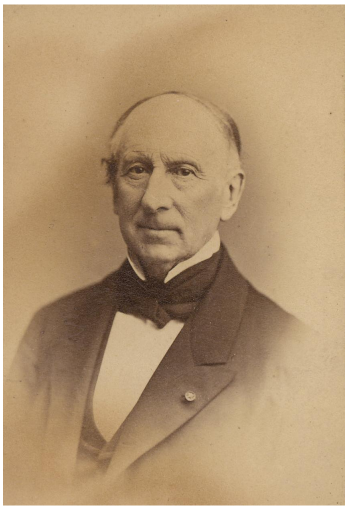
Université Paris-Saclay
Magistère de mathématiques

Année 2025–2026

L3 – FONCTIONS HOLOMORPHES

Anne Moreau

anne.moreau@universite-paris-saclay.fr
https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~anne.moreau/



***Augustin Louis, baron Cauchy**, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Catholique fervent, il est le fondateur de nombreuses œuvres charitables, dont l'Œuvre des Écoles d'Orient. Royaliste légitimiste, il s'exila volontairement lors de l'avènement de Louis-Philippe, après les Trois Glorieuses. Ses positions politiques et religieuses lui valurent nombre d'oppositions.*

Table des matières

1 Fonctions holomorphes

1.1. Définitions et premières propriétés

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 1.1

On dit qu'une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est ***dérivable au sens complexe*** en $z \in \Omega$ si la limite

$$f'(z) := \lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

existe, où w tend vers z dans $\boxed{\mathbb{C}}$. Si $f'(z)$ existe pour tout $z \in \Omega$ et si la fonction $f'\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ainsi définie est continue, on dit que f est ***holomorphe*** sur Ω.

Une fonction holomorphe sur Ω est donc continue sur Ω. La condition de limite équivaut à dire que la limite

$$f'(z) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$

où h prend des valeurs $\boxed{\text{complexes}}$ non nulles, existe, ou encore qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (unique) tel que

$$f(z+h) = f(z) + \lambda h + o(h),$$

où la notation $o(h)$ signifie que $\frac{|o(h)|}{|h|} \to 0$ quand h tend vers 0 dans $\boxed{\mathbb{C}}$, et on pose alors $f'(z) = \lambda$.

Bien entendu, le complexe λ dépend de z.

La définition 1.1 peut être allégée. On a en effet le résultat suivant (voir le théorème 3.9), que l'on peut omettre en première lecture :

> *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ que l'on suppose dérivable en tout point de Ω. Alors sa dérivée $f'\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est continue.*

L'hypothèse « $f'\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est continue » de la définition est donc superflue.

EXERCICE DE COURS 1.1. Montrer que la fonction $z \mapsto z$ est dérivable sur $\mathbb{C}$, de dérivée constante égale à 1, mais que que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.

La subtilité est que h varie dans un ensemble de dimension deux, de type disque « épointé » autour de 0, pour h assez petit pour que $z+h \in \Omega$. On le voit très bien sur le (non-)exemple $z \mapsto \bar{z}$: le module de h tend vers 0, mais peut aussi tourner ou spiraler autour de 0 !

On note $\mathscr{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

EXERCICE DE COURS 1.2.

(1) Montrer que $\mathscr{O}(\Omega)$ forme une algèbre unitaire pour le produit de fonctions usuel, et que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathscr{O}(\Omega)$, on a :
$$(\lambda f)' = \lambda f', \qquad (f+g)' = f' + g', \qquad (fg)' = f'g + fg'.$$

(2) Montrer que si $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ ne s'annule pas sur Ω, alors $1/f$ est holomorphe sur Ω et que
$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

(3) Soient Ω_1 un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ et $g \in \mathscr{O}(\Omega_1)$ tel que $g(\Omega_1) \subset \Omega$. Montrer que la composée $f \circ g$ est holomorphe sur Ω_1 et que
$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'.$$

(4) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ une application bijective de Ω sur $f(\Omega)$. Montrer que
$$f^{-1} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

EXEMPLE 1.1. 1) Une fonction polynomiale est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2) La fonction $z \mapsto 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Plus généralement, une fraction rationnelle P/Q, où $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, est holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}$ privé des zéros de Q.

3) En revanche, si $P \in \mathbb{C}[X, Y]$, la fonction $z = x + iy \mapsto P(x, y)$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$ en général. Par exemple $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ ne sont dérivables (au sens complexe) en aucun point de $\mathbb{C}$.

1.2. Les conditions de Cauchy–Riemann

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On rappelle qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable de dérivée λ en un point z de Ω si et seulement si, lorsque h tend vers 0, on a :
$$f(z+h) = f(z) + \lambda h + o(h).$$

On rappelle que λ dépend du point z et que h varie dans $\mathbb{C}$!

Cette condition peut encore s'exprimer en disant que, vue comme une application de l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ à valeurs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, f est différentiable en z et que sa différentielle $D_z f$ en z est l'application
$$h \mapsto \lambda h. \tag{1}$$
Une application $\mathbb{R}$-linéaire T de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est de la forme (1) si et seulement si sa matrice dans la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est :
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \tag{2}$$
où $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $\lambda = a + ib$. Cette condition est encore équivalente à la suivante :
$$T(1) + iT(i) = 0,$$
ou encore au fait que T est une application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

REMARQUE 1.1. Géométriquement, une matrice de la forme (2) est une matrice de *similitude directe*, c'est-à-dire la composée d'une rotation et d'une homothétie de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^2$. Ainsi, en tout point z de Ω la jacobienne de la différentielle $D_z f$ d'une fonction holomorphe est une matrice de similitude directe.

On a obtenu la proposition suivante :

Proposition 1.2

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ (vue comme une application définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$). Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est holomorphe,

(ii) les dérivées partielles $\dfrac{\partial f(x+iy)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f(x+iy)}{\partial y}$ satisfont à la relation

$$\frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} + i\frac{\partial f(x+iy)}{\partial y} = 0$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x+iy \in \Omega$,

(iii) pour tout $z \in \Omega$, la différentielle $D_z f$ de f en z est $\mathbb{C}$-linéaire.

La condition (ii) est appelée ***condition de Cauchy–Riemann***.

Lorsque les conditions de la proposition 1.2 sont satisfaites, la différentielle $D_z f$ de f en un point z de Ω , donnée par la multiplication complexe par $f'(z)$, admet pour matrice dans la matrice $(1,i)$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} f'(z) & -\mathrm{Im} f'(z) \\ \mathrm{Im} f'(z) & \mathrm{Re} f'(z) \end{pmatrix}$$

où pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x+iy \in \Omega$,

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

En particulier,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

De plus,

$$\frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} = f'(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x+iy)}{\partial y} = if'(z).$$

En particulier, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 1.3

On suppose que l'ouvert Ω est $\boxed{\text{connexe}}$. Une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est constante si et seulement si $f' = 0$ sur Ω.

EXERCICE DE COURS 1.3. Démontrer la proposition.

Appliquer le théorème des accroissements finis à l'application

$$(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto (u(x+iy), v(x+iy)).$$

EXERCICE DE COURS 1.4. Vérifier que les fonctions suivantes sont holomorphes dans leur domaine de définition et qu'elles satisfont les conditions de Cauchy–Riemann :

$$z^3, \quad \frac{1}{z+1}, \quad \frac{e^z}{z^5}, \quad \frac{z^7}{z^2+1},$$

où l'application $z \mapsto e^z$ est définie à la section 1.4.

Exercice de cours 1.5.

(1) Montrer qu'en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, les équations de Cauchy–Riemann prennent la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Indication : vérifier d'abord les formules :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

(2) Utiliser ces équations pour montrer que la fonction *logarithme* définie par :

$$\log z := \log r + i\theta$$

pour $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$ est holomorphe.

Exercice de cours 1.6. Soit la fonction

$$f(x+iy) = \sqrt{|x|\,|y|}$$

définie pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f satisfait les conditions de Cauchy–Riemann en $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, mais qu'elle n'est pas différentiable au sens complexe en $0 \in \mathbb{C}$.

Définition 1.4

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$. On dit qu'une application $\varphi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ est ***biholomorphe*** lorsque φ est bijective et que φ et φ^{-1} sont holomorphes.

La question (4) de l'exercice 1.2 montre que l'on a alors pour tout $w \in \Omega_2$:

$$(\varphi^{-1})'(w) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(w))}.$$

Proposition 1.5 – inversion locale holomorphe

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$. Si $f'(z_0) \neq 0$, alors il existe des voisinages ouverts U de z_0 dans Ω et V de $f(z_0)$ dans $\mathbb{C}$ tels que f établisse une bijection biholomorphe de U sur V.

Exercice de cours 1.7. Démontrer la proposition à l'aide du théorème d'inversion locale (pour les applications de classe $\mathscr{C}^1$ entre ouverts de $\mathbb{R}^2$).

Corollaire 1.6 – application ouverte

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ tel que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Alors f est une application ***ouverte***, c'est-à-dire que l'image de tout ouvert est un ouvert de $\mathbb{C}$.

1.3. Séries entières

Nous allons voir que la famille des séries entières, qui englobe celle des polynômes, donne des exemples fondamentaux de fonctions holomorphes. Plus loin, nous verrons que toute fonction holomorphe est *localement* une série entière.

Rappels sur les séries entières. Une ***série entière*** est une série de fonctions de la forme $\sum_{n\geqslant 0}(z\mapsto a_n z^n)$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes et z la variable, que l'on note, selon l'usage, simplement $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Son ***rayon de convergence*** $\rho\in[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$ est défini par les propriétés suivantes :

– pour tout $r\in\mathbb{R}_+$ tel que $r<\rho$, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque fermé
$$\bar{D}(0,r):=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|\leqslant r\}.$$

– pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>\rho$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et a fortiori la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge.

On a donc l'égalité :
$$\rho=\sup\{r\geqslant 0\colon \text{ la suite } (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\},$$
ainsi que la formule de Hadamard :
$$\frac{1}{\rho}=\limsup_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}},$$
avec la convention $\frac{1}{0}=+\infty$ et $\frac{1}{\infty}=0$.

__Jacques Salomon Hadamard__, né le 8 décembre 1865 à Versailles et mort le 17 octobre 1963 à Paris, est un mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres, en analyse complexe, en analyse fonctionnelle, en géométrie différentielle et en théorie des équations aux dérivées partielles.

Voir si besoin https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~anne.moreau/M41-cours-2019.pdf pour des rappels de deuxième année sur les suites et séries de fonctions.

Proposition 1.7 – les séries entières sont holomorphes

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho>0$. La fonction $f\colon D(0,\rho)\to\mathbb{C}$ qu'elle définit sur le disque $\boxed{\text{ouvert}}$
$$D(0,\rho):=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<\rho\}$$
est holomorphe et, pour tout $z\in D(0,\rho)$, on a
$$f'(z)=\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}.$$

On rappelle que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence ρ que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et donc le second membre de l'expression de $f'(z)$ dans la proposition est bien convergent.

La proposition s'applique aussi à f', f'', etc. et l'on obtient par une récurrence immédiate :

Corollaire 1.8

Dans les conditions de la proposition 1.7, la fonction f admet des dérivées (au sens complexe) à tous les ordres, données par des séries entières convergentes sur $D(0,\rho)$. Précisément, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in D(0,\rho)$, on a :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}.$$

REMARQUE 1.2. On a

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, si $f\colon D(0,\rho) \to \mathbb{C}$ est somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, cette série est la série de Taylor de f en 0.

***Brook Taylor**, est un homme de science anglais, né à Edmonton, aujourd'hui un quartier de Londres, le 18 août 1685, et mort à Londres le 29 décembre 1731. Principalement connu comme mathématicien, il s'intéressa aussi à la musique, à la peinture et à la religion.*

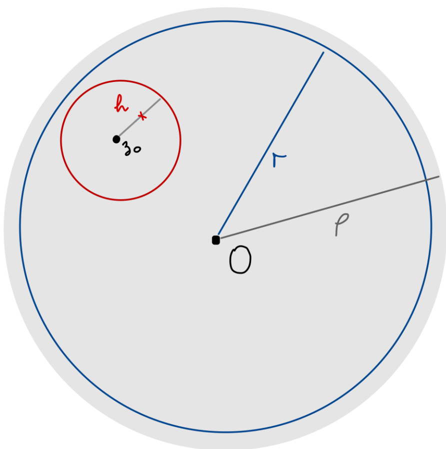


FIGURE 1 – z_0 et r comme dans la question (1) de l'exercice 1.8.

