Table des matières

[Module universel pour GL_3]Module universel pour GL_3 (avec Ania Otwinowska)
Ce chapitre est le fruit d'une collaboration avec Ania Otwinowska

1. Introduction

1.1. L'objet de ce court chapitre est de démontrer la conjecture de Lazarus ([La1], conjecture 1.0.5), en toute caractéristique différente de p, dans le cas du groupe linéaire GL_3 d'un corps $\mathfrak{P}$-adique.

Nous espérons pouvoir prouver par des méthodes semblables la conjecture de Lazarus pour GL_n. Nous espérons aussi, mais ce sera sans doute un peu plus dur, que ces méthodes pourront mener à une preuve de la conjecture de Lazarus en général, i.e. pour tous les groupes réductifs.

1.2. Soit F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_F$ son anneau d'entiers, $d \geq 2$ un nombre entier. On pose $G = \mathrm{PGL}_d(F)$, et on note K l'image de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_F)$ dans G. On fixe aussi un anneau quelconque k. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_k(G, K)$ est alors commutative, isomorphe à une algèbre de polynômes $k[T_1, \dots, T_{d-1}]$, et pour tout caractère λ de cette algèbre, on introduit le module universel $M_\lambda = \mathcal{C}(G/K, k) \otimes_{\mathcal{H}_k(G,K),\lambda} k$, où $\mathcal{C}(G/K, k)$ désigne les fonctions à supports finis sur G/K à valeurs dans k. qui est un k-module sur lequel G agit à droite. Nous démontrons :

Théorème 1.3. *On suppose que $d = 3$. Le module M_λ est plat sur k. Si p est inversible dans k, on a plus précisément : pour tout sous-groupe compact ouvert suffisamment petit U de G, le k-module M_λ^U est libre et de type fini sur k.*

La première assertion du théorème affirmant la platitude du module universel pour tout anneau k est équivalente à la platitude de $\mathcal{C}(G/K, k_0)$ sur $\mathcal{H}_{k_0}(G, K)$ pour tout anneau k_0 (cette dernière assertion est le cas particulier $k = \mathcal{H}_{k_0}(G, K)$, λ tautologique de l'assertion précédente et ce cas particulier entraîne trivialement le cas général). Or la conjecture de Lazarus est l'assertion que $\mathcal{C}(G/K, k)$ est plat sur $\mathcal{H}_k(G, K)$ pour k un corps de caractéristique différente de p. Notons que pour d quelconque, et k un corps de caractéristique banale pour GL_d, cette conjecture est un théorème de Lazarus qui fait l'objet de l'article [La2]

Notons également qu'en utilisant l'irréductibilité générique des séries principales non ramifiées pour GL_3 en caractéristique zéro, bien connue, on déduit de ce théorème le corollaire suivant, en utilisant le principe de Brauer pour les représentations lisses, cf. [**?**].

Corollaire 1.4. *Soit k un corps de caractéristique différente de p (et où l'on a choisi une racine de q). Soit χ un caractère non ramifié du Borel standard de G, et λ le caractère de $\mathcal{H}(G, K)$ associé à χ via l'isomorphisme de Satake. Alors les représentations M_λ et I_χ (induite unitaire de χ de B à G) ont mêmes facteurs de composition (avec les mêmes multiplicités).*

Comme la structure des séries principales non ramifiées est connue ([**?**], chapitre III), on connaît aussi la semi-simplification des modules universels.

2. Traduction en un problème sur l'immeuble de G

2.1. Rappels et notations sur l'immeuble de $\mathrm{PGL}_d(F)$.

2.1.1. On rappelle qu'a tout groupe réductif $\mathfrak{P}$-adique est associé un *immeuble de Bruhat-Tits*: voir [**?**].

À quelques exceptions près, nous ne considérerons les immeubles que du point de vue combinatoire, tel qu'expliqué dans les exercices du paragraphe 1 du chapitre IV de [Bou]. Nous éviterons au maximum l'usage du point de vue de [B-T], où les immeubles sont de "gros" espaces métriques, et dont les appartement sont isométriques à des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$. Le passage d'un point de vue à l'autre est en général transparent, c'est pourquoi nous nous autoriserons à utiliser dans notre cadre combinatoire les résultats démontrés dans [B-T].

2.1.2. Ainsi à G est associé un immeuble, dont on notera X l'ensemble des sommets. On rappelle que X peut être décrit comme l'ensemble des $\mathcal{O}_F$-réseaux de F^d, à homothéties près. Cette description détermine un point privilégié O de X, qu'on appellera parfois *l'origine* de X. Le sous-groupe K de G est le stabilisateur de O pour l'action de G sur X.

On notera $\mathcal{X}$ l'immeuble de Bruhat-Tits "plein". Pour S une partie de X on notera $\mathcal{S}$ la partie de $\mathcal{X}$ correspondante, définie comme la fermeture convexe de S dans $\mathcal{X}$.

2.1.3. *Type des arêtes.* Les facettes de dimension 1 (i.e. de cardinal 2) sont appelés *les arêtes.* Rappelons que si x et x' sont deux points distincts de X, (x, x') est une arête, si et seulement si, un réseau Λ de F^d représentant x étant choisi, il existe un réseau Λ' représentant x' tel que

$$\pi\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda.$$

Comme x et x' sont distincts, les inclusions ci-dessus sont strictes, et $\Lambda'/\pi\Lambda$ est un sous-$\bar{F}$-espace vectoriel propre de $\Lambda/\pi\Lambda = \bar{F}^d$. La dimension de cet espace vectoriel est un entier compris entre 1 et $d-1$, qu'on préférera voir comme un élément non nul du groupe additif $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, et qu'on appellera le type de l'arête (x, x'). Les types des arêtes obéissent aux règles (évidentes) suivantes :

- Si (x, x') est une arête de type i, alors (x', x) est une arête de type $-i$
- Si (x, x'), (x', x'') et (x, x'') sont trois arêtes, alors le type de (x, x'') est la somme de ceux de (x, x') et (x', x'').

De plus, l'action de G respecte le type des arêtes.

Si (x, x') est une arête de type i, on dit que x' est un *voisin de x de type i.*

2.1.4. *Chambres et facettes.* Les arêtes sont les facettes de dimension 1, mais nous avons donnée une propriété caractéristique ne faisant pas intervenir la notion de facette. Pour la commodité du lecteur, rappelons comment on peut définir cette notion en terme de celle d'arête.

Une *chambre* est un ensemble C de X de cardinal d, tel qu'on peut trouver $x \in X$ tels que les $y \neq x$ de C soient tous des voisins de x de types deux à deux distincts. Une facette est simplement une partie d'une chambre.

2.1.5. *Appartements.* Rappelons que l'immeuble X est couvert par des *appartements.* Si $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base de F^d, on lui associe l'ensemble des sommets de X qui ont un représentant de la forme $\mathcal{O}_F\pi^{a_1}e_1 + \ldots + \mathcal{O}_F\pi^{a_d}e_d$, et ce sont les ensembles ainsi obtenus qu'on appelle *appartements.* (Noter que l'appartement associé à la base $(e_1, \ldots, e_d)$ ne dépend en en fait que de l'ensemble des droites $\{Fe_1, \ldots, Fe_d\}$.)

La base $(e_1, \ldots, e_d)$ détermine une origine O dans l'appartement associé (à savoir le réseau engendré par $e_1, \ldots, e_d$, et permet d'associer à tout point de cet appartement ses *coordonnées*, à savoir le d-uplet d'entiers $(a_1, \ldots, a_d)$ qui n'est bien défini qu'à l'addition près d'un d-uplet constant $(a, \ldots, a)$. On a donc une bijection naturelle entre les sommets de l'appartement et $\mathbb{Z}^d/\mathbb{Z}(1, \ldots, 1)$.

