Habilitation à diriger des recherches

UNIVERSITÉ de POITIERS

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

présentée par

Anne Moreau

Quelques propriétés fines des algèbres de Lie semi-simples, orbites coadjointes de type réductif et espaces d'arcs des variétés horosphériques

Soutenue à Poitiers le samedi 8 décembre 2012 devant le jury composé de :

M. **Anton ALEKSEEV**	Professeur à l'Université de Genève
M. **Abderrazak BOUAZIZ**	Professeur à l'Université de Poitiers
M. **Michel BRION**	Directeur de Recherches CNRS à Grenoble
M. **Victor GINZBURG**	Professeur à l'Université de Chicago
M. **Thierry LEVASSEUR**	Professeur à l'Université de Brest
M. **Alexander PREMET**	Professeur à l'Université de Manchester
M. **Pierre TORASSO**	Professeur à l'Université de Poitiers

au vu des rapports de

M. **Michel BRION**	Directeur de Recherches CNRS à Grenoble
M. **Thierry LEVASSEUR**	Professeur à l'Université de Brest
M. **Eckhard MEINRENKEN**	Professeur à l'Université de Toronto.

Membre invité : M. **Jean-Yves CHARBONNEL**, Directeur de Recherches CNRS à Paris.

Remerciements

J'adresse ici mes vifs remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidée dans la réalisation de ce mémoire, à commencer par celles qui ont accepté d'en être rapporteurs : Thierry Levasseur, Eckhard Meinrenken, et Michel Brion dont l'intérêt qu'il porte à mon travail va au-delà de ce texte.

Je suis très honorée de la présence des membres du jury : Anton Alekseev, Abderrazak Bouaziz, Michel Brion, Jean-Yves Charbonnel, Victor Ginzburg, Thierry Levasseur, Alexander Premet et Pierre Torasso.

Je veux ensuite remercier les personnes avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer ces dernières années : Jean-Yves Charbonnel qui a dirigé mon mémoire de thèse, Karin Baur, Oksana Yakimova, Anton Alekseev et Victor Batyrev. Je suis particulièrement reconnaissante à Anton Alekseev et Victor Batyrev de m'avoir ouverte à d'autres thématiques.

Je remercie chaleureusement le département de Mathématiques de Poitiers pour son accueil. Je pense notamment à Pol Vanhaecke, Patrice Tauvel, Mustapha Raïs, Rupert Yu et Guilnard Sadaka.

Je tiens par ailleurs à exprimer ma gratitude à Pierre Schapira pour ses encouragements et ses conseils.

J'adresserai enfin de vive voix mes remerciements d'ordre plus personnel...

Introduction

Ce mémoire regroupe des résultats qui s'inscrivent dans la théorie de Lie algébrique et géométrique. Mes contributions dans ce domaine concernent pour une large part des propriétés fines des algèbres de Lie liées à l'indice, aux éléments nilpotents et aux orbites coadjointes ; elles font suite aux thématiques abordées dans mon mémoire de thèse [Mo06a]. Une partie plus récente de mon travail porte sur les variétés sphériques et se situe davantage dans le cadre de la géométrie algébrique.

Dans ce qui suit, sauf mention explicite du contraire, les groupes et algèbres de Lie seront supposés de dimension finie et définis sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle (le plus souvent le corps des complexes $\mathbb{C}$).

Par définition, l'indice d'une algèbre de Lie *algébrique* (i.e., l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique) est la codimension minimale des orbites pour l'action coadjointe, [Di74] (ici, voir Définition 1.3.1). Cette notion est de grande importance dans la théorie des représentations et des invariants, [Ro63]. L'indice d'une algèbre de Lie réductive est égal à son rang. Pour une algèbre de Lie quelconque, déterminer son indice est en général un problème épineux. Nous disposons toutefois de résultats pour certaines classes de sous-algèbres (non réductives) d'une algèbre de Lie simple, cf. e.g., [E85b, Pan01, TY04, Mo06b, Mo06c, J07].

Les stabilisateurs pour l'action coadjointe des éléments d'une algèbre de Lie (réelle ou complexe) forment une classe intéressante de sous-algèbres dont l'étude de l'indice apparaît dans la théorie des systèmes intégrables hamiltoniens, [Bol91, Bol92], et trouve des applications dans la théorie des invariants, cf. e.g., [PPY07]. La première partie de mon mémoire de thèse s'inscrit dans ce cadre, [Mo06a, Chapitre 1] ; on y décrit l'indice du normalisateur du centralisateur d'un élément nilpotent d'une algèbre de Lie simple (complexe) selon une conjecture due à D. Panyushev, [Pan03b]. Ce travail m'a menée vers divers sujets, présentés au Chapitre 1 de ce mémoire, liés aux éléments nilpotents et aux invariants de l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie simple.

C'est ainsi que je décris dans [Mo08] [1] à la dimension des *nappes* (cf. Définition 1.2.1) d'une algèbre de Lie simple, que nous étudions dans un travail en commun avec Jean-Yves Charbonnel, [ChM09], des propriétés du *bicône nilpotent* (cf. Définition 1.4.1), puis que nous nous sommes intéressés à une conjecture d'A.G. Elashvili concernant l'indice du centralisateur d'un élément, [ChM10]. Ces trois sujets sont reliés, de façon directe ou indirecte, à la *méthode de translation de l'argument* (cf. Définition 1.1.3) due à Fomenko-Mishchenko, [FM78] (voir aussi [Bol05, Bol12]). Plus récemment, toujours en lien avec les invariants de l'algèbre symétrique, j'ai eu l'occasion d'étudier dans un travail en commun avec Anton Alekseev une conjecture de Kostant concernant l'algèbre de Clifford engendrée par une algèbre de Lie simple, [AMo12].

Le travail de recherche de Guilnard Sadaka, doctorante à l'Université de Poitiers que je co-encardre avec Rupert Yu (Professeur à l'Université de Reims) depuis le mois de septembre 2010, reprend les thématiques de ces différents travaux, [Sa12] ; il porte sur les *sous-algèbres admissibles* (cf. Définition 1.6.1) et les W-algèbres finies attachées aux orbites nilpotentes d'une algèbre de Lie simple complexe.

Dans la deuxième partie de mon mémoire de thèse [Mo06a, Chapitre 2], je me suis intéressée, suivant une proposition de Mustapha Raïs [Ra06], à un problème d'additivité de l'indice lié à la décomposition d'Iwasawa d'une algèbre de Lie simple réelle. Le calcul de l'indice passe ici par la recherche de formes linéaires *régulières* (i.e., dont le stabilisateur est de dimension minimale). C'est à la suite de ce travail sur l'indice, [Mo06c] (correspondant à [Mo06a, §§2.1–2.5]), que Michel Duflo m'a orientée vers l'étude des sous-algèbres paraboliques *quasi-réductives* (cf. Définition 2.1.2) d'une algèbre de Lie simple. Les algèbres de Lie quasi-réductives sont certaines algèbres de Lie qui possèdent des formes régulières *de type réductif* (cf. Définition 2.1.1), c'est-à-dire dont le stabilisateur modulo le centre est un groupe réductif. La motivation pour leur étude vient de l'analyse harmonique sur les groupes de Lie, [Du82, DKT12].

Ce sujet, déjà amorcé dans [Mo06a, §2.6], a débouché sur deux collaborations : l'une avec Karin Baur [BauM11], l'autre avec Oksana Yakimova [MY11]. Dans [BauM11], nous complétons la classification des sous-algèbres paraboliques quasi-réductives de [DKT12] ; dans [MY11], nous décrivons les *stabilisateurs réductifs maximaux* (cf. Définition 2.1.4) de ces sous-algèbres. Le Chapitre 2 est consacré à ces deux contributions.

De manière assez inattendue, mon travail en commun avec Jean-Yves Charbonnel, [ChM09], nous a conduits vers la théorie de l'intégration motivique ; nous avons eu recours à cette théorie pour décrire la dimension du bicône nilpotent. Par ailleurs, les thématiques auxquelles je m'intéresse exigent une certaine connaissance des groupes algébriques. Ce sont je pense les raisons qui ont incité Victor Batyrev à me soumettre un problème lié aux espaces d'arcs des *variétés horosphériques* (cf. Définition 3.1.1) et aux intégrales motiviques correspondantes. Si j'avais eu

1. Cet article contient une erreur récemment relevée par Alexander Premet. Un *corrigendum* est actuellement en cours d'écriture, [Mo08b] ; cf. §1.2 pour plus de détails.

une expérience avec l'intégration motivique, je ne connaissais que très peu la théorie des variétés (horo)sphériques. La collaboration avec Victor Batyrev (cf. [BatM12]), que nous présentons au Chapitre 3, fut pour moi l'occasion de m'ouvrir à d'autres sujets.

L'intégration motivique est au cœur de notre travail sur l'espace des arcs des variétés horosphériques (cf. Chapitre 3). C'est d'autre part l'un des outils majeurs dans l'étude du bicône nilpotent (cf. Section 1.4). Pour ces raisons, nous présentons en annexe (Annexe A) de ce mémoire une introduction à cette théorie. Cette annexe est une version condensée, corrigée et complétée de la série de cours que j'ai donnés sur le sujet à l'ETH (Eidgenössische Technische Hochschule) de Zürich en 2008, puis à l'Université de Genève en 2010.

De ces différentes contributions, trois thèmes se dégagent et nous dressons ci-après la liste des travaux présentés pour chacun d'entre eux.

1) Éléments nilpotents dans une algèbre de Lie simple :

- [Mo08, Mo08b] Anne Moreau, *On the dimension of the sheets of a reductive Lie algebra*, Journal of Lie Theory (2008) (et *Corrigendum to "On the dimension of the sheets of a reductive Lie algebra"*, en cours d'écriture).
- [ChM10] Jean-Yves Charbonnel and Anne Moreau, *The index of centralizers of elements of reductive Lie algebras*, Documenta Mathematica (2010).
- [ChM09] Jean-Yves Charbonnel and Anne Moreau, *Nilpotent bicone and characteristic submodule in a reductive Lie algebra*, Transformation Groups (2009).
- [AMo12] Anton Alekseev and Anne Moreau, *On the Kostant conjecture for Clifford algebras*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (2012).

Encadrement doctoral : [Sa12] Guilnard Sadaka, *χ-admissible subalgebras of* $\mathfrak{sl}_{pn}(\mathbb{C})$ *and finite W-algebras*, préprint (2012).

2) Orbites coadjointes de type réductif :

- [BauM11] Karin Baur and Anne Moreau, *Quasi-reductive (bi)parabolic subalgebras of reductive Lie algebras*, Annales de l'Institut Fourier (2011).
- [MY11] Anne Moreau and Oksana Yakimova, *Coadjoint orbits of reductive type of seaweed Lie algebras*, International Mathematics Research Notices (2011).

3) Espace des arcs d'une variété horosphérique et intégration motivique :

- [BatM12] Victor Batyrev and Anne Moreau, *The arc spaces of horospherical varieties and motivic integration*, article soumis.

Table des matières

Chapitre 1

Éléments nilpotents d'une algèbre de Lie simple

Les résultats présentés dans ce chapitre sont étroitement liés aux éléments nilpotents d'une algèbre de Lie simple et trouvent leurs applications dans la théorie des invariants. Nous commençons (Section 1.1) par quelques propriétés, pour la plupart bien connues, des éléments nilpotents et du cône nilpotent d'une algèbre de Lie simple. Cela nous permet d'introduire les principales notations de ce chapitre. On présente ensuite dans les Sections 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5 les résultats de [Mo08, ChM10, ChM09, AMo12]. Enfin, la Section 1.6 décrit le travail de Guilnard Sadaka [Sa12] sur les sous-algèbres admissibles et les W-algèbres finies et conclut sur des projets de recherches liés à ce thème.

Dans tout le chapitre, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple de dimension finie > 3 définie sur un corps $\Bbbk$ algébriquement clos et de caractéristique nulle. Soient G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ et $B_{\mathfrak{g}}$ une forme bilinéaire symétrique G-invariante et non-dégénérée sur $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}$ est simple, on peut supposer que $B_{\mathfrak{g}}$ est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On notera $B_{\mathfrak{g}}^{\flat} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ et $B_{\mathfrak{g}}^{\sharp} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ les isomorphismes naturellement induits par $B_{\mathfrak{g}}$.

Soit $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ qui s'identifie de manière canonique à l'algèbre $\Bbbk[\mathfrak{g}^*]$ des fonctions régulières sur le dual $\mathfrak{g}^*$. On note $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (resp. $\Bbbk[\mathfrak{g}^*]^{\mathfrak{g}}$) la sous-algèbre de $S(\mathfrak{g})$ (resp. $\Bbbk[\mathfrak{g}^*]$) formée des éléments G-invariants pour l'opération du groupe G induite par l'action adjointe (resp. coadjointe). D'après Chevalley, $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \simeq \Bbbk[\mathfrak{g}^*]^{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de polynômes en ℓ variables, où $\ell := \operatorname{rk}\mathfrak{g}$ est le rang de $\mathfrak{g}$. Soient $p_1, \ldots, p_\ell$ des générateurs homogènes de $\Bbbk[\mathfrak{g}^*]^{\mathfrak{g}}$ de degrés respectifs $m_1 + 1, \ldots, m_\ell + 1$, où $m_1 \leqslant \cdots \leqslant m_\ell$ sont les exposants de $\mathfrak{g}$. Pour $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, on note $\mathrm{d}p_i$ la différentielle de p_i. C'est un élément de $\Bbbk[\mathfrak{g}^*] \otimes_{\Bbbk} \mathfrak{g}$, invariant sous l'action diagonale du groupe adjoint G.

Si x est un élément de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}^*$), on note Gx sa G-orbite, G^x son stabilisateur dans G et $\mathfrak{g}^x := \operatorname{Lie} G^x$ son centralisateur (resp. stabilisateur) dans $\mathfrak{g}$.

1.1 Notations et généralités

Si V est un $\Bbbk$-espace vectoriel, on appelle *cône* de V un sous-ensemble de V invariant pour l'opération naturelle de $\Bbbk^* := \Bbbk \smallsetminus \{0\}$ sur V, et on appelle *bicône de* $V \times V$ un sous-ensemble de $V \times V$ invariant sous l'opération naturelle de $\Bbbk^* \times \Bbbk^*$ sur $V \times V$. Le *cône nilpotent de* $\mathfrak{g}$, que l'on notera $\mathfrak{N}$, est le sous-schéma (réduit) de $\mathfrak{g}^*$ défini par l'idéal d'augmentation $\Bbbk[\mathfrak{g}^*]_+^{\mathfrak{g}}$ de $\Bbbk[\mathfrak{g}^*]^{\mathfrak{g}}$. Il s'identifie, via l'isomorphisme $B_{\mathfrak{g}}^{\sharp}$, à un sous-schéma de $\mathfrak{g}$. Le lieu géométrique de $\mathfrak{N}$ est alors l'ensemble des *éléments nilpotents* de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments x de $\mathfrak{g}$ tels que $\operatorname{ad} x$ est un endomorphisme nilpotent de $\operatorname{End}(\mathfrak{g})$, [Kos63]. Il forme un cône fermé de $\mathfrak{g}$ stable par G. Le *bicône nilpotent*, défini à partir du cône nilpotent, sera introduit à la Section 1.4 (Définition 1.4.1).

1.1.1 Autour du Théorème de Jacobson-Morosov

Soit e un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. D'après le Théorème de Jacobson-Morosov (cf. [Kos59]), il existe des éléments h et f de $\mathfrak{g}$ tels que le triplet (e, h, f) forme un $\mathfrak{sl}_2$-triplet de $\mathfrak{g}$, i.e.,

$$[h, e] = 2e, \qquad [e, f] = h, \qquad [h, f] = -2f.$$

En particulier, h est un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$, f est un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$ et la sous-algèbre $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ engendrée par e, h, f est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$. Les valeurs propres de $\operatorname{ad} h$ sont des entiers relatifs et la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces $\operatorname{ad} h$-propres induit une $\mathbb{Z}$-graduation sur $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i), \quad \mathfrak{g}(i) := \{x \in \mathfrak{g} \ ; \ [h, x] = ix\}. \tag{1.1.1}$$

On dit que e est *pair* lorsque les valeurs propres de $\operatorname{ad} h$ sont paires. Dans ce cas, on a $\dim \mathfrak{g}^h = \dim \mathfrak{g}^e$.

Soit $\mathcal{S}$ l'espace affine $\chi + (\mathfrak{g}^e)^* \subset \mathfrak{g}^*$ où $\chi := B_{\mathfrak{g}}^{\flat}(e)$. Il s'identifie, via $B_{\mathfrak{g}}^{\sharp}$, au sous-espace affine $e + \mathfrak{g}^f$ de $\mathfrak{g}$. La variété $\mathcal{S}$ est transverse aux orbites coadjointes de $\mathfrak{g}^*$. Précisément, pour tout $\xi \in \mathcal{S}$, on a $\mathrm{T}_\xi(G\xi) + \mathrm{T}_\xi(\mathcal{S}) = \mathfrak{g}^*$ où $\mathrm{T}_\xi(G\xi)$ et $\mathrm{T}_\xi(\mathcal{S})$ sont les espaces tangents au point ξ de l'orbite $G\xi$ et de la variété $\mathcal{S}$ respectivement, [Kos59, Sl80]. L'espace affine $\mathcal{S}$, ou son intersection avec $\mathfrak{N}$, est appelé la *tranche de Slodowy de l'orbite* $G\chi$ *au point* χ. La propriété de transversalité de $\mathcal{S}$ permet, par exemple, de montrer que la structure de variété de Poisson sur $\mathfrak{g}^*$ induit une structure de variété de Poisson sur $\mathcal{S}$, [GG02]. On reviendra sur cet aspect au Chapitre 1.6.

Décrivons une autre propriété remarquable de $\mathcal{S}$ liée aux polynômes p_i. Identifions $\mathfrak{g}$ avec son dual $\mathfrak{g}^*$ via l'isomorphisme $B_{\mathfrak{g}}^{\flat}$, et soit $\Bbbk[\mathcal{S}]$ l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathcal{S}$. On note $L_{\mathcal{S}}$ le sous-$\Bbbk[\mathcal{S}]$-module de $\Bbbk[\mathcal{S}] \otimes_{\Bbbk} \mathfrak{g}$ formé des éléments $p \in \Bbbk[\mathcal{S}] \otimes_{\Bbbk} \mathfrak{g}$ tels que $[p(x), x] = 0$ pour tout $x \in \mathcal{S}$. Le module $L_{\mathcal{S}}$ est un module libre de base les restrictions $(\mathrm{d}p_1)|_{\mathcal{S}}, \ldots, (\mathrm{d}p_\ell)|_{\mathcal{S}}$ à $\mathcal{S}$

des différentielles $\mathrm{d}p_1, \ldots, \mathrm{d}p_\ell$, cf. [ChM10, Section 4]. Cette propriété est utilisée dans [ChM10, Theorem 4.13] (ici, voir le Théorème 1.3.5). Lorsque $e = 0$, nous retrouvons un résultat bien connu de Dixmier, [Di75].

1.1.2 Le cône nilpotent et le cône principal

Soit (e, h, f) un $\mathfrak{sl}_2$-triplet *principal* de $\mathfrak{g}$, i.e., e est un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{g}$. Alors h est un élément semi-simple régulier de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}^h$ est une sous-algèbre de Cartan. De plus, il existe une unique sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $e \in \mathfrak{b}$ et $f \in \mathfrak{b}_-$ où $\mathfrak{b}_-$ est la sous-algèbre de Borel opposée à $\mathfrak{b}$. L'action adjointe de $\mathfrak{s}$ fait de $\mathfrak{g}$ un $\mathfrak{s}$-module,

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_\ell, \tag{1.1.2}$$

où $V_1, \ldots, V_\ell$ sont des $\mathfrak{s}$-modules simples de dimensions respectives $2m_1+1, \ldots, 2m_\ell+1$. D'après Kostant [Kos59], l'élément de Cartan h coïncide avec l'élément $2\check{\rho}$ où $\check{\rho}$ est la demi-somme des coracines positives (relativement à $\mathfrak{b}$) associées au système de racines du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Comme e est régulier, le cône nilpotent $\mathfrak{N}$ est le cône fermé G-invariant de $\mathfrak{g}$ engendré par e. Nous nous intéresserons également au cône fermé G-invariant de $\mathfrak{g}$ engendré par h. D'après le choix des m_i, $m_1 = 1$ et on peut supposer que p_1 est l'élément de Casimir de $\mathfrak{g}$. Comme les valeurs propres de $\mathrm{ad}\, h$ sont des entiers non tous nuls, on a $p_1(h) \neq 0$. On définit, pour $i = 2, \ldots, \ell$, des polynômes $q_2 \ldots, q_\ell$ comme suit :

$$q_i := \begin{cases} p_i & \text{si } m_i \text{ est pair ;} \\ p_1(h)^{(m_i+1)/2} p_i - p_i(h) p_1^{(m_i+1)/2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Observons que q_i est un polynôme homogène de degré $m_i + 1$ et que $q_i(h) = 0$ pour tout $i \in \{2, \ldots, \ell\}$. Cela vient de ce que $q_i(h) = 0$ si m_i est impair par définition et que $q_i(h) = p_i(h) = p_i(w_0 h) = -p_i(h)$ sinon (ici, w_0 est l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl associé au système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$). La définition suivante est introduite dans [ChM09, Section 2] :

Définition 1.1.1. *On appelle* cône principal *de* $\mathfrak{g}$ *le sous-schéma* $\mathfrak{H}$ *de* $\mathfrak{g}$ *défini par l'idéal de* $\Bbbk[\mathfrak{g}]$ *engendré par les éléments* $q_2, \ldots, q_\ell$.

Le cône nilpotent $\mathfrak{N}$ est une variété irréductible et normale (cela résulte du critère de normalité de Serre) qui est une intersection complète dans $\mathfrak{g}$ de codimension ℓ. De plus, d'après Hesselink [He76], $\mathfrak{N}$ est à *singularités rationnelles* (cf. Définition A.5.1). Les arguments de Hesselink s'adaptent au cône principal $\mathfrak{H}$ et nous montrons dans [ChM09, Corollary 16] :

Proposition 1.1.2. *Le cône principal* $\mathfrak{H}$ *est une variété irréductible normale qui est une intersection complète dans* $\mathfrak{g}$ *de codimension* $\ell - 1$. *De plus,* $\mathfrak{H}$ *est à singularités rationnelles.*

1.1.3 Polynômes invariants et méthode de translation de l'argument

Soient $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, $(\xi, \eta) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ et $t \in \Bbbk$. Considérons le «translaté» $p_i(\xi + t\eta)$ de p_i dans la direction η et écrivons,

$$p_i(\xi + t\eta) = \sum_{j=0}^{m_i+1} p_i^{(j)}(\xi, \eta)t^j, \tag{1.1.3}$$

où $\eta \mapsto j!p_i^{(j)}(\xi, \eta)$ est la différentielle au point ξ de p_i à l'ordre j. Les éléments $p_i^{(j)} : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \to \Bbbk, (\xi, \eta) \mapsto p_i^{(j)}(\xi, \eta)$ sont des éléments invariants de $\Bbbk[\mathfrak{g}^*] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\mathfrak{g}^*]$ sous l'action diagonale de G. Ce sont par définition les polarisations d'ordre 2 du polynôme invariant p_i. D'après Fomenko-Mishchenko [FM78], la famille $\mathcal{F}_\eta := \{\xi \mapsto p_i^{(j)}(\xi, \eta) \,;\, i \in \{1, \ldots, \ell\}, j \in \{0, \ldots, m_i\}\}$ est Poisson-commutative pour la structure de Poisson sur $\Bbbk[\mathfrak{g}^*]$ (l'application $\xi \mapsto p_i^{(m_i+1)}(\xi, \eta)$ est constante).