EXERCICE DE COURS 1.8. L'objectif de l'exercice est de démontrer la proposition 1.7. Soit z_0 dans $D(0,\rho)$.

(1) Soit r tel que $|z_0| < r < \rho$ (voir la figure 1). Établir :

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - \sum_{n\geqslant 1} n a_n z_0^{n-1} = \sum_{n\geqslant 2} a_n v_n(h),$$

où $v_n(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0 à n fixé, et

$$|a_n v_n(h)| \leqslant 2n|a_n| r^{n-1},$$

pour tout h tel que $|z_0| + |z_0 - h| < r$.

(2) Conclure en observant que le membre de droite de la question (1) est le terme général d'une série convergente, et qu'il tend vers 0 quand h tend vers 0.

1.4. Exponentielle complexe, fonctions circulaires et hyperboliques

Voici des exemples importants de séries entières, et donc de fonctions holomorphes.

Définition 1.9

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est de rayon infini. Sa somme, notée $\exp$, est appelée l'***exponentielle complexe***.
On a ainsi :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad \exp z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}.$$

L'exponentielle complexe étend l'exponentielle réelle. On note donc souvent e^z au lieu de $\exp z$.

Définition 1.10

Une fonction ***entière*** est une fonction holomorphe définie sur le plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier.

L'exponentielle complexe est donc une fonction entière. Le théorème suivant se démontre à l'aide du produit de Cauchy de deux séries entières.

Théorème 1.11 – produit de deux exponentielles

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}.$$

EXERCICE DE COURS 1.9.

(1) Vérifier que la la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est en effet de rayon infini, et démontrer le théorème 1.11.

(2) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}, \qquad (e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \qquad |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Théorème 1.12 – l'application exponentielle est continue et surjective

(i) L'application $\exp\colon z \mapsto e^z$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.
(ii) Il existe un unique réel positif, noté π, tel que $\mathrm{Ker}\,(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$.
(iii) On a $e^{i\pi} = -1$ et $e^{i\pi/2} = i$.

Tout nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$ admet donc une ***expression polaire***

$$z = re^{i\theta}$$

où $r = |z| \in]0, +\infty[$ et où $\theta \in \mathbb{R}$ est défini modulo $2\pi\mathbb{Z}$.

Le fait que $\exp$ soit un morphisme de groupes est clair d'après le théoreme 1.11. La surjectivité découle de l'exercice suivant.

EXERCICE DE COURS 1.10 (surjectivité de l'exponentielle). À l'aide du corollaire 1.6, montrer que l'application $\exp$ est ***ouverte***, c'est-à-dire que l'image de tout ouvert est un ouvert de $\mathbb{C}$. En déduire que l'image de $\exp$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et que l'application $\exp$ est surjective.

EXERCICE DE COURS 1.11.

(1) Vérifier que $\mathrm{Ker}(\exp) \subset i\mathbb{R}$.

(2) Déterminer le noyau du morphisme de groupes

$$\psi \colon t \in (\mathbb{R}, +) \mapsto e^{it} \in (\mathbb{U}, \times)$$

où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de modules 1. En déduire l'assertion (ii) du théorème 1.12.

(3) Montrer l'assertion (iii) du théorème 1.12.

On définit aussi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\mathrm{ch}\, z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \mathrm{sh}\, z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Les séries entières ci-dessus sont toutes de rayon infini, et leurs sommes coïncident sur $\mathbb{R}$ avec les fonctions $\cos$, $\sin$, ch et sh respectivement.

Proposition 1.13 – autres expressions des fonctions circulaires et hyperboliques

Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \mathrm{ch}\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{sh}\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}, \quad \cos z - i \sin z = e^{-iz}, \quad \mathrm{ch}\, z + \mathrm{sh}\, z = e^{z}, \quad \mathrm{ch}\, z - \mathrm{sh}\, z = e^{-z},$$

$$\cos z = \mathrm{ch}(iz), \qquad i \sin z = \mathrm{sh}(iz).$$

EXERCICE DE COURS 1.12. Montrer pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} \cos z = 0 \iff z \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, \\ \sin z = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, on pose

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on pose

$$\mathrm{cotan}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

On se convaincra aisément que les formules de trigonométrie relatives aux fonctions circulaires d'une variable réelle restent en grande partie valables pour les fonctions circulaires d'une variable complexe. On a par exemple pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \\
&\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin w \sin z, \\
&\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \\
&\cos z + \cos w = 2\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)\cos\left(\frac{z+w}{2}\right), \\
&\sin z + \sin w = 2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right), \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

D'après la proposition 1.13 et ses conséquences, notamment,

$$i \operatorname{sh} z = \sin(iz), \quad \operatorname{ch} z = \cos(iz),$$

on obtient les formules de trigonométrie hyperbolique à partir des formules de trigonométrie circulaire. Par exemple, à partir de la relation $\sin(z-w) = \sin z \cos w - \cos z \sin w$, on obtient pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$:

$$\operatorname{sh}(z-w) = \operatorname{sh}(z)\operatorname{ch}(w) - \operatorname{ch}(z)\operatorname{sh}(w).$$

En revanche, les relations

$$\cos t = \operatorname{Re}(e^{it}) \quad \text{et} \quad \sin t = \operatorname{Im}(e^{it})$$

ne sont valables que lorsque $t \in \mathbb{R}$.

1.5. Logarithme(s)

Dans le domaine réel, l'application $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection croissante. Son inverse est le ***logarithme néperien***, noté $\log\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Dans le domaine complexe, l'application $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective, mais non injective. Quand $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $z = e^w = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$, nous observons que :

— la partie réelle a de w est bien définie, avec $a = \log|z|$.

— la partie imaginaire b de w n'est déterminée qu'à 2π près. On dit que b est $\boxed{\text{un}}$ ***argument*** de z.

Lorsqu'on écrit $z \in \mathbb{C}^*$ sous la forme $z = e^w$, le complexe w est appelé $\boxed{\text{un}}$ ***logarithme*** de z : il n'est défini qu'à $2i\pi$ près. On dit que le logarithme complexe est une fonction ***multiforme*** (ou ***multivaluée***).

Définition 1.14

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est appelée une ***détermination continue du logarithme*** lorsque

(i) f est continue,

(ii) pour tout $z \in \Omega$, on a $z = e^{f(z)}$.

EXERCICE DE COURS 1.13.

(1) Montrer qu'il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$ tout entier.

(2) Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$ et $f_0\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une détermination continue du logarithme sur Ω. Montrer que les autres déterminations continues du logarithme sur Ω sont exactement les fonctions

$$f_n = f_0 + 2i\pi n \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 1.15 – conditions nécessaire et suffisante pour avoir une détermination continue du logarithme

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^*$.

(i) Si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est une détermination continue du logarithme sur Ω, alors f est holomorphe et on a, pour tout $z \in \Omega$:
$$f'(z) = \frac{1}{z}.$$

(ii) On suppose que l'ouvert Ω est $\boxed{\text{connexe}}$. Soit $g \in \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $g'(z) = \dfrac{1}{z}$ pour tout $z \in \Omega$. Alors il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que
$$\Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto g(z) - \alpha$$
soit une détermination continue du logarithme.

Exercice de cours 1.14.

(1) Démontrer l'assertion (i) de la proposition.

> Indication : remarquer que $\exp(f(z+h) - f(z)) = 1 + \dfrac{h}{z}$ et utiliser le développement limité de $\exp$ au voisinage de 0.

(2) Démontrer l'assertion (ii) de la proposition.

> Indication : poser $h(z) = \dfrac{\exp(g(z))}{z}$ et appliquer la proposition 1.3.

Remarque 1.3. Si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, une ***primitive*** de f est une fonction holomorphe $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $F' = f$. Nous étudierons l'existence de primitives holomorphes pour une fonction continue en détail plus loin dans le cours.

Puisque l'exponentielle $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes surjectif, de noyau $\operatorname{Ker}\exp = 2i\pi\mathbb{Z}$, sa restriction à la bande horizontale semi-fermée
$$\{z \in \mathbb{C}\colon -\pi \leqslant \operatorname{Im}(z) < \pi\}$$
est donc bijective.

L'image de la droite $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(z) = -\pi\}$ est $\mathbb{C}^* \cap \mathbb{R}_{\leqslant 0}$. Il s'ensuit que la restriction
$$\exp\colon \{z \in \mathbb{C}\colon -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0}$$
de $\exp$ à la bande ouverte est une application holomorphe bijective, dont la dérivée est partout non nulle.

Elle réalise donc un biholomorphisme entre ces deux ouverts (voir la proposition 1.5). L'application réciproque
$$\ell_\pi\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C}\colon -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$$
est appelée la ***détermination principale du logarithme***. Elle prolonge au plan coupé $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0}$ le logarithme réel $\log\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Nous avons rencontré ce logarithme lors de l'exercice 1.5.

> Les règles usuelles du logarithme réel ne sont plus toujours valables. Par exemple,
> $$-\frac{2i\pi}{3} = \log(j^2) \neq 2\log(j) = \frac{4i\pi}{3}.$$

La ***détermination principale de l'argument*** correspondante, notée $\arg_\pi$, prend ses valeurs dans $]-\pi, \pi[$.

EXERCICE DE COURS 1.15. Montrer que cette détermination principale du logarithme est maximale, au sens où elle ne se prolonge pas en une détermination continue du logarithme sur un ouvert plus grand.

Dans la suite du cours, $\log(z)$ désignera toujours la détermination principale du logarithme.

EXERCICE DE COURS 1.16.

(1) Montrer que la détermination principale du logarithme est développable en série entière sur le disque ouvert $D(1,1)$ et que l'on a pour tout $z \in D(1,1)$,

$$\log(z) = \ell_\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}.$$

(2) Soit $a \in \mathbb{C}^*$.

(2.1) Montrer que la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est développable en série entière sur le disque ouvert $D(a,|a|)$ et déterminer ce développement.

(2.2) Montrer qu'il existe une détermination continue du logarithme $\ell\colon D(a,|a|) \to \mathbb{C}$ et que ℓ est développable en série entière sur le disque ouvert $D(a,|a|)$. Expliciter son dévelopement.

REMARQUE 1.4. Si Δ est une demi-droite fermée issue de l'origine et si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un argument (commun !) pour tous les éléments de $\Delta \setminus \{0\}$, on obtient de même une détermination continue du logarithme

$$\ell_\alpha \colon \mathbb{C} \setminus \Delta \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \colon \alpha - 2\pi < \mathrm{Im}(z) < \alpha\}$$

sur le plan coupé $\mathbb{C} \setminus \Delta$.

Les déterminations ℓ_α et $\log = \ell_\pi$ ont même partie réelle, égale à $z \mapsto \log|z|$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Un nombre complexe non nul z possède exactement k racines k-ième w telle que $w^k = z$, qui diffèrent toutes d'une racine k-ième de l'unité.

Comme pour le logarithme, on peut se poser la question de l'existence d'une détermination continue (ou holomorphe) de la fonction ***racine k-ième*** sur un ouvert de $\mathbb{C}^*$.

EXERCICE DE COURS 1.17. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^*$. un ouvert sur lequel il existe une détermination continue (donc holomorphe) $\ell\colon \Omega \to \mathbb{C}$ du logarithme. Montrer que l'application

$$r_k \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \exp\left(\frac{1}{k}\ell(z)\right).$$

fournit une détermination holomorphe de la racine k-ième sur Ω.

Fonctions multiformes et surfaces de Riemann

Les calculs faisant intervenir des fonctions multiformes sont parfois lourds et compliqués. Riemann a eu l'idée de transformer les fonctions multiformes en fonctions uniformes (un point n'a qu'une seule image), en modifiant le domaine de définition. Il recolle pour cela continûment plusieurs représentations du domaine de définition, les feuillets, et obtient le concept de *surface de Riemann*.