Dans ce langage, deux points x et y de cet appartement sont voisins (ou égaux) si, et seulement si l'on peut trouver un représentant $(a_1, \ldots, a_d)$ de x et $(b_1, \ldots, b_d)$ de y, tels que les $b_i - a_i$ soient tous égaux à 0 ou à 1. Le nombre de $b_i - a_i$ égaux à 0, est alors le type de l'arête orientée (x, y) (si ce nombre est entre 1 et $d - 1$. Sinon, c'est qu'on a $x = y$).

Si A est un appartement au sens combinatoire, on notera $\bar{A}$ l'appartement au sens euclidien qui lui correspond. C'est un espace métrique euclidien pour une distance euclidienne que nous noterons δ.

2.1.6. *Distance.* Voici le vocabulaire que nous utiliserons :

La *distance* de deux points x à x' sera toujours (sauf mention explicite du contraire) la distance combinatoire, i.e. le nombre minimal d'arêtes nécessaires pour construire un chemin reliant x à x', et non la distance *euclidienne.* De même pour tous les termes dérivés : *longueur, sphère, boule, rayon.*

Il y a aussi une distance euclidienne sur $\mathcal{X}$, qui se restreint à X, que nous noterons δ. Pour cette distance, on peut parler de milieu et de parties convexes.

2.1.7. *Parties closes.* Nous dirons qu'une partie S de X, qui contient au moins une chambre est close si $\mathcal{S}$ est close dans $\mathcal{X}$ au sens de [B-T], 2.4.1. Il revient au même de demander que $\mathcal{S}$ est convexe et réunion d'adhérences de chambres (*loc. cit.*, 2.5.7). Du point de vue combinatoire, S est clos si et seulement si il est réunion de chambres et si, pour tout chemin de longueur minimale reliant deux points de S, tout le chemin est dans S (exercice facile). Comme une intersection d'ensembles clos contenant une chambre commune est close, il existe un plus petit ensemble clos contenant une partie donné contenant une chambre, qu'on appelle *enclos.* (*loc. cit*, 2.4.1)

2.1.8. *Notations.* On note B_n (resp. S_n) la boule (resp. sphère) de centre O et de rayon n. L'ensemble B_n est clos, mais pas S_n. On note K_n le fixateur de B_n. Ainsi, $K_0 = K$.

Les K_n sont des sous-groupes compacts ouverts de G qui sont des pro-p-groupes dès que $n \geq 1$. Ils forment un système de voisinage de l'élément neutre dans G.

Si Y est un sous-ensemble de X, on notera $\mathcal{C}(Y)$ le k-module des applications (ou "fonctions") à support fini de Y dans k. On posera $C_n = \mathcal{C}(B_n)$.

2.2. **Traduction du problème en terme d'immeubles.**

2.2.1. Comme G agit transitivement sur X, on dispose d'une bijection canonique $G/K \simeq X$ $(g \mapsto gO)$.

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, K)$ agit naturellement à droite sur $\mathcal{C}(G/K)$, et cette action peut-être décrite ainsi : via l'isomorphisme

$$\mathcal{H}(G, K) = k[T_1, \ldots, T_{d-1}],$$

chaque T_i agit sur $\mathcal{C}(X)$ de la manière suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}(X), \forall x \in X,\ (T_i f)(x) = \sum_{y \text{ voisin de type } i \text{ de } x} f(y).$$

2.2.2. Posons $\lambda(T_i) = \lambda_i$, et définissons un k-module muni d'une action de G de la manière suivante :

$$M = \mathcal{C}(X)/(\mathrm{Im}\,(T_1 - \lambda_1) + \ldots + \mathrm{Im}\,(T_{d-1} - \lambda_{d-1})).$$

Alors on voit facilement (cf. [La1]) que M est isomorphe au module M_λ de l'introduction.

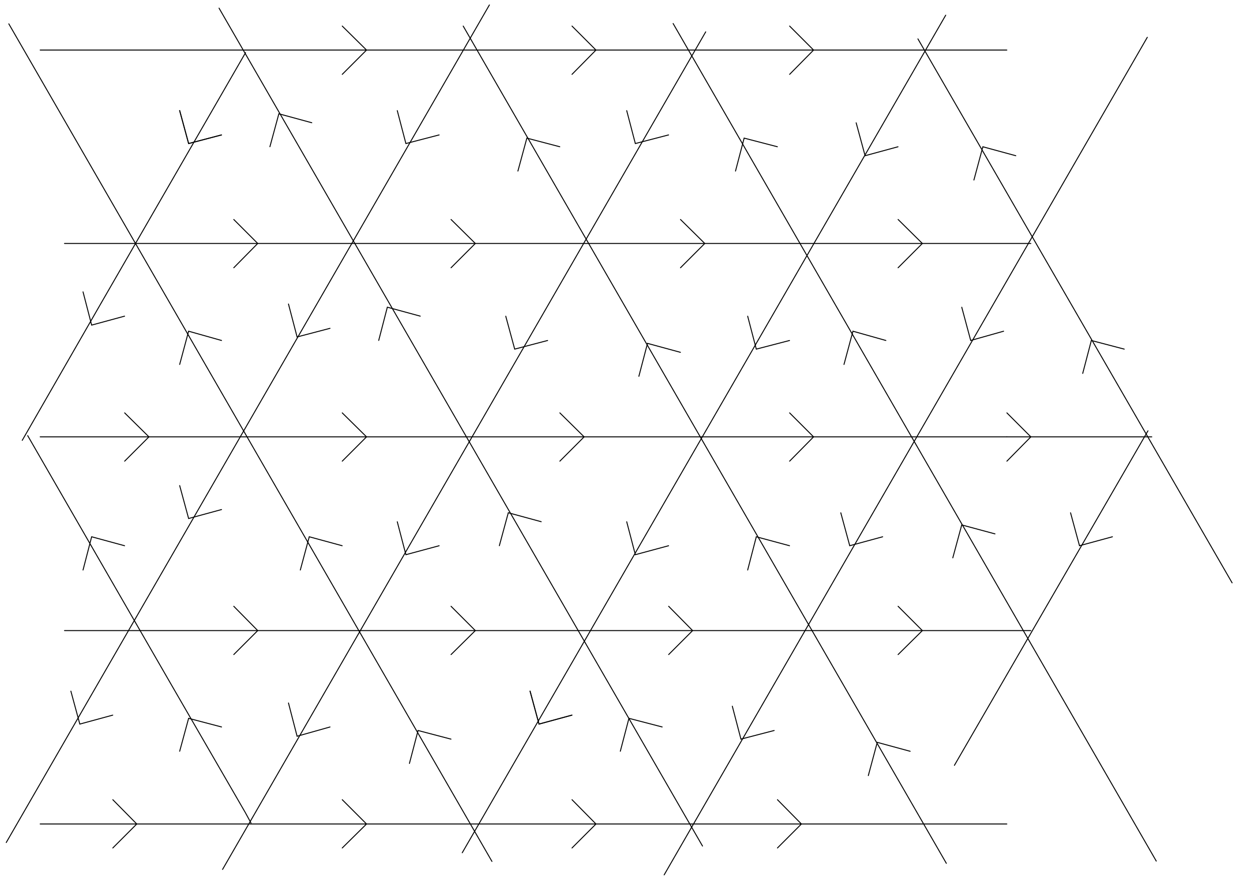
Comme expliqué dans la note de la page **??**, pour vérifier la platitude de M^U pour U sous-groupe compact ouvert suffisamment petit, il suffit de le faire pour tous les $U = K_n$ avec n suffisamment grand.