Définition 1.1.3. *On dit que la famille Poisson-commutative $\mathcal{F}_\eta$ est construite selon la* méthode de translation de l'argument*.*

Cette construction joue un rôle important dans l'étude des systèmes intégrables hamiltoniens, cf. e.g., [Bol91, Bol05, Bol12].

1.1.4 Orbites nilpotentes induites et orbites nilpotentes rigides

Les résultats qui suivent sont pour une large part tirés de [Di74, Di75, LuS79, BoK79], voir aussi [CoM93, TY05] pour des expositions plus récentes. Soient $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique propre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l}$ un facteur de Levi de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}_u$ le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$. Si $\mathcal{O}_\mathfrak{l}$ est une orbite nilpotente de $\mathfrak{l}$, alors il existe une unique orbite nilpotente $\mathcal{O}_\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ dont l'intersection avec $\mathcal{O}_\mathfrak{l} + \mathfrak{p}_u$ est un ouvert dense de $\mathcal{O}_\mathfrak{l} + \mathfrak{p}_u$. De plus, l'intersection de $\mathcal{O}_\mathfrak{g}$ avec $\mathcal{O}_\mathfrak{l} + \mathfrak{p}_u$ est réduite à une P-orbite, où P est le normalisateur de $\mathfrak{p}$ dans G, et $\operatorname{codim}_\mathfrak{g}(\mathcal{O}_\mathfrak{g}) = \operatorname{codim}_\mathfrak{l}(\mathcal{O}_\mathfrak{l})$. L'orbite $\mathcal{O}_\mathfrak{g}$ ne dépend que de $\mathfrak{l}$ et non du choix d'une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{l}$, [CoM93, Theorem 7.1.3]. On l'appelle *l'orbite induite par* $\mathcal{O}_\mathfrak{l}$ et on la note $\operatorname{Ind}_\mathfrak{l}^\mathfrak{g}(\mathcal{O}_\mathfrak{l})$. Si $\mathcal{O}_\mathfrak{l} = 0$, l'orbite $\mathcal{O}_\mathfrak{g}$ est dite de *Richardson*. Par exemple, toute orbite nilpotente paire est Richardson [CoM93, Corollary 7.1.7], ainsi que toute orbite nilpotente de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ [CoM93, Theorem 7.2.3]. Les orbites nilpotentes ne sont pas toujours induites par une autre orbite (de façon non triviale). Une orbite nilpotente qui n'est induite par aucune autre est dite *rigide*. Nous dirons qu'un élément nilpotent e de $\mathfrak{g}$ est *induit* (resp. *Richardson*, *rigide*) si Ge est une orbite nilpotente induite (resp. Richardson, rigide).

1.2 Sur la dimension des nappes

En tant que variétés symplectiques, les orbites coadjointes de $\mathfrak{g}$ sont de dimension paire et l'ensemble $\mathfrak{g}^*_m$, pour $m \in \mathbb{N}$, des formes linéaires dont l'orbite coadjointe est de dimension $2m$ est une variété quasi-affine. L'étude des variétés $\mathfrak{g}^*_m$ fut initiée par A.A. Kirillov avec la «méthode des orbites», [Ki62]. Ces ensembles apparaissent également dans le cadre des systèmes intégrables hamiltoniens ; voir par exemple [I12] pour une illustration. Ici, $\mathfrak{g}$ est simple et la variété $\mathfrak{g}^*_m$ ($m \in \mathbb{N}$) s'identifie via $B_{\mathfrak{g}}^{\flat}$ à la sous-variété de $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g}^{(m)} := \{x \in G \ ; \ \dim Gx = 2m\}.$$

Définition 1.2.1. *Les composantes irréductibles des ensembles $\mathfrak{g}^{(m)}$, où m parcourt $\mathbb{N}$, sont appelées les* nappes *de $\mathfrak{g}$.*

Les nappes contenant un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$ furent d'abord introduites par Dixmier pour déterminer les éléments polarisables [Di75, Di76]. La notion fut ensuite généralisée par Bohro et Kraft [BoK79, Bor81]. Les nappes sont liées aux idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante. Citons [Bu, Bu11] pour des résultats récents sur les nappes.

Le problème posé par le calcul de la dimension des variétés $\mathfrak{g}^{(m)}$ se ramène à celui de la dimension des nappes de $\mathfrak{g}$. Il me fut suggéré par A.A. Kirillov. D'après des résultats de Borho-Kraft [BoK79], les nappes de $\mathfrak{g}$ sont paramétrées par les couples $(\mathfrak{l}, \mathcal{O}_{\mathfrak{l}})$, à classes de conjugaison par G près, formées d'une sous-algèbre de Levi $\mathfrak{l}$ et d'une orbite nilpotente rigide $O_{\mathfrak{l}}$ de $\mathfrak{l}$. La correspondance est établie grâce à la notion de classes de Jordan. Kempken décrit dans [Ke83] les orbites nilpotentes rigides en termes de partitions pour les algèbres de Lie simples classiques. Pour les algèbres de Lie simples exceptionnelles, des calculs explicites ont été faits par A.G. Elashvili, voir [Sp68, Appendix of Chap. II]. Une version complète fut publiée plus tardivement dans [E85a].

À l'aide de ces différents résultats, nous disposons de tous les ingrédients nécessaires pour calculer la dimension des nappes de $\mathfrak{g}$. Précisément, nous exprimons dans [Mo08, Proposition 2.11] la dimension d'une nappe associée à un couple $(\mathfrak{l}, \mathcal{O}_{\mathfrak{l}})$ en fonction de la dimension de l'orbite nilpotente rigide $\mathcal{O}_{\mathfrak{l}}$ et de la dimension du centre de la sous-algèbre de Levi $\mathfrak{l}$. Nos résultats dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de type exceptionnel sont résumés dans les Tables 13 à 17 de [Mo08].

La principale difficulté dans les cas classiques est d'exprimer la dimension des nappes en termes de partitions. Le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$ ne présente pas de difficulté, cf. [Mo08, Theorem 3.3]. Malheureusement, la démonstration du résultat principal de [Mo08] pour les autres cas classiques contient une erreur importante récemment relevée par Alexander Premet. Précisément, l'énoncé de la Proposition 3.11 de [Mo08] est incorrecte. En particulier, contrairement à ce qui est affirmé dans [Mo08, Remark 3.12], il se peut qu'en type **B**, **C**, ou **D** un élément nilpotent appartienne à deux nappes de dimensions différentes. Par exemple, l'élément nilpotent de $\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$ associé à la partition $(3,3,1,1)$ appartient à deux nappes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de dimension respectives 19 et 20, cf. [Mo08b].

Il s'ensuit que la démonstration du Théorème 3.13 de [Mo08] qui décrit la dimension des ensembles $\mathfrak{g}^{(m)}$ en termes des partitions associées aux éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$ (pour $\mathfrak{g}$ de type **B**, **C**, ou **D**) est également incorrecte. Son énoncé reste toutefois valable comme nous l'expliquons dans [Mo08b] ; en particulier, les Tables 3, 4, et 5 de [Mo08] restent correctes. La démonstration corrigée (voir [Mo08b]) du Théorème 3.13 de [Mo08] repose désormais de manière essentielle sur des résultats très récents d'Alexander Premet et Lewis Topley, [PT]. Les résultats dans le cas classique se résument alors ainsi :

Théorème 1.2.2. *Supposons que $\mathfrak{g}$ soit l'une des algèbres de Lie simples classiques $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_N(\mathbb{C})$ ou $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{C})$, et soit $\mathcal{P}_{\mathfrak{g}}(N)$ l'ensemble des partitions de N correspondant aux orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}$. Si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathcal{P}_{\mathfrak{g}}(N)$, avec $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N \geqslant 0$, on note $m(\lambda)$ la demi-dimension de l'orbite nilpotente correspondante.*

(i)([Mo08, Theorem 3.3]) *Supposons que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\dim \mathfrak{g}^{(m)} = \max\{\, 2m + \lambda_1 - 1 \ ; \ \lambda \in \mathcal{P}_{\mathfrak{g}}(N) \ \textit{tel que}\ m(\lambda) = m\,\}.$$

(ii)([PT]) *Supposons que $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_N(\mathbb{C})$ ou $\mathfrak{so}_N(\mathbb{C})$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\dim \mathfrak{g}^{(m)} = \max\{\, 2m + z(\lambda) \ ; \ \lambda \in \mathcal{P}_{\mathfrak{g}}(N) \ \textit{tel que}\ m(\lambda) = m\,\},$$

où $z(\lambda)$ est un entier défini dans [PT] (qui coïncide avec l'entier $z(\lambda)$ défini dans [Mo08] d'après [Mo08b]) tel que l'orbite nilpotente associée à $\lambda \in \mathcal{P}_{\mathfrak{g}}(N)$ est rigide si et seulement si $z(\lambda) = 0$.

Remarque 1.2.3. (1) *Les variétés $\mathfrak{g}^{(m)}$ ne sont pas toujours équidimensionnelles comme le montrent certains exemples dans $\mathfrak{sl}_5(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_{12}(\mathbb{C})$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$ et $\mathbf{E}_8$, (cf. Tables 5 à 12 dans [Mo08]).*

(2) *L'adhérence d'une nappe n'est pas toujours une réunion finie de nappes, cf. e.g., [Mo08, Table 2] ; ceci fut observé par Michaël Bulois dans [Bu].*

1.3 Indice du centralisateur d'un élément nilpotent

Rappelons la définition suivante de l'indice donnée en Introduction :

Définition 1.3.1. *L'*indice *d'une algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ est la dimension minimale des stabilisateurs des formes linéaires pour l'action coadjointe [Di74],*

$$\operatorname{ind}\mathfrak{q} := \min\{\dim \mathfrak{q}^{\xi} \ ; \ \xi \in \mathfrak{q}^*\}.$$

La notion d'indice est importante dans la théorie des représentations ainsi que dans la théorie des invariants. D'après un théorème de Rosenlicht [Ro63], si $\mathfrak{q}$ est une algèbre de Lie algébrique, c'est-à dire l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique linéaire Q, son indice est égal au degré de transcendance du corps des fonctions rationnelles Q-invariantes sur $\mathfrak{q}^*$. L'indice d'une algèbre de Lie réductive est égal à son rang. Pour une algèbre de Lie quelconque, le calcul de l'indice est un problème délicat en général. Nous disposons cependant de résultats intéressants pour certaines classes de sous-algèbres non réductives d'une algèbre de Lie simple ; citons par exemple [E85b, Pan01, TY04, Mo06b, Mo06c, J07]. L'indice des stabilisateurs des formes linéaires apparaît dans la théorie des systèmes intégrables hamiltoniens comme l'illustre le résultat suivant de Bolsinov [Bol91, Theorem 2.1].

Théorème 1.3.2 (Bolsinov)**.** *Soit $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Alors il existe une famille Poisson-commutative de fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$, construite selon la méthode de translation de l'argument (cf. §1.1.3), telle que sa restriction à l'orbite coadjointe $G\xi$ contienne $\frac{1}{2}\dim(G\xi)$ fonctions algébriquement indépendantes si et seulement si l'indice de $\mathfrak{g}^\xi$ est égal au rang de $\mathfrak{g}$.*

Identifions désormais $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ au moyen de $B_{\mathfrak{g}}^\flat$. Motivé par le résultat précédent de Bolsinov, A.G. Elashvili formula une conjecture dont il est déjà question dans [Bol92] :

Conjecture 1.3.3 (Elashvili)**.** *Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, l'indice de $\mathfrak{g}^x$ est égal au rang de $\mathfrak{g}$.*

Durant la dernière décennie, la conjecture d'Elashvili a retenu l'attention de nombreux spécialistes de la théorie des invariants. Résumons les principaux résultats à propos de cette conjecture. Tout d'abord, la conjecture se réduit au cas où $x \in \mathfrak{g}$ est un élément nilpotent et elle fut validée pour certaines classes d'éléments nilpotents (e.g., réguliers, sous-réguliers, sphériques,...) ; voir [Pan03a, Pan03b]. Ensuite, O. Yakimova démontra la conjecture pour le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple classique [Ya06]. La conjecture a été vérifiée pour les types exceptionnels par W. de Graaf (et de manière indépendante par J-Y. Charbonnel pour les types $\mathbf{E}_7$ et $\mathbf{E}_8$) à l'aide du logiciel de calcul `GAP`, [deG08]. Le nombre considérable d'orbites nilpotentes dans les algèbres de Lie exceptionnelles rend cependant fastidieuse la présentation des résultats. En 2004, J.-Y.Charbonnel publia une démonstration générale de la conjecture d'Elashvili, [C04]. Malheureusement, la dernière partie de [C04] contient une erreur relevée par L. Rybnikov. En résumé, nous ne disposons d'aucune démonstration générale de la conjecture d'Elashvili valable pour toute algèbre de Lie simple de dimension finie.

Dans un travail en commun avec J.-Y. Charbonnel [ChM10], nous obtenons une démonstration «presque» générale de cette conjecture. C'est ce que nous expliquons dans la section suivante.

1.3.1 Principaux outils de la démonstration

Le critère de Bolsinov apparaît de façon cruciale dans notre travail. Notre approche du problème diffère ainsi complètement de celles proposées jusqu'ici. La démonstration se fait en trois étapes que nous détaillons ici :

1) La première étape consiste à réduire la conjecture au cas des éléments nilpotents rigides. Précisément, nous montrons, [ChM10, Theorem 3.3] :

Théorème 1.3.4. *Supposons que* $\operatorname{ind}\mathfrak{l}^x = \operatorname{rk}\mathfrak{l}$ *pour toute sous-algèbre de Lie réductive propre* $\mathfrak{l}$ *de* $\mathfrak{g}$ *et pour tout* $x \in \mathfrak{l}$*. Alors pour tout élément nilpotent induit* e *de* $\mathfrak{g}$*, on a* $\operatorname{ind}\mathfrak{g}^e = \ell$*.*

La démonstration repose sur le critère de Bolsinov mais aussi sur les propriétés des nappes et les déformations de leurs G-orbites [ChM10, Theorem 2.9] (voir [BoK79] pour plus de détails sur ce sujet).

2) Soient e un élément nilpotent (quelconque) de $\mathfrak{g}$ et $B_e(\mathcal{S})$ l'éclatement en e de la tranche de Slodowy $\mathcal{S} = e + \mathfrak{g}^f$. On note $\varrho : B_e(\mathcal{S}) \to \mathcal{S}$ le morphisme d'éclatement. Alors $\varrho^{-1}(e)$ est une hypersurface lisse et irréductible de $B_e(\mathcal{S})$. De plus, il existe un *grand ouvert* Ω de $B_e(\mathcal{S})$ (i.e., $B_e(\mathcal{S}) \smallsetminus \Omega$ est de codimension $\geqslant 2$ dans $B_e(\mathcal{S})$) et une application régulière

$$\vartheta : \Omega \longrightarrow \mathrm{G}(\mathfrak{g}; \ell)$$

tels que, pour $x \in \Omega$, on ait $\vartheta(x) = \mathfrak{g}^{\varrho(x)}$ si $\varrho(x)$ est régulier, [C04, Section 2]. Ici, $\mathrm{G}(\mathfrak{g}; \ell)$ désigne la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension ℓ de $\mathfrak{g}$. En reprenant les techniques développées par Charbonnel dans [C04], nous établissons [ChM10, Theorem 4.13] :

Théorème 1.3.5. *On a* $\operatorname{ind}\mathfrak{g}^e = \ell$ *si et seulement si le centre* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ *de* $\mathfrak{g}^e$ *est contenu dans* $\vartheta(x)$ *pour tout* $x \in \Omega \cap \varrho^{-1}(e)$*.*

Cette dernière condition est réalisée en particulier dans les deux cas suivants : lorsque $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est engendré par les éléments $\mathrm{d}p_1(e), \ldots, \mathrm{d}p_\ell(e)$, ou lorsque $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e)$ est de dimension 1. Lorsque e est un élément nilpotent rigide et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple classique, la première situation a toujours lieu. On résout ainsi la conjecture pour les cas classiques (la démonstration de O. Yakimova est cependant plus courte dans ce cas !). Lorsque e est un élément nilpotent rigide et $\mathfrak{g}$ simple de type exceptionnel, alors $\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^e) = 1$ sauf dans les cas suivants : $\mathfrak{g}$ est de type $\mathbf{E}_7$ et $\dim\mathfrak{g}^e = 41$; $\mathfrak{g}$ est de type $\mathbf{E}_8$ et $\dim\mathfrak{g}^e \in \{46, 72, 76, 84, 112\}$. Pour résoudre la conjecture dans les cas exceptionnels, il reste donc sept cas à étudier.

3) Nous vérifions la conjecture d'Elashvili pour les orbites nilpotentes rigides restantes — une seule en type $\mathbf{E}_7$ et six en type $\mathbf{E}_8$ — à l'aide du logiciel de calcul `GAP`, voir [ChM10, §5.2 and Appendix]. En raison de ces cas restants, notre démonstration n'est pas tout à fait générale.

1.3.2 Projet de recherche : sur les invariants du centralisateur

La conjecture d'Elashvili apparaît dans le problème suivant [PPY07] : si e est un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$, l'algèbre $S(\mathfrak{g}^e)^{\mathfrak{g}^e}$ est-elle polynomiale (en ℓ générateurs) ? D. Panyushev, A. Premet et O. Yakimova obtiennent des familles d'éléments nilpotents pour lesquelles la réponse est positive [PPY07, Theorem 0.3], par exemple l'ensemble des éléments nilpotents pour $\mathfrak{g}$ de type **A** ou **C**. En revanche, il existe (au moins) un contre-exemple pour le type $\mathbf{E}_8$ comme l'a montré O. Yakimova, [Ya07]. Récemment, L. Topley, s'est intéressé au cas de la caractéristique $p > 0$ pour les cas classiques, [To12].

Dans un travail en commun avec Jean-Yves Charbonnel (en cours d'écriture), nous montrons que, tout comme la propriété $\operatorname{ind}\mathfrak{g}^e = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$, une certaine propriété impliquant le caractère polynomiale de $S(\mathfrak{g}^e)^{\mathfrak{g}^e}$ «passe» à l'induction. Il reste alors à étudier le cas des orbites rigides. Je prévois de travailler avec Lewis Topley sur ce sujet lors de sa visite à Poitiers prévue au mois de novembre 2012 dans le cadre de l'ANR «Géométrie et représentations des algèbres de Cherednik et catégories $\mathcal{O}$».

1.4 Dimension du bicône nilpotent via l'intégration motivique

On suppose désormais $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Rappelons que les éléments $p_i^{(j)}$, pour $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ et $j \in \{0, \ldots, m_i + 1\}$, sont définis par l'égalité (1.1.3). Nous nous intéressons dans cette section aux propriétés du *bicône nilpotent* de $\mathfrak{g}$ qui est le principal objet d'étude de [ChM09] :

Définition 1.4.1. *Nous appelons* bicône nilpotent *le sous-schéma* $\mathcal{N}$ *de* $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ *défini par l'idéal de* $\mathbb{C}[\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ *engendré par les éléments* $p_i^{(j)}$ *pour* $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ *et* $j \in \{0, \ldots, m_i+1\}$.

Comme l'idéal de définition du cône nilpotent $\mathfrak{N}$ est engendré par les polynômes p_i, on a, en tant qu'ensemble,

$$\mathcal{N} = \{\, (x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \;;\; \mathrm{Vect}(x, y) \subset \mathfrak{N} \,\}.$$

Soient π_1 et π_2 la première et la seconde projection de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$ respectivement. Clairement, $\pi_1(\mathcal{N}) = \pi_2(\mathcal{N}) = \mathfrak{N}$. De plus, $\mathcal{N}$ est un bicône de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ invariant pour l'action diagonale de G dans $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Soit $b_{\mathfrak{g}}$ la dimension des sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$. De la relation $\sum_{i=1}^{\ell}(m_i+1) = b_{\mathfrak{g}}$ (cf. (1.1.2)), il résulte que les composantes irréductibles de $\mathcal{N}$ sont de dimension supérieure ou égale à à $3(b_{\mathfrak{g}} - \ell)$. Le résultat principal de [ChM09] stipule :

Théorème 1.4.2. *Le bicône nilpotent* $\mathcal{N}$ *est une intersection complète non-réduite dans* $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ *de dimension* $3(b_{\mathfrak{g}} - \ell)$. *De plus, les images de toute composante irréductible de* $\mathcal{N}$ *par* π_1 *et* π_2 *sont égales à* $\mathfrak{N}$.

1.4.1 Motivations, applications

La fibre en zéro du morphisme $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(x, y) \mapsto [x, y]$ est un sous-schéma fermé G-stable de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ appelé la *variété commutante* de $\mathfrak{g}$ et noté $\mathcal{C}$. En tant qu'ensemble,

$$\mathcal{C} = \{\, (x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \;;\; [x, y] = 0 \,\}.$$

Il est bien connu que la variété commutante $\mathcal{C}$ est irréductible, [Ri79]. Un problème très ancien et toujours non résolu est de savoir si le schéma $\mathcal{C}$ est réduit, [LeS96]. Il est connu que les propriétés du bicône nilpotent (et du *module caractéristique*, cf. [ChM09, Definition 1]) sont de grande importance dans l'étude de la variété commutante et de son idéal de définition.

Le *nilcône* de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est la variété des zéros de l'idéal d'augmentation de $\mathbb{C}[\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}]^G \simeq (\mathbb{C}[\mathfrak{g}]\otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathfrak{g}])^G$. C'est une variété irréductible de dimension $3(b_{\mathfrak{g}}-\ell)$, [Ri89]. Le Théorème 1.4.2 répond ainsi positivement à une conjecture de Kraft et Wallach, [KW10], selon laquelle le nilcône de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ est une composante irréductible du bicône nilpotent $\mathcal{N}$. De plus, nous montrons que l'intersection du nilcône avec l'ouvert de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ formé des points lisses de $\mathcal{N}$ est vide (cf. [ChM09, Theorem 45]). En particulier, $\mathcal{N}$ n'est pas un schéma réduit.

Nous donnons dans [ChM09, Section 5] d'autres applications à la théorie des invariants du Théorème 1.4.2.

1.4.2 Le Théorème 1.4.2 via l'intégration motivique

Nous consacrons la fin de cette section aux idées de la démonstration du Théorème 1.4.2. Sans en donner les détails, nous expliquons en quoi l'intégration motivique et les propriétés du cône principal (cf. Définition 1.1.1 et Proposition 1.1.2) sont cruciales. Les bases concernant les espaces d'arcs, les schémas de jets et l'intégration motivique sont présentées en Annexe A de ce mémoire.