***Georg Friedrich Bernhard Riemann**, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, État de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à l'analyse et à la géométrie différentielle, certaines d'entre elles ayant permis par la suite le développement de la relativité générale.*

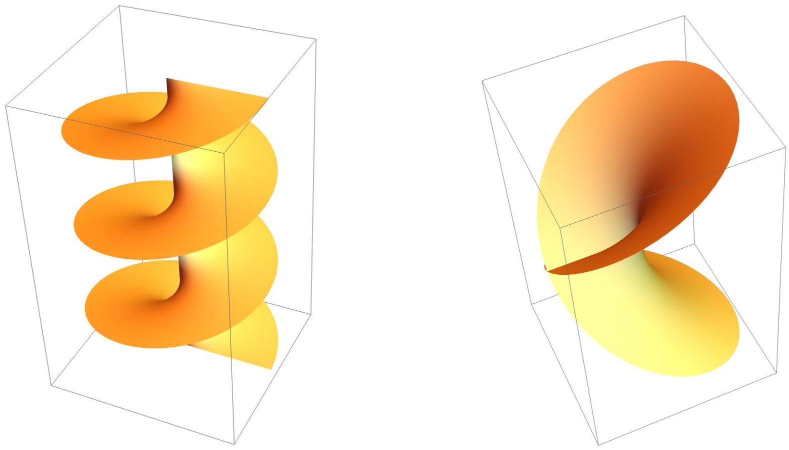


FIGURE 2 – Surfaces de Riemann associées au logarithme et à la racine carrée

1.6. Fonctions analytiques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 1.16

On dit qu'une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est ***analytique*** si, pour tout point $a \in \Omega$, il existe un réel $r > 0$ et une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $\geqslant r$ tels que le disque ouvert $D(a,r)$ soit contenu dans Ω et que, pour tout point z de ce disque,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n. \tag{3}$$

D'après la proposition 1.7 et son corollaire 1.8, une telle fonction est indéfiniment dérivable au sens complexe sur Ω. De plus, d'après la remarque 1.2, les coefficients a_n apparaissant dans la formule (3) sont nécessairement donnés par

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Le développement (3) n'est autre que le développement de Taylor de f au point a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

EXERCICE DE COURS 1.18. Montrer que l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω forme une algèbre unitaire et que les fonctions polynomiales et l'application $\exp$ sont analytiques sur $\mathbb{C}$.

> Utiliser le produit de Cauchy de deux séries entières.

Montrer aussi que la fonction $z \mapsto 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

On peut généraliser les exemples de l'exercice précédent.

Proposition 1.17 – la somme d'une série entière est une fonction analytique

La somme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

d'une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ définit une fonction analytique sur le disque ouvert $D(0,\rho)$.

D'après le corollaire 1.8, on sait déjà que f est indéfiniment dérivable sur $D(0,\rho)$ et que pour tout $z_0 \in D(0,\rho)$,

$$f^{(n)}(z_0) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k z_0^{k-n}.$$

EXERCICE DE COURS 1.19. Soient $z_0 \in D(0,\rho)$ et $z \in D(z_0, \rho - |z_0|)$.

(1) En exprimant $f(z)$ d'une part, et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ d'autre part, en fonction des coefficients a_n et des puissances $(z-z_0)^n$, montrer que le développement de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ converge vers $f(z)$ si la somme double

$$\sum_{\substack{(n,k)\in\mathbb{N}^2 \\ n\leqslant k}} \frac{k!}{n!(k-n)!} a_k z_0^{k-n} (z-z_0)^n$$

est absolument sommable.

(2) Montrer que c'est le cas, et conclure.

Nous verrons plus loin l'équivalence entre holomorphie et analycité (Théorème 2.4).

REMARQUE 1.5. L'exercice 1.19 fournit une démonstration indépendante de l'holomorphie des séries entières (Proposition 1.7). Réciproquement, la proposition 1.7 apparaîtra comme une conséquence de la proposition 1.17 lorsque nous disposerons du théorème 2.4 (équivalence entre holomorphie et analycité).

1.7. Zéros des fonctions analytiques

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Considérons le développement de Taylor de f en un point a de Ω :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

valable pour tout z dans le disque ouvert $D(a,\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Deux possibilités se présentent :

1) ou bien toutes les dérivées $f^{(n)}(a)$ sont nulles ; f est alors nulle au voisinage de a,
2) ou bien l'une de ces dérivées est non nulle. Soit $f^{(n_0)}(a)$ la première d'entre elles.

   On peut alors écrire, si $z \in D(a,\varepsilon)$,

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = (z-a)^{n_0} g(z),$$

   où

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+n_0)}(a)}{(k+n_0)!}(z-a)^k.$$

   La fonction $g\colon D(a,\varepsilon) \to \mathbb{C}$ ainsi définie est analytique, donc continue, et

$$g(a) = \frac{f^{(n_0)}(a)}{n_0!} \neq 0.$$

   Ainsi, g ne s'annule pas au voisinage de a, et f ne s'annule pas sur un ***voisinage épointé*** de a, c'est-à-dire un voisinage de a privé du point a.

Définition 1.18

L'entier n_0 est appelé la ***multiplicité***, ou l'***ordre du zéro de*** f ***en*** a, ou encore la ***valuation*** de f en a. On le note $v_a(f)$.

Autrement dit, $v_a(f)$ est un entier positif défini, lorsque f n'est pas identiquement nulle au voisinage de a, par

$$v_a(f) = 0 \iff f(a) \neq 0.$$

Rappelons qu'un ***point d'accumulation*** d'une partie A de Ω est un point a de l'adhérence de $A \setminus \{a\}$ dans Ω.

Théorème 1.19 – zéros des fonctions analytiques

Soient Ω un ouvert $\boxed{\text{connexe}}$ non vide de $\mathbb{C}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est identiquement nulle sur Ω,

(ii) l'ensemble des zéros de f possède un point d'accumulation $\boxed{\text{dans } \Omega}$,

(iii) il existe $a \in \Omega$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f^{(n)}(a) = 0.$$

EXERCICE DE COURS 1.20. L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème 1.19.

(1) Démontrer les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Rightarrow$ (iii) à l'aide de la discussion précédente.

(2) On considère l'ensemble
$$Z = \{z \in \Omega\colon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z) = 0\}.$$
Montrer que Z est une partie à la fois fermée et ouverte de Ω et en déduire l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) du théorème.

Corollaire 1.20 – principe du prolongement analytique

Soient f, g deux fonctions analytiques définies sur un ouvert $\boxed{\text{connexe}}$ Ω de $\mathbb{C}$. Si f et g coïncident sur une partie de Ω ayant un point d'accumulation dans Ω, alors elles coïncident.

Corollaire 1.21 – principe des zéros isolés

Soit f une fonction analytique définie sur un ouvert $\boxed{\text{connexe}}$ Ω de $\mathbb{C}$. Si f n'est pas identiquement nulle, alors tous les zéros de f sont isolés.

EXERCICE DE COURS 1.21. Démontrer ces deux corollaires à l'aide du théorème 1.19.

EXERCICE DE COURS 1.22. Soit
$$f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right).$$
Montrer que f est analytique sur le disque ouvert $D(0,1)$. Déterminer les zéros de f. A-t-on une contradiction avec le principe des zéros isolés ?

2

La théorie de Cauchy

2.1. Intégration le long d'un chemin

On rappelle qu'une application continue $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ définie sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est de ***classe*** $\mathscr{C}^1$ ***par morceaux*** lorsqu'il existe une subdivision

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

de son intervalle de définition telle que chaque restriction $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ soit de classe $\mathscr{C}^1$ (on ne considère alors que la dérivée à droite en a_i et à gauche en a_{i+1}).

On appelle ***chemin*** de $\mathbb{C}$ une application $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux définie sur un segment de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que γ est ***fermé***, ou que c'est un ***lacet***, lorsque $\gamma(a) = \gamma(b)$.

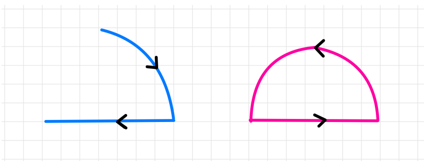


FIGURE 3 – Un chemin et un chemin fermé

Définition 2.1

Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur une partie Ω de $\mathbb{C}$. On définit son ***intégrale de long d'un chemin*** $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ par :

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Dans l'écriture $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$, la lettre z est une variable muette et peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre. On note parfois simplement $\displaystyle\int_\gamma f$.

L'intégrable d'une fonction continue le long d'un chemin est donc simplement l'intégrable d'une fonction de variable réelle à valeurs complexes.

Voici quelques propriétés élémentaires de l'intégration de long d'un chemin. Soient Ω, γ et f comme dans la définition 2.1.

(a) **Invariance par reparamétrage.** Soit $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une bijection $\mathscr{C}^1$ croissante. Posons $\tilde\gamma = \gamma \circ \varphi$. Alors $\tilde\gamma$ est un chemin défini sur $[\alpha,\beta]$ et

$$\int_{\tilde\gamma} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

(b) **Chemin opposé.** Soit γ^* le chemin opposé à γ défini par

$$\gamma^* \colon [a,b] \to \Omega, \quad t \mapsto \gamma(a+b-t).$$

Alors

$$\int_{\gamma^*} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

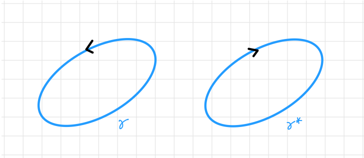


FIGURE 4 – chemin opposé

(c) **Concaténation.** Soit $c \in [a,b]$ et soient

$$\gamma_1 := \gamma|_{[a,c]} \quad \text{et} \quad \gamma_2 := \gamma|_{[c,b]}.$$

Le chemin γ est ainsi la « concaténation » des chemins γ_1 et γ_2, et on a :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

On note parfois $\gamma_1 * \gamma_2$ la concaténation des chemins γ_1 et γ_2.

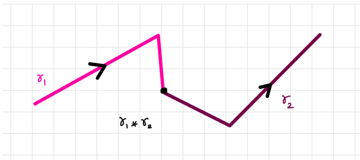


FIGURE 5 – concatenation de deux chemins

(d) **Majoration par la norme uniforme.** Il découle de la formule de la définition 2.1 que

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leqslant \sup_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|dt$ est, par définition, la ***longueur*** de γ.

EXERCICE DE COURS 2.1. Soient Ω, γ et f comme dans la définition 2.1.

(1) Vérifier les propriétés ci-dessus.

(2) Supposons que Ω soit un ouvert de $\mathbb{C}$ et qu'il existe une fonction holomorphe $F \colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

$$F' = f.$$

Montrer que

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En déduire que si γ est un chemin fermé (un lacet), alors

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

(3) Soit $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) = e^{it}$. Montrer que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi.$$

Une fonction holomorphe F comme à la question (2) de l'exercice 2.1 est appelée une ***primitive*** de f sur Ω. On déduit de la question (3) que la fonction $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Le calcul élémentaire de la question (3) est fondamental. Il sera la base de la définition de l'indice, et du théorème des résidus.

Voici quelques chemins particuliers très utiles :

– si $a \in \mathbb{C}$ et $r \geqslant 0$, le ***cercle*** dans le sens direct de centre a et de rayon r désigne le chemin fermé
$$\mathscr{C}(a,r): \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & a + re^{it}. \end{array}$$
Sa longueur est $2\pi r$.

– pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, le ***segment*** d'origine a et l'extrémité b désigne le chemin
$$[a,b]: \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & a + t(b-a). \end{array}$$
Sa longueur est $|b-a|$.

EXEMPLE 2.1. Soit ℓ_π la détermination principale du logarithme. Alors pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0}$, on a :
$$\ell_\pi(w) = \int_{[1,w]} \frac{dz}{z}.$$
On vérifie cela grâce à la proposition 1.15. Notons que le chemin $[1,w]$ évite l'orgine !

EXERCICE DE COURS 2.2 (quelques exemples de calculs).

(a) Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer l'intégrale :
$$\int_{\mathscr{C}(0,1)} z^n dz.$$
(b) Même question pour
$$\int_{\mathscr{C}(a,r)} z^n dz,$$
où $\mathscr{C}(a,r)$ est un cercle qui ne contient pas l'origine.

(c) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|a| < r < |b|$. Montrer :
$$\int_{\mathscr{C}(0,r)} \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2i\pi}{a-b}.$$

2.2. La formule de Cauchy

Nous pouvons à présent énoncer et démontrer un résultat fondamental, la formule de Cauchy.