3. Preuve du théorème

3.1. **Quelques résultats particuliers à l'immeuble de $\mathbf{PGL}_3$.**

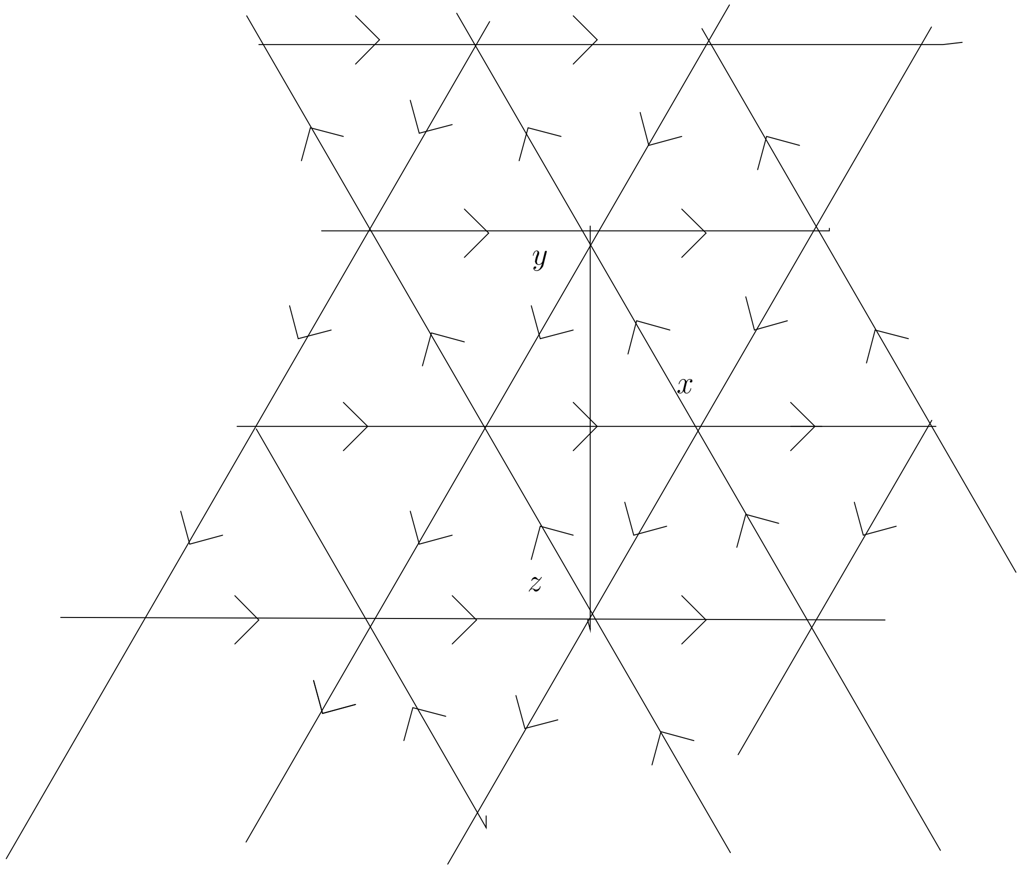
3.1.1. Nous désignons maintenant par X l'immeuble de PGL_3. Les arêtes orientées sont alors de deux types : 1 ou 2 mod 3. Une arête non orientée a alors une et une seule orientation pour laquelle elle est de type 1 : ceci définit un “bon” sens (= celui pour lequel elle est de type 1) sur chacune des arêtes non orientés $\{x, y\}$, et dans les dessins ont représentera toujours ce sens par une flèche.

3.1.2. *Appartements.* Soit (e_1, e_2, e_3) une base de F^3 et A l'appartement associé. On a vu que les sommets de A étaient en bijection avec $\mathbb{Z}^3/\mathbb{Z}(1,1,1)$. On a coutume de voir ce quotient plongé dans $\mathbb{R}^2$ via la projection orthogonale sur l'hyperplan des vecteurs de sommes nulles dans $\mathbb{R}^3$. La distance euclidienne δ sur X, restreint à A est alors simplement la distance euclidienne standard de $\mathbb{R}^2$ via cette identification. Le dessin de A est alors le suivant :



Lemme 3.1.3. *Soit $n \geq 0$. Soit $x \in S_{n+1}$. Alors tous les voisins de x qui appartiennent à S_n appartiennent à tout appartement passant par O et x. Ces voisins sont au nombre de 1 (ce qui arrive si et seulement si la distance euclidienne $\delta(x, O) = n+1$) ou 2 (ce qui arrive si et seulement si $\delta(x, O) < n+1$), auquel cas ils ne sont pas de même type.*

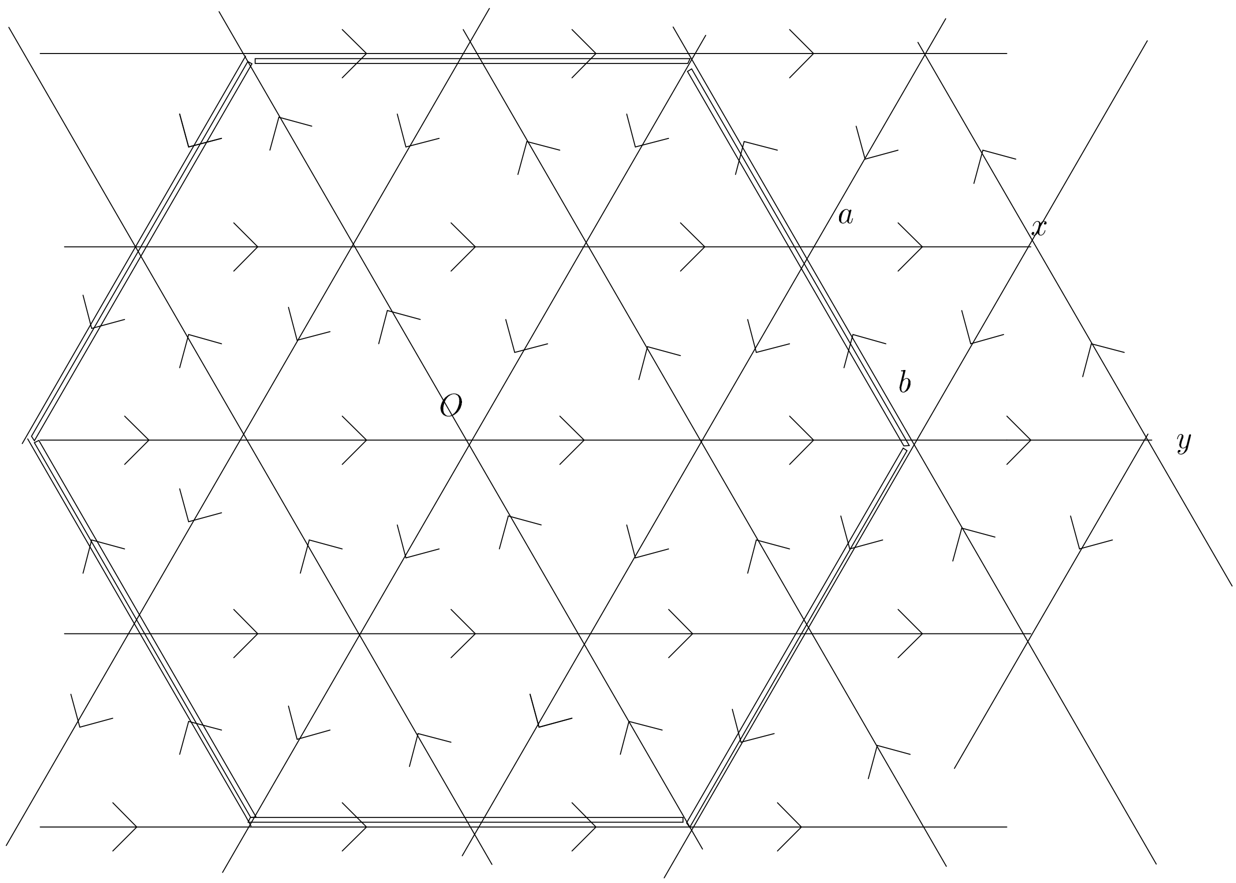
Démonstration — Soit A un appartement passant par x (mais pas nécessairement par l'origine). Vérifions d'abord que, dans A, x a au plus un voisin de chaque type dans S_n. Supposons que x ait deux voisins dans $S_n \cap A$ du même type, y et z. On est alors dans la situation suivante :



Les points y et z appartiennent à l'ensemble clos $B_n \cap A$, donc le segment qui les relie appartient à $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{A}$ (voir figure). Mais $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{A}$ est une réunion de chambres (les petits triangles du dessin), donc il contient x, ce qui absurde, car par hypothèse $x \in S(x, n+1)$.