Comme nous venons de l'observer, le bicône nilpotent $\mathcal{N}$ n'est pas réduit ce qui rend ardu le calcul de sa dimension. Pour contourner cette difficulté, nous introduisons une variété auxiliaire $\mathcal{H}$, réduite, définie à partir du cône principal comme suit :

Définition 1.4.3. *On appelle* bicône principal *de $\mathfrak{g}$ le sous-schéma $\mathcal{H}$ de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ défini par l'idéal de $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ engendré par les éléments $q_i^{(j)}$ (cf. (1.1.3)) pour $i\in\{2,\dots,\ell\}$ et $j\in\{1,\dots,m_i+1\}$.*

En tant qu'ensemble, on a

$$\mathcal{H} = \{\,(x,y)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\ ;\ \mathrm{Vect}(x,y)\subset\mathfrak{H}\,\}.$$

C'est un bicône fermé G-invariant de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$. Contrairement au bicône nilpotent $\mathcal{N}$, le bicône principal $\mathcal{H}$ est un schéma réduit, ce qui nous permet d'exhiber des composantes irréductibles de $\mathcal{H}$ de la dimension souhaitée, à savoir $3(b_{\mathfrak{g}}-\ell+1)$, [ChM09, Corollary 23]. Précisément, celles qui se projettent via π_1 (et π_2) sur $\mathfrak{H}$ sont de cette dimension. Nous étudions alors conjointement les deux schémas $\mathcal{N}$ et $\mathcal{H}$ afin d'en déduire les propriétés souhaitées pour $\mathcal{N}$. Observons que $\mathcal{N}$ est le schéma des zéros dans $\mathcal{H}$ des trois polarisations d'ordre 2 de p_1 : $p_1^{(0)}, p_1^{(1)}, p_1^{(2)}$.

Suivant les notations de l'Annexe A, si X est une variété algébrique complexe, $\mathcal{J}_\infty(X)$ désigne l'*espace des arcs* de X et si $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{J}_m(X)$ désigne le *schéma des m-jets* de X (cf. Section A.1).

Pour $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $\eta_m : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathcal{J}_m(\mathfrak{g})$ le morphisme qui à (x, y) associe l'arc $t \mapsto x + ty$. Remarquons qu'un élément $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ appartient à $\mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{H}$) si et seulement si $\eta_\infty(x, y)$ appartient à l'espace des arcs $\mathcal{J}_\infty(\mathfrak{N})$ (resp. $\mathcal{J}_\infty(\mathfrak{H})$). Cela suggère que les bicônes nilpotent et principal sont reliés aux schémas de jets de $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{H}$ respectivement. Précisons la construction de [ChM09, §3.4] permettant d'établir ce lien :

Proposition 1.4.4. *Il existe des sous-ensembles fermés $\mathcal{J}_m(G)$-invariants B_m (resp. B'_m) de $\mathcal{J}_m(\mathfrak{g})$ définis par induction sur $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $B_1 = \mathcal{J}_1(\mathfrak{N})$ (resp. $B'_1 = \mathcal{J}_1(\mathfrak{H})$) et tels que, pour m assez grand, l'ensemble $\{(x, y) \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{g} \; ; \; \eta_m(x, y) \in B_m\}$ (resp. $\{(x, y) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{g} \; ; \; \eta_m(x, y) \in B'_m\}$) coïncide avec $\mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{H}$).*

Compte tenu de la proposition précédente, pour $m \gg 0$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ s'identifient aux sous-ensembles B'_m et B_m de $\mathcal{J}_m(\mathfrak{g})$ respectivement. Nous montrons alors dans [ChM09] que le Théorème 1.4.2 est une conséquence de :

Proposition 1.4.5. *Pour $m \gg 0$,*

(i) *l'image par la projection $\pi_{m,0} : \mathcal{J}_m(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$ de toute composante irréductible de dimension maximale de B'_m est égale à $\mathfrak{H}$;*

(ii) *l'image par la projection $\pi_{m,0} : \mathcal{J}_m(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}$ de toute composante irréductible de dimension maximale de B_m est égale à $\mathfrak{N}$.*

D'après la Proposition 1.1.2, le Théorème A.5.2 de Mustaţă [Mu01] s'applique aux schémas de jets de $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{H}$. Expliquons notre stratégie pour obtenir l'assertion (ii) de la Proposition 1.4.5 (une stratégie similaire appliquée à $\mathfrak{H}$ nous donnerait (i)) ; voir [ChM09, Section 3] pour les détails. On reprend les idées développées à la Section A.5. Soit Z la réunion des G-orbites de $\mathfrak{N}$ qui ne sont pas de dimension maximale, $B_\mathfrak{N}(\mathfrak{g})$ l'éclatement de $\mathfrak{g}$ le long de $\mathfrak{N}$ et

$$p \; : \; B_\mathfrak{N}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}$$

le morphisme d'éclatement. D'après Hironaka [Hi64], il existe un morphisme propre birationnel $\tilde{p} : \tilde{\mathfrak{g}} \to B_\mathfrak{N}(\mathfrak{g})$, avec $\tilde{\mathfrak{g}}$ lisse, tel que $(p \circ \tilde{p})^{-1}(\mathfrak{N})$ est un diviseur à croisements normaux simples de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Soient $\gamma : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ l'application composée $p \circ \tilde{p}$ et $E_1, \ldots, E_t$ les composantes irréducibles de $\gamma^{-1}(\mathfrak{N})$. Comme G a un nombre fini d'orbites dans $\mathfrak{N}$, on peut supposer que les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) E_1 est l'unique diviseur irréductible dominant $\mathfrak{N}$;

(b) le diviseur $\gamma^{-1}(\mathfrak{N})$ est égal à $\sum_{i=1}^t a_i E_i$;

(c) le *discrépant* $K_{\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}}$ (cf. égalité (A.3.2)) de γ est égal à $\sum_{i=1}^t b_i E_i$;

(d) $\gamma^{-1}(Z)$ est contenu dans la réunion $E_2 \cup \ldots \cup E_t$.

D'après (b), $E_1, \ldots, E_t$ sont G-invariants. De plus, d'après (d), il existe des entiers positifs $c_2, \ldots, c_t$, tels que $\gamma^{-1}(Z)$ soit le diviseur $\sum_{i=2}^t c_i E_i$.

Rappelons que le terme de plus haut degré du polynôme de Hodge-Deligne $E(B_m; u, v)$ de B_m (Définition A.2.2) est $c_m(uv)^{\dim B_m}$ où c_m est le nombre de composantes irréductibles de B_m de dimension maximale. Notre stratégie consiste alors à intégrer certaines fonctions $\mu_{\mathfrak{g}}$-mesurables sur le cylindre $\pi_{\infty,m}^{-1}(B_m)$, pour $m \gg 0$, choisies judicieusement de façon à faire apparaître les nombres c_m d'une part et $\tilde{c}_m$ d'autre part, où $\tilde{c}_m$ est le nombre de composantes irréductibles de B_m dont l'image par l'application $\pi_{m,0}$ est $\mathfrak{N}$. Ici, $\mu_{\mathfrak{g}}$ désigne la mesure motivique relative à $\mathfrak{g}$ (cf. Définition A.3.2). La formule de changement de variable (cf. Théorème A.3.7) et la construction précédente montrent que les calculs se réduiront à ceux d'intégrales de fonctions d'ordre associées à un diviseur à croisements normaux simples. La Proposition A.3.6 assure que l'on peut calculer ces intégrales.

1.5 Sur la conjecture de Kostant pour les algèbres de Clifford

Nous présentons ici un travail en commun avec Anton Alekseev (cf. [AMo12]) dont le point de départ est l'article fondamental de Kostant [Kos97] sur la structure des algèbres de Clifford engendrées par une algèbre de Lie simple complexe. Nous renvoyons au livre d'Eckhard Meinrenken [Me12] pour une présentation récente de ces algèbres de Clifford ; le Chapitre XI, §§5-6, concerne tout particulièrement la conjecture de Kostant et une partie de notre article [AMo12].

Comme dans la section précédente, nous supposons $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Rappelons que la forme de Killing de l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$ est notée $B_{\mathfrak{g}}$. Soit $\mathrm{Cl}(\mathfrak{g})$ l'*algèbre de Clifford* associée au couple $(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$, c'est-à-dire le quotient $T\mathfrak{g}/\mathcal{I}(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$ où $T\mathfrak{g}$ est l'algèbre extérieure de $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{I}(\mathfrak{g}, B_{\mathfrak{g}})$ l'idéal bilatère de $T\mathfrak{g}$ engendré par les éléments $x \otimes x - B_{\mathfrak{g}}(x, x)$, pour $x \in \mathfrak{g}$. L'inclusion $\mathfrak{g} \hookrightarrow T\mathfrak{g}$ induit une injection $\theta : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{Cl}(\mathfrak{g})$. L'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(\mathfrak{g})$ peut être vue comme une déformation de l'algèbre extérieure. Précisément, l'application de *quantification*, $q : \bigwedge \mathfrak{g} \to \mathrm{Cl}(\mathfrak{g})$, donnée par l'anti-symétrisation, est un isomorphisme d'espaces vectoriels dont l'inverse induit un isomorphisme de super-algèbres de Poisson graduées, $\mathrm{gr}\,\mathrm{Cl}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{gr} \bigwedge \mathfrak{g} \simeq \bigwedge \mathfrak{g}$.

1.5.1 La conjecture de Kostant

L'algèbre de cohomologie (de Chevalley-Eilenberg) de $\mathfrak{g}$ est isomorphe en tant qu'algèbre graduée à la sous-algèbre $(\bigwedge \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ formée des éléments $\mathfrak{g}$-invariants de l'algèbre extérieure $\bigwedge \mathfrak{g}^*$. D'après le théorème de Hopf-Koszul-Samelson, $(\bigwedge \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ est isomorphe à l'algèbre extérieure $\bigwedge P$ où P est un espace vectoriel gradué engendré par des éléments de degrés impairs, $2m_1 + 1, \ldots, 2m_\ell + 1$, [Kos97, Theorem 23]. Comme $\mathfrak{g}$ est simple, $m_1 = 1$, et la forme différentielle invariante de degré 3 correspondante est donnée par la 3-forme de Cartan,

$$\eta(x, y, z) = B_{\mathfrak{g}}(x, [y, z]), \quad \forall\, x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

L'un des résultats principaux de [Kos97] stipule que la partie invariante $\mathrm{Cl}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ de l'algèbre de Clifford sous l'action adjointe est isomorphe à l'algèbre de Clifford $\mathrm{Cl}(P)$ sur P (relativement à un produit scalaire induit par $B_{\mathfrak{g}}$). Sous cet isomorphisme, la 3-forme de Cartan définit l'*élément cubique canonique* $\hat{\eta} \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{g})$. Cet élément joue un rôle important dans la théorie des opérateurs de Dirac cubiques [Kos03] ; voir aussi [AMe00, AMW00, AMn11] pour d'autres applications de cet élément.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ une décomposition triangulaire de $\mathfrak{g}$. On note $\mathcal{R}$ le système de racines du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $\mathcal{R}^+$ le système de racines positives relatif à $\mathfrak{n}_+$. Soient $\check{\mathfrak{g}}$ le dual de Langlands de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire l'algèbre de Lie définie par le système de racines dual $\check{\mathcal{R}} := \{\check{\alpha}\ ;\ \alpha \in \mathcal{R}\}$, et $\check{\mathfrak{h}} \subset \check{\mathfrak{g}}$ la sous-algèbre de Cartan correspondante. Les algèbres $\check{\mathfrak{h}}^*$ et $\mathfrak{h}$ sont canoniquement isomorphes et $2\rho \in \mathfrak{h}^* \simeq \check{\mathfrak{h}}$, la somme des racines positives, coïncide avec l'élément de Cartan $\check{h}$ du $\mathfrak{sl}_2$-triplet principal $(\check{e}, \check{h}, \check{f}) \subset \check{\mathfrak{g}}$ (cf. §1.1.2). L'action coadjointe de $\check{e}$ induit une filtration, $\check{\mathfrak{F}}^{(m)}\mathfrak{h}$, sur $\mathfrak{h}$ donnée par l'égalité,

$$\check{\mathfrak{F}}^{(m)}\mathfrak{h} = \{\, x \in \mathfrak{h},\ (\mathrm{ad}^*\check{e})^{m+1} x = 0 \,\}\,.$$

La dimension des espaces vectoriels $\check{\mathfrak{F}}^{(m)}\mathfrak{h}$ augmente aux valeurs $m = m_1, \ldots, m_\ell$. Cela résulte de la décomposition (1.1.2), $\mathfrak{g}$ et $\check{\mathfrak{g}}$ partageant les mêmes exposants. Il résulte de la relation $[\check{e}, [\check{e}, \check{h}]] = 0$ que $\rho = \frac{1}{2}\check{h} \in \mathfrak{F}^{(1)}\check{\mathfrak{h}}$. Considérons la décomposition en somme directe

$$\mathrm{Cl}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Cl}(\mathfrak{h}) \oplus (\theta(\mathfrak{n}_-)\mathrm{Cl}(\mathfrak{g}) + \mathrm{Cl}(\mathfrak{g})\theta(\mathfrak{n}_+)) \tag{1.5.1}$$

de l'algèbre de Clifford, où $\mathrm{Cl}(\mathfrak{h}) \subset \mathrm{Cl}(\mathfrak{g})$ est la sous-algèbre engendrée par $\theta(\mathfrak{h})$, et la *projection de Harish-Chandra impaire*

$$\mathrm{hc}_{\mathrm{odd}} : \mathrm{Cl}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Cl}(\mathfrak{h})$$

relative à (1.5.1). L'image de l'élément cubique canonique $\hat{\eta}$ est donnée par $\mathrm{hc}_{\mathrm{odd}}(\hat{\eta}) = B_{\mathfrak{g}}^{\sharp}(\rho)$. Naturellement se pose la question de savoir quelles sont les images par $\mathrm{hc}_{\mathrm{odd}}$ des générateurs de P de degrés supérieurs. Un résultat non trivial de Y. Bazlov ([Baz08, Proposition 4.5]) et B. Kostant (communications privées) assure que $\mathrm{hc}_{\mathrm{odd}} \circ q(P) = \theta(\mathfrak{h}) \subset \mathrm{Cl}(\mathfrak{h})$. L'espace P possède une filtration naturelle, $P^{(k)}$, induite par le degré et $\mathrm{hc}_{\mathrm{odd}}(q(P^{(k)}))$ définit alors une filtration sur la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. Kostant formule la conjecture suivante (voir aussi [Baz08, §5.6]) :

Conjecture 1.5.1 (Kostant)**.** *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a :* $\mathrm{hc}_{\mathrm{odd}}(q(P^{(2m+1)})) = \theta(\check{\mathfrak{F}}^{(m)}\mathfrak{h})$.

On établit un lien entre ces deux filtrations en deux temps. La première étape, décisive, a récemment été franchie par Anthony Joseph dans [J12a] (cf. Théorème 1.5.2 ci-dessous). L'espace $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ possède deux actions ϱ_L et ϱ_R de $\mathfrak{g}$ qui commutent entre elles données par : $\varrho_L(x) : a \otimes b \to xa \otimes b$ et $\varrho_R(x) : a \otimes b \to -ax \otimes b + a \otimes \mathrm{ad}(x)b$. Elles induisent une décomposition (cf. [KNV11]) :

$$U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} = S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{g} \oplus (\varrho_L(\mathfrak{n}_-)(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}) + \varrho_R(\mathfrak{n}_+)(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g})) \tag{1.5.2}$$

et on note $\mathrm{hc}_{\mathfrak{g}} : U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{g}$ la *projection de Harish-Chandra généralisée* relativement à cette décomposition. Ces projections sont introduites dans [KNV11] dans un cadre légèrement plus général. La restriction de $\mathrm{hc}_{\mathfrak{g}}$ à l'espace des invariants $(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ pour l'action diagonale $\varrho(x) := \varrho_L(x) + \varrho_R(x)$ induit une injection $\mathrm{hc}_{\mathfrak{g}} : (U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \hookrightarrow S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h}$.

Théorème 1.5.2 (Joseph)**.** *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $(\mathrm{ev}_\rho \otimes 1) \circ \mathrm{hc}_{\mathfrak{g}}\big((U^{(m)}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\big) = \check{\mathfrak{F}}^{(m)}\mathfrak{h}$, où $U^{(m)}(\mathfrak{g})$ est la filtration naturelle de $U(\mathfrak{g})$ et où $\mathrm{ev}_\rho : S(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] \to \mathbb{C}$ est l'évaluation au point $\rho \in \mathfrak{h}^*$.*

Du théorème de Joseph nous déduisons la conjecture de Kostant. C'est ce que nous montrons dans [AMo12, Theorem 2.2] :

Théorème 1.5.3. *Le Théorème 1.5.2 est équivalent à la Conjecture 1.5.1.*

Sur le même thème, nous montrons également :

Théorème 1.5.4. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $(\theta \circ \mathrm{ev}_\rho \circ \mathrm{hc} \otimes 1)\big((U^{(m)}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\big) = \mathrm{hc}_{\mathrm{odd}}(q(P^{(2m+1)}))$, où $\mathrm{hc} : U(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})$ est la projection de Harish-Chandra standard.*

Les démonstrations des Théorèmes 1.5.3 et 1.5.4 reposent pour une large part sur des résultats fins de [Kos97, Sections 5 and 6]. Alors que nous finalisions cette note, A. Joseph nous a informé avoir récemment démontré l'égalité entre filtrations, [J12b, §1.4 and Theorem 2.4] :

$$(\mathrm{ev}_\rho \circ \mathrm{hc} \otimes 1)\big((U^{(m)}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}\big) = \check{\mathfrak{F}}^{(m)}\mathfrak{h}\,. \tag{1.5.3}$$

Cette égalité jointe au Théorème 1.5.4 donne une nouvelle démonstration de la conjecture de Kostant. Une égalité similaire à (1.5.3), avec $S(\mathfrak{g})$ en place de $U(\mathfrak{g})$ et la projection de $S(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{h})$ en place de la projection de Harish-Chandra standard, fut établie par Rudolph Rohr [Ro10]. Dans le cas de l'algèbre enveloppante, la démonstration exige toutefois des outils nettement plus sophistiqués comme les opérateurs de Zhelobenko et Bernstein-Gelfand-Gelfand (BGG).

1.5.2 Complément sur les opérateurs de Zhelobenko et le résultat de Joseph

Lors de ma visite à Genève en avril 2012, Anton Alekseev et moi-même avons observé que l'on peut, par une déformation des opérateurs de Zhelobenko et de BGG comme exploités dans [J12a], unifier le résultat de R. Rohr et celui de A. Joseph (Théorème 1.5.2). Comme cette remarque ne correspond à aucune publication, nous détaillons ici ce travail.

Nous reprenons la stratégie de [J12a] à ceci près que nous introduisons un paramètre $t \in \mathbb{C}$. Pour $t \in \mathbb{C}^*$, ceci revient essentiellement à considérer l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_t$ munie du crochet $[\cdot,\cdot] := t[\cdot,\cdot]$. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ les racines simples de $\mathcal{R}^+$ et $s_1, \ldots, s_\ell$ les réflexions simples correspondantes qui engendrent le groupe de Weyl W de $\mathcal{R}$. L'*action tordue* $\circ_t$ de W sur $\mathfrak{h}^*$

définie par $w \circ_t \lambda := w(\lambda + t\rho) - t\rho$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ s'étend de façon naturelle à $S(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$. Soit $\overline{S(\mathfrak{h})}$ l'anneau localisé de l'algèbre commutative $S(\mathfrak{h})$ relativement à l'ensemble

$$\{\check{\alpha} + kt \ ; \ \alpha \in \mathcal{R}, \ k \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.5.4}$$

L'action tordue $\circ_t$ s'étend à $\overline{S(\mathfrak{h})}$ (ici, les éléments de $\overline{S(\mathfrak{h})}$ sont vus comme des fonctions rationnelles sur $\mathfrak{h}^*$) et la décomposition (1.5.2) s'étend [KNV11, equation (6)],

$$\overline{U(\mathfrak{g})} \otimes \mathfrak{g} = \overline{S(\mathfrak{h})} \otimes \mathfrak{g} \oplus (\varrho_L(\mathfrak{n}_-)(\overline{U(\mathfrak{g})}) \otimes \mathfrak{g}) + \varrho_R(\mathfrak{n}_+)(\overline{U(\mathfrak{g})} \otimes \mathfrak{g})), \tag{1.5.5}$$

où $\overline{U(\mathfrak{g})}$ est l'anneau localisé de $U(\mathfrak{g})$ relativement à l'ensemble (1.5.4). Soit H le tore maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et $\mathrm{Norm}(H)$ le normalisateur de H dans G. Pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, notons $\tilde{s}_i$ un représentant de s_i dans $\mathrm{Norm}(H)/H \simeq W$.

Définition 1.5.5. *Soit $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Il existe une application linéaire $\eta_{i,t} : U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to \overline{U(\mathfrak{g})} \otimes \mathfrak{g}$ qui induit par restriction, puis par extension à $\overline{S(\mathfrak{h})} \otimes \mathfrak{g}$, une application linéaire $\xi_{i,t} : \overline{S(\mathfrak{h})} \otimes \mathfrak{g} \to \overline{S(\mathfrak{h})} \otimes \mathfrak{g}$ telle que*

$$\xi_{i,t}(\Phi z) = (s_i \circ_t \Phi)\xi_{i,t}(z), \quad \forall\, \Phi \in \overline{S(\mathfrak{h})}, \forall\, z \in S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{g}. \tag{1.5.6}$$

De manière explicite, pour tout $m \in \overline{S(\mathfrak{h})} \otimes \mathfrak{g}$, $\xi_{i,t}(m)$ est donné par :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(k! \check{\alpha}_i (\check{\alpha}_i - t) \ldots (\check{\alpha}_i - (k-1)t)\right)^{-1} (\mathrm{ad}\, e_i)^k (\mathrm{ad}\, f_i)^k \tilde{s}_i(m),$$

où $e_i \in \mathfrak{n}_+$ et $f_i \in \mathfrak{n}_-$ sont des vecteurs radiciels associés à α_i et $-\alpha_i$ respectivement tels que $[e_i, f_i] = \check{\alpha}_i$. Pour $t = 1$, les applications linéaires $\xi_{i,t}$ sont appelées les opérateurs de Zhelobenko*, [KNV11, Section 2]. Ils vérifient les relations de tresses et $\xi_{i,t}^2(m) = (\check{\alpha}_i + t)\tilde{s}_i^2(m)(\check{\alpha}_i + t)^{-1}$ pour tout i.*

Notons $(S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h})^{\Xi_t}$ le sous-espace de $S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h} \subset \overline{S(\mathfrak{h})} \otimes \mathfrak{g}$ des éléments invariants sous l'action des opérateurs $\xi_{i,t}$, $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. D'après [KNV11, Theorem 1], pour $t = 1$, on a

$$\mathrm{hc}_{\mathfrak{g}}((U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}) = (S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h})^{\Xi_1}.$$

D'autre part, pour $t = 0$, l'action $\circ_t$ est l'action usuelle du groupe W et, d'après l'équation (1.5.6), on a :

$$\varkappa((S(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}) = (S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h})^W = (S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h})^{\Xi_0}$$

où $\varkappa : S(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h}$ est la projection relativement à la décomposition $S(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} = S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{g} \oplus (\mathfrak{n}_+ + \mathfrak{n}_-)S(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$. La stratégie de A. Joseph pour établir le Théorème 1.5.2 est de décrire l'espace $(S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h})^{\Xi_1}$ à l'aide des *monoïdes de Zhelobenko* (voir ci-dessous). Quant à R. Rohr [Ro10], il prouve l'égalité entre filtrations,

$$\varkappa((S^{(m)}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}) = \check{\mathfrak{F}}^{(m)}\mathfrak{h},$$

où $S^{(m)}(\mathfrak{g})$ est la filtration naturelle de $S(\mathfrak{g})$, en remarquant que pour tout $i \in \{1,\dots,\ell\}$ et tous $s, s' \in \mathbb{C}^*$, on a $\exp(s' \mathrm{ad}\, \check{e})(\mathrm{d}p_i(s\rho)) = \mathrm{d}p_i(s\rho - ss'\check{e})$. Comme $\mathrm{d}p_i$ est de degré m_i, il vient $(\mathrm{ad}\, \check{e})^{m_i+1}\mathrm{d}p_i(s\rho) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{C}^*$. Il est à noter que l'argument de R. Rohr intervient dans [J12a, §3.2]. Nous appliquons ici les idées de A. Joseph aux opérateurs de Ξ_t pour tout t : avec $t = 1$ d'une part, et $t = 0$ d'autre part, cela donne l'égalité entre les trois filtrations précédentes, $\mathrm{hc}_{\mathfrak{g}}((U^{(m)}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}})$, $\varkappa((S^{(m)}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}})$ et $\check{\mathfrak{F}}^{(m)}\mathfrak{h}$.

