde{v}}R_l \leq r+t$, l'inégalité (3) et l'assertion 3 du lemme 3 impliquent $L_{\widetilde{v}}R_l \notin E_0$. Les assertions 1 et 3 de la proposition 1 impliquent alors $R_l \notin E_1$. Comme $E_1 = \bigcap_{i=1}^{u} E_{1,i}$, il existe $i \in \{1,\ldots,u\}$ tel que $R_l \notin E_{1,i}$: l'idéal $(E_{1,i} : R_l)$ est Gorenstein de degré du socle $(n+2)d - m - r$. Le lemme 12 résulte alors de ce que $(E_1 : R_l) \subset (E_{1,i} : R_l)$. □

Références

[Ba-Mu] D. Bayer, D. Mumford. *What can be computed in algebraic geometry ?* Computational algebraic geometry and commutative algebra (Cortona 1991), 1-48, Sympos. Math. XXXIV, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996).

[CCGH] J. Carlson, M. Green, Ph. Griffiths, J. Harris *Infinitesimal Variations of Hodge Structures I.* Comp. Math 50, p. 105-205 (1983).

[CDK] E. Cattani, P. Deligne, A. Kaplan. *On the locus of Hodge classes.* Journal of the AMS, Vol 8, n.2 (1995).

[Gre] M. Green. *Components of maximal dimension in the Noether-Lefschetz locus.* J. Differential Geometry 29, p. 295-302 (1989).

[Gri] Ph. Griffiths. *On the periods of certain rational integrals I.* Annals of Math. (2) 90, p. 460-495 (1969).

[GH] Ph. Griffiths, J. Harris *Infinitesimal Variations of Hodge Structures II.* Comp. Math 50, p. 207-265 (1983).

[O1] A. Otwinowska. *Composantes de petite codimension du lieu de Noether-Lefschetz : un argument asymptotique en faveur de la conjecture de Hodge pour les hypersurfaces.* J. Algebraic Geom. 12, p. 307-320 (2003).

[O2] A. Otwinowska. *Monodromie d'une famille d'hypersurfaces contenant un sous-schéma fixé.* Soumis, (2000).

[V1] C. Voisin. *Une précision concernant le théorème de Noether.* Math. Ann. 280, p. 605-611 (1989).

[V2] C. Voisin. *Composantes de petite codimension du lieu de Noether-Lefschetz.* Comment. Math. Helvetici 64, p. 515-526 (1989).

Ania Otwinowska
Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud - Bât 425, 91405 Orsay Cedex, France
e-mail : Ania.Otwinowska@math.u-psud.fr