Si y est un voisin de x dans S_n d'un certain type (1 ou 2), c'est le seul : en effet, s'il y en avait un deuxième z, les deux arêtes $[x, z]$ et $[x, y]$ appartiendrait à un appartement commun A, et l'on a vu que dans A, ceci impliquait $y = z$.

Enfin, dans un appartement A passant par l'origine et x, on voit bien que les voisins de x dans $S_n \cap A$ sont au nombre de 1 ou 2 selon que $\delta(x, O) = n + 1$ ou non. Comme cette condition est indépendante de A, il résulte de ce qui précède que les voisins de x dans S_n appartiennent à tout appartement passant par O et x.



□

Remarque. Ce lemme est faux pour $d > 3$: si $d > 3$, un point de S_{n+a} peut avoir plusieurs voisins du même type dans S_n, et plus de $d-1$ voisins dans S_n au total.

Pour $d = 3$, j'ignore si le fait que tous les voisins de x dans S_n sont dans un même appartement (ce qui impliquerait trivialement le reste du lemme) résulte plus facilement de la théorie de l'enclos. Le problème est qu'*a priori*, l'ensemble $\{x, O\}$ ne contient pas de chambre, et n'a donc pas d'enclos bien défini.

Définition. On dit que $x \neq O$ est *pointu* si $x \in S_n$ n'a qu'un seul voisin dans S_{n-1}.

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.4. *Soit x dans S_n, u et v ses voisins dans S_{n-1} (on prend $u = v$ si x n'en a qu'un seul). Soit y un voisin de x distinct de u et v. Alors $y \in S_n$ si et seulement si y est voisin de u ou de v.*

Démonstration — Si y est voisin de u ou de v, il est clair que $d(O, y) \leq n-1+1 = n$, et donc que $y \in S_n$. Réciproquement, (x, u, v) est une chambre, et on peut donc se placer dans un appartement qui contient x, u, v, et y (mais pas forcément O). Mais alors on voit (si $u \neq v$) que si y n'est pas voisin de u ou v, il est diamétralement opposé à l'un d'entre eux, disons u. L'inégalité de courbure négative (valable pour d comme pour δ, la preuve est la même, cf. [B-T], 3.2.1) donne alors

$$d^2(O, x) \leq 1/2(d^2(O, u) + d^2(O, y)) - 1/4 d^2(u, y) = 1/2((n-1)^2 + n^2) - 1 < n^2,$$

ce qui est absurde. Le cas où $u = v$ est laissé au lecteur. $\square$

3.2. **Platitude de $M_{\lambda,\mu}$.**

Proposition 3.2.1. *Soit $n \geq 1$. Soit f_1 et f_2 deux fonctions à support dans S_n. On suppose que la fonction $T_1 f_1 + T_2 f_2$ est nulle sur S_{n+1}. Alors il existe une fonction g sur S_{n-1} telles que f_1 et f_2 coïncident respectivement avec $T_2 g$ et $-T_1 g$ sur S_n.*

Remarques. – Réciproquement, si f_1 et f_2 sont les restrictions à S_n de $T_2 g$ et $T_1 g$, où g est une fonction sur S_{n-1}, on a $T_1 f_1 + T_2 f_2 = T_1 T_2 g - T_2 T_1 g = 0$ sur la sphère S_{n+1}.

– La proposition a l'interprétation cohomologique suivante. Le $k[T_1, T_2]$-module $C = \mathcal{C}(X)$ est naturellement "filtré" par les sous-k-modules $C_n = \mathcal{C}(B_n)$: si $P \in k[T_1, T_2]$ est homogène de degré d, on a $PC_n \subset C_{n+d}$. Le k-module gradué associé $\hat{C} : = \oplus_{n=0}^{\infty} C_{n+1}/C_n$ hérite d'une action de $k[T_1, T_2]$, qui en fait un module gradué sur l'algèbre graduée $k[T_1, T_2]$.

On peut donc appliquer la théorie du complexe de Koszul (cf. [**?**]) : si k désigne le $k[T_1, T_2]$-module trivial, conoyau de l'idéal homogène maximal (T_1, T_2), les groupes $\mathrm{Tor}^i(k, \hat{C})$ sont naturellement gradués, et sont calculés par le complexe de Koszul de $\hat{C}$. Or on voit facilement que la proposition affirme exactement l'exactitude en 1 de la n-ième graduation de ce complexe. Autrement dit, la proposition pour un n donné équivaut à $\mathrm{Tor}^1(k, \hat{C})^n = 0$, et comme la proposition est énoncée pour tout n, elle équivaut à $\mathrm{Tor}^1(k, \hat{C}) = 0$.

– La proposition reste vraie pour $n = 0$ avec la convention que $S_{-1} = \emptyset$, et que l'unique fonction sur S_{-1} est la fonction nulle.

3.2.2. Prouvons la proposition 3.2.1. Soient f_1 et f_2 deux fonctions sur S_n comme dans l'énoncé de la proposition. Il nous faut définir une fonction g sur S_{n-1}, telle que $f_1 = T_2 g$, et $f_2 = -T_1 g$ sur S_n.

Soit donc x un point de S_{n-1}. Soit y un voisin de type 1 de x appartenant à S_n. Alors, d'après le lemme 3.1.3, x est le seul point de S_{n-1} dont y soit un voisin de type 1. Supposons le problème résolu : si l'on avait $f_2 = -T_1 g$ sur S_n, on aurait en particulier

$$g(x) = -f_2(y).$$

De même, $f_1 = T_2 g$ impliquerait $g(x) = f_1(z)$. Il est donc naturel de chercher à montrer le lemme suivant, qui serait impliqué par la proposition :

Lemme 3.2.3. *Soit x un point de S_{n-1}. Alors f_1 est constante sur l'ensemble des voisins de type 2 de x qui sont dans S_n, et f_2 est constante sur l'ensemble des voisins de type 1 de x dans S_n. De plus, les deux valeurs prises par ces fonctions sur les ensembles considérés sont opposées.*

