Remarques sur les groupes de Chow des hypersurfaces de petit degré

Anna Otwinowska

13 décembre 1999

Titre anglais. Remarks on Chow groups of hypersurfaces of low degree.

Resumé. En s'inspirant des méthodes developpées par Beauville et Donagi, on montre qu'une section hyperplane générique X d'une hypersurface couverte par des k-plans vérifie $\mathrm{CH}_i(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ pour $i \leq k-1$. Cela permet d'exhiber en tout degré une famille d'hypersurfaces vérifiant la conjecture de Bloch-Beilinson.

Abstract. Following methods developed by Beauville and Donagi, we prove that a generic hyperplane section of a hypersurface covered by k-planes satisfies $\mathrm{CH}_i(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ for $i \leq k-1$. It allows us to exhibit a family of hypersurfaces satisfying the Bloch-Beilinson conjectures.

Abridged English Version.
The Bloch-Beilinson conjectures in the case of hypersurfaces imply the following conjecture.

Conjecture *Let $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ be a smooth hypersurface of degree d. Then $\mathrm{CH}_{k-1}(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0$ for $n \geq kd$, where $\mathrm{CH}_{k-1}(X)_{hom}$ is the subgroup of $\mathrm{CH}_{k-1}(X)$ of the cycles homologically equivalent to 0.*

We prove the following special case of the conjecture.

Theorem *Let $Y \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ be a smooth projective hypersurface covered by a family of linear projective varieties of dimension k in $\mathbb{P}^{n+1}_{\mathbb{C}}$. Then for any smooth hyperplane section $X \subset Y$ we have $\mathrm{CH}_{k-1}(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0$.*

If $k(n-k) - \binom{d+k}{d} + 1 \geq 0$, any smooth projective hypersurface of degree d in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ is covered by linear projective varieties of dimension k (see for instance [3]). Thus the theorem improves the bound given in [3]:

Corollary 1 *If $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ is a hypersurface of degree d with $k(n-k+1) - \binom{d+k}{d} + 1 \geq 0$, we have $\mathrm{CH}_{k-1}(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0$. In particular, the expected bound is attained*

- *for 1-cycles of quartics: a smooth projective hypersurface $X \subset \mathbb{P}^8_{\mathbb{C}}$ of degree 4 satisfies $\mathrm{CH}_1(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0$.*
- *for 1-, 2-, 3- and 4- cycles of cubics of respective dimensions 5, 8, 11 and 14.*

Corollary 2 *Let $Y \subset \mathbb{P}^{kd+1}_{\mathbb{C}}$ be a hypersurface with equation*

$$H = F_0(X_0, \cdots, X_d) + F_1(X_{d+1}, \cdots, X_{2d}) + \cdots + F_i(X_{id+1}, \cdots, X_{(i+1)d}) + \cdots$$
$$\cdots + F_{k-1}(X_{(k-1)d+1}, \cdots, X_{kd+1}) = 0$$

where F_0,..., F_{k-1} are homogenous polynomials of degree d defining smooth hypersurfaces in $\mathbb{P}^d_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{C}}$,...,$\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{C}}$ and $\mathbb{P}^d_{\mathbb{C}}$. Then Y is smooth and any smooth hyperplane section of Y satisfies the conjecture.

Corollary 2 provides examples of smooth hypersurfaces X of degree d in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ with $n = kd$, *without non-trivial automorphisms*, satisfying $\mathrm{CH}_{k-1}(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0$, as expected by the conjecture.