Soient $t \in \mathbb{C}$ et $J_t \in (S(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h})^{\Xi_t}$ de degré m que l'on écrit $J_t = \sum_{i=1}^{\ell} q_{i,t} \otimes \varpi_i$ avec $q_{i,t} \in S(\mathfrak{h})$, où $\varpi_1,\dots,\varpi_\ell$ sont les poids fondamentaux relatifs à $\alpha_1,\dots,\alpha_\ell$ respectivement. Suivant [J12a], on pose $P_{i,t} : \lambda \mapsto \dfrac{q_{i,t}}{\check{\alpha}_i + 2t}(\lambda - t\rho) \in \overline{S(\mathfrak{h})}$. Notre objectif est de montrer que $(\mathrm{ad}\, \check{e})^{m+1} \sum_{i=1}^{\ell} q_{i,t}(s\rho)\varpi_i = 0$ pour tout $s \in \mathbb{C}^*$. Comme $\langle \rho, \check{\alpha}_i + 2t\rangle = 1 + 2t$ ne dépend pas de i, il suffit de montrer que

$$\forall\, s \in \mathbb{C}^*, \quad (\mathrm{ad}\, \check{e})^{m+1} \sum_{i=1}^{\ell} P_{i,t}(s\rho)\varpi_i = 0. \tag{1.5.7}$$

Soit A_i, pour $i \in \{1,\dots,\ell\}$, l'opérateur de BGG de $S(\mathfrak{h})$ défini par la formule : $A_i f := \dfrac{f - s_i f}{h_i}$, pour $f \in S(\mathfrak{h})$. En adaptant les arguments de [J12a, Corollary 2.5], on obtient pour tous $i, j \in \{1,\dots,\ell\}$,

$$A_i P_{j,t} = \langle \alpha_i, \check{\alpha}_j\rangle \frac{P_{i,t} - P_{j,t}}{t + s_i(\check{\alpha}_j)}. \tag{1.5.8}$$

L'action des opérateurs A_i sur les polynômes $P_{j,t}$ définit un ensemble fini $\mathbf{P}_t$ et les couples $(A_i, P_{j,t})$ satisfont à des relations similaires à [J12a, (14)]. Lorsque $t = 1$, Joseph appelle le couple $(\mathbf{A}, \mathbf{P}_t)$ où $\mathbf{A} = (A_1,\dots,A_\ell)$, le *monoïde de Zhelobenko* ; voir [J12a, Section 6] pour plus de détails.

Supposons désormais $\mathfrak{g}$ simplement lacée, i.e., $\mathfrak{g}$ est de type $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$ ou $\mathbf{E}$. Il existe alors une bijection [J12a, Section 6], $\mathscr{P}_t : \mathcal{R}^+ \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}_t$ donnée par $\mathscr{P}_t(s_{j_1} \dots s_{j_s}\alpha_{j_{s+1}}) = \pm A_{j_1} \dots A_{j_s} P_{j_{s+1},t}$ lorsque le membre de droite est non nul. De plus, $\mathbf{P}_t$ possède un unique élément de plus grande longueur. On définit ensuite par récurrence des polynômes $P_{\check{\gamma},t}$, pour $\gamma \in \check{\mathcal{R}}^+$, grâce à la bijection $\mathscr{P}_t$ comme suit [J12a, Section 7]. Si $\alpha = \alpha_i$, on pose $A_{\check{\alpha}} := A_i$ et $P_{\check{\alpha},t} := P_{i,t}$. Si $\alpha \in \{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$ et $\check{\gamma} \in \check{\mathcal{R}}^+$ sont tels que $\langle \alpha, \check{\gamma}\rangle = -1$, on pose $A_{\check{\alpha}} P_{\check{\gamma},t} =: N_{\check{\alpha},\check{\gamma}}\, P_{\check{\alpha}+\check{\gamma},t}$ où $N_{\check{\alpha},\check{\beta}}$ est une constante de structure, ici égale à ± 1. D'après [J12a, Proposition 7.8], on a

Proposition 1.5.6. *Pour tout $\gamma \in \mathcal{R}^+ \smallsetminus \{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$, $P_{\check{\gamma},t} = \dfrac{\sum_{\alpha\in\Delta} N_{-\check{\alpha},\check{\gamma}}\, P_{\check{\gamma}-\check{\alpha},t}}{t + \check{\gamma}}$ et, pour $\alpha \in \{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$ et $\gamma \in \mathcal{R}^+$, $A_{\check{\alpha}} P_{\check{\gamma},t} = 0$ si $\langle \alpha, \check{\gamma}\rangle > 0$ ou si $\langle \alpha, \check{\gamma}\rangle = 0$.*

Décrivons l'idée de la démonstration. Rappelons que $m - 1$ est le degré (commun) d'un ensemble $(P_{i,t},\ i \in \{1,\dots,\ell\})$ de solutions de (1.5.8). Il résulte de la Proposition 1.5.6 que le degré de $P_{\check{\gamma},t}$ est $m - \langle \rho, \check{\gamma}\rangle$, [J12a, §8.2]. (Ici, $m - \langle \rho, \check{\gamma}\rangle < 0$ signifie que $P_{\check{\gamma},t} = 0$.) On raisonne par récurrence sur la hauteur $\langle \rho, \check{\gamma} \rangle$ de γ pour montrer (1.5.7). Pour $\langle \rho, \check{\gamma} \rangle = m$, le résultat est vrai. En effet, dans ce cas $P_{\check{\gamma},t} = c$ est une constante et on a $(\mathrm{ad}\,\check{e})^{m+1} \sum_{i=1}^{\ell} c\,\varpi_i = 0$. Cela vient de ce que $\sum_{i=1}^{\ell} \varpi_i = \rho$ et $(\mathrm{ad}\,\check{e})^{m+1}(\rho) = -(\mathrm{ad}\,\check{e})^{m}(\check{e}) = 0$ $(m \geqslant 1)$. Ensuite, si (1.5.7) est vraie pour tout $\langle \rho, \check{\gamma} \rangle \geqslant r$, avec un certain $r \geqslant 1$, alors pour tout $\gamma \in \mathcal{R}^+$ de hauteur $r-1$, les arguments de [J12a, §8.3 à 8.5] et la Proposition 1.5.6 montrent que $P_{\check{\gamma},t}$ s'exprime comme une combinaison linéaire de termes satisfaisant à (1.5.7).

Remarque 1.5.7. (1) *En modifiant les opérateurs de Zhelobenko comme introduits dans [KNV11], Joseph obtient l'égalité (1.5.3) dans [J12b]. L'introduction d'un paramètre t permet comme précédemment d'unifier le second résultat de A. Joseph et celui de R. Rohr.*

(2) *Dans [J12a], A. Joseph considère aussi le cas où $\mathfrak{g}$ est non simplement lacée. Les arguments sont alors plus sophistiqués.*

1.6 Encadrement doctoral : sous-algèbres admissibles et W-algèbres finies

Cette section concerne le thème de recherche de Guilnard Sadaka que je co-encadre avec Rupert Yu depuis le mois de septembre 2010. Le groupe de travail que Karin Baur, Giovanni Felder, Soumaïa Ghandour et moi-même avons organisé à l'ETH de Zürich en 2008 sur les W-algèbres finies incita le sujet que nous lui avons proposé : «sous-algèbres χ-admissibles de $\mathfrak{sl}_{pn}(\mathbb{C})$ et W-algèbres finies». Nous présentons ici les résultats que Guilnard Sadaka a obtenus jusqu'ici, [Sa12]. Des prolongements possibles sont ensuite suggérés.

Comme dans la section précédente, $\Bbbk = \mathbb{C}$.

1.6.1 Présentation générale du sujet

Depuis les travaux de Premet [Pr02], l'étude des *W-algèbres finies* a connu un essor particulièrement intense ces dernières années, notamment en raison de leur importance dans la théorie des représentations, [Pr02, Appendix by Skryabin]. Les W-algèbres finies sont certaines algèbres associées aux orbites nilpotentes d'une algèbre de Lie simple et peuvent être vues comme les analogues de l'algèbre enveloppante pour la tranche de Slodowy des orbites en question. Elles furent introduites par Lynch dans le cas des éléments nilpotents pairs [L79], généralisant ainsi la célèbre construction de Kostant [Kos78] (correspondant au cas régulier). La définition pour le cas général est due à A. Premet, [Pr02]. Nous renvoyons à [Lo10] pour une présentation récente de cette théorie.

Plus en détail, les W-algèbres finies sont définies comme suit. Soient (e, h, f) un $\mathfrak{sl}_2$-triplet de $\mathfrak{g}$ et $\chi := B_{\mathfrak{g}}^{\flat}(e)$ la forme linéaire associée à e. La sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{m} := \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{m}_\chi$, où

$\mathfrak{m}_\chi := \bigoplus_{j \leqslant -2} \mathfrak{g}(j)$ (dans les notations de (1.1.1)) et où $\mathfrak{L}$ est un sous-espace lagrangian de $\mathfrak{g}(-1)$ relativement à la forme de Kirillov $\chi([\cdot,\cdot])$, vérifie les trois propriétés suivantes :

(1) $\chi([\mathfrak{m},\mathfrak{m}]) = \{0\}$;

(2) $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}^e = \{0\}$;

(3) $\dim \mathfrak{m} = (\dim Ge)/2$.

À l'élément nilpotent e et la sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{m}$, on associe une algèbre d'endomorphismes $H(\mathfrak{g},\chi,\mathfrak{m})$, appelée *$W$-algèbre finie* [Pr02, GG02] :

$$H(\mathfrak{g},\chi,\mathfrak{m}) \quad := \quad \mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m})} \mathbb{C}_\chi)^{\mathrm{op}}, \tag{1.6.1}$$

où $\mathbb{C}_\chi$ est l'image de $\chi : U(\mathfrak{m}) \to \mathbb{C}$.

Définition 1.6.1. *Une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ est dite χ-*admissible *si elle vérifie les trois propriétés (1), (2) et (3) ci-dessus.*

La sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{m}$ est l'exemple «standard» d'une sous-algèbre χ-admissible. Plus généralement, on construit de telles sous-algèbres à partir d'une *bonne graduation* pour e (cf. [EK05] ou [BG07]), mais il en existe d'autres. Un fait important est que l'algèbre $H(\mathfrak{g},\chi,\mathfrak{m})$ ne dépend, à isomorphisme près, ni du choix du sous-espace lagrangien $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{g}(-1)$ (cf. [BG07] ou [GG02]), ni de la bonne graduation pour e (cf. [BG07, Theorem 1]).

À toute sous-algèbre χ-admissible $\mathfrak{m}$, on peut définir une algèbre $H(\mathfrak{g},\chi,\mathfrak{m})$ par la relation (1.6.1) et il est naturel de se demander si cette algèbre dépend, à isomorphisme près, de l'algèbre χ-admissible $\mathfrak{m}$ choisie. A. Premet montre que ce n'est pas le cas si le corps de base est de caractéristique $p > 0$. Pour la caractéristique nulle, le problème reste entier.

1.6.2 Sous-algèbres admissibles de $\mathfrak{sl}_{pn}(\mathbb{C})$ dans un cas particulier

Dans [Sa12], Guilnard Sadaka considère le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{pn}(\mathbb{C})$ $(p, n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\})$, et où e est la matrice nilpotente d'ordre pn formée de p blocs de Jordan. Dans ce cas, e est un élément nilpotent pair et il résulte de [EK05, Theorem 4.2] que la graduation de Dynkin (donnée par (1.1.1)) est la seule bonne graduation pour e. Guilnard Sadaka construit explicitement un ensemble $\Xi \ni \mathfrak{m}_\chi$ de sous-algèbres χ-admissibles non toutes isomorphes à $\mathfrak{m}_\chi$, cf. [Sa12, Theorem 2.7]. Elle obtient ainsi de «nouvelles» sous-algèbres χ-admissibles.

Elle établit ensuite certaines propriétés remarquables de l'algèbre $H(\mathfrak{g},\chi,\mathfrak{m})$, pour $\mathfrak{m} \in \Xi$, connues pour le cas $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\chi$. Ses résultats se résument ainsi, cf. [Sa12, Theorem 3,4, Proposition 3.8, Theorem 4.7] :

Théorème 1.6.2. *Soit $\mathfrak{m} \in \Xi$. Il existe une filtration $\mathcal{F}$ sur l'algèbre $H(\mathfrak{g},\chi,\mathfrak{m})$ et une variété $\mathcal{T} \subset \chi + \mathfrak{m}^\perp$, où $\mathfrak{m}^\perp$ est l'orthogonal de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{g}^*$, telle que $\mathcal{T}$ est transverse aux orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^*$ et $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}} H(\mathfrak{g},\chi,\mathfrak{m}) \simeq \mathbb{C}[\mathcal{T}]$ en tant qu'algèbres de Poisson graduées.*

De plus, la correspondance de Skryabin reste valable pour ces algèbres, [Sa12, Theorem 5.8], ce qui constitue une motivation majeure. Dans le cas où $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\chi$, la variété $\mathcal{T}$ est la tranche de Slodowy $\mathcal{S} = \chi + (\mathfrak{g}^e)^*$ et $\mathcal{F}$ est la *filtration de Kazhdan* (cf. [GG02, Section 4]). Pour démontrer ces résultats, Guilnard Sadaka reprend pour une large part les arguments de [GG02], notamment le recours aux suites spectrales pour établir l'isomorphisme d'algèbres de Poisson et la correspondance de Skryabin. La principale difficulté est de construire une variété $\mathcal{T}$ qui vérifie les «bonnes» propriétés. C'est l'une des raisons pour lesquelles on se restreint dans un premier temps à un cas particulier.

1.6.3 Suggestions de projets de recherches

Les résultats de Guilnard Sadaka soulèvent naturellement la question suivante : pour $\mathfrak{m} \in \Xi$, les algèbres $H(\mathfrak{g}, \chi, \mathfrak{m}_\chi)$ et $H(\mathfrak{g}, \chi, \mathfrak{m})$ sont-elles isomorphes ? La première est bien connue et conduit aux W-algèbres finies considérées par [RS99] (voir aussi [BK06]) définies comme un quotient du Yangian $Y_{p,n}$ associé à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_{pn}(\mathbb{C})$. Guilnard Sadaka tente actuellement de décrire la seconde par générateurs et relations afin de répondre à cette question. Quelle que soit la réponse, elle ouvrira sur d'autres problèmes intéressants :

- si la réponse est positive, la question de savoir si, pour une sous-algèbre χ-admissible $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$, l'algèbre $H(\mathfrak{g}, \chi, \mathfrak{m})$ définie par la formule (1.6.1) dépend à isomorphisme près de la sous-algèbre χ-admissible $\mathfrak{m}$ se posera, d'abord pour d'autres éléments nilpotents de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$, puis pour d'autres algèbres de Lie simples $\mathfrak{g}$;
- si la réponse est négative, on cherchera à comprendre quelles sont les (nouvelles ?) représentations de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{pn}(\mathbb{C})$ obtenues via la correspondance de Skryabin pour $\mathfrak{m} \in \Xi$.

Résoudre ces problèmes est un programme ambitieux et offre des perspectives qui dépasseront sans doute le cadre de la thèse de Guilnard Sadaka.

Chapitre 2

Orbites coadjointes de type réductif

Ce chapitre présente des résultats obtenus en commun avec Karin Baur [BauM11] et Oksana Yakimova [MY11] sur les sous-algèbres (bi)paraboliques *quasi-réductives* (cf. Définition 2.1.2) d'une algèbre de Lie semi-simple. On s'intéresse à leur classification, Section 2.2, puis à la description de leurs *stabilisateurs réductifs maximaux* (cf. Définition 2.1.4), Section 2.3. Ce thème de recherche me fut suggéré par Michel Duflo et fut amorcé dans mon mémoire de thèse [Mo06a, §2.6]. Nous commençons le chapitre par des généralités sur les algèbres de Lie quasi-réductives, Section 2.1.

2.1 Sur les algèbres de Lie (fortement) quasi-réductives

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique, c'est-à-dire l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique linéaire G, définie sur un corps $\Bbbk$ de caractéristique nulle.

2.1.1 Définitions, motivations

Définition 2.1.1. *Une forme linéaire $\xi \in \mathfrak{g}^*$ est dite de* type réductif *si le quotient G^ξ/Z du stabilisateur $G^\xi \subset G$ de ξ pour l'action coadjointe par le centre Z de G est un groupe réductif.*

Lorsque $\Bbbk = \mathbb{R}$, un problème classique est de décrire le dual unitaire $\widehat{G}$ de G, i.e., les classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G. Dans ce contexte, les orbites coadjointes jouent un rôle crucial comme l'illustre la célèbre «méthode des orbites» de A.A. Kirillov [Ki68]. La méthode des orbites ne s'étend pas en général. En revanche, les représentations unitaires irréductibles de carré intégrable sont associées aux orbites coadjointes de type réductif, cf. e.g., [A74, Du82] (voir aussi l'introduction de [MY11] pour plus de détails). C'est ainsi que les formes linéaires de type réductif apparaissent dans le cadre de l'analyse harmonique. Il n'existe pas toujours de telles formes ce qui motive la définition suivante due à Michel Duflo :

Définition 2.1.2. *On dit que l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est* quasi-réductive*, ou que le groupe* G *est* quasi-réductif*, s'il existe une forme linéaire de type réductif sur* $\mathfrak{g}$*.*

Les orbites coadointes de type réductif des groupes algébriques quasi-réductifs possèdent des propriétés remarquables (cf. [DKT12, Section 3]). Nous obtenons de manière indépendante ces propriétés dans [MY11, Section 2] sous l'hypothèse que G est *fortement quasi-réductif* au sens suivant (cf. [MY11, Definition 2.1]) :

Définition 2.1.3. *Nous dirons que l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est* fortement quasi-réductive *(ou que le groupe* G *est* fortement quasi-réductif*) si* $\mathfrak{g}$ *est quasi-réductive et si de plus le centre* Z *de* G *est formé d'éléments semi-simples de* G*.*

Les analogues des algèbres de Lie quasi-réductives pour la caractéristique $p > 0$ possèdent également des propriétés intéressantes liées à la conjecture de Kac-Weisfeiler, [PS99, Section 4].

2.1.2 Stabilisateurs réductifs maximaux

Dans ce paragraphe, $\mathfrak{g}$ est supposée fortement quasi-réductive. Nous montrons dans ce cas qu'il existe une unique orbite coadjointe $G\xi$ de type réductif telle que la restriction de ξ à son stabilisateur $\mathfrak{g}^\xi$ pour l'action coadjointe dans $\mathfrak{g}$ est nulle, cf. [MY11, Proposition 2.9(i)] (ou [DKT12, Corollary 7]). Par conséquent, les stabilisateurs de telles formes sont tous conjugués par le groupe G. De plus, si $\eta \in \mathfrak{g}^*$ est de type réductif, alors G^η est contenu dans G^ξ à conjugaison près, [MY11, Proposition 2.9(ii)]. La définition suivante est alors légitime :

Définition 2.1.4. *Si* ξ *est une forme linéaire de type réductif telle que sa restriction à* $\mathfrak{g}^\xi$ *est nulle, on appelle son stabilisateur* G^ξ *un* stabilisateur réductif maximal*. Il est uniquement déterminé à conjugaison près.*

Comme nous le montrons dans [MY11, Remark 2.12], le rang d'un stabilisateur réductif maximal est égal à l'indice de $\mathfrak{g}$ (cf. Définition 1.3.1). Les résultats de M. Duflo [Du82] (voir aussi [DKT12, Théorème 9] ou [MY11, Corollary 2.10]) montrent en outre que les orbites coadjointes de type réductif de G sont paramétrées par les orbites coadjointes de type réductif d'un stabilisateur réductif maximal G^ξ de G ($\xi \in \mathfrak{g}^*$). Ces dernières sont en correspondance bijective avec les orbites adjointes semi-simples de G^ξ. Il en résulte que $\mathfrak{g}^*_{\text{réd}}/G \simeq \mathfrak{g}^\xi /\!\!/ G^\xi$ où $\mathfrak{g}^*_{\text{réd}}$ est l'ensemble des formes linéaires de type réductif de $\mathfrak{g}$.

2.2 Sous-algèbres (bi)paraboliques quasi-réductives

Classifier les algèbres de Lie quasi-réductives semble ambitieux. Un problème plus abordable est d'étudier certaines classes de sous-algèbres d'une algèbre de Lie semi-simple.

2.2.1 Classification

Nous supposons désormais $\Bbbk = \mathbb{C}$ et $\mathfrak{g}$ simple. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive (la forme linéaire nulle étant de type réductif) ainsi que ses sous-algèbres de Borel ou de Levi. En revanche, les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ ne sont pas toujours quasi-réductives, [TY04]. Plus généralement, les sous-algèbres *biparaboliques* forment une classe très intéressante (incluant la classe des sous-algèbres paraboliques et de Levi) d'algèbres de Lie non-réductives, [Pan01, Dv03, TY04, J07]. Elles sont par définition les intersections de deux sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ dont la somme est $\mathfrak{g}$ et furent introduites par V. Dergachev et A.A. Kirillov dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ sous l'appellation *seaweed algebras* («algèbres de type algue»), [DeK00].

Mise à part les cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ où toutes les sous-algèbres biparaboliques de $\mathfrak{g}$ sont quasi-réductives [Pan05], il existe toujours au moins une sous-algèbre parabolique non quasi-réductive [Mo06a, Théorème 2.6.8]. Récemment, Michel Duflo, Mohamed Khalgui et Pierre Torasso ont classifié les sous-algèbres paraboliques quasi-réductives de $\mathfrak{so}_n$ en termes des drapeaux stabilisés par ces algèbres, [DKT12, Section 5]. Dans [BauM11], nous complétons cette classification en considérant le cas où $\mathfrak{g}$ est de type exceptionnel.

2.2.2 Quelques remarques

Soient $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$, S le système de racines simples du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{b})$ et $I \mapsto \mathfrak{p}_I$ une bijection qui associe à un sous-ensemble I de S une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_I$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{b}$ telle que $\mathfrak{p}_\varnothing = \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{p}_S = \mathfrak{g}$. Toute sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ étant conjuguée à une sous-algèbre parabolique contenant $\mathfrak{b}$, on peut sans perte de généralité se restreindre aux sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}_I$, pour $I \subset S$. Une réduction essentielle dans notre classification, qui sera également utile dans [MY11], repose sur une propriété d'«additivité» pour la quasi-réductivité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ (cf. [BauM11, Theorem 2.11]). Elle s'énonce ainsi :

Théorème 2.2.1. *Soit w_0 l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl de S. Supposons que $-w_0$ agisse trivialement sur la base S. Soient I, J deux sous-ensembles de S orthogonaux (i.e., $\forall (\alpha, \beta) \in I \times J$, $\alpha + \beta$ n'est pas une racine). Alors la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{I \cup J}$ est quasi-réductive si et seulement si $\mathfrak{p}_I$ et $\mathfrak{p}_J$ le sont.*

Lorsque les hypothèses de la proposition ne sont pas vérifiées (en particulier lorsque $\mathfrak{g}$ est de type $\mathbf{E}_6$), une certaine propriété d'additivité demeure mais s'énonce plus difficilement, cf. [BauM11, Lemme 2.7 and Corollary 2.10].