Théorème 2.2 – formule de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, et soient $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que le disque fermé $\bar{D}(a,r)$ soit contenu Ω. Pour tout $z \in D(a,r)$, on a alors :
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{a+re^{it}-z} re^{it} dt.$$

En particulier, la valeur de la fonction holomorphe f au centre du disque est égale à la moyenne de f sur le bord du disque :
$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) dt.}$$

On dit que f satisfait la ***propriété de la moyenne***.

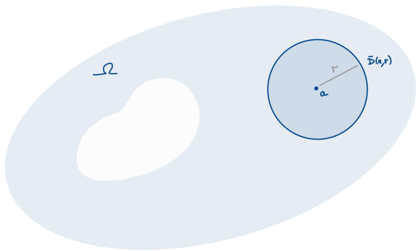


FIGURE 6 – Un disque fermé $\bar{D}(a, r)$ contenu dans un ouvert Ω

Corollaire 2.3

Dans les notations du théorème 2.2, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

La série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence $\geqslant r$ et, pour tout $z \in D(a, r)$, on a :

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z-a)^n.$$

EXERCICE DE COURS 2.3. L'objectif de l'exercice est de démontrer le corollaire.

(1) Observer que pour tout $z \in D(a, r)$ et tout $w \in \partial \bar{D}(a, r)$, où

$$\partial \bar{D}(a, r) = \bar{D}(a, r) \setminus D(a, r),$$

on a

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} \left(1 - \frac{z-a}{w-a}\right)^{-1} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^n},$$

et que cette série, pour z fixé, converge uniformément en $w \in \partial \bar{D}(a, r)$.

(2) À l'aide de la formule de Cauchy (Théorème 2.2), démontrer le corollaire.

> Remarquer que la convergence uniforme en $w \in \mathscr{C}(a, r)$ de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n$ permet de permuter les signes $\int_{\mathscr{C}(a,r)}$ et $\sum_n$.

Le corollaire 2.3 permet de démontrer le résultat suivant.

Théorème 2.4 – l'holomorphie et l'analycité sont équivalentes

Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est holomorphe sur Ω,

(ii) f est analytique sur Ω.

Plus précisément, lorsqu'elles sont réalisées, pour tout disque ouvert $D(a,\rho)$ contenu dans Ω, la série de Taylor de f en a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

converge vers $f(z)$ pour tout $z \in D(a,\rho)$.

Le théorème assure notamment que pour tout $R \in]0,+\infty[$, les fonctions analytiques sur le disque $D(0,R)$ sont exactement les fonctions définies par une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $\geqslant R$, et les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$, appelées ***fonctions entières*** (Définition 1.10), sont exactement les fonctions définies par une série entière de rayon de convergence infini.

Voici en quels termes Cauchy énonce ce résultat ($\sim$1841) :

La fonction $f(x)$ sera développable par la formule de Maclaurin en une série entière convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes en x, si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction (ou sa dérivée du premier ordre) cesse d'être finie ou continue.

Colin Maclaurin *(1698 – 1746) est un mathématicien écossais. Il fut professeur de mathématiques au Marischal College à Aberdeen de 1717 à 1725 et à l'université d'Édimbourg de 1725 à 1745. Il fit des travaux remarquables en géométrie, plus précisément dans l'étude de courbes planes. Il écrivit un important mémoire sur la théorie des marées.*

EXERCICE DE COURS 2.4. L'objectif de l'exercice est de démontrer le théorème 2.4.

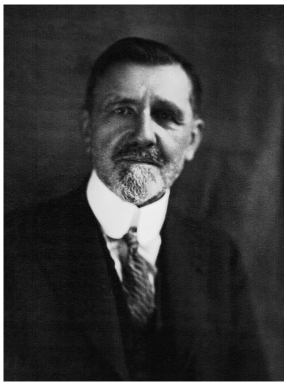
(1) Démontrer l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) à l'aide de la proposition 1.7.

(2) Démontrer l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) et la dernière assertion à l'aide du corollaire 2.3.

La situation dans le cas complexe est donc très différente du cas réel ! Rappelons qu'il existe des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sans être de classe $\mathscr{C}^\infty$ (par exemple $x \mapsto |x|^3$). Par ailleurs la fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$, prolongée par continuité en 0, est de classe $\mathscr{C}^\infty$, ses dérivées à tous les ordres sont nulles en 0, donc sa série de Taylor en 0 est la série nulle. Pourtant $f(x) \neq 0$ si $x \neq 0$. Cette fonction n'est donc pas ***développable en série entière***, c'est-à-dire égale à sa somme de Taylor.

Dans le domaine réel, il se peut également que le rayon de convergence de la série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ soit nul (prendre par exemple $a_n = n!$ dans le théorème de Borel ci-dessous).

***Émile Borel**, né à Saint-Affrique le 7 janvier 1871 et mort à Paris le 3 février 1956, est un mathématicien français, professeur à la Faculté des sciences de Paris. Il est connu pour ses travaux fondamentaux dans les champs de la théorie de la mesure et des probabilités. Membre de l'Académie des sciences, homme politique français, député et ministre, ses actions pour la Société des Nations et au sein de son Comité fédéral de Coopération européenne font de lui un des précurseurs de l'idée européenne.*



On énonce, à titre culturel seulement, le résultat suivant, dû à Émile Borel.

Théorème 2.5 – Borel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Il existe une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ pour laquelle pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(0)=a_n$.

2.3. Le principe du module maximum

Proposition 2.6

Soit f une fonction analytique sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et soient $a\in\Omega$ et $r>0$ tels que le disque fermé $\bar{D}(a,r)$ soit contenu dans Ω. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(a,r)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

et

$$\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right|\leqslant r^{-n}\max_{\theta\in[0,2\pi]}|f(a+re^{i\theta})|. \tag{4}$$

L'inégalité (4) de la proposition est appelée une ***inégalité de Cauchy***.

EXERCICE DE COURS 2.5. Démontrer la proposition à l'aide du corollaire 2.3 et de la majoration de la norme (d).

L'inégalité de Cauchy possède la conséquence remarquable suivante.

Théorème 2.7 – Liouville

Une fonction entière, c'est-à-dire analytique sur $\mathbb{C}$, bornée est constante.

EXERCICE DE COURS 2.6. Démontrer le théorème à l'aide de la proposition 2.6.

***Joseph Liouville**, né le 24 mars 1809 à Saint-Omer et mort le 8 septembre 1882 à Paris, est un mathématicien français. Il est le fils d'un militaire décoré à la bataille d'Austerlitz et qui, en 1814, établit sa famille à Toul. Il est diplômé de l'École polytechnique (1825). Deux ans plus tard, il intègre l'École des ponts et chaussées, dont il n'obtient pas le diplôme en raison de problèmes de santé et, surtout, de sa volonté de suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur. Il obtient le doctorat ès sciences mathématiques en 1836 devant la faculté des sciences de Paris sous la direction de Siméon Denis Poisson et Louis Jacques Thenard.*

Le théorème de Liouville implique notamment celui de d'Alembert–Gauss qui affirme que :

« tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant possède une racine dans $\mathbb{C}$ ».

En effet, si P était un tel polynôme sans racine, la fonction $\frac{1}{P}$ serait entière non constante et bornée, car $|P(z)|$ tend vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $+\infty$, ce qui contredirait le théorème de Liouville.

***Jean le Rond D'Alembert**, né le 16 novembre 1717 à Paris où il est mort le 29 octobre 1783, est un mathématicien, physicien, philosophe et encyclopédiste français. Il est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec Denis Diderot jusqu'en 1757 et pour ses recherches en mathématiques sur les équations différentielles et les dérivées partielles.*

***Johann Carl Friedrich Gauss**, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il apporte de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.*

Rappels (identité de Parseval). Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique de carré intégrable sur une période (par exemple, une fonction T-périodique continue par morceaux). On définit ses coefficients de Fourier par :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}dt.$$

L'égalité de Parseval affirme la convergence de la série suivante et énonce l'identité :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \|f\|^2.$$

***Marc-Antoine Parseval des Chênes**, né le 27 avril 1755 à Rosières-aux-Salines et mort le 16 août 1836 à Paris, est un mathématicien français. On a donné son nom à l'égalité de Parseval, une formule fondamentale de la théorie des séries de Fourier.*

***Jean Baptiste Joseph Fourier** est un mathématicien et physicien français, né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 17 mai 1830 à Paris. Il est connu pour avoir déterminé par le calcul la diffusion de la chaleur, en utilisant la décomposition d'une fonction périodique en une série trigonométrique, qui sous certaines conditions, converge vers la fonction. Il est aussi l'un des premiers à avoir évoqué la notion d'effet de serre pour l'atmosphère terrestre.*

Proposition 2.8 – Parseval

Sous les hypothèses de la proposition 2.6, on a une version plus précise :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Compte tenu de la majoration

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant \max_{\theta\in[0,2\pi]} |f(a+re^{i\theta})|^2,$$

on retrouve l'inégalité de Cauchy (4) de la proposition 2.6.

Exercice de cours 2.7. Démontrer la proposition 2.8 à l'aide de l'identité de Parseval.

> Indication : observer que les coefficients c_n associés à la fonction 2π-périodique $\theta \mapsto f(a+re^{i\theta})$ sont nuls pour $n < 0$.

On va maintenant affiner les estimées de Cauchy (4) pour obtenir des estimées de Cauchy $\boxed{\text{uniformes}}$ pour les dérivées d'une fonction holomorphe sur une partie compacte de son domaine de définition.

Rappel de topologie. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact inclus dans Ω.

— On a
$$d(K,{}^c\Omega) = \min\{|a-b| \colon a \in K,\, b \in {}^c\Omega\} > 0,$$
où $d(K,{}^c\Omega)$ est la distance de K au complémentaire ${}^c\Omega$ de Ω dans $\mathbb{C}$.

— Pour tout r tel que $0 < r < d(K,{}^c\Omega)$, on définit le ***r-voisinage*** K_r de K par :
$$K_r := \bigcup_{z\in K} \bar{D}(z,r) = \{w \in \mathbb{C} \colon d(w,K) \leqslant r\}.$$
Alors K_r est un voisinage compact de K inclus dans Ω (voir la figure 7).

Corollaire 2.9 – estimées de Cauchy uniformes

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact contenu dans Ω, $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $0 < r < d(K,{}^c\Omega)$ et f une fonction holomorphe $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sup_{z\in K} \left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leqslant r^{-n} \sup_{z\in K_r} |f(z)|.$$

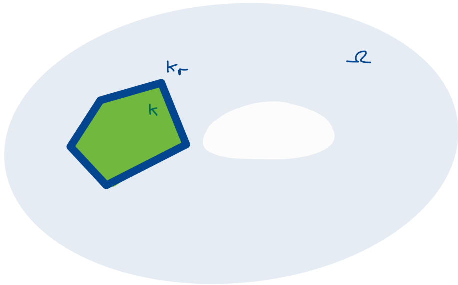


FIGURE 7 – Le voisinage compact K_r

EXERCICE DE COURS 2.8. Démontrer le corollaire.

Là encore, on note la différence avec le cas réel ! Considérer par exemple, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(kx)$.

La proposition 2.8 montre que si l'inégalité (4) pour $n = 0$ est une égalité, alors nécessairement $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n > 0$. Jointe au principe du prolongement analytique, on obtient :

Proposition 2.10 – principe du maximum

Soit f une fonction analytique sur un ouvert $\boxed{\text{connexe}}$ Ω de $\mathbb{C}$. Si $|f|$ admet un maximum local en un point a de Ω, alors f est constante.

La dénomination « principe du maximum » vient en fait de la conséquence suivante.

Proposition 2.11

Soient f une fonction analytique sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ et M un réel positif. Si pour tout $w \in \overline{\Omega} \backslash \Omega$,

$$\limsup_{\substack{z \in \Omega \\ z \to w}} |f(z)| \leqslant M$$

et que, de plus, lorsque Ω est non borné

$$\limsup_{\substack{z \in \Omega \\ |z| \to \infty}} |f(z)| \leqslant M,$$

alors

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leqslant M.$$

EXERCICE DE COURS 2.9. Démontrer la proposition à l'aide de la proposition 2.10.

Pour tout $M' > M$, considérer le compact (vérifier que c'est bien un compact !) :

$$K_{M'} = \{z \in \Omega \colon |f(z)| \geqslant M'\},$$

et montrer que $K_{M'}$ est vide en raisonnant par l'absurde.

On a aussi la variante utile suivante.