1 Introduction

Mumford [5](pour les 0-cycles sur les surfaces), Roitman [7](pour les 0-cycles), et (dans le cas général, en utilisant des méthodes de décomposition de la diagonale developpées par Bloch et Srinivas [2]) Paranjape [6] ont montré

Théorème 1 *Soit X une variété projective lisse de dimension N. Si l'application classe $\mathrm{CH}_l(X) \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{H}^{2N-2l}(X, \mathbb{Q})$ est injective pour tout $l \leq k$, alors on a $\mathrm{H}^q(X, \Omega^p) = 0$ pour $p \neq q$, $q \leq k$.*

La réciproque de ce théorème a été conjecturée par Bloch et Beilinson. La cohomologie des hypersurfaces étant bien connue, la conjecture de Bloch-Beilinson devient dans ce cas:

Conjecture 1 *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une hypersurface lisse de degré d. Alors on a $\mathrm{CH}_{k-1}(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0$ pour $n \geq kd$, où $\mathrm{CH}_{k-1}(X)_{hom}$ désigne le sous-groupe de $\mathrm{CH}_{k-1}(X)$ constitué par les cycles homologiquement équivalents à 0.*

Paranjape [6] a montré que, à k et d fixés, la conjecture 1 est vraie pour $n \gg 1$; dans [3] on trouve une borne explicite, qui correspond au cas où l'hypersurface générique est couverte par des variétés linéaires projectives de dimension k. Enfin, Voisin [8] a donné pour tout k, n, d vérifiant les hypothèses des exemples d'hypersurfaces pour lesquelles la conjecture est vraie.

Le but de cette note est de montrer le

Théorème 2 *Soit $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ une hypersurface projective lisse couverte par une famille de sous-variétés linéaires projectives de dimension k de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$. Alors toute section hyperplane lisse X de Y vérifie*

$$\mathrm{CH}_{k-1}(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0.$$

Or une hypersurface projective lisse de degré d dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n}$ est couverte par des variétés linéaires projectives de dimension k à la condition

$$k(n-k) - \binom{d+k}{d} + 1 \geq 0.$$

(voir par exemple [3]). Il résulte donc du théorème 2 une amélioration de la borne de [3]:

Corollaire 1 *Si X est une hypersurface de degré d dans $\mathbb{P}^n$ avec*

$$k(n-k+1) - \binom{d+k}{d} + 1 \geq 0,$$

on a $\mathrm{CH}_{k-1}(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0$. En particulier, on obtient la borne optimale

- *pour les 1-cycles pour les quartiques : une hypersurface projective lisse $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{8}$ de degré 4 vérifie $\mathrm{CH}_1(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0$.*
- *pour les 1-, 2-, 3- et 4- cycles pour les cubiques de dimensions respectives supérieures ou égales à 5, 8, 11 et 14.*

En effet, si $F(X_0, \ldots, X_n) = 0$ est l'équation de X, l'hypersurface $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n+1}$ d'équation $F(X_0, \ldots, X_n) + X_{n+1}^d = 0$ est lisse et couverte par des variétés linéaires projectives de dimension k. Ainsi, X satisfait aux hypothèses du théorème 2.

Le corollaire 1 peut aussi être obtenu plus simplement en remarquant que sous ces hypothèses une hypersurface lisse X est couverte par une famille de variétés linéaires projectives de dimension $k-1$ qui sont soit intersection ensembliste d'une variété linéaire projective de dimension k avec X, soit contenues dans une variété linéaire projective de dimension k incluse dans X.

D'autre part, le théorème 2 permet d'élargir la classe d'exemples d'hypersurfaces données par C.Voisin [8] vérifiant la conjecture 1:

Corollaire 2 *Soit $Y \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{kd+1}$ une hypersurface d'équation*

$$H = F_0(X_0, \cdots, X_d) + F_1(X_{d+1}, \cdots, X_{2d}) + \cdots + F_i(X_{id+1}, \cdots, X_{(i+1)d}) + \cdots$$

$$\cdots + F_{k-1}(X_{(k-1)d+1}, \cdots, X_{kd+1}) = 0$$

avec F_0,..., F_{k-1} des polynômes homogènes de degré d définissant des hypersurfaces lisses de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^d$, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{d-1}$,...,$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{d-1}$ et $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^d$. Alors Y est lisse et toute section hyperplane lisse de Y vérifie la conjecture 1.