Précisons que le résultat le plus substantiel de [BauM11] est la description des sous-algèbres paraboliques *non* quasi-réductives des algèbres de Lie simples exceptionnelles, [BauM11, Section 4]. En effet, pour vérifier la quasi-réductivité dans [BauM11], nous avons parfois eu recours au logiciel de calcul GAP, [BauM11, Proposition 5.9]. Notre travail avec Oksana Yakimova (décrit dans la section suivante) offre dans ce cas une démonstration plus efficace puisque nous y décrivons pour chaque sous-algèbre parabolique quasi-réductive un stabilisateur réductif maximal montrant ainsi en particulier qu'elle possède des orbites coadjointes de type réductif.

2.3 Stabilisateurs réductifs maximaux

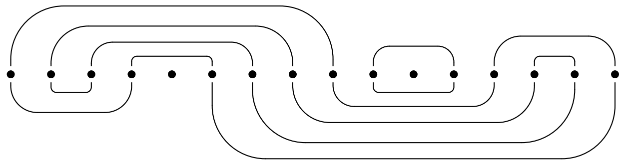
Comme dans la section précédente, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple complexe. Soient $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre parabolique quasi-réductive de $\mathfrak{g}$ (ou une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{g}$ si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$) et Q son groupe adjoint. Alors $\mathfrak{q}$ est fortement quasi-réductive et on note $M_*(\mathfrak{q})$ l'algèbre de Lie d'un stabilisateur réductif maximal de $\mathfrak{q}$; elle est définie à conjugaison près (cf. Définition 2.1.4). Dans [MY11], nous décrivons l'algèbre $M_*(\mathfrak{q})$ et précisons un plongement $M_*(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{q}$.

Nous disposons essentiellement de deux méthodes pour étudier $M_*(\mathfrak{q})$. La première repose sur les propriétés du système de racines de $\mathfrak{g}$ et la construction «en cascade» de Kostant, [MY11, Section 3], déjà exploitée dans [BauM11] et dans mon mémoire de thèse [Mo06a]. Elle nous permet entre autres d'étendre la propriété d'additivité pour $M_*(\mathfrak{q})$: sous les hypothèses du Théorème 2.2.1, on a $M_*(p_{I\cup J}) = M_*(\mathfrak{p}_I) \oplus M_*(\mathfrak{p}_J)$, [MY11, Theorem 3.6]. La seconde utilise la décomposition de Levi $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \ltimes \mathfrak{n}$ et permet de «quotienter» par un idéal abélien dans $\mathfrak{n}$. Précisément, nous affirmons que, sous certaines hypothèses, $M_*(\mathfrak{q}) = M_*(\mathfrak{q}/\mathfrak{a})$ pour un certain idéal abélien $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{n}$, cf. [MY11, Section 4]. Cette méthode est largement utilisée dans [MY11, Section 5] pour étudier les cas classiques.

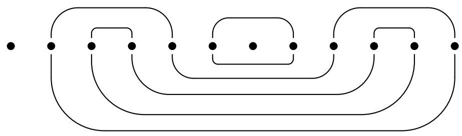
2.3.1 Résultats

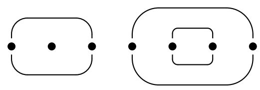
Pour les sous-algèbres biparaboliques $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{gl}_n$ (le cas $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{sl}_n$ s'en déduit aisément), notre réponse s'exprime en termes de certains graphes, *the meander graphs*, introduits dans [DeK00] pour décrire l'indice de $\mathfrak{q}$. À conjugaison près, $\mathfrak{q}$ est décrite par la donnée de deux partitions $\bar{a}, \bar{b}$ de n auxquelles on associe un certain graphe $\Gamma = \Gamma(\bar{a}|\bar{b})$ avec n sommets et au plus n flèches. À tout cycle maximal de Γ correspond un nombre r, sa *dimension*, et un sous-groupe $GL_r \subset GL_n$. Nous montrons que le stabilisateur réductif maximal de $\mathfrak{q}$ est le produit des groupes GL_r sur tous les cycles maximaux de Γ, [MY11, Theorem 5.3], confirmant ainsi des prévisions de Michel Duflo. De plus, nous décrivons un plongement explicite du stabilisateur réductif maximal $M_*(\mathfrak{q})$, [MY11, Section 5.1].

Exemple 2.3.1. *Illustrons notre résultat dans le cas de la sous-algèbre biparabolique* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(9,3,4|4,1,11)$ *de* $\mathfrak{gl}_{16}$ *associée aux partitions* $\bar{a} = (9,3,4)$ *et* $\bar{b} = (4,1,11)$*. Ici,*

$\Gamma(9,3,4|4,1,11) \;=$  .

Les réductions de [MY11, Lemma 5.4] montrent que $M_*(\mathfrak{q}) \simeq M_*(\mathfrak{q}')$ *où* $\mathfrak{q}' \simeq \mathbb{C} \oplus \mathfrak{q}(4,3,4|11) \subset \mathfrak{gl}_{12}$*,*

$\Gamma(\mathfrak{q}') \;=$  ,

puis que $M_*(\mathfrak{q}') \simeq \mathbb{C} \oplus M_*(\mathfrak{q}'')$*, où* $\mathfrak{q}'' \simeq \mathfrak{q}(3,4|3,4) \subset \mathfrak{gl}_7$*, et* $\Gamma(\mathfrak{q}') \;=$  .

On conclut que $M_*(\mathfrak{q}) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathfrak{gl}_3 \oplus \mathfrak{gl}_4$.

Nos conclusions pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$ sont résumées dans [MY11, Theorem 5.10] ; les travaux de M. Duflo, M. Khalgui et P. Torasso [DKT12] sont largement utilisés dans cette partie. Nos résultats pour les types exceptionnels sont présentés dans les Tables 4 à 7 de [MY11].

2.3.2 Questions

Ces résultats soulèvent quelques questions. Par exemple, les stabilisateurs réductifs maximaux (au niveau des groupes) des sous-algèbres (bi)paraboliques ne sont pas toujours connexes ; ils le sont si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ mais qu'en est-il des autres cas ? Une autre question intéressante est de savoir ce que devient la propriété d'additivité pour les stabilisateurs réductifs maximaux (au niveau des groupes).

Chapitre 3

Espaces des arcs des variétés horosphériques

Les variétés horosphériques sont des exemples de variétés sphériques parmi lesquelles on reconnaît les variétés toriques. Suivant un travail en commun avec Victor Batyrev [BatM12], nous décrivons dans ce chapitre certains *invariants de cordes* (cf. Section A.4 de l'Annexe A) des *variétés horosphériques* (cf. Définition 3.1.1). Notre motivation vient de résultats connus sur les invariants de cordes des variétés toriques qui ont des applications intéressantes, notamment dans la théorie de la symétrie miroir, [Bat98]. Le volume motivique de cordes (Définition A.4.1) et la fonction E de cordes (Définition A.4.3) peuvent être décrits à l'aide d'une intégrale motivique sur l'espace des arcs. Ainsi les espaces d'arcs des variétés horosphériques sont-ils au cœur de notre travail.

Nous commençons le chapitre par quelques notations et résultats connus sur les variétés horosphériques (Section 3.1). Notre principale référence pour les variétés sphériques est [Kn91] ; pour des présentations récentes des variétés horosphériques, voir [Pas07, Chapitre 1] ou [Ti11, Chapter 5]. Le résultat principal de [BatM12] est énoncé, et interprété en termes d'espaces d'arcs, à la Section 3.2 (cf. Théorème 3.2.1). La Section 3.3 concerne des applications, exemples et questions soulevées par nos résultats.

Dans ce chapitre, toutes les variétés considérées seront définies sur le corps des complexes $\mathbb{C}$.

3.1 Généralités sur les variétés horosphériques

Soit G un groupe réductif connexe sur $\mathbb{C}$.

Définition 3.1.1. *Un sous-groupe fermé H de G (ou l'espace homogène G/H) est dit* horosphérique *si H contient un sous-groupe unipotent maximal de G. Une G-variété normale X est dite* horosphérique *si* G *a une orbite ouverte dans* X *isomorphe à un espace homogène horosphérique* G/H. *Dans ce cas, on dit aussi que* X *est un* plongement *de* G/H.

Nous fixons désormais un sous-groupe de Borel B de G, de sous-groupe unipotent maximal U, et un sous-groupe fermé (horosphérique) H de G contenant U. Le normalisateur $N_G(H)$ de H dans G est un sous-groupe parabolique P de G, avec $B \subseteq P \subseteq G$, et P/H est un tore algébrique que nous noterons T. L'espace homogène horosphérique G/H est l'espace total d'une fibration localement triviale sur l'espace projectif G/P de fibre le tore T dont la dimension r est le *rang* de G/H . Soient M le réseau des caractères du tore T et $N = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ le réseau dual. Les plongements équivariants d'espaces homogènes horosphériques sont une généralisation des variétés toriques qui sont les plongements d'un tore (correspondant ici au cas où $G = T$ et $H = \{e\}$).

Rappelons qu'un espace homogène est *sphérique* s'il contient une orbite ouverte sous l'action d'un sous-groupe de Borel de G, et qu'une G-variété normale X est *sphérique* si elle contient une G-orbite ouverte isomorphe à un espace homogène sphérique. Il résulte de la décomposition de Bruhat que les variétés horosphériques sont sphériques. D'après la théorie de Luna-Vust [LV83], tout plongement G-équivariant $G/H \hookrightarrow X$ de l'espace homogène horosphérique G/H est alors décrit par un éventail colorié Σ dans l'espace vectoriel $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Dans le cas où $H = U$, ces plongements furent étudiés indépendamment par Pauer, [Pau81, Pau83].

3.1.1 Éventails coloriés

Nous rappelons ici brièvement la construction de l'éventail colorié associé à un plongement G-équivariant de l'espace homogène horosphérique G/H. Nous renvoyons à [Kn91, Section 3] pour les définitions d'un *cône colorié* et d'un *éventail colorié* dans un cadre plus général.

Soient S l'ensemble des racines simples du couple (G, B) et I le sous-ensemble de S correspondant au sous-groupe parabolique $P = N_G(H)$ via la bijection $J \mapsto P_J$ associant à un sous-ensemble J de S le sous-groupe parabolique $P_J = BW_JB$ de G où W_J est le sous-groupe du groupe de Weyl de (G, B) engendré par les réflexions simples s_α $(\alpha \in J)$ (ici $P_\varnothing = B$ et $P_S = G$). Soit U_0 la B-orbite ouverte dense dans G/P. Alors U_0 est isomorphe à un espace affine et le groupe de Picard de G/P est librement engendré par les classes $[\mathit{\Gamma}_\alpha]$ des composantes irréductibles $\{\mathit{\Gamma}_\alpha \,;\, \alpha \in S \setminus I\}$ du complémentaire $(G/P) \setminus U_0$. Soit $\phi : G/H \to G/P$ le morphisme surjectif canonique dont les fibres sont isomorphes au tore T. Les diviseurs $\mathit{\Delta}_\alpha := \phi^{-1}(\mathit{\Gamma}_\alpha)$, avec $\alpha \in S \setminus I$, sont exactement les composantes irréductibles du complémentaire dans G/H de la B-orbite ouverte dense $\widetilde{U}_0 \simeq U_0 \times T$. Le réseau M s'identifie au groupe $\mathbb{C}[\widetilde{U}_0]^*/\mathbb{C}^*$ des fonctions régulières sur $\widetilde{U}_0$ modulo les fonctions constantes non nulles.

Soit $G/H \hookrightarrow X$ un plongement G-équivariant de G/H. Tout diviseur irréductible D de X définit une valuation $v_D : \mathbb{C}(X)^* \to \mathbb{Z}$ du corps des fonctions $\mathbb{C}(X)$ qui s'annule sur $\mathbb{C}^*$ et la restriction de v_D au réseau $M \simeq \mathbb{C}[\widetilde{U}_0]^*/\mathbb{C}^*$ donne un élément ϱ_D du réseau dual N. Tout caractère χ de P définit un fibré en droite $\mathcal{L}_\chi$ sur G/P en posant $\mathcal{L}_\chi := (G \times \mathbb{C})/P$ où P opère sur le produit $G \times \mathbb{C}$ par $p(g,z) = (gp^{-1}, \chi(p)z)$ pour $p \in P$, $g \in G$ et $z \in \mathbb{C}$. On obtient ainsi un morphisme de groupes $\mathfrak{X}(P) \to \mathrm{Pic}(G/P)$ où $\mathfrak{X}(P)$ est le groupe des caractères de P. La composée de ce dernier avec le morphisme de groupes $M \to \mathfrak{X}(P)$, induit par $P \to T = P/H$, donne un morphisme $\delta : M \to \mathrm{Pic}(G/P)$. Les points du réseau $\{\varrho_{\Delta_\alpha}\ ;\ \alpha \in S \smallsetminus I\}$ correspondant aux diviseurs $\Delta_\alpha \subset X$, pour $\alpha \in S \smallsetminus I$, sont exactement les images par $\delta^* : \mathrm{Pic}(G/P)^* \to N$, l'application duale de δ, de la base duale de $\{[\Gamma_\alpha]\ ;\ \alpha \in S \smallsetminus I\}$ dans $\mathrm{Pic}(G/P)^*$. En notant $\mathcal{D}_X = \{D_1, \ldots, D_t\}$ l'ensemble des diviseurs irréductibles G-stables de X, on obtient une application,

$$\varrho\,:\,\{\Delta_\alpha\ ;\ \alpha \in S \smallsetminus I\} \cup \mathcal{D}_X \to N,$$

qui envoie Δ_α ($\alpha \in S \smallsetminus I$) sur ϱ_{Δ_α} et $D_i \in \mathcal{D}_X$ ($1 \leqslant i \leqslant t$) sur ϱ_{D_i}. Précisons que la restriction de ϱ à $\mathcal{D}_X$ est injective, mais que sa restriction à $\{\Delta_\alpha\ ;\ \alpha \in S \smallsetminus I\}$ ne l'est pas en général.

Soit Z une G-orbite de X. La réunion X_Z de toutes les G-orbites de X qui contiennent Z dans leur adhérence est un plongement de G/H ayant Z pour unique G-orbite fermée. On définit son *cône colorié* $(\sigma_Z, \mathcal{F}_Z)$ comme suit : $\mathcal{F}_Z$ est l'ensemble $\{\alpha \in S \smallsetminus I\ ;\ \overline{\Delta_\alpha} \supset Z\}$ et σ_Z est le cône de $N_\mathbb{R}$ engendré par $\{\varrho_{\Delta_\alpha}\ ;\ \alpha \in \mathcal{F}_Z\}$ et $\{\varrho_{D_i}\ ;\ D_i \supset Z\}$. L'*éventail colorié* Σ de X est la collection de tous les cônes coloriés $(\sigma_Z, \mathcal{F}_Z)$ où Z parcourt l'ensemble des G-orbites de X. Les éléments de l'ensemble $\mathcal{F} := \bigcup \mathcal{F}_Z$ sont appelées les *couleurs de* X.

Un cône colorié $(\sigma', \mathcal{F}')$ (avec $\sigma' \subset N_\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}' \subset S \smallsetminus I$) est dit *strictement convexe* si σ' est strictement convexe et si $\varrho(\Delta_\alpha) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{F}'$; un éventail colorié $\Sigma' \subset N_\mathbb{R}$ est dit *strictement convexe* si tous ses éléments sont strictement convexes, [Kn91, Section 3]. Le résultat suivant est dû à Luna-Vust dans un contexte plus général [LV83, Proposition 8.10] ; voir aussi [Kn91, Theorem 3.3] :

Théorème 3.1.2. *L'application $X \to \Sigma$ induit une correspondance bijective entre les classes d'isomorphisme de plongements de l'espace homogène horosphérique G/H et les éventails coloriés strictement convexes contenus dans $N_\mathbb{R}$.*

On notera X_Σ *le* plongement G-équivariant de G/H, défini à isomorphisme près, correspondant à un éventail colorié $\Sigma \subset N_\mathbb{R}$.

3.1.2 Variétés toroïdales

Un plongement G-équivariant horosphérique de G/H dont l'éventail associé Σ est sans couleur est dit *toroïdal*. Une méthode simple pour construire ces plongements est la suivante. On considère *le* plongement Y_Σ du tore T d'éventail (non colorié) Σ. Via le morphisme canonique $P \to T = P/H$, le plongement Y_Σ devient une P-variété et l'espace quotient $(G \times Y_\Sigma)/P$, où l'opération de P sur $G \times Y_\Sigma$ est donnée par $p(g,y) := (gp^{-1}, py)$ pour $p \in P$, $g \in G$ et

$y \in Y_\Sigma$, est isomorphe à X_Σ. On dispose naturellement d'un morphisme G-équivariant surjectif $\phi : X_\Sigma \to G/P$ dont les fibres sont isomorphes à la variété torique Y_Σ. Notons qu'au-dessus de la B-orbite ouverte dense U_0 dans G/P, la fibration $\phi : X_\Sigma \to U_0$ est triviale.

Toute variété horospherique est dominée par une variété toroïdale au sens suivant [Br91, §3.3] :

Proposition 3.1.3. *Pour toute G-variété horosphérique X, il existe une G-variété toroïdale $\tilde{X}$, que l'on obtient par* décoloration *de l'éventail colorié associé à X, et un morphisme G-équivariant birationnel propre $p : \tilde{X} \to X$.*

3.1.3 Orbites

L'ensemble des cônes coloriés d'un éventail colorié Σ est muni d'un ordre partiel : on écrit $(\sigma', \mathcal{F}') < (\sigma, \mathcal{F})$ et on dit que $(\sigma', \mathcal{F}')$ est une *face* de $(\sigma, \mathcal{F})$ si σ' est une face de σ et si $\mathcal{F}' = \{\alpha \in \mathcal{F} \ ; \ \varrho_\alpha \in \sigma'\}$. D'autre part, on dispose d'un ordre partiel sur l'ensemble des G-orbites de X_Σ : on écrit $Z < Z'$ si et seulement si $Z \subseteq \overline{Z'}$. L'application $Z \mapsto (\sigma_Z, \mathcal{F}_Z)$ est une bijection décroissante entre l'ensemble des G-orbites de X_Σ et l'ensemble des cônes coloriés de Σ, [Kn91]. Notons $Z_{\sigma,\mathcal{F}}$ la G-orbite de X_Σ correspondant à une face $(\sigma, \mathcal{F})$; l'orbite ouverte G/H correspond au cône $(0, \varnothing)$. La proposition suivante décrit le stabilisateur de $Z_{\sigma,\mathcal{F}}$ dans le cas horosphérique :

Proposition 3.1.4. *Soit $(\sigma, \mathcal{F}) \in \Sigma$. La G-orbite $Z_{\sigma,\mathcal{F}}$ de X_Σ est isomorphe à $G/H_{\sigma,\mathcal{F}}$ où $H_{\sigma,\mathcal{F}}$ est l'intersection dans $P_{I\cup\mathcal{F}}$ des noyaux des caractères de $M_\sigma := M \cap \sigma^\perp$, l'orthogonal de σ dans M. En particulier, on a :* $\dim Z_{\sigma,\mathcal{F}} = \operatorname{rk} M_\sigma + \dim G/P_{I\cup\mathcal{F}}$.

3.2 Fonctions E de cordes et espaces des arcs

Soit X une variété torique $\mathbb{Q}$-Gorenstein associée à un éventail $\Sigma \subset N_\mathbb{R}$. La propriété $\mathbb{Q}$-Gorenstein équivaut à l'existence d'une fonction linéaire par morceaux $\omega_X : N_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout cône $\sigma \in \Sigma$, sa restriction à σ est une application linéaire et telle que sa valeur sur chaque générateur entier primitif des arêtes de σ est -1. D'après [Bat98], si $|\Sigma|$ désigne le support de Σ, la fonction E de cordes (cf. Définition A.4.3) de la variété torique X est donnée par la formule :

$$E_{\mathrm{st}}(X; u, v) := (uv-1)^r \sum_{n \in |\Sigma| \cap N} (uv)^{\omega_X(n)}. \tag{3.2.1}$$

Par exemple, $E_{\mathrm{st}}(\mathbb{P}^1; u, v) = (uv-1)(1+2\sum_{k\geqslant 1}(uv)^{-k}) = uv+1$. Dans [BatM12, Theorem 4.3], nous obtenons une formule similaire à (3.2.1) pour les variétés horosphériques. Si $G/H \hookrightarrow X$ est un plongement G-équivariant de l'espace homogène horosphérique G/H, alors il résulte de

[Br93, §4.1] ou [Br97, Theorem 4.2] que la classe d'un diviseur canonique K_X de X peut être décrite par

$$K_X = \sum_{\alpha \in S \smallsetminus I} -a_\alpha \overline{\Delta_\alpha} + \sum_{j=1}^{t} -D_j\,, \tag{3.2.2}$$

où, pour $\alpha \in S \smallsetminus I$, $a_\alpha := 2\langle \rho - \rho_I, \check{\alpha}\rangle \geqslant 2$. Ici, ρ (resp. ρ_I) est la demi-somme des racines positives de S (resp. I). La propriété $\mathbb{Q}$-Gorenstein pour X équivaut à l'existence d'une fonction $\omega_X : |\Sigma| \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes (cf. [Br93, Proposition 4.1]) :

(a) la restriction de ω_X à tout cône de Σ est linéaire ;

(b) $\omega_X(e_\tau) = -1$ pour tout générateur entier primitif e_τ d'une arête sans couleur τ de Σ ;

(c) $\omega_X(\varrho_\alpha) = -a_\alpha$ pour tout cône colorié $(\sigma, \mathcal{F})$ de Σ et tout $\alpha \in \mathcal{F}$.

Théorème 3.2.1. *Soient X une variété horosphérique $\mathbb{Q}$-Gorenstein définie par un éventail colorié Σ et $\omega_X : |\Sigma| \to \mathbb{R}$ comme ci-dessus. On a*

$$E_{\mathrm{st}}(X; u, v) := E(G/H; u, v) \sum_{n \in |\Sigma| \cap N} (uv)^{\omega_X(n)}.$$

Rappelons que la fonction E de cordes d'une variété normale $\mathbb{Q}$-Gorenstein à singularités log-terminales X est la réalisation de Hodge-Deligne du volume motivique de cordes (cf. Définition A.4.1). En particulier, lorsque X est lisse, $E_{\mathrm{st}}(X; u, v) = E(X; u, v)$ est la réalisation de Hodge-Deligne de la mesure motivique de l'espace des arcs $X(\mathcal{O})$ de X, où $\mathcal{O}$ est l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[t]]$ et $X(\mathcal{O})$ l'ensemble des $\mathcal{O}$-points de X.