Proposition 2.12

Soient Ω un ouvert connexe borné dans $\mathbb{C}$ et $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ sa frontière. Si f est une fonction continue à valeurs complexes sur $\overline{\Omega}$, holomorphe sur Ω, alors pour tout $z \in \Omega$,

$$|f(z)| \leqslant \sup_{w \in \partial\Omega} |f(w)|.$$

S'il existe $z \in \Omega$ tel qu'il y ait égalité, alors f est constante.

EXERCICE DE COURS 2.10. Démontrer la proposition à l'aide de la proposition 2.10.

2.4. Homotopie des chemins et démonstration du théorème 2.2

Considérons le carré $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et définissons un chemin fermé, $\mathscr{C}^1$ par morceaux,

$$b\colon [0, 4] \to \mathbb{R}^2,$$

qui « parcourt son bord dans le sens direct », comme l'unique application affine sur chacun des intervalles $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ telle que

$$b(0) = b(4) = (0, 0), \quad b(1) = (1, 0), \quad b(2) = (1, 1), \quad b(3) = (0, 1).$$

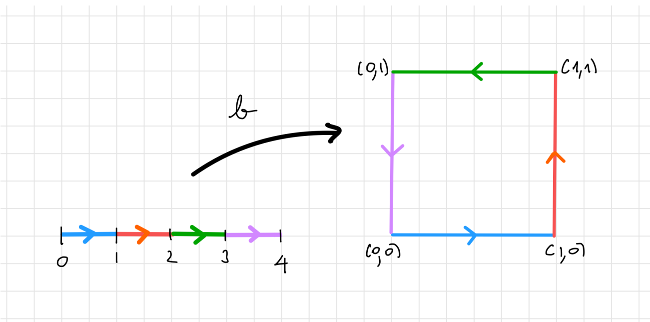


FIGURE 8 – Le chemin b

À toute application

$$\Gamma\colon [0, 1]^2 \to \mathbb{C}$$

de classe $\mathscr{C}^1$, nous pouvons associer le lacet $\mathscr{C}^1$ par morceaux

$$\partial\Gamma := \Gamma \circ b\colon [0, 4] \to \mathbb{C}.$$

Ainsi, pour toute fonction continue f de $\Gamma([0, 1]^2 \backslash]0, 1[^2)$ dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma(-,0)} f(z)dz + \int_{\Gamma(1,-)} f(z)dz - \int_{\Gamma(-,1)} f(z)dz - \int_{\Gamma(0,-)} f(z)dz.$$

Le théorème suivant montre que les fonctions holomorphes – qui sont définies par une condition *locale*, satisfont à une propriété *globale* remarquable concernant leurs intégrales le long des chemins.

Théorème 2.13

Soient f une fonction holomorphe définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et $\Gamma\colon [0, 1]^2 \to \Omega$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. On a :

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)dz = 0. \tag{5}$$

Pour démontrer ce théorème, nous introduisons quelques notations. Considérons les chemins de classe $\mathscr{C}^1$ (voir la Figure 9) :

$$\gamma_s := \Gamma(s, -) \colon [0,1] \to \Omega,$$
$$\delta_s := \Gamma(-, 0) \colon [0,s] \to \Omega,$$
$$\tilde{\delta}_s := \Gamma(-, 1) \colon [0,s] \to \Omega.$$

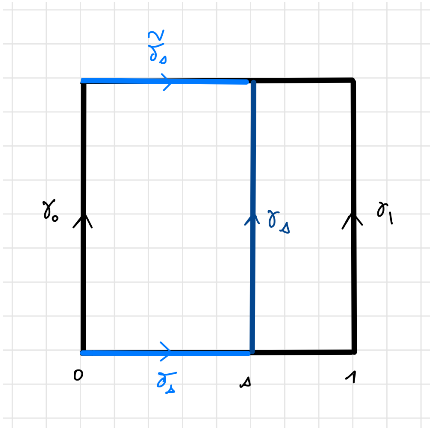


FIGURE 9 – Les chemins γ_s, δ_s, $\tilde{\delta}_s$

Pour démontrer le théorème 2.13, nous allons montrer que pour tout $s \in [0,1]$,

$$\underbrace{\int_{\gamma_s} f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz}_{=G(s)} = \underbrace{\int_{\tilde{\delta}_s} f(z)dz - \int_{\delta_s} f(z)dz}_{=D(s)} . \tag{6}$$

Avec $s = 1$, on obtient le théorème 2.13.

> EXERCICE DE COURS 2.11. Notons $G(s)$ le membre de gauche de l'expression (6), et $D(s)$ son membre de droite.
>
> (1) En revenant à la définition de l'intégration le long d'un chemin, puis en dérivant et en utilisant la propriété (3) de l'exercice 1.2, montrer que tout $s \in [0,1]$, on a :
> $$G'(s) = D'(s).$$
> (2) En déduire que G et D coïncident sur $[0,1]$ et conclure.

Corollaire 2.14

Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω et
$$\Gamma \colon [0,1]^2 \to \Omega$$
une application de classe $\mathscr{C}^2$. Supposons que les chemins γ_s, définis pour tout $s \in [0,1]$ par
$$\gamma_s := \Gamma(s,-) \colon [0,1] \to \Omega$$
satisfont à l'une des conditions suivantes :

(i) pour tout $s \in [0,1]$, γ_s est un chemin fermé,

(ii) $\gamma_s(0)$ (resp. $\gamma_s(1)$) est indépendant de $s \in [0,1]$.

Alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz. \tag{7}$$

Lorsque la condition (i) est réalisée on dit que Γ est une ***homotopie de lacets*** de classe $\mathscr{C}^2$ à valeurs dans Ω reliant γ_0 et γ_1.

Lorsque la condition (ii) est réalisée on dit que Γ est une ***homotopie de chemins d'extrémités fixés*** de classe $\mathscr{C}^2$ à valeurs dans Ω reliant γ_0 et γ_1.

EXERCICE DE COURS 2.12. Démontrer le corollaire à l'aide du théorème 2.13.

Pour tout triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^2$, on note $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ le triangle de sommets α, β, γ, c'est-à-dire l'enveloppe convexe dans $\mathbb{C}$ de $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Corollaire 2.15

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Pour tout triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ soit contenu dans Ω, on a :

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(z)dz + \int_{[\beta,\gamma]} f(z)dz + \int_{[\gamma,\alpha]} f(z)dz = 0.$$

EXERCICE DE COURS 2.13. Soit $\Gamma\colon [0,1]^2 \to \Omega$ l'application affine en chacune des variables telle que

$$\Gamma(0,0) = \Gamma(0,1) = \alpha, \quad \Gamma(1,0) = \beta \quad \text{et} \quad \Gamma(1,1) = \gamma.$$

Explicitement, on a :

$$\Gamma(s,t) = \alpha + s(\beta - \alpha) + st(\gamma - \beta).$$

Cette application Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ et prend ses valeurs dans $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$, donc dans Ω. En remarquant que

$$\Gamma(-,0) = [\alpha, \beta], \quad \Gamma(1,-) = [\beta, \gamma], \quad \Gamma(-,1) = [\alpha, \gamma],$$

et que $\Gamma(0,-)$ est un chemin constant, démontrer le corollaire.

Les formules (5) et (7) sont souvent appelées ***formules de Cauchy***.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2. Nous pouvons à présent démontrer la formule de Cauchy (Théorème 2.2) à l'aide des formules de Cauchy ! Dans les notations de ce théorème, considérons pour tout $\varepsilon \in]0, r - |z-a|[$ l'application

$$\Gamma\colon [0,1]^2 \to \mathbb{C}$$

telle que pour tout $s \in [0,1]$, $\gamma_s = \Gamma(s,-)$ soit le cercle de centre $c(s) = (1-s)a + sz$ et de rayon $r(s) = (1-s)r + s\varepsilon$. On a ainsi, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$:

$$\Gamma(s,t) = (1-s)(a + re^{2i\pi t}) + s(z + \varepsilon e^{2i\pi t}).$$

Cette application est de classe $\mathscr{C}^2$ et prend ses valeurs dans $\bar{D}(a,r)$ puisque $a + re^{2i\pi t}$ et $z + \varepsilon e^{2i\pi t}$ appartiennent à ce disque.

EXERCICE DE COURS 2.14. Montrer que l'image de Γ est disjointe de $D(z, \varepsilon)$.

REMARQUE 2.1. En fait, l'image de Γ est exactement $\bar{D}(a,r) \setminus D(z,\varepsilon)$; voir la figure 10.

En particulier, d'après l'exercice 2.14, Γ prend ses valeurs dans $\Omega \setminus \{z\}$.

EXERCICE DE COURS 2.15.

(1) Appliquer le corollaire 2.14 à Γ et la fonction $w \mapsto \dfrac{f(w)}{2i\pi(w-z)}$, holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$, pour obtenir l'égalité

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

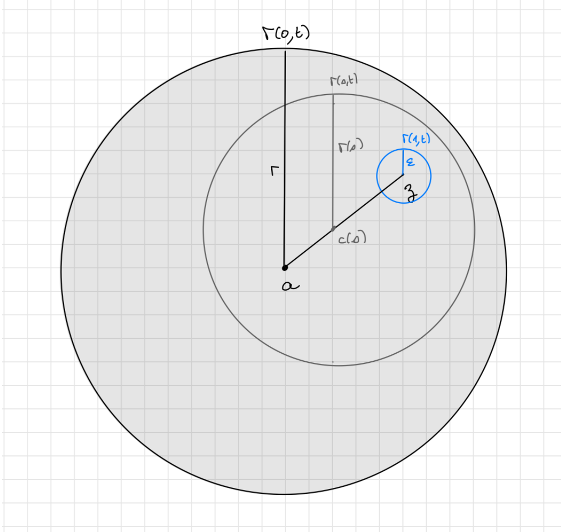


FIGURE 10 – L’image de Γ

(2) Montrer que le membre de droite de la question (1) tend vers $f(z)$ quand ε tend vers 0.

Grâce à l’exercice 2.15 on établit l’égalité requise :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(a,r)}\frac{f(w)}{w-z}dw = f(z),$$

ce qui achève la démonstration. □

REMARQUE 2.2. Si on applique cette identité à la fonction $w \mapsto (z-w)f(w)$ on obtient

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(a,r)} f(w)dw = 0.$$

Cette formule découle aussi directement de la formule de Cauchy puisqu’il existe clairement une homotopie de lacets de classe $\mathscr{C}^2$, à valeurs dans Ω, reliant le lacet $\mathscr{C}(a,r)$ au lacet constant égal à a.

3

Construction et étude locale des fonctions analytiques

3.1. Primitives

Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Rappelons qu'une fonction $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est une ***primitive*** de f sur Ω lorsque F est holomorphe de dérivée $F' = f$.

On constate d'emblée que les seules fonctions qui ont une chance d'admettre une primitive sont les fonctions holomorphes !

EXERCICE DE COURS 3.1. Expliquer pourquoi !

EXEMPLE 3.1. (1) Pour $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq -1$, l'application F définie par

$$F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

est une primitive de l'application f définie par $f(z) = z^n$, sur $\mathbb{C}$ lorsque $n \geqslant 0$ et sur $\mathbb{C}^*$ lorsque $n \leqslant -2$.

(2) Une détermination du logarithme $f\colon \Omega \subset \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est une primitive de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur l'ouvert Ω.

(3) La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur l'ouvert tout entier $\mathbb{C}^*$ (voir l'exemple (3) de l'exercice 2.1).

EXERCICE DE COURS 3.2. Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert $D(a, r)$. Montrer que f possède une primitive sur ce disque.

Indication : utiliser le théorème 2.4.

Nous allons généraliser l'exercice 3.2.

Rappel. Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit ***étoilé*** s'il existe $a \in \Omega$ tel que, pour tout $z \in \Omega$ le segment $[a, z]$ soit contenu dans Ω. Dans ce cas, nous dirons que Ω est ***étoilé par rapport à*** a (voir la figure 11).

Proposition 3.1

Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors f admet une primitive F sur Ω.