En particulier, le corollaire 2 fournit des exemples d'hypersurfaces X lisses de degré d dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ avec $n = kd$, *sans automorphisme non trivial* et vérifiant $\mathrm{CH}_{k-1}(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0$ comme le prévoit la conjecture 1.

2 Preuve du théorème 2

L'outil essentiel est la proposition suivante, qui généralise le lemme clef de [1].

Proposition 1 *Soient $A \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ une hypersurface projective lisse de degré d, k un entier, et soient F une variété projective lisse et $\pi_F : F \to \mathrm{Gr}(1, n)$ une famille de sous-variétés linéaires projectives de dimension k de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ incluses dans A. Soit P la variété d'incidence au-dessus de F, c'est-à-dire l'image réciproque par π_F du projectivisé du fibré tautologique de la grassmanienne. Soient $p : P \to F$ et $q : P \to A$ les morphismes propres induits. On note $c_\bullet$ les classes de Chern de la restriction à F du fibré tautologique de la grassmanienne. On suppose que q est surjective, et que* $\dim P = n - 1 + r$. *Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ la correspondance*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{CH}_i(A)_{hom} \otimes \mathbb{Q} & \to & \mathrm{CH}_i(A)_{hom} \otimes \mathbb{Q} \\ Z & \mapsto & q_* \circ p^*(c_1^r \cdot c_k \cdot p_* \circ q^*(Z)) \end{array}$$

est la multiplication par un entier (négatif) non nul $-N$.

Démonstration — On procède comme dans [1].

On se ramène d'abord au cas $r = 0$. Pour cela on remarque que quitte à restreindre F, on peut supposer que π_F est génériquement fini. Comme $-c_1$ est l'image réciproque par π_F de la classe du fibré très ample de la grassmanienne, il existe une sous-variété lisse F' de F de classe $(-c_1)^r$. Soit P' la restriction de P à F'. Pour $x \in X$ générique la fibre $q^{-1}(x)$ est de dimension r, et donc $q_{|P'}^{-1}(x) = (-c_1)^r \cdot q^{-1}(x)$ est fini, non vide. Quitte à remplacer F par F' et P par P' on peut donc supposer $r = 0$ et $q : P \to A$ génériquement fini de degré $N \in \mathbb{N}^*$.

L'application $q_* \circ q^* \ : \mathrm{CH}_\bullet(A) \to \mathrm{CH}_\bullet(A)$ est la multiplication par un entier N. Le morphisme $q_* \ : \mathrm{CH}_{i+k}(P) \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{CH}_{i+k}(A) \otimes \mathbb{Q}$ est donc surjectif.

On pose $h \ : \ = c_1(\mathcal{O}_P(1)) \in \mathrm{CH}^1(P)$. Par la description du groupe de Chow d'un fibré projectif ([4]),on a

$$\mathrm{CH}_{i+k}(P)_{hom} = p^*\mathrm{CH}_i(F)_{hom} \oplus (\oplus_{j=1}^k h^j \cdot p^*\mathrm{CH}_{i+j}(F)_{hom}), \tag{1}$$

ce qui permet d'écrire (de manière unique) pour tout $Z \in \mathrm{CH}(A)_{hom}$

$$q^*(Z) = Z_0 + h \cdot Z_1 + \cdots + h^k \cdot Z_k \tag{2}$$

où les Z_i appartiennent à $p^*\mathrm{CH}(F)_{hom}$.

Soit $\alpha \in \mathrm{CH}_{i+k+1}(P)_{hom} \otimes \mathbb{Q}$, et soit H la classe d'une section hyperplane de A. On a $h = q^*H$, et donc

$$q_*(h \cdot \alpha) = q_*(q^*(H) \cdot \alpha) = H \cdot q_*\alpha = 0$$

par le lemme suivant, appliqué à $X = A$.