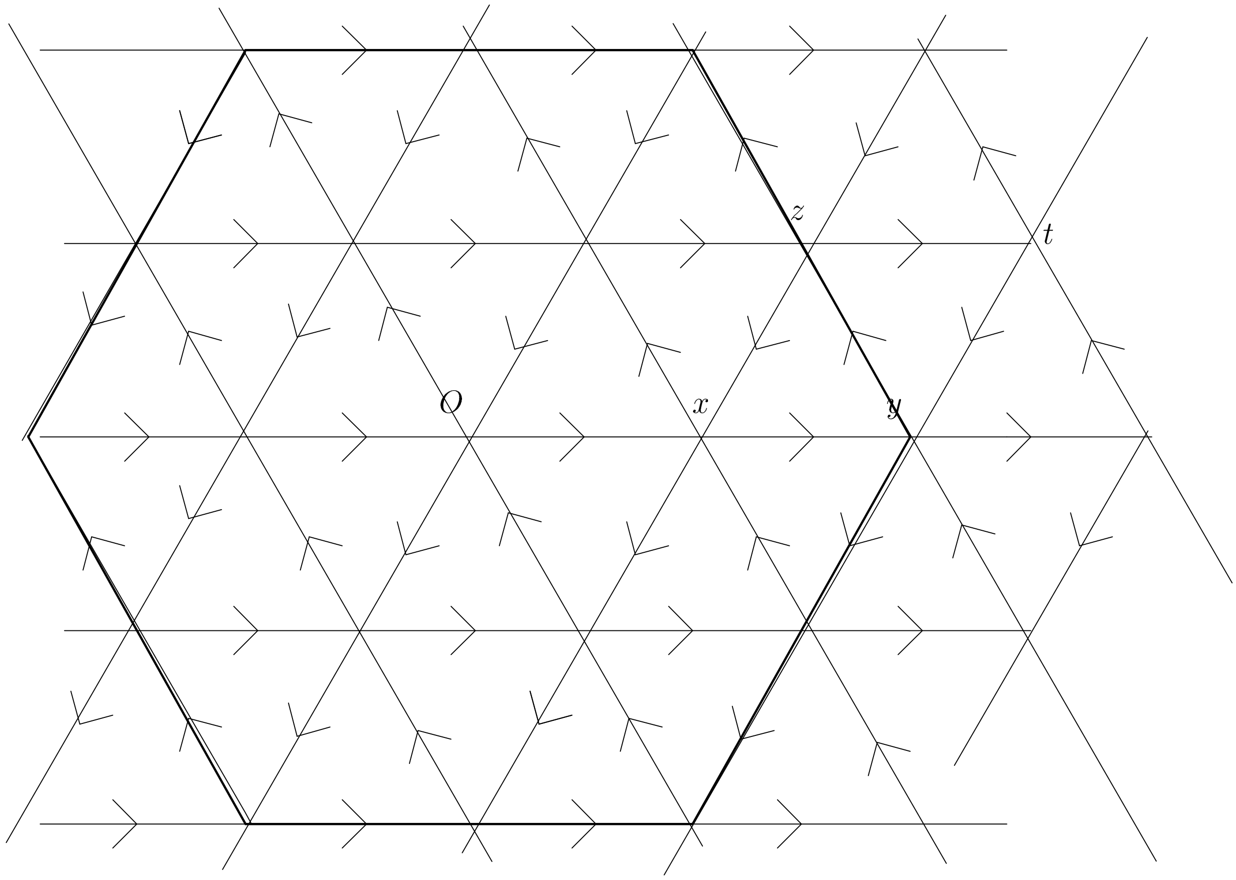
3.2.4. Inversement, ce lemme implique facilement la proposition : il suffit de définir, pour tout $x \in S_{n-1}$ $g(x)$ comme $-f_2(y)$ pour un y voisin de type 1 de x dans S_n. Le lemme montre que c'est bien défini, et ce qui précède que $f_2 = -T_1 g$, en tous les points y de S_n qui ont un voisin x dans S_{n-1} tel que (x, y) soit de type 1. Pour un y dans S_n, qui n'a pas de tel voisin, on a trivialement $(T_1 g)(y) = 0$; par ailleurs on voit facilement, en se placant par exemple dans un appartement contenant O et y, qu'il existe un u dans S_{n+1} qui a y pour unique voisin, avec (y, u) de type 2.

Comme $T_1 f_1 + T_2 f_2$ est nulle en u, on a $f_2(y) = 0$, et l'égalité $f_2 = -T_1 g$ est encore valable en un tel y, donc sur tout S_n.

On montre de la même manière que $f_1 = T_2 g$.

Il nous suffit donc de prouver le lemme.

3.2.5. Soit y (resp. z) un voisin de type 1 (resp. 2) de x dans S_n. Supposons que y et z soient voisins. Alors il existe t dans S_{n+1} qui ait exactement y et z comme voisins (de type 1 et 2 respectivement) dans S_n. Pour voir ceci, on remarque que (x, y, z) forme une facette ; on peut donc se placer dans un appartement passant par O, x, y, et z ; dans un tel appartement, l'existence d'un $t \in S_{n+1}$ ayant y et z comme voisins de type 1 et 2 respectivement est facile ; le lemme 3.1.3 montre alors que y et z sont, dans tout l'immeuble, les seuls voisins de x dans S_n.



L'annulation de $T_1 f_1 + T_2 f_2$ en t implique donc (si y et z sont voisins)

$$f_1(z) = -f_2(y).$$

Considérons le graphe G_x (c'est un sous-graphe du graphe sous-jacent à X) dont les sommets sont les voisins (quelque soit leur type) de x dans S_n et dont les arêtes relient deux points s'il sont voisins dans X. Remarquons tout de suite que si y et z sont voisins dans G_x, alors nécessairement y et z sont voisins de x de type différent, disons 1 et 2 (cela résulte de 2.1.3), et l'on a donc $f_1(z) = -f_2(x)$. Il est alors clair que le lemme 3.2.3 résulte du lemme suivant.

Lemme 3.2.6. *Le graphe G_x est connexe.*

3.2.7. On suppose d'abord $n \geq 2$. Nous allons interpréter le graphe G_x en termes de géométrie projective.

Nous savons déjà que l'ensemble des voisins (de type 1 et 2 respectivement) de x s'interprète comme l'ensemble des points et des droites (respectivement) dans le plan projectif $\mathbb{P}^2(\bar{F})$. Deux voisins de x sont eux-mêmes voisins si l'un correspond à un point et l'autre à une droite contenant ce point.

Il nous faut distinguer deux cas, selon que le point x a un ou deux voisins dans S_{n-2}.

Supposons d'abord que x ait deux voisins distincts u et v dans S_{n-2} qui correspondent à un point P et une droite D dans $\mathbb{P}^2$, avec $P \subset D$. Les voisins de x dans S_{n-1} sont alors exactement les voisins de x qui sont aussi voisins soit de u soit de v (cf lemme 3.1.4), autrement dit ce sont les points (différents de P) de $\mathbb{P}^2$ qui sont dans D, et les droites (différentes de D) qui contiennent P.

Finalement, les points de G_x sont les voisins de x qui ne sont ni dans S_{n-1} ni dans S_{n-2} ; ce sont donc les points de $\mathbb{P}^2 - D$, et les droites de $\mathbb{P}^2$ qui ne contiennent pas P.

Sous cette forme il est facile de montrer que G_x est connexe : Montrons par exemple que deux points Q et Q' de $\mathbb{P}^2 - D$ sont reliés. Si P, Q et Q' ne sont pas sont alignés, Q est relié à Q' via la droite (QQ') qui ne passe pas par P. Si P, Q et Q' sont alignés, on prend Q' n'appartenant pas à D, (PQ) et (PQ') (un tel Q' existe car $|\mathbb{P}^2| - |D| - |(PQ)| - |(PQ')| + |\{P, Q, Q'\}| = q^2 + q + 1 - 3(q+1) + 3 = q^2 - 2q + 1 > 0$ pour tout $q = |\bar{F}|$). Alors Q est relié à Q'' et Q'' à Q'.

Le cas où x n'a qu'un seul voisin u dans S^{n-2} est encore plus simple : si u correspond à un point $P \in P^2$ (le cas d'une droite est dual) G_x s'interprète comme l'ensemble des points de $\mathbb{P}^2$ distincts de P et des droites de $\mathbb{P}^2$ ne passant par P, et la connexité se montre de même. Le cas $n = 1$ est facile.

On a donc montré le lemme 3.2.6, donc le lemme 3.2.3 et la proposition 3.2.1.

Corollaire 3.2.8. *Soit $f \in C_n = \mathcal{C}(B_n)$, tel que $f \in (T_1 - \lambda)C + (T_2 - \mu)C$. Alors $\exists g_1 \in C_{n-1}$, $g_2 \in C_{n-1}$ tels que $f = (T_1 - \lambda)g_1 + (T_2 - \mu)g_2$.*

Démonstration — Par hypothèse

$$f = (T_1 - \lambda)f_1 + (T_2 - \mu)f_2$$

avec f_1 et $f_2 \in C$. Supposons que f_1 et f_2 soit toutes deux à support dans B_{n+m} avec $m \geq 0$. Nous allons construire deux fonctions f_1' et f_2', à support dans B_{n+m-1}, vérifiant toujours la relation

$$f = (T_1 - \lambda)f_1' + (T_2 - \mu)f_2'.$$

Le corollaire en résulte par récurrence descendante sur m.

Pour ce faire, notons que $T_1 f_1 + T_2 f_2 = f + \lambda f_1 + \mu f_2$ est nulle sur la sphère S_{n+m+1}, puisque c'est déjà la cas de f, f_1 et f_2. D'après la proposition précédente, il existe donc g à support dans la sphère S_{n+m-1} telle que f_1 et $T_2 g$, ainsi que f_2 et $-T_1 g$ coïncident sur S_{n+m}.