EXERCICE DE COURS 3.3. Le but de l'exercice est de démontrer la proposition. Soit $a \in \Omega$ tel que Ω soit étoilé par rapport à a. Posons pour tout $z \in \Omega$,

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\,dw.$$

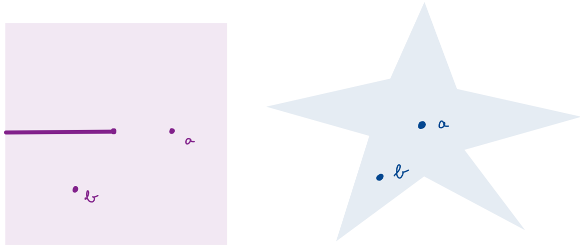


FIGURE 11 – Les deux ouverts sont étoilés par rapport à a, mais pas par rapport à b.

(1) Soient $z_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tel que $D(z_0, \varepsilon)$ soit contenu dans Ω. Montrer que tout $z \in D(z_0, \varepsilon)$ le triangle $\Delta(a, z, z_0)$ est contenu dans Ω. En déduire que

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw.$$

Indication : utiliser le corollaire 2.15.

(2) Montrer que F admet $f(z_0)$ comme dérivée au sens complexe en tout point $z_0 \in \Omega$, et conclure.

Une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ n'admet pas toujours de primitive holomorphe sur Ω. D'après la question (2) de l'exercice 2.1, il est nécessaire pour cela que pour tout lacet de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux γ dans Ω, $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Nous verrons que cette condition est en fait suffisante pour que f admette une primitive holomorphe (voir la proposition 3.3).

Théorème 3.2 – Morera

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in \mathscr{O}(\Omega)$,

(ii) f est continue et pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega^3$ tel que $\Delta(\alpha, \beta, \gamma) \subset \Omega$, on a :

$$\int_{[\alpha,\beta]} f(z)dz + \int_{[\beta,\gamma]} f(z)dz + \int_{[\gamma,\alpha]} f(z)dz = 0.$$

***Giacinto Morera**, né le 18 juillet 1856 à Novare et mort le 8 février 1909 à Turin, est un mathématicien italien. Son nom est associé en analyse complexe au théorème de Morera. Il était membre de l'Académie nationale des Lincei et de l'Académie des sciences de Turin.*

Nous avons déjà vu l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) ; c'est le corollaire 2.15.

EXERCICE DE COURS 3.4. Le but de l'exercice est de démontrer l'autre implication du théorème 3.2. Puisque l'holomorphie est une condition locale, on peut supposer que Ω est un disque ouvert $D(a, r)$. On définit F comme dans l'exercice 3.3. Montrer alors que l'identité de la question (1) de l'exercice 3.3 reste valable. En reprenant mot pour mot cet exercice, conclure que F est dérivable au sens complexe de dérivée f et conclure.

Proposition 3.3 – condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction holomorphe admette une primitive

Soient Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$, et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. La fonction admet une primitive sur Ω si et seulement si pour tout lacet γ tracé dans Ω,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Nous avons déjà vu que la condition de la proposition est nécessaire.

Pour montrer que la condition est suffisante, nous aurons besoin d'un rappel de topologie.

Rappel de topologie. Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, alors Ω est connexe par arcs continus par morceaux de classe $\mathscr{C}^1$. Si $a \in \Omega$, alors l'ouvert $\Omega \setminus \{a\}$ est encore connexe (et donc connexe par arcs continus par morceaux de classe $\mathscr{C}^1$).

Exercice de cours 3.5. Le but de l'exercice est de démontrer la proposition 3.3.

Soit f comme dans la proposition. On veut montrer que f admet une primitive sur Ω. On peut supposer que Ω est connexe. D'après le rappel (que l'on essayera de démontrer !), Ω est alors connexe par arcs continus par morceaux de classe $\mathscr{C}^1$.

Soit $z_0 \in \Omega$. Posons pour tout $z \in \Omega$,

$$F(z) = \int_\gamma f(w)dw,$$

où γ est n'importe quel chemin de Ω joignant z_0 à z (voir la figure 12).

(1) Montrer que l'application F est bien définie.

(2) Soient $\varepsilon > 0$ tel que $D(z, \varepsilon) \subset \Omega$. Montrer que la restriction de F à $D(z, \varepsilon)$ est une primitive de f sur $D(z, \varepsilon)$ et conclure.

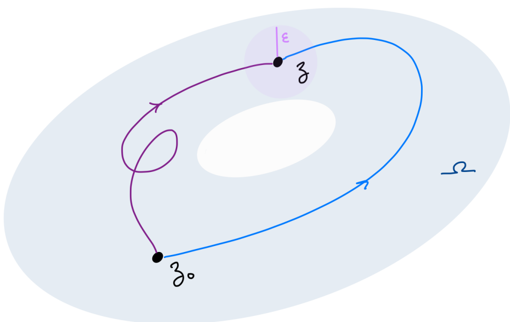


Figure 12 – Lacets joignant z_0 et z dans Ω

Exercice de cours 3.6. Soient Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas.

(1) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle $e^g = f$ et que de telles applications diffèrent d'une constante additive dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

(2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une fonction holomorphe $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle $h^k = f$ et que de telles applications diffèrent d'une constante mutliplicative qui est une racine k-ième de l'unité.

Exercice de cours 3.7. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas.

(1) Soit $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ un lacet. Montrer que
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \in \mathbb{Z}.$$

Indication : introduire la fonction $\lambda\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp\left(\int_{\gamma([0,t])} \frac{f'(z)}{f(z)}dz\right)$.

(2) Montrer que f admet un logarithme holomorphe $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$, i.e., $f = e^g$, si et seulement si pour tout lacet γ de Ω, on a
$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0.$$

(3) Soit $k \geqslant 2$. Montrer que f admet une racine k-ième de l'unité holomorphe $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$, i.e., $f = h^k$, si et seulement si pour tout lacet γ de Ω on a
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \in k\mathbb{Z}.$$

3.2. Limites, sommes et intégrales de fonctions analytiques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Théorème 3.4 – converge locale d'une suite de fonctions holomorphes

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes définies sur Ω. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Alors :

(i) la limite f est holomorphe,

(ii) pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la suite des dérivées $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers la dérivée $f^{(k)}$.

Exercice de cours 3.8. Le but de l'exercice est de démontrer le théorème 3.4.

(1) Démontrer l'assertion (i) à l'aide du théorème de Morera (Théorème 3.2).

(2) Démontrer l'assertion (ii) à l'aide des estimées de Cauchy uniformes (Corollaire 2.9) appliquées aux fonctions holomorphes $f - f_n$.

Noter la différence avec les fonctions de variable réelle : considérer la suite de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \left(t^2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui converge uniformément vers la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ non dérivable à l'origine. Penser aussi à la suite de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{k}\sin(k^2 t)$ qui converge uniformément vers 0 alors que ses dérivées ne sont pas bornées.

Corollaire 3.5 – convergence locale d'une série de fonctions holomorphes

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes définies sur Ω telle que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω. Alors la fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ définie comme la somme de cette série est holomorphe sur Ω. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge vers $f^{(k)}$ uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω.

EXERCICE DE COURS 3.9. Démontrer le corollaire.

Théorème 3.6 – holomorphie sous le signe intégrale

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $F\colon I\times\Omega \to \mathbb{C}$ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) (holomorphie) pour tout $t \in I$, la fonction $F(t,-)\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe,

(ii) (continuité) la fonction F est continue sur $I \times \Omega$,

(iii) (domination) il existe une fonction mesurable $\varphi \in \mathscr{L}^1(I)$ telle qu'on ait pour tout $z \in \Omega$ et tout $t \in I$,
$$|F(t,z)| \leqslant \varphi(t).$$
Alors la fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ définie par
$$f(z) = \int_I F(t,z)dt$$
est holomorphe sur Ω. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\partial_z^k F(t,z)$ satisfait encore aux conditions (i) et (ii) et l'on a pour tout $z \in \Omega$:
$$f^{(k)} = \int_I \partial_z^k F(t,z)dt.$$

REMARQUE 3.1. L'holomorphie est une propriété locale. On peut donc remplacer l'hypothèse de domination par une hypothèse de domination sur tout compact.

EXERCICE DE COURS 3.10. L'objectif de l'exercice est de démontrer le théorème. La domination assure que la fonction $F(-,z)$, pour $z \in \Omega$, est intégrable sur I, et donc f est bien définie.

(1) Montrer que f est holomorphe à l'aide du théorème de Morera (Théorème 3.2).

(2) Démontrer les autres assertions du théorème.

REMARQUE 3.2. On peut aussi démontrer l'expression intégrale des dérivées de la fonction holomorphe f à l'aide du corollaire 2.3 et du théorème de Fubini.

EXERCICE DE COURS 3.11 (la fonction Γ). Soit $\mathbb{O} = \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(1) Soient $z \in \mathbb{C}$ et t un réel strictement positif. Donner un sens à l'expression t^z.

(2) Montrer que l'application
$$\Gamma\colon \mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$
définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{O}$.

(3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer pour $z \in \mathbb{O}$, la dérivée $\Gamma^{(k)}(z)$ sous forme d'une intégrale.

Nous verrons à la section 4.6 d'autres propriétés de la fonction Γ.

La théorie de Cauchy conduit au critère d'holomorphie suivant, dans le même esprit que le théorème de Morera.

Théorème 3.7 – critère d'holomorphie en terme de lacets

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in \mathscr{O}(\Omega)$,

(ii) f est $\boxed{\text{continue}}$ et pour tout $a \in \Omega$ et tout disque fermée $\bar{D}(a, r)$ de rayon $r > 0$ inclus dans Ω et tout $z \in \bar{D}(a, r)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}(a,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) n'est autre que le théorème 2.2.
L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) a été établie lors de la démonstration du corollaire 2.3.

3.3. Deux applications du théorème de Morera

Pour établir les théorèmes 3.4 et 3.6, nous aurions pu tout aussi bien faire usage du théorème 3.7 au lieu du théorème de Morera.
Voici deux applications pour lesquelles il est plus difficile de se passer du théorème de Morera.

Théorème 3.8 – une fonction continue, holomorphe sur Ω privé de la droite réelle, est holomorphe sur Ω

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction $\boxed{\text{continue}}$. Si f est holomorphe sur $\Omega \setminus \mathbb{R}$, alors f est holomorphe sur Ω tout entier.

La détermination continue du logarithme n'est pas continue sur $\mathbb{C}^*$ donc le théorème ne s'applique pas !

EXERCICE DE COURS 3.12. Démontrer le théorème à l'aide du théorème de Morera.

Le théorème suivant se démontre aussi à l'aide du théorème de Morera.

Théorème 3.9 – l'hypothèse $\mathscr{C}^1$ dans l'holomorphie est superflue

Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Si f est dérivable au sens complexe en tout point de Ω, alors f est holomorphe sur Ω.

Le théorème est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 3.10 – Goursat

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction que l'on suppose derivable au sens complexe en chaque point de Ω. Soit $\Delta = \Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ un triangle contenu dans Ω. Alors

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

EXERCICE DE COURS 3.13.

(1) Démontrer le lemme 3.10 à l'aide du théorème de Morera.

Pas facile !

(2) Démontrer le théorème 3.9 à l'aide du Lemme 3.10 et du théorème de Morera.

3.4. Produits infinis

Les produits infinis jouent un rôle crucial dans bien des développements de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Commençons par quelques rappels. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, et soit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n := \prod_{i=0}^{n} u_i.$$

Si p_n tend vers une limite $p \in \mathbb{C}$ lorsque n tend vers $+\infty$, on écrit

$$p = \prod_{n=0}^{\infty} u_n,$$

et on dit que le produit infini $\prod\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ ***converge***.

En pratique, les produits infinis intéressants ont un terme général qui tend vers 1.

EXERCICE DE COURS 3.14. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de nombres complexes. Montrer que :

$$\prod_{i\in I}(1+|a_i|) \leqslant \exp\left(\sum_{i\in I}|a_i|\right),$$

$$\text{et} \quad \left|\prod_{i\in I}(1+a_i) - 1\right| \leqslant \prod_{i\in I}(1+|a_i|) - 1.$$

Proposition 3.11 – rappels sur les produits infinis

(i) Pour tout suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}_+$, $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(ii) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{C}}$ est une suite complexe telle que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, alors $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ converge vers une limite P. De plus, P est nul si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 + a_n = 0$.

EXERCICE DE COURS 3.15. Démontrer la proposition.

Si l'on combine la proposition 3.11 et le théorème 3.4, on obtient la première assertion du théorème suivant.