Lemme 1 *Soit $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une hypersurface lisse et soit H la classe d'une section hyperplane de X. Pour tout $\beta \in \mathrm{CH}(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q}$, on a $\beta \cdot H = 0$.*

Démonstration — Soit $i \ : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ l'immersion fermée. D'après [4], Chap 6, cor 6.3, p. 102, on a

$$d(\beta \cdot H) = \beta \cdot [X] = \beta \cdot c_1(\mathcal{N}(X, \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})) = i^*i_*(\beta)$$

Comme $\beta \in \mathrm{CH}(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q}$, on a $i_*(\beta) = 0$, et donc $\beta \cdot H = 0$. cqfd

D'après le lemme 1 et la décomposition (2), on a donc $q_*(Z_0) = q_*q^*Z = NZ$. D'autre part, on a $h \cdot q^*(Z) = q^*(H \cdot Z) = 0$; en multipliant par h l'égalité (2) on obtient donc

$$-h^{k+1} \cdot Z_k \quad = \quad h \cdot Z_0 + h \cdot Z_1 + \cdots + h^k \cdot Z_{k-1}.$$

En écrivant $-h^{k+1} = c_{k+1} + \cdots + h^k \cdot c_1$, et en utilisant l'unicité de la décomposition (1), on en déduit $Z_0 = -c_k \cdot Z_k$. Comme $p^* \circ p_* \circ q^*(Z) = Z_k$, la proposition en découle. cqfd

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition 1.

Corollaire 3 *Soient $A \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ et F vérifiant les hypothèses de la proposition 1 et p, q comme dans la proposition 1. Pour $i < k$, on a $\mathrm{CH}_i(A)_{hom} \otimes \mathbb{Q} = 0$. Pour $i \geq k$, le morphisme*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{CH}_{i-k}(F)_{hom} \otimes \mathbb{Q} & \to & \mathrm{CH}_i(A)_{hom} \otimes \mathbb{Q} \\ Z & \mapsto & q_* \circ p^*(Z) \end{array}$$

est surjectif.

Démonstration du théorème 2 — Soit F une désingularisation de la variété des couples $L_{k-1} \times L_k \subset X \times Y$, où L_{k-1} est une variété linéaire projective de dimension $k-1$ contenue dans X, L_k est une variété linéaire projective de dimension k contenue dans Y, et $L_{k-1} \subset L_k$.

Soit $E \overset{u}{\hookrightarrow} F$ la sous-variété définie par la condition $L_k \subset X$.

On note $P_X \subset F \times X$ et $P_Y \subset F \times Y$ les variétés d'incidence:

$$\begin{aligned} P_X &= \{((L_{k-1}, L_k), x) \mid x \in L_{k-1};\ L_{k-1} \subset L_k \cap X;\ L_k \subset Y\}; \\ P_Y &= \{((L_{k-1}, L_k), y) \mid y \in L_k;\ L_{k-1} \subset L_k \cap X;\ L_k \subset Y\}. \end{aligned}$$

Les morphismes $p_X : P_X \to F$, $q_X : P_X \to X$, $p_Y : P_Y \to F$ et $q_Y : P_Y \to Y$ sont définis comme les restrictions des projections aux variétés d'incidence. On note $j : X \hookrightarrow Y$ l'inclusion.

Lemme 2 *Pour tout $Z \in \mathrm{CH}_\bullet(X)$, il existe un cycle $\alpha \in \mathrm{CH}_\bullet(E)$ tel que*

$$u_*(\alpha) = {p_Y}_* \circ {q_Y}^* \circ j_*(Z) - {p_X}_* \circ {q_X}^*(Z).$$

Démonstration — Il suffit de montrer que les cycles ${p_Y}_* \circ {q_Y}^* \circ j_*(Z)$ et ${p_X}_* \circ {q_X}^*(Z)$ restreints à $F - E$ sont rationnellement équivalents dans $\mathrm{CH}_\bullet(F - E)$.