Expliquons brièvement notre stratégie pour établir le Théorème 3.2.1 dans le cas où X est lisse. Victor Batyrev a obtenu la formule (3.2.1) pour les variétés toriques à l'aide d'une résolution des singularités. Ici, nous utilisons une bijection,

$$G(\mathcal{O}) \setminus (G/H)(\mathcal{K}) \simeq N,$$

entre les $G(\mathcal{O})$-orbites de $(G/H)(\mathcal{K})$ et les points du réseau N, cf. [GN10, §8.2] (voir aussi [LV83] ou [D09]). Ici, $\mathcal{K}$ est le corps des séries formelles $\mathbb{C}((t))$, et $G(\mathcal{O})$ (resp. $(G/H)(\mathcal{K})$) l'ensemble des $\mathcal{O}$-points (resp. $\mathcal{K}$-points) de G (resp. G/H). Plus généralement, nous disposons d'une bijection entre les $G(\mathcal{O})$-orbites de l'intersection $X(\mathcal{O}) \cap (G/H)(\mathcal{K})$ et les points de l'ensemble $|\Sigma| \cap N$, cf. [BatM12, Theorem 3.1]. Or, le volume motivique (sa réalisation de Hodge-Deligne) d'une $G(\mathcal{O})$-orbite de $X \cap (G/H)(\mathcal{K})$ correspondant à un point $n \in |\Sigma| \cap N$ est égal à $E(G/H; u, v)(uv)^{\omega_X(n)}$; c'est essentiellement ce que montre [BatM12, Theorem 3.2]. Les $G(\mathcal{O})$-orbites de $X(\mathcal{O})$ non contenues dans $(G/H)(\mathcal{K})$ étant de mesure nulle, nous en déduisons la formule pour le cas lisse.

Pour le cas singulier, précisons seulement que la première étape consiste à utiliser une résolution des singularités $p : \tilde{X} \to X$ par décoloration (cf. Proposition 3.1.3) ; des descriptions de $K_{\tilde{X}}$ et K_X données par (3.2.2) on déduit le *discrépant* $K_{\tilde{X}|X}$ de la résolution (cf. égalité (A.4.1)), ce qui nous permet de calculer la fonction E de cordes de X d'après le Théorème A.3.7.

3.3 Applications et conjectures

3.3.1 Critère de lissité

Une variété torique localement factorielle est automatiquement lisse ; en particulier, sa fonction E (de cordes) est donc polynomiale. En revanche, la fonction E de cordes d'une variété horosphérique localement factorielle peut ne pas être polynomiale (voir l'exemple du paragraphe 3.3.3). Il se peut néanmoins que la fonction E de cordes d'une variété horosphérique X soit polynomiale sans que X soit lisse (cf. [BatM12, Example 5.5]). À l'aide du Théorème 3.2.1, nous montrons [BatM12, Theorem 5.3] :

Théorème 3.3.1. *Soit $G/H \hookrightarrow X$ un plongement G-équivariant d'un espace homogène horosphérique G/H localement factoriel dont les orbites de dimension minimale sont projectives. Soient $\mathrm{e}_{\mathrm{st}}(X) := E(X; 1, 1)$ le* nombre d'Euler de cordes *de X et $e(X) = E(X; 1, 1)$ son nombre d'Euler classique. Alors $\mathrm{e}_{\mathrm{st}}(X) \geqslant e(X)$ et l'égalité a lieu si et seulement si X est lisse.*

Nous conjecturons dans [BatM12, Conjecture 6.6] que le Théorème 3.3.1 reste valable pour tout plongement sphérique localement factoriel (dont les orbites de dimension minimale sont projectives) ce qui fournirait un critère de lissité dans ce cas plus général. Une première étape pour résoudre cette conjecture serait d'étendre le Théorème 3.2.1.

Comme me l'a suggeré Michel Brion, une classe intéressante de variétés sphériques, mais non horosphériques, dans ce contexte est celle formée par les *variétés déterminantielles*. Rappelons que la *variété déterminantielle de rang k* est par définition la sous-variété M^k de l'espace $\mathrm{M}_{rs}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{A}^{rs}$ des matrices d'ordre $r \times s$ dont les points correspondent aux matrices de rang au plus k. C'est une variété $\mathbb{Q}$-Gorenstein et à singularités rationnelles dont on connaît bien la structure des espaces d'arcs ; cf. e.g., [D09] (ou [Yu07], cf. Exemple A.5.4). D'autre part, on dispose d'une méthode explicite pour construire une résolution des singularités de M^k, [Va84]. Il serait intéressant, à l'aide de ces différents ingrédients, d'étudier la conjecture pour cette famille d'exemples.

3.3.2 Polynômes de Stanley-Reisner

Soient X une variété horosphérique complète localement factorielle associée à un éventail colorié Σ, et $e_1, \dots, e_s$ des générateurs entiers primitifs de tous les cônes de dimension 1 de Σ. Considérons les entiers positifs $a_i := -\omega_X(e_i)$ pour $i \in \{1, \dots, s\}$. Nous définissons l'*anneau* (gradué) *de Stanley-Reisner pondéré R^w_Σ* correspondant à l'éventail colorié Σ comme étant l'anneau quotient de l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_s]$ modulo l'idéal engendré par tous les monômes sans carré $z_{i_1} \dots z_{i_k}$ tels que les vecteurs du réseau $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ n'engendrent pas un cône de dimension k de Σ, gradué par le degré en décrétant que $\deg z_i = a_i$. Ici, les variables

$z_1, \ldots, z_s$ sont en bijection avec les points du réseau $e_1, \ldots, e_s$. Nous montrons dans [BatM12, Proposition 6.1] :

Théorème 3.3.2. *Soit X une variété horosphérique complète localement factorielle associée à un éventail colorié Σ. On a*

$$E_{\mathrm{st}}(X; u, v) = (-1)^r E(G/H; u, v) P(R_\Sigma^w, uv)\,,$$

où $P(R_\Sigma^w, t)$ est la série de Poincaré associée à l'anneau gradué de Stanley-Reisner pondéré $R_\Sigma^w = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_\Sigma^{w,i}$.

Lorsque X est une variété torique lisse et projective, cette formule est connue et s'obtient grâce à la décomposition de X en T-orbites. Dans ce cas, l'anneau de cohomologie $H^*(X, \mathbb{C})$ de la variété torique lisse projective X associée à Σ est isomorphe au quotient de R_Σ modulo l'idéal engendré par une suite régulière $f_1, \ldots, f_r$, où $(f_1, \ldots, f_r)$ est une base du réseau M, dans R_Σ^1. Ici, $R_\Sigma = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_\Sigma^i$ est l'anneau de Stanley-Reisner «standard» associé à Σ, cf. e.g., [D78].

Plus généralement, peut-on décrire l'anneau de cohomologie $H^*(X_\Sigma, \mathbb{C})$ d'une variété horosphérique lisse et projective X_Σ définie par un éventail colorié Σ à l'aide de l'anneau de Stanley-Reisner pondéré R_Σ^w ? Nous formulons une réponse pour le cas des variétés toroïdales dans [BatM12, Proposition 6.3].

3.3.3 Un exemple

Nous terminons le chapitre par un exemple illustrant nos différents résultats.

Considérons le cas où $G = SL_3(\mathbb{C})$, B est le sous-groupe de Borel de G formé des matrices triangulaires supérieures et $H = U$. La quadrique affine de dimension 5,

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{A}^6 \; ; \; x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0\},$$

est le cône affine sur la grassmannienne $G(2,4)$ et c'est un plongement de l'espace homogène horosphérique G/U. L'éventail colorié de Q contient un unique cône maximal colorié $(\sigma, \mathcal{F})$ où σ est le cône de $N_\mathbb{R}$ engendré par les restrictions à M des coracines de S, et $\mathcal{F} = S$. Il est représenté sur la Figure 3.1 (première figure). Sur cette dernière, on a inscrit les entiers positifs $a_i = -\omega_Q(e_i)$ $(i = 1, 2)$ à proximité des points e_i et les cercles représentent les points ϱ_α, pour $\alpha \in \mathcal{F}$, autrement dit les couleurs de Q. Calculons les fonctions $E(Q; u, v)$ et $E_{\mathrm{st}}(Q; u, v)$. La quadrique Q possède quatre G-orbites : 0, deux copies de $\mathbb{A}^3 \smallsetminus 0$ et l'orbite dense G/U. On en déduit que

$$E(Q; u, v) = (uv)^2((uv)^3 + uv - 1).$$

D'autre part, d'après le Théorème 3.2.1, on obtient

$$E_{\mathrm{st}}(Q; u, v) = \frac{(uv)^4((uv)^2 + uv + 1)}{uv + 1}\,.$$

(La formule précédente pouvait également s'obtenir à l'aide d'une résolution des singularités de Q ; par exemple via l'éclatement de Q en 0, ou via une «décoloration» de Q.) La quadrique affine Q est localement factorielle et on a $e_{\mathrm{st}}(Q) = \frac{3}{2} > e(Q) = 1$.

Considérons la complétion localement factorielle $\overline{Q}$ de la quadrique affine Q ; il s'agit de la quadrique $\overline{Q} \subset \mathbb{P}^6 = \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^6)$ définie par les mêmes équations que Q. L'éventail colorié $\overline{\Sigma}$ de $\overline{Q}$ est représenté sur la Figure 3.1 (deuxième figure) avec les mêmes conventions que pour celui de Q. L'anneau de Stanley-Reisner associé à $\overline{\Sigma}$ est $R_{\overline{\Sigma}} \simeq \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]/(z_1 z_2 z_3)$, on a

$$P(R^w_{\overline{\Sigma}}, t) = \frac{1 - t^5}{(1-t)(1-t^2)^2},$$

et le Théorème 3.3.2 donne

$$E_{\mathrm{st}}(\overline{Q}; u, v) = \frac{(1 + uv + (uv)^2)(1 + uv + (uv)^2 + (uv)^3)}{(1 + uv)}.$$

FIGURE 3.1 – Les éventails coloriés de Q et $\overline{Q}$

Annexe A

Espaces des arcs et intégration motivique

L'intégration motivique sur les espaces d'arcs d'une variété lisse fut initiée par Maxim Kontsevich, [Kon95]. Jan Denef et François Loeser proposèrent ensuite une généralisation aux variétés singulières dans [DL99]. Une autre généralisation, motivée par les invariants de cordes, est due à Victor Batyrev, [Bat98]. Pour des expositions récentes sur le sujet, citons par exemple [Cr04, Bl05, Ve06].

Nous présentons dans cette annexe une introduction à l'intégration motivique telle qu'elle a été initiée par M. Kontsevich puis développée par V. Batyrev. Cette annexe suit pour une large part la série de cours que j'ai donnés à l'ETH de Zürich en 2008, puis à l'Université de Genève en 2010, sur le sujet.

Dans ce qui suit, le corps de base est le corps des complexes $\mathbb{C}$. Par *variété algébrique* (complexe), on entend un schéma réduit et séparé de type fini sur $\mathbb{C}$, et la topologie est celle de Zariski.

La Section A.1 concerne le schéma des jets et l'espace des arcs d'une variété algébrique. On introduit l'anneau de Grothendieck $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ et les *polynômes de Hodge-Deligne* à la Section A.2. La mesure motivique pour les variétés lisses est définie à la Section A.3 et on s'intéresse aux invariants de cordes à la Section A.4. Enfin, on présente à la Section A.5 une application due à Mircea Mustaţă de l'intégration motivique aux espaces de jets d'une intersection complète à singularités rationnelles, [Mu01, Theorem 0.1]. Le théorème de Mustaţă fut conjecturé par David Eisenbud et Edward Frenkel qui souhaitaient étendre un résultat de Kostant sur le cône nilpotent d'une algèbre de Lie réductive au cadre des espaces de jets, [Mu01, Appendix]. Cette application est la raison pour laquelle je me suis tournée vers l'intégration motivique lors de notre travail avec Jean-Yves Charbonnel, [ChM09] (voir la Section 1.4).

A.1 Schémas de jets et espaces des arcs

Soient X un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$ de dimension d, et $m \in \mathbb{N}$. Un *jet d'ordre m* (ou *m-jet*) de X est un morphisme

$$\gamma : \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[t]/(t^{m+1}) \to X.$$

L'ensemble de tous les m-jets de X possède une structure de schéma $\mathcal{J}_m(X)$, appelé le *schéma des m-jets de X*. L'ensemble des $\mathbb{C}$-points de $\mathcal{J}_m(X)$ est naturellement en bijection avec l'ensemble des $\mathbb{C}[t]/(t^{m+1})$-points de X. Pour $n \geqslant m$, le morphisme d'anneaux $\mathbb{C}[t]/(t^{n+1}) \to \mathbb{C}[t]/(t^{m+1})$ induit un *morphisme de troncation*,

$$\pi_{n,m} : \mathcal{J}_n(X) \longrightarrow \mathcal{J}_m(X).$$

Exemple A.1.1. *Si $X = \mathbb{C}^d$ et $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathcal{J}_m(X) \simeq \{(a_0^{(1)} + \cdots + a_m^{(1)} t^m, \ldots, a_0^{(d)} + \cdots + a_m^{(d)} t^m) \ ; \ a_i^{(j)} \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}^{(m+1)d}.$$

Plus généralement, si X est une variété lisse de dimension d, le morphisme $\pi_{n,m} : \mathcal{J}_n(X) \to \mathcal{J}_m(X)$ $(n \geqslant m)$ est une fibration localement triviale de fibre $\mathbb{A}^{(n-m)d}$ où $\mathbb{A}$ est la droite affine complexe.

Exemple A.1.2. *Supposons $X = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ y^2 = x^3\} \subseteq \mathbb{C}^2$. Alors $\mathcal{J}_0(X) \simeq X$ et*

$$\mathcal{J}_1(X) \simeq \{(a_0 + a_1 t, b_0 + b_1 t) \in \left(\mathbb{C}[t]/(t^2)\right)^2 \ ; \ b_0^2 = a_0^3 \text{ et } 2b_0 b_1 = 3a_0^2 a_1\}.$$

Plus généralement, on a les isomorphismes $\mathcal{J}_0(X) \simeq X$ et $\mathcal{J}_1(X) \simeq \mathrm{T}X$, où $\mathrm{T}X$ est l'espace total du fibré tangent de X, et le morphisme $\pi_{1,0} : \mathcal{J}_1(X) \to X$ correspond à la projection naturelle $\mathrm{T}X \to X$.

Les morphismes de troncation forment un système projectif dont la limite projective est un schéma $\mathcal{J}_\infty(X)$ (non réduit) de dimension infinie, appelé *l'espace des arcs de X*. L'ensemble des $\mathbb{C}$-points de $\mathcal{J}_\infty(X)$ est naturellement en bijection avec les $\mathbb{C}[[t]]$-points de X. Pour tout $n \geqslant 0$, on a un morphisme,

$$\pi_m : \mathcal{J}_\infty(X) \longrightarrow \mathcal{J}_m(X),$$

induit par le morphisme d'anneaux $\mathbb{C}[[t]] \to \mathbb{C}[[t]]/(t^{m+1}) \simeq \mathbb{C}[t]/(t^{m+1})$. Lorsque X est lisse, le morphisme π_m est surjectif.

Exemple A.1.3. *Si $X = \mathbb{C}^d$, on a*

$$\mathcal{J}_\infty(X) \simeq \{(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} t^k, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(d)} t^k) \ ; \ a_i^{(j)} \in \mathbb{C}\}.$$

Si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas, il induit pour tout $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ des morphismes, $f_m : \mathcal{J}_m(X) \to \mathcal{J}_\infty(X)$, compatibles avec les morphismes de troncation.

Proposition A.1.4. (i) *Pour tous $\mathbb{C}$-schémas X et Y et tout $m \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme canonique $\mathcal{J}_m(X \times Y) \simeq \mathcal{J}_m(X) \times \mathcal{J}_m(Y)$.*

(ii) *Si G est un schéma en groupes sur $\mathbb{C}$, alors $\mathcal{J}_m(G)$ est également un schéma en groupes sur $\mathbb{C}$. De plus, si G opère sur la variété X, alors $\mathcal{J}_m(G)$ opère sur $\mathcal{J}_m(X)$ pour tout $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

(iii) *Si $f : Y \to X$ est un morphisme de schémas et $Z \hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé de X, alors on a un isomorphisme canonique $\mathcal{J}_m(f^{-1}(Z)) \simeq f_m^{-1}(\mathcal{J}_m(Z))$.*

Exemple A.1.5. *Soit T un tore algébrique de dimension r, $T \simeq (\mathbb{C} \setminus \{0\})^r$. Alors $\mathcal{J}_m(T)$ est isomorphe à $T \times \mathbb{C}^{rm}$ en tant que schéma. De plus, si $x = (x_1^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_r^{(m)})$ et $y = (y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)}, \ldots, y_1^{(m)}, \ldots, y_r^{(m)})$ sont deux $\mathbb{C}$-points de $\mathcal{J}_m(T)$, avec $(x_1^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)})$ et $(y_1^{(0)}, \ldots, y_r^{(0)})$ dans T, le produit xy dans $\mathcal{J}_m(T)$ est donné par*

$$(x_1^{(0)}y_1^{(0)}, \ldots, x_r^{(0)}y_r^{(0)}, \sum_{i+j=1} x_1^{(i)}y_1^{(j)}, \ldots, \sum_{i+j=1} x_r^{(i)}y_r^{(j)}, \ldots, \sum_{i+j=m} x_1^{(i)}y_1^{(j)}, \ldots, \sum_{i+j=m} x_r^{(i)}y_r^{(j)}),$$

et l'élément neutre de $\mathcal{J}_m(T)$ est $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r\,fois}, 0, \ldots, 0)$.

Désormais, X est une variété lisse de dimension d.

Définition A.1.6. *Un* cylindre *de $\mathcal{J}_\infty(X)$ est un sous-ensemble C de l'espace des arcs $\mathcal{J}_\infty(X)$ de la forme $C = \pi_m^{-1}(B_m)$ où m est un entier positif et B_m un ensemble constructible de $\mathcal{J}_m(X)$. Le sous-ensemble B_m de $\mathcal{J}_m(X)$ est appelé une m-*base *de C.*

L'espace des arcs $\mathcal{J}_\infty(X) = \pi_0^{-1}(X)$ est lui-même un cylindre de 0-base X. La collection des cylindres forme une algèbre d'ensembles (au sens de l'intégration) : si C et C' sont deux cylindres, il en est de même de $\mathcal{J}_\infty(X) \setminus C$ et de $C \cap C'$. Des exemples intéressants de cylindres apparaissent avec les *fonctions d'ordre* que nous introduisons ici.

Soient Z un sous-schéma fermé propre de X défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_Z \subseteq \mathcal{O}_X$, et $\gamma : \operatorname{Spec}\mathbb{C}[[t]] \to X$ un arc de X. Le pull-back de $\mathcal{I}_Z$ par γ est, ou bien un idéal de $\mathbb{C}[[t]]$ de la forme (t^e), avec $e \in \mathbb{N}$, et on pose $\operatorname{ord}_Z(\gamma) := e$, ou bien l'idéal nul et on pose $\operatorname{ord}_Z(\gamma) := \infty$. Dans ce dernier cas, γ appartient à $\mathcal{J}_\infty(Z)$. On définit ainsi une application ord, appelée *fonction ordre associée à Z* :

$$\operatorname{ord}_Z : \mathcal{J}_\infty(X) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad \gamma \longmapsto \operatorname{ord}_Z(\gamma).$$

Exemple A.1.7. *Soient $Z = D$ un diviseur effectif de X, et $f \in \mathcal{O}_X$ une équation définissant D sur un ouvert U de X. Pour tout arc $\gamma \in \mathcal{J}_\infty(X)$ tel que $\pi_0(\gamma) \in U$, l'entier $\operatorname{ord}_D(\gamma)$ est l'ordre d'annulation de la série formelle $\gamma^*(f)$ où $\gamma^* : \mathcal{O}_{X,\pi_0(\gamma)} \to \mathbb{C}[[t]]$ est le morphisme d'anneaux induit par l'arc γ. Observons que $\operatorname{ord}_D(\gamma) = \infty$ si et seulement si $\gamma \in \mathcal{J}_\infty(D)$.*

Écrivons $D = \sum_{i=1}^{l} a_i D_i$ comme une combinaison linéaire de diviseurs irréductibles de X. Alors f se décompose comme un produit, $f = \prod_{i=1}^{l} f_i^{a_i}$, où les équations f_i définissent localement D_i, et on a

$$\mathrm{ord}_D = \sum_{i=1}^{l} a_i \, \mathrm{ord}_{D_i}.$$

On étend la fonction ord *aux $\mathbb{Q}$-diviseurs de Cartier comme suit. Si $D = \sum_{i=1}^{l} q_i D_i$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier de X, avec $q_i \in \mathbb{Q}$, on pose*

$$\mathrm{ord}_D := \sum_{i=1}^{l} q_i \, \mathrm{ord}_{D_i}.$$

Cet exemple sera de grande importance dans la Section A.4.

Il résulte de la définition de la fonction ord_Z que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathrm{ord}_Z^{-1}(\{m\}) = \mathrm{ord}_Z^{-1}(\geqslant m) \smallsetminus \mathrm{ord}_Z^{-1}(\geqslant m+1) = \pi_{m-1}^{-1}(\mathcal{J}_{m-1}(Z)) \smallsetminus \pi_m^{-1}(\mathcal{J}_m(Z)).$$

Pour $m = 0$, on a

$$\mathrm{ord}_Z^{-1}(\{0\}) = \pi_0^{-1}(X) \smallsetminus \pi_0^{-1}(Z).$$

En particulier, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathrm{ord}_D^{-1}(\{m\}$ est un cylindre de $\mathcal{J}_m(X)$. En revanche, $\mathrm{ord}_D^{-1}(\{\infty\}$ n'est pas un cylindre mais seulement une intersection dénombrable de cylindres :

$$\mathrm{ord}_Z^{-1}(\infty) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{ord}_Z^{-1}(\geqslant m) = \mathcal{J}_\infty(Z).$$

A.2 L'anneau de Grothendieck et les polynômes de Hodge-Deligne

Contrairement aux mesures classiques, la mesure μ_X que nous nous apprêtons à définir n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous commençons par construire l'anneau dans lequel μ_X prendra ses valeurs. Nous nous intéresserons également à la *réalisation de Hodge-Deligne* de cette mesure. C'est pourquoi nous consacrons un paragraphe aux *polynômes de Hodge-Deligne* (Définition A.2.2), aussi appelés *polynômes E*.

Soit $\mathrm{Var}_\mathbb{C}$ la catégorie des variétés algébriques complexes. Le groupe de Grothendieck $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$ de $\mathrm{Var}_\mathbb{C}$ est le groupe engendré par les symbols $[V]$ où V est une variété algébrique complexe, avec les relations $[V] = [V']$ si V et V' sont isomorphes et $[V] = [V'] + [V \smallsetminus V']$ si $V' \subseteq V$ est une sous-variété fermée de V. Le groupe $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$ possède une structure naturelle d'anneau donnée par $[V] \cdot [V'] := [V \times_\mathbb{C} V']$. Le symbol $\mathbb{L}$ désigne la classe $[\mathbb{A}^1]$ de la droite affine $\mathbb{A}^1$ et 1 désigne celle de $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ (c'est l'unité de $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$).

Exemple A.2.1. 1) *On a* $[\mathbb{C}^*] = [\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}] = \mathbb{L} - 1$ *et* $[\mathbb{P}^n] = \mathbb{L}^n + \mathbb{L}^{n-1} + \cdots + \mathbb{L} + 1$, $(n \in \mathbb{N})$.

2) *Si* $W \to V$ *est une fibration localement triviale de fibre constante* F*, alors on a* $[W] = [V] \cdot [F]$.

3) *Observons que l'on «perd» des informations sur la variété en prenant son image dans* $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$*. Par exemple,* $[\{(x,y) \in \mathbb{C}^2\ ;\ y^2 = x^3\}] = [\mathbb{A}^1] = \mathbb{L}$.