Théorème 3.12 – produits infinis de fonctions holomorphes

Soient Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω dont aucune ne vaut identiquement -1. Si la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ converge normalement sur tout compact de Ω, alors le produit infini

$$f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n(z))$$

converge uniformément sur tout compact de Ω et définit donc une fonction holomorphe f sur Ω.
De plus, f n'est pas identiquement nulle et pour tout $z \in \Omega$, on a :

$$v_z(f) = \sum_{k=0}^{\infty} v_z(1 + u_k).$$

Rappelons que $v_z(f)$ désigne la multiplicité du zéro de f en z. À l'exception d'un nombre fini d'entre eux, tous les termes de la somme du membre de droite dans l'expression de $v_z(f)$ sont nuls.

EXERCICE DE COURS 3.16. Démontrer le théorème.

3.5. Forme normale locale d'une fonction analytique non constante

Nous allons montrer qu'une fonction analytique non constante définie au voisinage connexe d'un point z_0 de $\mathbb{C}$ a « même allure au voisinage de z_0 » que l'application $z \mapsto z^m$, où m désigne la multiplicité $v_{z_0}(f - f(z_0))$.

Théorème 3.13 – forme normale locale d'une fonction analytique non constante

Soient Ω un ouvert $\boxed{\text{connexe}}$ de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe $\boxed{\text{non constante}}$ sur Ω et z_0 un point de Ω. Posons

$$w_0 = f(z_0) \quad \text{et} \quad m = v_{z_0}(f - f(z_0)) \in \mathbb{N}^*.$$

Il existe un voisinage ouvert sur U de z_0 dans Ω, un réel $r > 0$ et une application biholomorphe

$$\varphi\colon U \longrightarrow D(0,r)$$

telle que

$$\varphi(z_0) = 0$$

et telle que pour tout $z \in U$,

$$f(z) = w_0 + \varphi(z)^m.$$

En posant

$$\pi_m\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^m. \end{array},$$

le théorème se reformule en disant que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"', "\wr"] & \mathbb{C} \\ D(0,r) \arrow[r, "w_0+\pi_m"] & D(w_0, r^m) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Lorsque $m = 1$, le théorème découle du théorème d'inversion locale pour les fonctions holomorphes (Proposition 1.5).

EXERCICE DE COURS 3.17.

(1) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la série entière

$$r_\alpha(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} z^k$$

a un rayon de convergence au moins égal à 1.

(2) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $z \in D(0,1)$,

$$\left(1 + r_{\frac{1}{m}}(z)\right)^m = 1 + z.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.13. Par le raisonnement de la section 1.7 appliqué à $f - w_0$ on voit qu'il existe un voisinage ouvert Ω' de z_0 dans Ω et une fonction $g \in \mathscr{O}(\Omega')$ telle que, pour tout $z \in \Omega'$,

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$$

et

$$\lambda := g(z_0) \neq 0.$$

La fonction $\lambda^{-1} g$ vaut ainsi 1 en z_0 et prend donc ses valeurs dans $D(1,1)$ sur un voisinage ouvert Ω'' de z_0 dans Ω'. Posons alors, pour tout $z \in \Omega''$:

$$R(z) = r_{\frac{1}{m}}(\lambda^{-1} g(z) - 1).$$

La fonction ainsi définie est holomorphe sur Ω'' et vérifie :

$$R(z_0) = 0, \qquad (1 + R(z))^m = \lambda^{-1} g(z) \quad \text{si} \quad z \in \Omega''.$$

Enfin, choisissons $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^m = \lambda$ et posons, pour tout $z \in \Omega''$:

$$\varphi(z) = \mu(z - z_0)(1 + R(z)).$$

On conclut grâce à l'exercice ci-dessous. □

EXERCICE DE COURS 3.18. Montrer que φ définit une fonction holomorphe sur Ω'' qui satisfait aux conditions du théorème 3.13.

3.6. Le théorème de l'application ouverte

Rappels. Si X et Y sont deux espaces topologiques, une application $f\colon X \to Y$ est dite ***ouverte*** lorsque pour tout ouvert U de X, $f(U)$ est une partie ouverte de Y.

On vérifie aisément les assertions suivantes :

– une application $f\colon X \to Y$ est ouverte si et seulement si pour tout voisinage V d'un point x de X, $f(V)$ est un voisinage de $f(x)$,

– si $f\colon X \to Y$ est injective, alors f est ouverte si et seulement si $f(X)$ est ouvert dans Y et $f^{-1}\colon f(X) \to X$ est continue,

– la composée de deux applications ouvertes est ouverte.

Proposition 3.14 – théorème de l'application ouverte

Soit Ω un ouvert $\boxed{\text{connexe}}$ de $\mathbb{C}$. Toute application holomorphe $\boxed{\text{non constante}}$ $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est ouverte.

EXERCICE DE COURS 3.19. Démontrer la proposition à l'aide du théorème 3.13.

Le théorème 3.13 permet aussi de démontrer le résultat suivant.

Proposition 3.15 – théorème d'inversion globale

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une application holomorphe injective. Alors l'image $f(\Omega)$ est ouverte et f est une application biholomorphe de Ω sur $f(\Omega)$.

EXERCICE DE COURS 3.20. Démontrer la proposition à l'aide du théorème 3.13.

> Indication : remarquer que, comme f est injective, elle n'est pas constante au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$.

EXEMPLE 3.2. Voici quelques exemples déjà rencontrés.

1) Restreinte au demi-plan
$$\{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}(z) > 0\}$$
la fonction $z \mapsto z^2$ est injective, d'image $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. La fonction holomorphe réciproque est la *détermination principale de la racine carrée*, notée $\sqrt{-}$. On a ainsi pour tous $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$,
$$\sqrt{re^{i\theta}} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}.$$

2) Restreinte la bande horizontale ouverte
$$\{z \in \mathbb{R} \colon -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$$
la fonction exponentielle est injective, d'image $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. La fonction holomorphe réciproque est la *détermination principale du logarithme*, notée $\log$. On a ainsi pour tous $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$,
$$\log(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta.$$
La détermination principale du logarithme est l'unique primitive sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ de la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ valant 0 en 1 et, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,
$$\sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2}\log z\right).$$

3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, posons
$$z^\lambda = \exp(\lambda \log z).$$
On définit ainsi une fonction holomorphe, partout non nulle, de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, de dérivée
$$\frac{d}{dz}(z^\lambda) = \exp(\lambda \log z)\frac{\lambda}{z} = \lambda z^{\lambda - 1}.$$
Lorsque $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, pour tous $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$,
$$(re^{i\theta})^\lambda = r^\lambda e^{i\lambda\theta}.$$
On en déduit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $(\alpha, \beta, R) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tels que
$$-\pi < \alpha < \beta < \pi \quad \text{et} \quad -\pi < \lambda\alpha < \lambda\beta < \pi,$$
l'application $z \mapsto z^\lambda$ définit une bijection biholomorphe de
$$S(\alpha, \beta, R) := \{re^{i\theta} \colon r \in]0, R[\text{ et } \theta \in]\alpha, \beta[\}$$
sur $S(\lambda\alpha, \lambda\beta, R^\lambda)$.

EXERCICE DE COURS 3.21.

(1) Vérifier que l'on a, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,
$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}.$$

(2) À l'aide de l'exemple 3), montrer que l'on a pour tout $z \in D(0,1)$:

$$(1+z)^\lambda = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!} z^k = 1 + r_\lambda(z),$$

avec r_λ comme dans l'exercice 3.17.

(3) Montrer que, restreintes à la bande verticale ouverte

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \colon -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) < \frac{\pi}{2} \right\},$$

les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont injectives, d'images respectives

$$\mathbb{C} \setminus (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[) \quad \text{et} \quad \mathbb{C} \setminus i(]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[).$$

Les fonctions réciproques sont, respectivement, $\arcsin$ et $\arctan$.

(4) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[)$,

$$1 - z^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \qquad iz + \sqrt{1-z^2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$$

et que

$$\arcsin z = \frac{i}{2} \log(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

4

Fonctions méromorphes

4.1. Fonctions holomorphes sur une couronne et série de Laurent

Soient R_1 et R_2 deux éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tels que

$$0 \leqslant R_1 < R_2.$$

On définit l'***anneau ouvert*** ou ***couronne ouverte*** de centre l'origine et de rayons R_1 et R_2 par :

$$A(R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \colon R_1 < |z| < R_2\}.$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes telle que les rayons de convergences ρ et σ des séries entières

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad \psi(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

satisfassent aux inégalités

(8)
$$\rho \geqslant R_2 \quad \text{et} \quad \sigma \geqslant \frac{1}{R_1},$$

avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$.

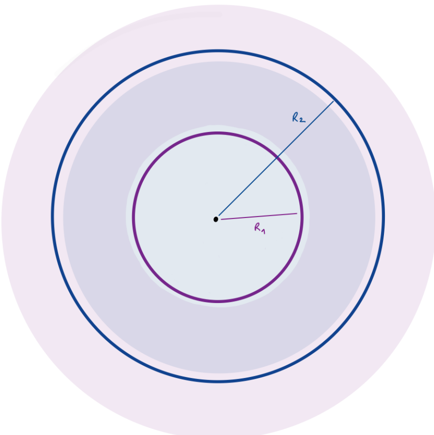


FIGURE 13 – La couronne $A(R_1, R_2)$.

Les séries φ et ψ sont alors normalement convergentes sur les compacts, respectivement de $D(0, R_2)$ et $D(0, R_1^{-1})$, et définissent des fonctions holomorphes sur chacun de ces domaines (voir la figure 13). Par conséquent, les séries

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\in-\mathbb{N}^*} a_n z^n,$$

et donc leur somme

(9)
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n,$$

sont normalement convergentes sur tout compact de la couronne $A(R_1, R_2)$ et définissent des fonctions holomorphes sur celle-ci.

Une série de la forme (9) est appelée une ***série de Laurent***. Lorsque les conditions (8) sont satisfaites, on dit que la série de Laurent est ***convergente*** sur $A(R_1, R_2)$. Ces conditions sont équivalentes à la convergence absolue en tout point de $A(R_1, R_2)$ de la série de Laurent (9).

__Pierre Alphonse Laurent__, né le 18 juillet 1813 à Paris et mort le 12 septembre 1854 à Avesnes-sur-Helpe, est un ingénieur militaire et mathématicien français connu pour la découverte des séries de Laurent.

EXERCICE DE COURS 4.1. Soit $\varphi \in \mathscr{O}(A(R_1, R_2))$. Montrer que l'intégrale

$$\int_{\mathscr{C}(0,r)} \varphi(z)dz$$

est indépendante de $r \in]R_1, R_2[$.

Indication : considérer une homotopie de lacets de classe $\mathscr{C}^2$ reliant $\mathscr{C}(0, r_1)$ à $\mathscr{C}(0, r_2)$ prenant ses valeurs dans $A(R_1, R_2)$, où $r_1, r_2 \in]R_1, R_2[$, par exemple :

$$\Gamma(s,t) = ((1-s)r_1 + sr_2)e^{2i\pi t}.$$

Théorème 4.1 – les fonctions holomorphes sur la couronne sont les séries de Laurent de cette couronne

L'application qui à une suite de nombres complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant aux conditions (8) associe la fonction holomorphe sur $A(R_1, R_2)$ définie par

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

est bijective.
La bijection réciproque envoie $f \in \mathscr{O}(A(R_1, R_2))$ sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$a_n := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \tag{10}$$

où $r \in]R_1, R_2[$.

Pour démontrer le théorème, nous devons établir les deux assertions suivantes :

(i) si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfait aux conditions (8) et si $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ sur $A(R_1, R_2)$ alors la relation (10) est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

(ii) si $f \in \mathscr{O}(A(R_1, R_2))$ et si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, a_n est défini par (10), alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ converge absolument vers $f(z)$ pour tout $z \in A(R_1, R_2)$.

EXERCICE DE COURS 4.2. Démontrer (i) en observant que la convergence normale de $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ sur tout compact de $A(R_1, R_2)$ permet d'écrire

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}(0,r)} z^{-n-1} f(z)dz = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \int_{\mathscr{C}(0,r)} z^{k-n-1} dz.$$

EXERCICE DE COURS 4.3. L'objectif de cet exercice est de démontrer (ii). Soient $f \in \mathscr{O}(A(R_1, R_2))$, z un point de $A(R_1, R_2)$ et r_1, r_2 deux réels tels que
$$R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2.$$

(1) Montrer que les intégrales
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}dw \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}dw$$
sont indépendantes de tels r_1, r_2.