Soient $P_{X,E}$ et $P_{Y,E}$ les restrictions de P_X et P_Y à $F - E$:

$$\begin{aligned} P_{X,E} &= \{((L_{k-1}, L_k), x) \mid x \in L_{k-1};\ L_k \subset Y;\ L_k \not\subset X;\ L_{k-1} = L_k \cap X\}; \\ P_{Y,E} &= \{((L_{k-1}, L_k), y) \mid y \in L_k;\ L_k \subset Y;\ L_k \not\subset X;\ L_{k-1} = L_k \cap X\}. \end{aligned}$$

On note q_X^E et q_Y^E les restrictions de q_X et q_Y à $P_{X,E}$ et $P_{Y,E}$. L'inclusion naturelle de $P_{X,E}$ dans $P_{Y,E}$ identifie $P_{X,E}$ à $(q_Y^E)^{-1}(X)$. Le diagramme suivant est donc cartésien.

$$\begin{array}{ccc} P_{X,E} & \overset{j'}{\hookrightarrow} & P_{Y,E} \\ \downarrow q_X^E & & \downarrow q_Y^E \\ X & \overset{j}{\hookrightarrow} & Y \end{array} .$$

De plus, toutes les variétés sont lisses et les flèches horizontales sont des inclusions de diviseurs. On a donc:

$${j'}_*(q_X^E)^*(Z) = (q_Y^E)^* j_*(Z).$$

Les projections $p_Y^E : P_{Y,E} \to F - E$ et $p_X^E : P_{X,E} \to F - E$ sont propres; l'image directe par $(p_Y^E)_*$ du cycle ci-dessus est donc bien définie. Comme on a $p_Y^E \circ j' = p_X^E$, on en déduit:

$$(p_Y^E)_* \circ (q_Y^E)^* \circ j_*(Z) = (p_X^E)_* \circ (q_X^E)^*(Z),$$

et donc ${p_Y}_* \circ {q_Y}^* \circ j_*(Z) - {p_X}_* \circ {q_X}^*(Z)$ est bien à support dans E.

cqfd

Supposons $Z \in \mathrm{CH}_{k-1}(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q}$. D'après le lemme 2 et la proposition 1, on a

$$-NZ = q_{X*} \circ p_X{}^*(c_k \cdot u_*(\alpha)) + q_{X*} \circ p_X{}^*(c_k \cdot (p_{Y*} \circ q_Y^* \circ j_*)(Z)).$$

Mais $j_*Z \in \mathrm{CH}_{k-1}(Y)_{hom} \otimes \mathbb{Q}$ et d'après le corollaire 3 appliqué à Y, on a $j_*Z = 0$. Donc NZ appartient à $q_{X*} \circ p_X{}^*(\mathrm{CH}_0(E)_{hom} \otimes \mathbb{Q})$. Or, par définition de E, pour tout cycle $Z \in q_{X*} \circ p_X{}^*(\mathrm{CH}_0(E))$, il existe un nombre fini de variétés linéaires projectives V_i de dimension $k-1$, des entiers relatifs n_i, et des variétés linéaires projectives W_i de dimension k telles que $V_i \subset W_i \subset X$ et $Z = \sum_i n_i V_i$. On a donc $Z = H_X \cdot \sum_i n_i W_i$. Par le lemme 1 cela implique $Z = 0$ dans $\mathrm{CH}_{k-1}(X)_{hom} \otimes \mathbb{Q}$. Donc $q_{X*} \circ p_X{}^*(\mathrm{CH}_0(E)_{hom} \otimes \mathbb{Q}) = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

3 Preuve du corollaire 2

Comme les hypersurfaces d'équations $F_i = 0$ sont lisses on voit immédiatement que Y est une hypersurface lisse de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{kd+1}$.