Un *invariant additif* est une application $\lambda : \mathrm{ObVar}_{\mathbb{C}} \to R$ à valeurs dans un anneau R telle que $\lambda(V) = \lambda(V')$ si $V \simeq V'$, $\lambda(V) = \lambda(V') + \lambda(V \smallsetminus V')$ si $V' \subseteq V$ est fermé dans V, et $\lambda(V \times V') = \lambda(V) \cdot \lambda(V')$ pour tout $V, V' \in \mathrm{ObVar}_{\mathbb{C}}$. L'application

$$[\quad] : \mathrm{ObVar}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$$

possède la propriété universelle suivante : pour tout anneau R et tout invariant additif λ : $\mathrm{ObVar}_{\mathbb{C}} \to R$, il existe une unique application $\overline{\lambda} : \mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \to R$ telle que $\overline{\lambda}([V]) = \lambda(V)$ pour tout $V \in \mathrm{ObVar}_{\mathbb{C}}$. La caractéristique d'Euler ou les *polynômes de Hodge-Deligne* (cf. Définition A.2.2) fournissent des exemples d'invariants additifs particulièrement intéressants.

Notons $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ le localisé de $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ en $\mathbb{L}$. La dimension sur les variétés induit une application naturelle, $\dim : \mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ (on pose $\dim \varnothing := -\infty$ par convention), qui s'étend au localisé $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ en posant $\dim(\mathbb{L}^{-1}) := -1$. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, posons

$$\mathcal{F}^m \mathcal{M}_{\mathbb{C}} := \{\tau \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\ ;\ \dim \tau \leqslant m\}.$$

Alors $\left(\mathcal{F}^m \mathcal{M}_{\mathbb{C}}\right)_{m \in \mathbb{Z}}$ est une filtration décroissante de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ et on note $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$ le complété de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ relativement à cette filtration. L'anneau $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$ sera l'anneau des valeurs de la future mesure. La connaissance de cet anneau est encore assez limitée. Par exemple, on ne sait pas si le morphisme de complétion, $\varphi : \mathcal{M}_{\mathbb{C}} \to \hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$, est injectif.

Tout groupe de cohomologie $H^k(V, \mathbb{Q})$, $k \in \mathbb{N}$, d'une variété algébrique complexe V possède une structure de Hodge mixte, [Del71, Del74]. Ceci consiste en une filtration croissante,

$$0 = W_{-1} \subseteq W_0 \subseteq \cdots \subseteq W_{2k} = H^k(V; \mathbb{Q})$$

sur la cohomologie rationnelle, et une filtration décroissante

$$H^k(V; \mathbb{C}) = F^0 \supseteq F^1 \supseteq \cdots \supseteq F^k \supseteq F^{k+1} = 0$$

sur la cohomologie complexe de V, tels que la filtration $(F^i)_i$ induit une structure de Hodge (pure) de poids l sur le complexifié du gradué $\mathrm{Gr}_l^W H^k(V) := W_l / W_{l-1}$. En particulier, pour tout l, on a une décomposition

$$\mathrm{Gr}_l^W H^k(V, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=l} H^{p,q}.$$

Précisément,

$$H^{p,q} = F^p\mathrm{Gr}^W_{p+q}H^k(X) \cap \overline{F^q\mathrm{Gr}^W_{p+q}H^k(V)},$$

où $F^p\mathrm{Gr}^W_l H^k(V)$ est l'image complexifiée de $F^p \cap W_l$ dans le quotient $W_l/W_{l-1} \otimes \mathbb{C}$. L'entier

$$h^{p,q}(H^k(V,\mathbb{C})) := \dim H^{p,q}$$

est appelé le *nombre de Hodge-Deligne d'ordre* (p,q) de V. Lorsque V est lisse et projective, alors $\mathrm{Gr}^W_l H^k(V)$ est nul sauf pour $l = k$. Dans ce cas, les nombres de Hodge-Deligne sont les nombres de Hodge classiques $h^{p,q}(V)$.

Danilov and Khovanskiĭ [DaK87] ont observé que la cohomologie à support compact $H^k_c(V,\mathbb{Q})$ possède également une structure de Hodge mixte et ont encodé les nombres de Hodge-Deligne dans un même polynôme :

Définition A.2.2. *Le* polynôme E *d'une variété algébrique* V *de dimension* n *est défini par :*

$$E(V;u,v) := \sum_{0\leqslant p,q\leqslant n}\ \sum_{0\leqslant k\leqslant 2n} (-1)^k h^{p,q}(H^k_c(V,\mathbb{C}))u^p v^q \ \in \mathbb{Z}[u,v],$$

où $h^{p,q}(H^k_c(V,\mathbb{C}))$ *est la dimension de la composante de type* (p,q) *du groupe de cohomologie* $H^k_c(V,\mathbb{C})$ *à support compact. Lorsque* $u = v = 1$*, on retrouve le nombre d'Euler classique* $e(X) := E(V;1,1)$*.*

Le polynôme E possède des propriétés similaires à celles de la caractéristique d'Euler, cf. [DaK87] :

1) si $V = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_k$, alors $E(V;u,v) = \sum_{i=1}^k E(V_i;u,v)$ (avec V_i localement fermé) ;

2) si $V = V_1 \times V_2$, alors $E(V;u,v) = E(V_1;u,v)E(V_2;u,v)$;

3) si $W \to V$ est une fibration localement triviale de fibre F, alors

$$E(W;u,v) = E(V;u,v)E(F;u,v).$$

Exemple A.2.3. 1) *Si* V *est lisse et projective alors,* $E(V;u,v) := \sum_{0\leqslant p,q\leqslant n}(-1)^{p+q}h^{p,q}(V)u^p v^q$*, et les nombres de Betti de* V *sont donnés par* $b^k(V) := \sum_{p+q=k} h^{p,q}(V)$*. En particulier* $E(\mathbb{P}^n;u,v) = (uv)^n + \cdots + uv + 1$*.*

2) *Si* T *un tore algébrique de dimension* r*, alors* $E(T;u,v) = (uv-1)^r$*.*

3) *Soit* G *un groupe réductif connexe (complexe) de rang* ℓ *et* B *un sous-groupe de Borel de* G*. Notons* S *le système de racines simples du couple* (G,B) *et* Δ^+_S *le système de racines positives correspondant. Alors*

$$E(G/B;u,v) = \prod_{\alpha\in\Delta^+_S} \frac{(uv)^{\mathrm{ht}(\alpha)+1}-1}{(uv)^{\mathrm{ht}(\alpha)}-1} = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{(uv)^{m_i+1}-1}{uv-1},$$

où $\mathrm{ht}(\alpha)$ $(\alpha \in \Delta^+_S)$ *désigne la hauteur de* α *relativement à* S *et* $m_1,\ldots,m_\ell$*, les exposants de* G*.*

Le polynôme $E : \mathrm{ObVar}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{Z}[u,v], V \mapsto E(V;u,v)$ est un invariant additif. D'après la propriété universelle de l'application $V \mapsto [V]$ il existe une unique application, que l'on notera encore E, de $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ à valeurs dans l'anneau $\mathbb{Z}[u,v]$. En particulier, $E(\mathbb{L};u,v) = uv$. On étend l'application E au localisé $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ en posant $E(\mathbb{L}^{-1};u,v) := (uv)^{-1}$. Cette application s'étend de manière unique au complété $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$. On obtient ainsi une application, notée encore E,

$$E : \hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{Z}[u,v][[(uv)^{-1}]],$$

de l'anneau $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans l'anneau de séries formelles $\mathbb{Z}[u,v][[(uv)^{-1}]]$.

A.3 Mesures et intégrales motiviques

Dans cette section, X est une variété algébrique (complexe) lisse de dimension d.

Nous définissons dans ce paragraphe la mesure motivique μ_X associée à la variété lisse X. Nous suivons la normalisation de [Bat98] qui diffère d'un facteur $\mathbb{L}^d$ de la définition classique. Cette convention s'avère plus agréable en pratique.

Définition A.3.1. *Soit $C \subseteq \mathcal{J}_\infty(X)$ un cylindre de m-base ($m \geqslant 0$) le constructible $B_m \subseteq \mathcal{J}_m(X)$. On définit le* volume motivique *de C par :*

$$\mathrm{Vol}_X(C) := [B_m]\,\mathbb{L}^{-md} = [\pi_m(C)]\mathbb{L}^{-md} \ \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}.$$

En particulier $\mathrm{Vol}_X(\mathcal{J}_\infty(X)) = [X]$.

Dans la définition, il est important de remarquer que le volume motivique $\mathrm{Vol}_X(C)$ ne dépend ni de m ne de la base B_m. Cela vient de ce que, X étant lisse, le morphisme $\pi_{n,m} : \pi_n(C) \to \pi_m(C)$ est une fibration localement triviale de fibre $\mathbb{A}^{(n-m)d}$ pour tout $n \geqslant m$. Le volume motivique est additif sur les réunions disjointes finies de cylindres. De plus, si C et C' sont deux cylindres avec $C \subseteq C'$, on a $\dim \mathrm{Vol}_X(C) \leqslant \dim \mathrm{Vol}_X(C')$.

Définition A.3.2. *Un sous-ensemble $C \subset \mathcal{J}_\infty(X)$ est dit* mesurable *si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un cylindre C_n et des cylindres $D_{n,i}$ ($i \in \mathbb{N}$) tels que*

$$C \triangle C_n \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_{n,i}$$

et $\dim \mu_X(D_{n,i}) \leqslant -n$ pour tout i. Ici, $C \triangle C_n = (C \smallsetminus C_n) \cup (C_n \smallsetminus C)$ désigne la différence symétrique de deux ensembles. Si C est un ensemble mesurable, on définit sa mesure motivique *$\mu_X(C)$ par*

$$\mu_X(C) := \lim_{n \to \infty} \mu_X(C_n).$$

Cette limite converge dans $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$ et ne dépend pas des cylindres C_n, [Bat98, Theorem 6.18].

D'après [Bat98, Propositions 6.19 and 6.22], on a :

Proposition A.3.3. (i) *La collection des ensembles mesurables forme une algèbre d'ensembles $\mathcal{A}$ et la mesure motivique μ_X est additive sur les réunions disjointes finies. Si $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite disjointe d'ensembles mesurables telle que $\lim_{i\to\infty}\mu_X(C_i)=0$, alors $C:=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}C_i$ est mesurable et*

$$\mu_X(C)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu_X(C_i).$$

(ii) *Soit $Y\subseteq X$ une sous-variété localement fermée. L'ensemble $\mathcal{J}_\infty(Y)\subseteq\mathcal{J}_\infty(X)$ est mesurable et, si $\dim Y<\dim X$, alors $\mu_X(\mathcal{J}_\infty(Y))=0$.*

Dans la pratique, on est souvent amené à considérer la *réalisation de Hodge-Deligne* de la mesure motivique qui est la composée :

$$E\circ\mu_X:\mathcal{A}\longrightarrow\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}\longrightarrow\ \mathbb{Z}[u,v][[(uv)^{-1}]]$$

Par exemple, $E\circ\mu_X(\mathcal{J}_\infty(X))=E([X];u,v)=E(X;u,v)$.

Définition A.3.4. *Une fonction $F:\mathcal{J}_\infty(X)\to\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ est dite* mesurable *si $F^{-1}(s)$ est mesurable pour tout $s\in\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$. Soit $A\subseteq\mathcal{J}_\infty(X)$ un ensemble mesurable et $F:\mathcal{J}_\infty(X)\to\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ une fonction mesurable telle que $\mu_X(F^{-1}(\infty))=0$. Lorsque $\sum\limits_{s\in\mathbb{Z}}\mu_X(A\cap F^{-1}(s))\mathbb{L}^{-s}$ converge dans $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$, on dit que $\mathbb{L}^{-F}$* est intégrable sur *A et on définit son* intégrale motivique *par*

$$\int_A\mathbb{L}^{-F}\mathrm{d}\mu_X:=\sum_{s\in\mathbb{Z}}\mu_X(A\cap F^{-1}(s))\mathbb{L}^{-s}.$$

Exemple A.3.5. *La fonction ordre, $\mathrm{ord}_Y:\mathcal{J}_\infty(X)\to\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$, associée à une sous-variété fermée Y de X est mesurable et l'application $\mathbb{L}^{-\mathrm{ord}_Y}$ est intégrable sur $\mathcal{J}_\infty(X)$.*

Soit $D=\sum_{i=1}^l n_iD_i$ ($n_i\geqslant 0$) un diviseur effectif de X à croisements normaux simples. On définit une stratification de X en posant pour tout sous-ensemble $J\subseteq I$:

$$D_J:=\begin{cases}\bigcap_{j\in J}D_j & \text{if } J\neq\varnothing\\ X & \text{if } J=\varnothing\end{cases}\qquad\text{et}\qquad D_J^0:=D_J\smallsetminus\bigcup_{j\in I:=\{1,\dots,l\}\smallsetminus J}D_j.\tag{A.3.1}$$

D'après [Bat98, Theorem 6.28] ou [Cr04, Theorem 2.15], on a :

Proposition A.3.6.

$$\int_{\mathcal{J}_\infty(X)}\mathbb{L}^{-\mathrm{ord}_D}\mathrm{d}\mu_X:=\sum_{J\subseteq\{1,\dots,l\}}[D_J^0]\prod_{j\in J}\frac{\mathbb{L}-1}{\mathbb{L}^{n_j+1}-1}\in\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}.$$

Soient $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme birationnel propre entre deux variétés algébriques lisses, K_X et $K_{X'}$ des diviseurs canoniques de X et X' respectivement tels que $f_*(K_{X'}) = K_X$. On définit le *discrépant* de f par :

$$K_{X'/X} := K_{X'} - f^* K_X. \tag{A.3.2}$$

Comme f est lisse, $K_{X'/X}$ est un diviseur effectif. Le morphisme f induit canoniquement des morphismes $f_m : \mathcal{J}_m(X') \to \mathcal{J}_m(X)$ pour tout $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. La puissance de la théorie réside dans l'existence d'une formule de transformation pour les intégrales motiviques, [DL99] (voir aussi [Cr04, Theorem 2.18]) :

Théorème A.3.7. *Soit $F : \mathcal{J}_\infty(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable telle que $\mathbb{L}^{-F}$ est intégrable sur $\mathcal{J}_\infty(X)$. Alors on a :*

$$\int_{\mathcal{J}_\infty(X)} \mathbb{L}^{-F} \mathrm{d}\mu_X = \int_{\mathcal{J}_\infty(X')} \mathbb{L}^{-F\circ f_\infty - \mathrm{ord}_{K_{X'/X}}} \mathrm{d}\mu_{X'}.$$

En particulier, si D est un diviseur effectif de X, on a

$$\int_{\mathcal{J}_\infty(X)} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord}_D} \mathrm{d}\mu_X = \int_{\mathcal{J}_\infty(X')} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord}_{f^*D + K_{X'/X}}} \mathrm{d}\mu_{X'}.$$

Exemple A.3.8. *Considérons le cas où $f : X' = \mathrm{Bl}_Y(X) \longrightarrow X$ est l'éclatement de X le long d'une sous-variété lisse Y de X de codimension r dans X, et $F = 0$. On a $K_{X'/X} = (r-1)E$ où E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement (cf. [Ha77, II, Exercise 8.5 (b)]). D'une part, d'après la Proposition A.3.6, on a,*

$$\int_{\mathcal{J}_\infty(X')} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord}_{K_{X'/X}}} \mathrm{d}\mu_{X'} = [X' \setminus E] + \frac{[E]}{\mathbb{P}^{r-1}} = [X \setminus Y] + [Y] = [X],$$

car E est localement isomorphe à $Y \times \mathbb{P}^{r-1}$. D'autre part, comme $F = 0$,

$$\int_{\mathcal{J}_\infty(X)} \mathbb{L}^{-F} \mathrm{d}\mu_X = \mu_X(\mathcal{J}_\infty(X)) = [X].$$

On vérifie ainsi la cohérence du Théorème A.3.7 dans ce cas très particulier.

L'idée dans la plupart des applications est d'encoder des informations (par exemple les nombres de Hodge d'une variété) dans une intégrale motivique et d'exploiter la règle de transformation pour calculer cette intégrale. Le plus souvent, le calcul se ramène à celui de l'intégrale de $\mathbb{L}^{-D}$ où D est un diviseur effectif à croisements normaux simples : on peut alors appliquer la Proposition A.3.6. Nous illustrons cette idée à deux reprises dans ce mémoire ; dans la Section A.5 et dans la Section 1.4 (§1.4.2).

Donnons ici l'application la plus connue qui a motivé Kontsevich à inventer l'intégrale motivique, [Kon95] :

Exemple A.3.9. *Soit X et X' deux variétés algébriques lisses et Calabi-Yau (i.e., $K_X = K'_X = 0$). Si X et X' sont birationnellement équivalentes, alors $[X] = [X']$. En particulier les nombres de Hodge de X et X' sont les mêmes. Ce résultat fut conjecturé par Victor Batyrev. Ce dernier avait démontré auparavant en utilisant l'intégration p-adique que, sous ces hypothèses, les nombres de Betti de X et X' étaient les mêmes.*

A.4 Invariants de cordes

Nous introduisons ici quelques invariants dits *de cordes* et définissons le volume motivique (de cordes) de l'espace des arcs pour une certaine classe de variétés singulières ; voir [Bat98] ou [Ve06] pour plus de détails. Ceci étend d'un certain point de vue la mesure motivique aux variétés singulières.

Soient X une variété singulière normale irréductible et K_X un diviseur canonique de X. Supposons que X soit $\mathbb{Q}$-Gorenstein, i.e., il existe un entier $m > 0$ tel que mK_X est un diviseur de Cartier, et choisissons une résolution des singularités $f : X' \to X$ de X telle que le lieu exceptionnel de f soit un diviseur dont les composantes irréductibles $D_1, \dots, D_l$ sont des diviseurs lisses à croisements normaux simples. Comme mK_X est de Cartier, on peut considérer le pull-back $f^*(mK_X)$ et écrire,

$$mK_{X'} - f^*(mK_X) = \sum_{i=1}^{l} n_i D_i,$$

avec $n_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i. On définit le *discrépant* $K_{X'/X}$ de f par :

$$K_{X'/X} := \sum_{i=1}^{l} \nu_i D_i, \qquad \text{où} \qquad \nu_i := \frac{n_i}{m} \in \mathbb{Q}. \tag{A.4.1}$$

Ainsi, de manière abusive, on écrit $K_{X'/X} = K_{X'} - f^*(K_X)$. Nous renvoyons à [KM98, Section 2.3] pour une définition plus précise des discrépants. En particulier, il résulte de la définition [KM98, Definition 2.22] que, dans l'égalité (A.4.1), les nombres rationnels ν_i ne dépendent ni de m, ni du choix des diviseurs canoniques K_X et $K_{X'}$. Supposons de plus que X soit à singularités *log-terminales*, c'est-à-dire $\nu_i > -1$ pour tout i (cf. [KMM87] ou [Re87]). Comme dans la section précédente, on obtient une stratification $X' = \bigsqcup_{J \subset \{1,\dots,I\}} D_J^0$ à partir des diviseurs D_j à l'aide des formules (A.3.1) (en remplaçant X par X').

Définition A.4.1. *Le* volume motivique de cordes $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}(X)$ de X *est donné par :*

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}(X) := \sum_{J \subseteq \{1,\dots,l\}} [D_J^0] \prod_{j \in J} \frac{\mathbb{L} - 1}{\mathbb{L}^{\nu_j + 1} - 1} \in \hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}(\mathbb{L}^{\frac{1}{m}}).$$

Comme expliqué à la Section A.1, on peut définir la fonction ordre associée au $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier $K_{X'/X}$. L'inégalité $\nu_i > -1$ pour tout i implique que la somme $\sum_{\nu\in\mathbb{Q}} \mu_{X'}(A \cap \mathrm{ord}^{-1}_{K_{X'/X}}(\nu))\mathbb{L}^{-\nu}$ converge dans $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}(\mathbb{L}^{\frac{1}{m}})$ et on définit l'intégrale motivique de $\mathbb{L}^{-\mathrm{ord}_{K_{X'/X}}}$ par

$$\int_{\mathcal{J}_\infty(X')} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord}_{K_{X'/X}}}\,\mathrm{d}\mu_{X'} := \sum_{\nu\in\mathbb{Q}} \mu_{X'}(A \cap \mathrm{ord}^{-1}_{K_{X'/X}}(\nu))\mathbb{L}^{-\nu}.$$

La proposition suivante généralise la Proposition A.3.6 :

Proposition A.4.2.

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}(X) = \int_{\mathcal{J}_\infty(X')} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord}_{K_{X'/X}}}\,\mathrm{d}\mu_{X'} \in \hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}(\mathbb{L}^{\frac{1}{m}}).$$

Il résulte de la formule de transformation pour les intégrales motiviques (Théorème A.3.7) que l'expression ci-dessus de $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}(X)$ ne dépend pas de la résolution f choisie (voir aussi [Bat98, Theorem 3.4]).

Définition A.4.3. *La* fonction E de cordes *de X est donnée par :*

$$E_{\mathrm{st}}(X;u,v) := \sum_{J\subseteq\{1,\ldots,l\}} E(D_J^0;u,v) \prod_{j\in J} \frac{uv-1}{(uv)^{\nu_j+1}-1} = E(\mathcal{E}_{\mathrm{st}}(X);u,v).$$

Remarque A.4.4. *Lorsque X est lisse, on a $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}(X) = \mu_X(\mathcal{J}_\infty(X)) = [X]$ et $E_{\mathrm{st}}(X;u,v) = E(X;u,v)$.*

A.5 Application : schémas de jets d'une intersection complète

Dans cette section, X est une variété algébrique irréductible de dimension d.

Définition A.5.1. *On dit que X est* à singularités rationnelles *si X est normale et s'il existe une résolution des singularités $f : X' \longrightarrow X$ telle que les images directes $R^i f_* \mathcal{O}_{X'}$ du faisceau $\mathcal{O}_{X'}$ sont nulles pour pour tout $i > 0$. S'il existe une telle résolution des singularités, alors toutes les autres partagent cette propriété.*

L'étude des singularités à travers les espaces d'arcs fut initiée par Nash dans [N95]. Il y suggère que les images $\pi_m(\mathcal{J}_\infty(X)) \subset \mathcal{J}_m(X)$ contiennent des informations sur les fibres au dessus des points singuliers de X dans une désingularisation de X. Le résultat suivant de Mustaţă conforte les prévisions de Nash, [Mu01, Theorem 0.1] :

Théorème A.5.2 (Mustaţă)**.** *Si X est localement une intersection complète, alors $\mathcal{J}_m(X)$ est irréductible pour tout $m \geqslant 1$ si et seulement si X est à singularités rationnelles.*

Exemple A.5.3. *Si X est lisse, alors $\mathcal{J}_m(X)$ est lisse, irréductible et de dimension $(m+1)d$; voir l'exemple A.1.3 avec $m = 0$.*

Exemple A.5.4. *La* variété déterminantielle $M^k \subset \mathbb{A}^{rs}$ *des matrices d'ordre* $r \times s$ *et de rang au plus* k *est définie par l'idéal engendré par les mineurs d'ordre* $k+1$*. Les variétés déterminantielles sont toujours à singularités rationnelles mais sont rarement des intersections complètes et leurs schémas de jets ne sont pas toujours irréductibles, [Yu07]. Elles fournissent ainsi de nombreux exemples de variétés Gorenstein à singularités rationnelles dont les schémas de jets ne sont pas irréductibles.*

C'est l'exemple suivant qui motiva David Eisenbud et Edward Frenkel à conjecturer le Théorème de Mustaţă et qui nous incita à utiliser l'intégration motivique dans [ChM09] (voir la Section 1.4 pour plus de détails) :

Exemple A.5.5. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie simple de groupe adjoint* G*,* $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ *l'algèbre des fonctions régulières sur* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ *la sous-algèbre des éléments* G*-invariants de* $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$*. Rappelons que le cône nilpotent* $\mathfrak{N}$ *de* $\mathfrak{g}$ *est le sous-schéma de* $\mathfrak{g}$ *défini par l'idéal d'augmentation de* $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$*. C'est une intersection complète dans* $\mathfrak{g}$ *à singularités rationnelles (cf. §1.1). D'après le Théorème A.5.2, le schéma des jets* $\mathfrak{J}_m(\mathfrak{N})$ *du cône nilpotent est donc irréductible pour tout* $m \geqslant 1$*. À l'aide de ce résultat, D. Eisenbud et E. Frenkel ont montré que, pour tout* $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*, l'algèbre* $\mathbb{C}[\mathfrak{J}_m(\mathfrak{g})]$ *est libre sur* $\mathbb{C}[\mathfrak{J}_m(\mathfrak{g})]^{\mathfrak{J}_m(\mathfrak{g})}$*, cf. [Mu01, Appendix], étendant ainsi un résultat bien connu de Kostant pour* $m = 1$*.*

Nous expliquons pour finir comment l'intégration motivique apparaît dans la démonstration du Théorème A.5.2. Supposons que X soit localement une intersection complète (de dimension d). Des résultats de [Mu01, §1] on déduit que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) X est à singularités rationnelles ;

(2) pour tout $m \geqslant 1$, $\mathfrak{J}_m(X)$ est irréductible de dimension pure $(m+1)d$;

(3) pour tout $m \geqslant 1$, $\dim \mathfrak{J}_m(X) = (m+1)d$ et $\mathfrak{J}_m(X)$ a une et seule composante irréductible de dimension maximale.