Posons alors $f_1' = f_1 - (T_2 - \mu)g = (f_1 - T_2 g) + \mu g$. Alors f_1' est à support dans B_{n+m-1}, puisque g l'est, et que f_1 et $T_2 g$ sont à support dans B_{n+m} mais coïncident sur S_{n+m}.

Posons de même $f_2' = f_1 + (T_1 - \lambda)g$, qui est à support dans B_{n+m-1}.

On voit alors que

$$(T_1-\lambda)f_1'+(T_2-\mu)f_2'=$$
$$[(T_1-\lambda)f_1+(T_2-\mu)f_2]-[(T_1-\lambda)(T_2-\mu)g-(T_2-\mu)(T_1-\lambda)g]=f-0=f,$$

car $(T_1-\lambda)$ et $(T_2-\mu)$ commutent. □

3.2.9. Le k-module C est filtré par ses sous-k-module $C_n=\mathcal{C}(B_n)$. Si l'on note $\bar{C}_n$ l'image de C_n dans $M_{\lambda,\mu}$, on obtient une filtration de $M_{\lambda,\mu}$.

Proposition 3.2.10. – *1) On a un isomorphisme canonique de k-modules*

$$\bar{C}_n=C_n/[(T_1-\lambda)C_{n-1}+(T_2-\mu)C_{n-1}].$$

– *2) Notons L_n le sous-espace de $\mathcal{C}(S_n)$ constitué des restrictions à S_n des fonctions de la forme $T_1f_1+T_2f_2$, où f_1 et f_2 appartiennent à $\mathcal{C}(S_{n-1})$. Alors on a un isomorphisme canonique de k-modules :*

$$\bar{C}_n/\bar{C}_{n-1}=\mathcal{C}(S_n)/L_n.$$

– *3) Ce dernier module $\mathcal{C}(S_n)/L_n$ est libre de type fini.*

Démonstration —

$$\bar{C}_n=C_n/[((T_1-\lambda)C+(T_2-\mu)C)\cap C_n].$$

Or le corollaire précédent affirme que

$$((T_1-\lambda)C+(T_2-\mu)C)\cap C_n=(T_1-\lambda)C_{n-1}+(T_2-\mu)C_{n-1},$$

ce qui prouve 1).

On en déduit

$$\bar{C}_n/\bar{C}_{n-1}=(C_n/C_{n-1})/p([(T_1-\lambda)C_{n-1}+(T_2-\mu)C_{n-1}]),$$

où p désigne la projection canonique $C_n\to C_n/C_{n-1}$. La restriction $C_n=\mathcal{C}(B_n)\to\mathcal{C}(S_n)$ induit un isomorphisme de C_n/C_{n-1} sur $\mathcal{C}(S_n)$, et cet isomorphisme envoie $p([(T_1-\lambda)C_{n-1}+(T_2-\mu)C_{n-1}])$ sur le sous-module de $\mathcal{C}(S_n)$ que nous avons appelé L_n. Ceci prouve 2).

Pour prouver 3), considérons la suite de morphismes :

$$0\to\mathcal{C}(S_{n-2})\to\mathcal{C}(S_{n-1})^2\to\mathcal{C}(S_n)\to\mathcal{C}(S_n)/L_n\to 0,$$

où le premier morphisme non trivial est celui qui à $g\in\mathcal{C}(S_{n-2})\subset C$ associe le couple des fonctions $(-T_2g,T_1g)$ restreintes à S_{n-1}, le second morphisme est celui qui à $(g_1,g_2)\in\mathcal{C}(S_{n-1})^2$ associe la restriction à S_n de $T_1g_1+T_2g_2$, et enfin le dernier morphisme est simplement la projection canonique.

Que cette suite est un complexe est formel. C'est d'ailleurs (si l'on s'arrête à l'avant-dernier terme) le (n-gradué du) complexe de Koszul de $\hat{C}$ mentionné à la remarque ci-dessus.

Nous affirmons que cette suite est une suite exacte. De droite à gauche : l'exactitude en $\mathcal{C}(S_n)/L_n$ est évidente. L'exactitude en $\mathcal{C}(S_n)$ résulte de la définition de L_n. L'exactitude en $\mathcal{C}(S_{n-1})^2$ est la proposition 3.2.1. L'exactitude en $\mathcal{C}(S_{n-2})$ résulte facilement du lemme 3.1.3 : en effet, il faut montrer que si $f\in\mathcal{C}(S_{n-2})$, la nullité de T_1f et de T_2f sur S_{n-1} implique celle de f. Pour cela soit x un point de S_{n-2}. Le point x possède toujours au moins un voisin y dans S_{n-1} (regarder dans un appartement) disons de type 1. $0=(T_1f)(y)=f(x)$, d'après 3.1.3.

On en déduit, si k est un corps :

$$\dim_k \mathcal{C}(S_n)/L_n = \dim_k \mathcal{C}(S_n) - \dim_k \mathcal{C}(S_{n-1})^2 + \dim_k \mathcal{C}(S_{n-2}).$$

Comme le membre de droite est un nombre indépendant du corps k (il est égal à $|S_n| - 2|S_{n-1}| + |S_{n-2}|$), il en va de même pour le membre de gauche.

Pour prouver que $\mathcal{C}(S_n)/L_n$ est libre de type fini sur tout anneau k, il suffit de le faire pour $k = \mathbb{Z}$ car la formation de ce module commute à tout changement de base. La type-finitude de $\mathcal{C}(S_n)/L_n$ étant évidente, il suffit de prouver la platitude, donc, d'après le critère numérique de platitude, de prouver que ce module à la même dimension sur tous les corps $\mathbb{F}_p$ et $\mathbb{Q}$. C'est ce que nous venons de faire.

□

Théorème 3.2.11. *Soit $n \geq 0$. Alors*

- *1) $\bar{C}_n/\bar{C}_{n-1}$ est libre de type fini sur k.*
- *2) $\bar{C}_n$ est libre de de type fini sur k.*
- *3) $M_{\lambda,\mu}$ est plat sur k*
- *4) Si p est inversible dans k, $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est plat sur k si $n \geq 1$.*

Démonstration — Le point 1) résulte immédiatement de la proposition précédente.

Le point 1) implique le point 2) par récurrence sur n, compte tenu de ce qu'une extension de modules libres de type fini l'est encore.

Le point 2) implique le point 3) car $M_{\lambda,\mu}$ est limite inductive filtrante des $\bar{C}_n$.

Le point 3) implique le point 4) car K_n est un pro-p-groupe ($n \geq 1$), si bien que $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est facteur direct de $M_{\lambda,\mu}$. □

3.3. Admissibilité de $M_{\lambda,\mu}$.

3.3.1. Le but de cette sous-partie est de démontrer que pour tout anneau k dans lequel p est inversible, tout λ et μ dans k, et tout n, $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est de type fini sur k. C'est ce que nous appelons *l'admissibilité* de $M_{\lambda,\mu}$ sur k.

Remarque. Notons que combiné à la platitude que nous venons d'obtenir ce résultat a le corollaire suivant : si k est une algèbre sur un corps $\mathbb{F}$ (de caractéristique différente de p), $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est libre de type fini sur k. Il suffit en effet de le vérifier pour k de la forme $\mathbb{F}[X_1, X_2]$, car $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ sur k s'obtient à partir de M_{X_1,X_2} par l'extension des scalaires $\mathbb{F}[T_1, T_2] \to k$, $T_1 \mapsto \lambda$, $T_2 \mapsto \nu$. Or sur un anneau tel que $\mathbb{F}[T_1, T_2]$ tout module plat et de type fini est libre d'après un résultat bien connu de Quillen et Suslin.