Pour appliquer le théorème 2 il nous reste à montrer que Y est couverte par une famille de sous-variétés linéaires projectives de dimension k de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{kd+1}$. Nous procéderons par récurrence sur $k \geq 2$. Montrons d'abord le lemme suivant

Lemme 3 *Soit $F(X_0, \ldots, X_d)$ un polynôme homogène de degré d. Alors $\mathbb{P}^d$ est couvert par les droites osculatrices à l'ordre d à l'hypersurface définie par F.*

Démonstration — En effet les droites projectives passant par un point donné de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^d$ forment un espace projectif de dimension $d-1$ et la condition pour une telle droite d'être osculatrice à l'ordre d à l'hypersurface $(F = 0)$ ou incluse dans cette hypersurface s'exprime par $d-1$ équations. cqfd

Considérons l'équation

$$H = F_0(X_0, \cdots, X_d) + F_1(X_{d+1}, \cdots, X_{2d}) + \cdots + F_i(X_{id+1}, \cdots, X_{(i+1)d}) + \cdots$$
$$\cdots + F_{k-1}(X_{(k-1)d+1}, \cdots, X_{kd+1}) = 0$$

avec $k \geq 2$ définissant Y. On va montrer par récurrence sur k que l'hypersurface Y' d'équation

$$F_0(X_0, \cdots, X_d) + F_1(X_{d+1}, \cdots, X_{2d}) + \cdots + F_{k-2}(X_{id+1}, \cdots, X_{(k-1)d})$$

dans $\mathbb{P}^{(k-1)d}$ satisfait la condition :

"$\mathbb{P}^{(k-1)d}$ est couvert par des variétés linéaires projectives de dimension $k-1$ totalement osculatrices à Y', c'est-à-dire dont l'intersection avec Y' est une variété linéaire projective de dimension $k-2$ et de multiplicité d."

Le cas $k=2$ est le lemme 3.

Soit $x \in Y$, et soient x_1 et x_2 ses projections sur $\mathbb{P}^{(k-1)d}$ et $\mathbb{P}^d$ données respectivement par les $(k-1)d+1$ premières coordonnées et par les $d+1$ dernières coordonnées. Alors il existe une variété linéaire projective de dimension $k-1$ dans $\mathbb{P}^{(k-1)d}$ contenant x_1 et totalement osculatrice à Y'. De même, il existe une droite projective dans $\mathbb{P}^d$ contenant x_2 et totalement osculatrice à l'hypersurface d'équation F_{k-1}. Soit L l'espace projectif de dimension $k+1$ engendré dans $\mathbb{P}^{kd+1}$ par ces deux espaces. Alors L contient x et $H_{|L}$ est de la forme $A^d + B^d$, où A et B sont des formes linéaires. Donc $L \cap Y$ est une union de $\mathbb{P}^k$.

Remerciements. Je remercie Claire Voisin pour m'avoir suggéré l'énoncé du théorème 2 et m'avoir indiqué la référence [1].

Références

[1] A.Beauville et R.Donagi. *Sur les groupes de Chow de certaines hypersurfaces.* C.R.Acad.Sc.Paris, t.301, Série 1,n°14, p 73-76, (1985).

[2] S.Bloch, V.Srinivas. *Remarks on correspondences and algebraic cycles.* Amer. J. of Math. 105, p 1235-1253, (1980).

[3] H.Esnault, M.Levine, E.Viehweg. *Chow groups of projective varieties of very small degree.* Duke Math. J. 87 n°1, p 29-58, (1992)

[4] W.Fulton. *Intersection Theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer (1984)

[5] D.Mumford. *Rational equivalence of zero-cycles on surfaces.* Journal of mathematics of Kyoto University 9 (1969).

[6] K.Paranjape. *Cohomological and cycle-theoretic connectivity.* Annals of Math. 139, série 2, p 641-660 (1994).

[7] A.A.Roitman. *Rational equivalence of zero-cycles.* Math. USSR Sbornic 18, p.571-588,(1971).

[8] C.Voisin. *Sur les groupes de Chow de certaines hypersurfaces* C.R.Acad.Sc.Paris, t.322, Série 1, p 73-76, (1996).

Universite Paris VI, 2-4 pl. Jussieu, 75005 Paris.