Précisons la construction qui permet à Mustaţă d'encoder les informations nécessaires (à savoir la dimension de $\mathfrak{J}_m(X)$ et le nombre de ses composantes irréductibles de dimension maximale) dans une intégrale motivique. Fixons un plongement $X \hookrightarrow X'$ de X, où X' est une variété lisse. Soient r la codimension de X dans X' et n la dimension de X'. Considérons l'éclatement

$$p : B := \mathrm{Bl}_X(X') \longrightarrow X'$$

de X' le long de X, et soit $F := p^{-1}(X)$ le diviseur exceptionnel. D'après Hironaka [Hi64], il existe un morphisme propre $\tilde{p} : \tilde{X}' \to B$, avec $\tilde{X}'$ lisse, qui induit un isomorphisme sur le complémentaire d'un sous-ensemble propre de F, et tel que $\tilde{p}^{-1}(F)$ est un diviseur à croisements normaux simples de $\tilde{X}'$. Soit γ l'application composée $p \circ \tilde{p}$:

$$\gamma \ : \ \tilde{X}' \xrightarrow{\tilde{p}} B \xrightarrow{p} X' .$$

Écrivons

$$\gamma^{-1}(X) = \tilde{p}^{-1}(F) = \sum_{i=1}^{t} a_i E_i \quad (a_i \in \mathbb{Z}),$$

où $E_2, \ldots, E_t$ sont des diviseurs exceptionnels de $\tilde{p}$, et E_1 la transformée propre de F. Le discrépant de γ est donné par :

$$K_{\tilde{X}'/X'} = K_{\tilde{X}'} - \gamma^*(K_{X'}) = \sum_{i=1}^{t} b_i E_i \quad (b_i \in \mathbb{Z}).$$

Observons que le terme de plus haut degré du polynôme de Hodge-Deligne $E(V; u, v)$ d'une variété V (cf. Définition A.2.2) est $c(uv)^{\dim V}$ où c est le nombre de composantes irréductibles de V de dimension maximale $\dim V$. La stratégie de Mustaţă consiste à intégrer une fonction $\mathbb{L}^{-F}$ relativement à la mesure $E \circ \mu_{X'}$ où F est la fonction $f \circ \mathrm{ord}_X : \mathcal{J}_\infty(X') \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ pour un choix judicieux d'une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ (que l'on étend par $f(\infty) = \infty$). La fonction F est mesurable puisque $\mu_{X'}(F^{-1}(\infty)) = 0$. Lorsque $\int_{\mathcal{J}_\infty(X')} \mathbb{L}^{-F}\, \mathrm{d}\mu_{X'}$ converge dans $\hat{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}$, la règle de transformation pour les intégrales motiviques (Théorème A.3.7) donne :

$$E\Big(\int_{\mathcal{J}_\infty(X')} \mathbb{L}^{-F}\, \mathrm{d}\mu_{X'}\Big) \;=\; E\Big(\int_{\mathcal{J}_\infty(\tilde{X}')} \mathbb{L}^{-(f \circ \mathrm{ord}_{\gamma^*(X)} + \mathrm{ord}_{K_{\tilde{X}'/X'}})}\, \mathrm{d}\mu_{\tilde{X}'}\Big). \tag{A.5.1}$$

D'une part le membre de droite dans (A.5.1) peut être calculé explicitement car $\gamma^*(X) + K_{\tilde{X}'/X'}$ est à croisements normaux simples (cf. Proposition A.3.6). D'autre part, avec un choix judicieux de f, le membre de gauche dans (A.5.1) contient les informations dont on a besoin sur la dimension de $\mathcal{J}_m(X)$ et le nombre de ses composantes irréductibles de dimension maximale. Le reste de la démonstration consiste à choisir convenablement f de sorte que l'intégrale $\int_{\mathcal{J}_\infty(X')} \mathbb{L}^{-F}\, \mathrm{d}\mu_{X'}$ converge, calculer le terme de plus haut degré du membre de droite dans (A.5.1) et enfin comparer les deux expressions. Nous passons bien entendu ici ces détails.

Bibliographie

[A74] N.H. Anh, *Algebraic groups with square-integrable representations*, Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 539–542.

[AMe00] A. Alekseev and E. Meinrenken, *The non-commutative Weil algebra*, Invent. math., **139** (2000), n°1, 135–172.

[AMW00] A. Alekseev, E. Meinrenken and C. Woodward, *Group-valued equivariant localization*, Invent. math., **140** (2000), n°2, 327–350.

[AMn11] A. Alekseev and P. Mnev, *One-dimensional Chern-Simons theory*, Comm. Math. Phys., **307** (2011), 185–227.

[AMo12] A. Alekseev and A. Moreau, *On the Kostant conjecture for Clifford algebras*, C.R.A.S., **350** (2012), 13–18.

[Bat98] V. Batyrev, *Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical singularities*, in Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997) World Scientific, River Edge, NJ (1998), 1–32.

[BatM12] V. Batyrev and A. Moreau, *The arc spaces of horospherical varieties and motivic integration*, preprint arXiv :1203.0671, à paraître dans *Compositio Mathematica journal*.

[BauM11] K. Baur and A. Moreau, *Quasi-reductive (bi)parabolic subalgebras of reductive Lie algebras*, Ann. Inst. Fourier, **61** (2011), n°2, 417–451.

[Baz03] Y. Bazlov, *Exterior powers of the adjoint representation of a simple Lie algebra*, PhD. Thesis, Weizmann Institute, 2003.

[Baz08] Y. Bazlov, *The Harish-Chandra isomorphism for Clifford algebras*, preprint arXiv :0812.2059.

[Bl05] M. Blickle, *A short course on geometric motivic integration*, preprint arxiv :math.AG/0507404.

[Bol91] A.V. Bolsinov, *Commutative families of functions related to consistent Poisson brackets*, Acta Applicandae Mathematicæ, **24** (1991), n°1, 253–274.

[Bol92] A.V. Bolsinov, *Compatible Poisson brackets on Lie algebras and completeness of families of functions in involution*, Math. USSR Izvestiya, **38** (1992), n°1, 69–89.

[Bol05] A.V. Bolsinov, *Complete commutative families of polynomials in Poisson-Lie algebras : A proof of the Mishchenko-Fomenko conjecture*, Tensor and Vector Analysis, **26**, Moscow State University (2005), 87–109 (en russe).

[Bol12] A.V. Bolsinov, *Complete commutative families of polynomials in Poisson algebras and the Mishchenko-Fomenko conjecture*, préprint arxiv.org/abs/1206.3882 (version révisée et complétée de [Bol05]).

[BoK79] W. Borho and H. Kraft, *Über Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen*, Comment. Math. Helvetici, **54** (1979), 61–104.

[Bor81] W. Borho, *Über Schichten halbeinfacher Lie-Algebren*, Invent. Math., **65** (1981/82), 283–317.

BIBLIOGRAPHIE

[Br91] M. Brion, *Sur la géométrie des variétés sphériques*, Comment. Math. Helvetici, **66** (1991), 237-262.

[Br93] M. Brion, *Spherical varieties and Mori theory*, Duke Math. J. **72** (1993), n°2, 369-404.

[Br97] M. Brion, *Curves and divisors in spherical varieties. Algebraic groups and Lie groups*, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., **9**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997), 21-34.

[BG07] J. Brundan and S.M. Goodwin, *Good grading polytopes*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **94** (2007), n°1, 155–180.

[BK06] J. Brundan and A. Kleshchev, *Shifted Yangians and finite W-algebras*, Adv. Math. **200** (2006), n°1, 136–195.

[Bu] M. Bulois, *The closure of a sheet is not always a union of sheets, a short note*, preprint.

[Bu11] M. Bulois, *Sheets of Symmetric Lie Algebras and Slodowy Slices*, J. Lie Theory, **21** (2011), 1–54.

[C04] J.-Y. Charbonnel, *Propriétés (Q) et (C). Variété commutante*, Bull. Soc. Math., **132** (2004), 477–508.

[ChM09] J.-Y. Charbonnel and A. Moreau, *Nilpotent bicone and characteristic submodule in a reductive Lie algebra*, Transform. Groups, **14** (2009), n°2, 319–360.

[ChM10] J.-Y. Charbonnel and A. Moreau, *The index of centralizers of elements of reductive Lie algebras*, Doc. Math., **15** (2010), 387–421.

[CoM93] D. Collingwood and W.M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Co. New York, **65** (1993).

[Cr04] A. Craw, *An introduction to motivic integration*, Amer. Math. Soc., Providence, (2004), 203–225.

[D78] V.I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Uspekhi Mat. Nauk, **33** (1978), n°2(200), 85-134.

[DaK87] V.I. Danilov, A.G. Khovanskiĭ, *Newton Polyhedra and an Algorithm for Computing Hodge- Deligne Numbers*, Math. USSR Izv., **29** (1987), 279–298.

[deG08] W. de Graaf, *Computing with nilpotent orbits in simple Lie algebras of exceptional type*, London Math. Soc. (2008), 1461–1570.

[Del71] P. Deligne. *Théorie de Hodge II.*, Publ. Math. IHES **40** (1971), 5–57.

[Del74] P. Deligne. *Théorie de Hodge III.*, Publ. Math. IHES **44** (1974), 5–77.

[DL99] J. Denef, F. Loeser, *Germs of arcs on singular varieties and motivic integration*, Invent. Math. **135** (1999), 201–232.

[DeK00] V. Dergachev, A.A. Kirillov, *Index of Lie algebras of seaweed type*, J. Lie Theory, **10** (2000), n°2, 331–343.

[Di74] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars (1974).

[Di75] J. Dixmier, *Polarisations dans les algèbres de Lie semi-simples complexes*, Bull. Soc. Math., **99** (1975), 45–63.

[Di76] J. Dixmier, *Polarisations dans les algèbres de Lie II*, Bull. Soc. Math., **104** (1976), 145–164.

[D09] R. Docampo, *Arcs on Determinantal Varieties*, PhD thesis, University of Illinois at Chicago, 2009.

[Du82] M. Duflo, *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques*, Acta Math., **149** (1982), n°3-4, 153–213.

[DKT12] M. Duflo, M. Khalgui and P. Torasso, *Quasi-reductive Lie algebras*, Transform. Groups., **17** (2011), n°2, 417–470.

[Dv03] A. Dvorsky, *Index of parabolic and seaweed subalgebras of $\mathfrak{so}_n$*, Lin. Alg. Appl, **374** (2003), 127–142.

[E85a] A.G. Elashvili, *Sheets of the exceptional Lie algebras*, in : "Issledovaniya po algebre," Tbilisi, 1985, (Russian), 171–194.

BIBLIOGRAPHIE

[E85b] A.G. Elashvili, *On the index of horospherical subalgebras of semisimple Lie algebras*, Proc. Razmadze Math. Institute, Tiflis, **77** (1985), 116–126.

[EK05] A.G. Elashvili and V.G. Kac, *Classification of good gradings of simple Lie algebras*, in Lie groups and invariant theory (E.B. Vinberg ed.), Amer. Math. Soc. Transl. **213** (2005), 85–104.

[FM78] A.S. Fomenko and A.T. Mishchenko, *Euler equations on Lie groups*, Math. USSR Izv., **12** (1978), 371–389.

[GN10] D. Gaitsgory and D. Nadler, *Spherical varieties and Langlands duality*, Mosc. Math. J., **10** (2010), n°1, 65-137.

[GG02] W.L. Gan and V. Ginzburg, *Quantization of Slodowy slices*, Int. Math. Res. Not., (2002), 243–255.

[Ha77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, n°52.

[He76] W.H. Hesselink, *Cohomology and the Resolution of Nilpotent Variety*, Math. Annalen, **223** (1976), 249–252.

[Hi64] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II*, Ann. of Math., (2) **79** (1964), 109–203 ; ibid. (2) **79** (1964), 205–326.

[I12] A. Izosimov, *The derived algebra of a stabilizer, families of coadjoint orbits and sheets*, preprint arxiv :1108.2306.

[J07] A. Joseph, *On semi-invariants and index for biparabolic (seaweed) algebras. II*, J. Algebra, **312** (2007), n°1, 158–193.

[J12a] A. Joseph, *Zhelobenko invariants, Bernstein-Gelfand-Gelfand operators and the analogue Kostant Clifford algebra conjecture*, Transform. Groups **17** (2012), n°3, 781–821.

[J12b] A. Joseph, *Analogue Zhelobenko invariants for the Kostant and Hitchin Clifford algebra conjectures*, Transform. Groups **17** (2012), n°3, 823–833.

[KMM87] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, *Introduction to the Minimal Model Program*, Adv. Studies in Pure Math., **10** (1987), 283–360.

[Ke83] G. Kempken, *Induced conjugacy classes in classical Lie algebras*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamb., **53** (1983), 53–83.

[KNV11] S. Khoroshkin, M. Nazarov and E. Vinberg, *A generalized Harish-Chandra isomorphism*, Adv. Math. **226** (2011), 1168–1180.

[Ki62] A.A. Kirillov, *Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, Uspehi Mat. Nauk., **17** (1962), 57–110.

[Ki68] A.A. Kirillov, *The method of orbits in the theory of unitary representations of Lie groups*, Funkcional. Anal. i Prilozen., **2** (1968), n°1, 96–98.

[Kn91] F. Knop, *The Luna–Vust theory of spherical embeddings*, In : Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989) (Madras), Manoj Prakashan (1991), 225-249.

[KM98] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, **134**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Kon95] M. Kontsevich, *Motivic integration*, Lecture at Orsay (1995), http ://www.mabli.org/old/jet-preprints/Kontsevich-MotIntNotes.pdf.

[Kos59] B. Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a compex simple Lie group*, Amer. J. Math., **81** (1959), 973–1032.

[Kos63] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math., **85** (1963), 327–404.

BIBLIOGRAPHIE

[Kos78] B. Kostant, *On Whittaker vectors and representation theory*, Invent. Math., **48** (1978), 101–184.

[Kos97] B. Kostant, *Clifford Algebra Analogue of the Hopf-Koszul-Samelson Theorem, the ρ-Decomposition on $C(\mathfrak{g}) = \operatorname{End} V_\rho \otimes C(P)$, and the $\mathfrak{g}$-module Structure on $\wedge\mathfrak{g}$*, Adv. Math. **125** (1997), 275–350.

[Kos03] B. Kostant, *Dirac Cohomology for the Cubic Dirac Operator*, Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000), Progr. Math., **210** (2003), Birkhäuser Boston, 69–93.

[KW10] H. Kraft and N. Wallach, *Polarizations and nullcone of representations of reductive groups*, Symmetry and spaces, Progr. Math., **278** (2010), Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 153–167.

[LeS96] T. Levasseur and J. T. Stafford, *The Kernel of an Homomorphism of Harish-Chandra*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, **29** (1996), 385–397.

[Lo10] I. Losev, *Finite W-algebras*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Hindustan Book Agency, New Delhi, vol.III (2010), 1281–1307.

[LuS79] G. Lusztig and N. Spaltenstein, *Induced unipotent classes*, J. London Math. Soc., **19** (1979), 41–52.

[LV83] D. Luna, T. Vust, *Plongements d'espace homogènes*, Comment. Math. Helv., **58** (1983), 186–245.

[L79] T.E. Lynch, *Generalized Whittaker vectors and representation theory*, Ph.D. Thesis, M.I.T., 1979.

[Me12] E. Meinrenken, *Clifford algebras and Lie theory*, http ://www.math.utoronto.ca/~mein/teaching/clif_book.pdf, livre soumis, 2012.

[Mo06a] A. Moreau, *Quelques propriétés de l'indice dans une algèbre de Lie semi-simple*, Thèse, Université Paris 7, 2006.

[Mo06b] A. Moreau, *Indice du normalisateur du centralisateur d'un élément nilpotent dans une algèbre de Lie semi-simple*, Bull. Soc. Math., **134** (2006), n°1, 83–117.

[Mo06c] A. Moreau, *Indice et décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple réelle*, J. Algebra, **303** (2006), n°1, 382–406.

[Mo08] A. Moreau, *On the dimension of the sheets of a reductive Lie algebra*, J. Lie Theory, **18** (2008), n°3, 671–696.

[Mo08b] A. Moreau, *Corrigendum to "On the dimension of the sheets of a reductive Lie algebra"*, en cours d'écriture.

[MY11] A. Moreau and O. Yakimova, *Coadjoint orbits of reductive type of seaweed Lie algebras*, Int. Math. Res. Not., (2011), doi :10.1093/imrn/rnr184.

[Mu01] M. Mustaţă, *Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities*, Invent. Math., **145** (2001), n°3, 397–424, with an appendix by D. Eisenbud and E. Frenkel.

[N95] J.F. Nash, *Arc structure of singularities*, Duke Math. J., **81** (1995), n°1, 31–38 (1996), A celebration of John F. Nash, Jr.

[Pan01] D.I. Panyushev, *Inductive formulas for the index of seaweed Lie algebras*, Moscow Math. J., **303** (2001), n°2, 221–241.

[Pan03a] D.I. Panyushev, *The index of a Lie algebra, the centraliser of a nilpotent element, and the normaliser of the centraliser*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **134** (2003), 41–59.

[Pan03b] D.I. Panyushev, *Some amazing properties of spherical nilpotent orbits*, Math. Z., **245** (2003), n°3, 557–580.

[Pan05] D.I. Panyushev, *An extention of Raïs' theorem and seaweed subalgebras of simple Lie algebras*, Ann. Inst. Fourier, **55**, n°3, 693–715 (2005).

[PPY07] D.I. Panyushev, A. Premet and O. Yakimova, *On symmetric invariants of centralizers in reductive Lie algebras*, J. Algebra, **1** (2007), 343–391.

[Pas07] B. Pasquier, *Variétés horosphériques de Fano*, Thèse, Institut Fourier, 2007.

[Pas08] B. Pasquier, *Variétés horosphériques de Fano*, Bull. Soc. Math., **136** (2008), n°2, 195-225.

[Pau81] F. Pauer, *Normale Einbettungen von G/U*, Math. Ann., **257** (1981), 371–396.

[Pau83] F. Pauer, *Glatte Einbettungen von G/U*, Math. Ann., **262** (1983), n°3, 421–429.

[Pr02] A. Premet, *Special transverse slices and their enveloping algebras*, Adv. Math., **170** (2002), n°1, 1–55, with an appendix by Serge Skryabin.

[PS99] A. Premet, S. Skryabin, *Representations of restricted Lie algebras and families of associative $\mathcal{L}$-algebras*, J. Reine Angew. Math., **507** (1999), 189–218.

[PT] A. Premet and L. Topley, *Derived subalgebras of centralisers and finite W-algebras*, en cours d'écriture.

[RS99] E. Ragoucy and P. Sorba, *Yangian realisations from finite W-algebras*, Comm. Math. Phys., **203** (1999), 551–572.

[Ra06] M. Raïs, *Notes sur l'indice des algèbres de Lie (I)*, préprint arxiv.org/abs/math/0605499.

[Re87] M. Reid, *Young personÕs guide to canonical singularities*, Algebraic Geometry Bowdoin 1985, Proc. Sympos. Pure Math., **46** (1987), 345–416.

[Ri79] R. W. Richardson, *Commuting Varieties of Semisimple Lie Algebras and Algebraic Groups*, Compositio Mathematica, **38** (1979), 311–322.

[Ri89] R. W. Richardson, *Irreducible components of the nullcone*, in : Invariant Theory (Denton, TX, 1986), Contemp. Math., **88** (1989), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 409–434.

[Ro10] R. Rohr, *Principal basis in Cartan subalgebra*, J. Lie Theory **20** (2010), n°4, 673-687.

[Ro63] M. Rosenlicht, *A remark on quotient spaces*, An. Acad. Brasil. Cienc., **35** (1963), 487–489.

[Sa12] G. Sadaka, *χ-admissible subalgebras of $\mathfrak{sl}_{pn}(\mathbb{C})$ and finite W-algebras*, preprint arxiv.org/abs/1206.1436.

[Sl80] P. Slodowy, *Simple singularities and simple algebraic groups*, Lecture Notes in Mathematics, **815**, Springer, Berlin, 1980.

[Sp68] T.A. Springer, *The unipotent variety of a semi-simple group*, 1969 Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), 373–39.

[TY04] P. Tauvel and R.W.T. Yu, *Sur l'indice de certaines algèbres de Lie*, Ann. Inst. Fourier, **54** (2004), n°6, 1793–1810.

[TY05] P. Tauvel and R.W.T. Yu, *Lie Algebras and Algebraic groups*, Monographs in Mathematics (2005), Springer, Berlin Heidelberg, New York.

[Ti11] D. Timashev, *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, **8**. Springer, Heidelberg, 2011.

[To12] L. Topley, *Symmetric Invariants of Centralisers in Classical Lie Algebras and the KW1 Conjecture*, preprint arxiv.org/abs/1108.2306.

[Va84] I. Vainsencher, *Complete collineations and blowing up determinantal ideals*, Math. Ann., **267** (1984), n°3, 417–432.

[Ve06] W. Veys, *Arc spaces, motivic integration and stringy invariants*, Advanced Studies in Pure Mathematics **43**, Proceedings of "Singularity Theory and its applications, Sapporo (Japan), 16-25 september 2003" (2006), 529-572.

[Ya06] O. Yakimova, *The index of centralizers of elements in classical Lie algebras*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., **40** (2006), n°1, 52–64, 96.

[Ya07] O. Yakimova, *A counterexample to Premet's and Joseph's conjecture*, Bull. London Math. Soc., **39** (2007), 749–754.

[Ya10] O. Yakimova, *On the derived algebra of a centraliser*, Bull. des Sciences Math., **134** n°6 (2010), 579–587.

[Yu07] C. Yuen, *Jet schemes of determinantal varieties*, Algebra, geometry and their interactions, 261–270, Contemp. Math., **448** (2007), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 261–270.