3.3.2. On peut aussi noter que l'admissibilité de $M_{\lambda,\mu}$ sur un corps k (de caractéristique différente de p) s'obtient sans effort à partir du résultat en caractéristique zéro (qui est connu par la théorie de Bernstein – cf. [La1] qui traite aussi le cas de caractéristique banale), grâce au lemme suivant – appliqué à $A = W(k)$, $M = M_{\lambda',\mu'}^{K_n}$ pour λ' et μ' relevés de λ et μ dans A.

Lemme 3.3.3. *Soit A un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K, de corps résiduel k ; soit M un module plat sur A, tel que $M \otimes K$ est de dimension finie sur K. Alors $M \otimes k$ est de dimension finie sur k.*

Démonstration — Si $v_1, \dots v_n$ est une famille liibre de $M \otimes k$ sur k, $v'_1, \dots, v'_n$ des relevés des précédents dans M, alors la famille $v'_1, \dots, v'_n$ est encore libre sur K : écrivant une relation de liaison $\sum_i \lambda_i v'_i = 0$ dans $M \otimes K$, on peut en divisant cette égalité par π^q, où π est une uniformisante de A et q le minimum des valuations des λ_i, se ramener au cas où les λ_i sont dans A, et au moins l'un d'entre eux inversible dans A. Réduisant cette égalité modulo (π), on obtient une relation non triviale de liaison des v_i dans $M \otimes k$, ce qui est absurde.

Le cardinal d'une famille libre de $M \otimes k$ est donc borné, ce qui implique que cet espace est de dimension finie. □

3.3.4. Cependant nous donnons une autre méthode pour l'admissibilité, qui outre le fait qu'elle s'applique à tout anneau k (où p est inversible) a l'avantage d'être effective (i.e. de pouvoir donner une borne explicite du cardinal d'une famille génératrice de $M^{K_n}_{\lambda,\mu}$) et *self-contained.*

Lemme 3.3.5. *Soit $x \in S_m$. Tout chemin de O à x de longueur m est entièrement contenu dans tout appartement contenant O et x.*

Démonstration — Soit $x_0 = O, x_1, \dots, x_m = x$ un chemin de longueur m de O à x. Alors on a $x_i \in S_i$, et x_{i-1} est un voisin de x_i dans S_{i-1}. Le lemme résulte donc du lemme 3.1.3 par récurrence descendante sur i. □

Lemme 3.3.6. *Soit $x \in S_m$. Tout chemin de O à x de longueur m a le même nombre a d'arêtes de type 1, et le même nombre b d'arêtes de type 2. On a $a+b = m$.*

Démonstration — Soit A un appartement contenant x et O. On décrit le point x par un système de coordonnées $(0, u, v)$ avec $0 \leq u \leq v$ (ce qu'on peut toujours faire quitte à permuter les éléments de la base définissant le système de coordonnées). Si $x_0, x_1, \dots, x_m$ est un chemin de O à x, les coordonnées de x_i peuvent s'écrire $(0, u_i, v_i)$ et l'on a $(u_{i+1}-u_i, v_{i+1}-v_i) \in \{(0,1), (1,0), (1,1), (-1,0), (0,-1), (-1,-1)\}$ (c'est la condition pour que x_i soit voisin de x_{i+1}.) On en déduit immédiatement que $u \leq m$. Si l'on avait $u < m$, on pourrait trouver un chemin de longueur $u < m$ de O à x (en prenant v arêtes $(1,0)$ puis $u-v$ arêtes $(1,1)$) ce qui est absurde; donc

$$u = m.$$

Les $(u_{i+1}-u_i, v_{i+1}-v_i)$ sont donc tous de la forme $(1,1)$ ou $(0,1)$, et l'arête (x_i, x_{i+1}) est respectivement de type 1 et 2. On en déduit que le nombre d'arêtes de type 1 (resp. 2) dans ce chemin est

$$a = u,$$

$$b = v - u,$$

nombres visiblement indépendant du chemin choisi. □

Définition. On appelle (a, b) le *type* du point x.

Il est clair (vu la preuve du lemme précédent) que $x \in S_m$ de type (a, b) est pointu si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$. Son unique voisin est de type $(a-1, 0)$ si $a > 0$, $(0, b-1)$ si $b > 0$. Si x n'est pas pointu, ses deux voisins sont de type $(a-1, b)$ et $(a, b-1)$.

Dans un appartement donné, un point n'est pas déterminé par son type (à un type donné correspond trois ou six points) mais c'est vrai dans un *secteur*:

Définition. Un secteur est une partie d'un appartement contenant O de la forme $\{(0, u, v)\}$, $0 \leq u \leq v$, pour un système de coordonnées tel que $(0, 0, 0)$ est une coordonnée de O.

Il y a donc six secteurs dans un appartement, qui le recouvrent, et qui sont deux à deux d'intersection soit réduite à O soit une demi-droite (auquel cas ils sont dit *adjacents*. La preuve du lemme 3.3.6 montre que si x est dans un secteur, tous les chemins de longueur m de O à x sont dans ce même secteur. Elle montre aussi que si l'on choisit les coordonnées d'un appartement A contenant ce secteur tel qu'il soit l'ensemble des $(0, u, v)$ avec $0 \leq u \leq v$, il n'y a qu'un seul point du secteur de type (a, b) à savoir $(0, a, a+b)$.

Définition. Soit $x \in S_m$, et $n \leq m$. On appelle *projection* de x sur S_n l'ensemble des points de S_n par lesquels passe un chemin de longueur m reliant O à x. On appelle *projeté* de x sur S_n tout point de la projection de x sur S_n.

Tous les projetés de x sur S_n appartiennent à un même secteur.
On a trivialement :

Lemme 3.3.7 (Transitivité de la projection). *Soit $l \leq n \leq m$ et $x \in S_m$. La projection de x sur S_l est la réunion des projections sur S_l des projetés de x sur S_n*

Définition. On appelle *segment* de S_n tout ensemble de point de S_n qui est inclus dans un appartement, et qui, dans un système de coordonnées adéquates (où l'origine a pour coordonnées $(0, 0, 0)$) est l'ensemble des $(0, u, n)$ où u parcourt les entiers d'un intervalle fermé de $[0, n]$. Autrement dit, un segment est l'ensemble des points d'un secteur dont les types sont de la forme $a, n-a$ avec a parcourant un intervalle de $[0 \ldots n]$. Autrement dit, un *segment* est un intervalle fermé d'un des côtés de l'hexagone que dessine la sphère S_n dans un appartement.

Un segment est dit *saturé à l'origine* (resp. *à l'extrémité*) s'il contient (dans la description précédente) le point de type $(n, 0)$ (resp $(0, n)$).

Un segment est donc saturé (d'un côté ou de l'autre) si et seulement s'il contient un point pointu. Dans la figure de la page 7, le point x (qui est de type $(2, 1)$) a pour projection sur S_2 le segment $[ab]$ qui est de longueur 1, et qui est saturé à l'origine, mais pas à l'extrémité. Le point y (de type $(3, 0)$ a une projection réduite au point b, donc un segment de longueur zéro, là encore saturé à l'origine.)

Lemme 3.3.8. *La projection d'un point $x \in S_m$ sur S_n est toujours un segment P. Si x est de type (a, b), on a*

$$a \geq \sup_{p \in P} a_p \text{ et } b \geq \sup_{p \in P} b_p$$

ou (a_p, b_p) désigne le type du point p de P ; la première (resp. la seconde) inégalité est une égalité si P n'est pas saturé à l'origine. En particulier, si ce segment n'est pas saturé, il est de longueur $n-m$ (i.e. il contient $n-m+1$ points)

Démonstration — Dans un secteur donné passant par x, les points de P sont tous (d près la preuve du lemme 3.3.6 les points de type $(a_p, b_p) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $a_p + b_p = m$, $a_p \geq a$, $b_p \geq b$. Le lemme en découle. □

3.3.9. À un point x de S_m on associe le triplet (P, a, b) ou P est la projection de x sur S_n et (a, b) le type de A, qui vérifie les propriétés suivantes :

P est un segment de S_n,

$a + b = m$,

$a \geq \sup_{p \in P} a_p$ et $b \geq \sup_{p \in P}$ ou (a_p, b_p) désigne le type du point p de P ; la première (resp. la seconde) inégalité est une égalité si P n'est pas saturé.

Il est clair que le triplet (P, a, b) ne dépend que de l'orbite sous K_n de x.

Réciproquement, si (P, a, b) vérifie les propriétés ci-dessus, il provient nécessairement d'un $x \in S_m$. Pour le voir, on se place dans un appartement contenant P, dans lequel P est l'ensemble des points $(0, u, n)$ avec $u_0 \leq u \leq u_1$. Les types de ces points sont les $(u, n-u)$. Par hypothèse on a donc $u_1 \leq a$ et $n - u_0 \leq b$, avec égalité (dans l'une ou l'autre) si P n'est pas saturé (à l'origine ou à l'extrémité). Prenons alors pour x le point de coordonnées $(O, a, a+b)$. Le point x est bien dans S_m et de type (a, b). De plus, d'après la preuve du lemme 3.3.8, la projection de P est l'ensemble des $(0, u', n)$ avec

$$\max(n-b, 0) \leq u' \leq \min(n, a).$$

Si P n'est pas saturé, cette égalité se réécrit $u_0 \leq u \leq u_1$, et l'on voit donc que la projection de x est P. Si P est saturé à l'origine, mais pas à l'extrémité, cette égalité se réécrit $0 \leq u' \leq u_1$, et là encore le projeté de x est bien P. Le cas où P est saturé à l'extrémité (ou aux deux bouts) se traite de même. Ainsi, P est toujours le projeté de x.

Enfin, montrons que si x et $y \in S_m$ ont même (P, a, b), alors x et y sont dans la même K_n-orbite. Il résulte de ce qui précède que x appartient à un appartement A et y à un appartement A' tels que $A \cap A'$ contient P ainsi que O. D'après [B-T], proposition. 2.5.8, il existe $g \in \mathrm{GL}_3(F)$ tel que $gA = A'$ qui est l'identité sur $A \cap A'$. Il résulte de ce qui précède que $g(x) = y$, car $g(x)$ a même type et même projeté que y dans A'. Le fait que g laisse stable P se traduit par le fait que $g \mod \pi^n$ est dans un certain parabolique $\mathcal{P}(\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})$. On peut alors trouver $h \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ tel que $h \mod \pi^n = g$. La composée $h^{-1}g$ laisse fixe la boule unité B_n, et on vérifie facilement qu'elle envoie x sur y.

On a donc montré que les orbites de S_m sous K_n étaient en bijection avec les (P, a, b) vérifiant les propriétés ci-dessus.

On note $O_{P,a,b}$ l'orbite correspondant à $P(a, b)$. On note $\mathbb{1}_{P,a,b}$ la fonction caractéristique de l'orbite dans S_m $(m = a+b)$ correspondant à $\mathbb{1}_{P,a,b}$.

Lemme 3.3.10. *Si P est saturé à l'origine (resp. à l'extrémité), $T_1 \mathbb{1}_{P,a,b} = \mathbb{1}_{P,a+1,b}$ sur S_{m+1} (resp. $T_2 \mathbb{1}_{P,a,b} = \mathbb{1}_{P,a,b+1}$ sur S_{m+1})*

Démonstration — Supposons P saturé à l'origine. Cela implique $a \geq n$.

Soit $x \in O_{P,a+1,b}$. Comme x n'est pas de type $(*, 0)$, x possède exactement un voisin y dans S_m tel que (y, x) soit de type 1. Un tel y est de type (a, b). Ses projetés sur S_n sont tous dans un secteur contenant 0 et y et ont pour type les (a_p, b_p) avec $a_p + b + p = n$, $0 \leq a_p \leq a$, $0 \leq b_p \leq b$ Mais comme $a \geq n$, ce système d'inégalité est équivalent aux systèmes où l'on a remplacé $a_p \leq a$ par $a_p \leq a+1$, ce qui montre que les projetés de y sont exactement les projetés de x, autrement dit que $y \in O_{P,a,b}$. Réciproquement, il est clair que tout 1-voisin d'un $y \in O_{P,a,b}$ appartient à $O_{P,a+1,b}$, si bien que $T_1 \mathbb{1}_{P,a,b} = \mathbb{1}_{P,a+1,b}$. □

Lemme 3.3.11. *Si $m \geq 2n-2$, l'application $(\mathcal{C}(S_m)^{K_n})^2 \to \mathcal{C}(S_{m+1})^{K_n}$ qui à (g_1, g_2) fonctions K_n-invariantes sur S_m associe la fonction (nécessairement k_n-invariante) $T_1 f_1 + T_2 f_2$ restreinte à S_{m+1} est surjective.*

Démonstration — Une fonction K_n-invariante sur S_{m+1} est combinaison linéaire de $\mathbb{1}_{P,a,b}$ avec $a + b = m + 1$. Par linéarité il suffit de prouver qu'un tel $\mathbb{1}_{P,a,b}$ est dans l'image. Si P n'était pas saturé, sa longueur serait $m + 1 - n \geq n - 1$, mais un segment de longueur $n - 1$ est toujours saturé (un coté de S_n dans un appartement est de longueur n). Le segment P est donc saturé, disons à l'origine. Alors d'après le lemme précédent, $T_1 \mathbb{1}_{P,a-1,b} = \mathbb{1}_{P,a,b}$. □

Proposition 3.3.12. *On suppose p inversible dans k. Si $n \geq 1$ et $m \geq 2n-2$, l'application $C_m \to M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est surjective. En particulier, $M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est de type fini.*

Démonstration — Comme K_n est un pro-p-groupe, l'application $C^{K_n} \to M_{\lambda,\mu}^{K_n}$ est surjective. Si $\phi \in M_{\lambda,\mu}^{K_n}$, ϕ admet donc un relevé $f \in C$ qui est K_n invariant, et qui est à support dans une boule B_k. Si $k \leq m$, la proposition est prouvée. Sinon, on a $k \geq 2n - 1$ et on va montrer qu'on peut diminuer k. D'après le lemme précédent, la restriction à S_k de f s'écrit $T_1 f_1 + T_2 f_2$ sur S_k, avec f_1 et f_2 fonctions sur S_{k-1}. Quitte à moyenner f_1 et f_2 par K_n, on peut supposer que ces deux fonctions sont K_n-invariantes. On pose $f' = f - (T_1 - \lambda) f_1 - (T_2 - \mu) f_2$. Alors f est maintenant à support dans B_{k-1}, est encore K_n-invariante et son image dans $M_{\lambda,\mu}$ est encore ϕ. Réitérant ce procédé, on arrive à $k \geq m$, ce qui prouve la proposition. □

Références

[Bou] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique: groupes et algèbres de Lie*

[B-T] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local,* Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., 41 (1972)

[Gr] M. Green, *Koszul cohomology and geometry,* Lectures on Riemann surfaces (Trieste, 1987), 177–200, World Sci. Publishing

[La1] Xavier Lazarus *Module universel non ramifié pour un groupe réductif p-adique,* thèse de l'université d'Orsay, 2000, non publiée.

[La2] Xavier Lazarus *Module universel en caractéristique $l > 0$ associé à un caractère de l'algèbre de Hecke de* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique, avec $l \neq p$,* Journal of Algebra, 213 (1999), no. 2, 662–686.

[S1] J.-P. Serre, *Cours au collège de France 1987-1988,* photocopies de notes manuscrites anonymes – voir le résumé dans les œuvres complètes de Serre, volume 3

[S2] J.-P. Serre, *Two letters on quaternion and modular forms,* Israel Journal of Math. 95 (1996), pages 281–299.

[Sat] I. Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{P}$-adic fields,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 18 1963 5–69.

[V] M.-F. Vignéras, *Représentations l-modulaire d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$.* Birkhauser. Progress in Math. 137, 1996