> Appliquer l'exercice 4.1 à $w \mapsto \dfrac{f(w)}{w-z}$ holomorphe sur $A(R_1, |z|)$ et $A(|z|, R_2)$ (voir la figure 14).

(2) Montrer que
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

> Appliquer l'exercice 4.1 à la fonction $g\colon A(R_1, R_2) \to \mathbb{C}$ définie par
> $$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z, \\ f'(z) & \text{si } w = z, \end{cases}$$
> en s'assurant au préalable que g est bien holomorphe sur $A(R_1, R_2)$.

(3) Conclure en démontrant l'assertion (ii).

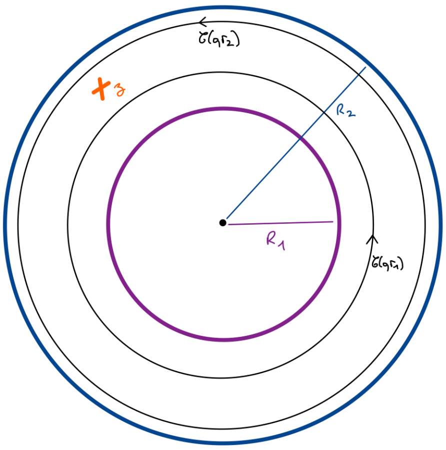


FIGURE 14 – $\mathscr{C}(0, r_1), \mathscr{C}(0, r_2)$ et z.

EXERCICE DE COURS 4.4. Développer en séries de Laurent les fonctions $z \mapsto z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ et $z \mapsto \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)$ dans $A(0, +\infty)$, et la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans $A(0,1)$, $A(1,2)$, $A(2,+\infty)$ et $\{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z-1| < 1\}$.

4.2. Application : fonctions holomorhes périodiques

Soient $]a_1, a_2[\subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide, avec $-\infty \leqslant a_1 < a_2 \leqslant +\infty$ et $\mathscr{B}(a_1, a_2)$ la bande ouverte de $\mathbb{C}$ définie par

$$\mathscr{B}(a_1, a_2) := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z) \in]a_1, a_2[\}.$$

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Posons

$$\begin{array}{rccc} e_T \colon & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & \exp\left(\dfrac{2i\pi}{T} z\right). \end{array}$$

L'application e_T envoie surjectivement la bande $\mathscr{B}(a_1, a_2)$ sur la couronne $A(R_1, R_2)$ où

$$R_1 := \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{2\pi}{T} a_2\right) & \text{si } a_2 \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } a_2 = +\infty \end{cases}$$

$$R_2 := \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{2\pi}{T} a_1\right) & \text{si } a_2 \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{si } a_1 = -\infty \end{cases}$$

EXERCICE DE COURS 4.5. Montrer que pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$e_T(z_1) = e_T(z_2) \iff z_2 - z_1 \in T\mathbb{Z},$$

et que e_T est localement biholomorphe.

On en déduit que l'algèbre des fonctions holomorphes T-périodiques sur $\mathscr{B}(a_1, a_2)$ est en bijection avec l'algèbre des fonctions holomorphes sur la couronne $A(R_1, R_2)$ via l'application

$$f \longmapsto f \circ e_T.$$

On obtient donc le théorème suivant.

Théorème 4.2

Toute fonction holomorphe T-périodique s'écrit de façon unique sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2i\pi nz/T},$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite complexe telle que les séries entières

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n$$

aient un rayon de convergence respectifs

$$\rho \geqslant R_2 \quad \text{et} \quad \sigma \geqslant \frac{1}{R_1}.$$

Réciproquement, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant à ces conditions, le membre de droite de l'expression de $f(z)$ est normalement convergent sur tout compact de $\mathscr{B}(a_1, a_2)$ et définit une fonction holomorphe T-périodique.

De plus, pour tout $w \in \mathscr{B}(a_1, a_2)$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{[w, w+T]} e^{-2i\pi nz/T} f(z) dz.$$

Pour résumer, une fonction holomorphe T-périodique sur une bande possède donc un développement de Fourier normalement convergent sur tout compact de cette bande.

4.3. Fonctions holomorphes sur un ouvert épointé

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un point de Ω, f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ et $\rho > 0$ tel que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$.

La fonction $z \mapsto f(z + z_0)$ est holomorphe sur le disque épointé $D(0, \rho) \setminus \{0\}$. Ce disque épointé coïncide avec la couronne $A(R_1, R_2)$ où $R_1 = 0$ et $R_2 = \rho$. On obtient donc que les intégrales

$$a_n := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

sont indépendantes de $r \in]0, \rho[$, que la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n \quad \text{(resp. } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\text{)}$$

a un rayon de convergence infini (resp. $\geqslant \rho$) et que, sur $D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$, on dispose du développement de f en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n. \tag{11}$$

En particulier, la série

$$h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

est convergente et définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. On l'appelle la ***partie singulière*** de f en z_0.

Pour tout $z \in D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$, il vient :

$$f(z) - h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Par conséquent, la fonction $f - h$, a priori définit sur $\Omega \setminus \{z_0\}$, se prolonge en un fonction analytique sur Ω.

Par ailleurs, la définition des a_n montre aussitôt que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $r \in]0, \rho[$,

$$|a_n| \leqslant r^{-n} \max_{z \in \partial \bar{D}(z_0,r)} |f(z)|.$$

Théorème 4.3 – théorème de prolongement de Riemann

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bornée sur un voisinage épointé de z_0,

(ii) pour tout entier $n < 0$, $a_n = 0$,

(iii) f se prolonge en une fonction $\tilde{f} \in \mathscr{O}(\Omega)$.

Lorsque les conditions du théorème sont réalisées, on dit que f possède une ***singularité illusoire*** en z_0. On dit parfois, par abus de langage, que f est holomorphe en a.

EXERCICE DE COURS 4.6. Démontrer le théorème.

Théorème 4.4 – théorème de prolongement à l'infini

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ tend vers z_0,

(ii) il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{-k} \neq 0$ et tel que
$$n < -k \quad \Rightarrow \quad a_n = 0,$$

(iii) il existe un polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que
$$f(z) - P\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$$
se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.

Lorsque les conditions du théorème sont réalisées, l'entier k de (ii) est uniquement déterminé et l'on dit que f possède un ***pôle d'ordre*** k en z_0.

EXERCICE DE COURS 4.7. L'objectif de l'exercice est de démontrer le théorème 4.4.

(1) Démontrer l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

> Indication : observer que la fonction $g = 1/f$ est holomorphe sur un voisinage épointé de z_0 avec une singularité illusoire en z_0, qu'elle se prolonge donc en une fonction holomorphe $\tilde{g}$ définie sur un voisinage de z_0 que l'on peut écrire
> $$\tilde{g}(z) = (z - z_0)^k h(z),$$
> où k est l'ordre de $\tilde{g}$ en z_0 et h est une fonction holomorphe non nulle en z_0.

(2) Démontrer l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(3) Démontrer l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i).

Définition 4.5

On dit que f est ***méromorphe*** en z_0 si z_0 est une singularité illusoire ou un pôle de f.
Lorsque f n'est pas méromorphe en z_0, on dit que f admet une ***singularité essentielle*** en z_0.

On peut étendre la définition de l'ordre ou valuation en z_0 (voir la définition 1.18) d'une fonction analytique au voisinage de z_0 en posant
$$v_{z_0}(f) := \inf\{n \in \mathbb{Z} \colon a_n \neq 0\} \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}.$$

On dispose alors des équivalences suivantes :

f est nulle au voisinage de z_0	$\Longleftrightarrow$	$v_{z_0}(f) = +\infty$
f admet z_0 comme zéro d'ordre k	$\Longleftrightarrow$	$v_{z_0}(f) = k$
f admet une singularité illusoire en z_0	$\Longleftrightarrow$	$v_{z_0}(f) \geqslant 0$
f admet z_0 comme pôle d'ordre k	$\Longleftrightarrow$	$v_{z_0}(f) = -k$
f est méromorhe en z_0	$\Longleftrightarrow$	$v_{z_0}(f) > -\infty$
f admet une singularité essentielle en z_0	$\Longleftrightarrow$	$v_{z_0}(f) = -\infty$

De plus, ou voit sur le développement de Laurent 11 que, lorsque $v_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}$ (i.e., f est méromorphe en z_0 et non identiquement nulle au voisinage de z_0), c'est l'unique entier k tel que la fonction
$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^k}$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω, non nulle en z_0.

EXERCICE DE COURS 4.8 (propriétés de la valuation).

(1) Supposons que $v_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}$. Montrer que la fonction $1/f$ est définie et holomorphe sur un voisinage épointé de z_0 dans Ω, qu'elle est méromorphe en z_0 et que
$$v_{z_0}\left(\frac{1}{f}\right) = -v_{z_0}(f).$$

(2) Soient f_1, f_2 deux fonctions holomorphes sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ méromorphes en z_0. Montrer que $f_1 f_2$ et $f_1 + f_2$ sont méromorphes en z_0 et que
$$v_{z_0}(f_1 f_2) = v_{z_0}(f_1) + v_{z_0}(f_2),$$
$$v_{z_0}(f_1 + f_2) \geqslant \min\left(v_{z_0}(f_1), v_{z_0}(f_2)\right).$$

L'énoncé suivant montre que le comportement d'une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité essentielle est « très sauvage ».

Théorème 4.6 – Casorati–Weierstrass

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f admet une singularité essentielle en z_0,

(ii) pour tout $r \in]0, \rho[$, $f\left(D(z_0, r) \setminus \{z_0\}\right)$ est dense dans $\mathbb{C}$.

***Karl Theodor Wilhelm Weierstrass**, né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (Province de Westphalie), mort le 19 février 1897 à Berlin, est un mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895.*

***Felice Casorati**, Pavie, 1835 – Casteggio, 1890, est un mathématicien italien du XIXe siècle. Son nom est connu surtout en analyse complexe pour le théorème de Weierstrass–Casorati. Il est le premier lauréat en 1868 du prix mathématique de l'Académie italienne des sciences.*

EXEMPLE 4.1. L'image de la fonction $z \mapsto \sin(1/z)$ au voisinage de 0 est $\mathbb{C}$ tout entier. Qu'en est-il de l'image de $z \mapsto \exp(1/z)$?

EXERCICE DE COURS 4.9. Démontrer le théorème.

Les résultats précédents permettent aussi d'étudier les fonctions holomorphes au « voisinage de l'infini », i.e., les fonctions holomorphes sur un ouvert de la forme $\mathbb{C} \setminus K$ où K est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

Soit en effet $h \colon \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ une telle fonction, et soit

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C}^* : z^{-1} \in \mathbb{C} \setminus K\}.$$

C'est un ouvert de $\mathbb{C}$ (pourquoi ?), et l'on définit une fonction holomorphe

$$f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

en posant

$$f(z) = h(z^{-1}).$$

On dit que h est ***holomorphe*** (resp. ***méromorphe***, admet une ***singularité essentielle à l'infini***) si f est holomorphe (resp. méromorphe, admet une singularité essentielle en 0).

EXERCICE DE COURS 4.10. Exhiber des fonctions holomorphes n'ayant dans le plan complexe que les singularités suivantes :

1) un pôle triple en 0, un pôle simple en 1, un point singulier essentiel en i et $-i$,
2) un point singulier essentiel en tout entier relatif.

4.4. Fonctions méromorphes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 4.7

On appelle ***fonction méromorphe*** sur Ω une fonction holomorphe f sur le complémentaire $\Omega \setminus F$ d'une partie discrète F de Ω, méromorphe en tout point de F.

On note $\mathscr{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω. C'est une algèbre contenant $\mathscr{O}(\Omega)$ et, lorsque Ω est non vide et connexe, c'est un corps.

En fait, lorsque Ω est non vide et connexe, il est possible de montrer que $\mathscr{M}(\Omega)$ s'identifie au corps des fractions de $\mathscr{O}(\Omega)$.

Soit $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions méromorphes sur Ω. indexée par un ensemble dénombrable A. On dit que la série de fonctions méromorphes $\sum_{\alpha\in A} u_\alpha$ est ***normalement convergente sur tout compact*** de Ω si, pour tout compact K de Ω, il existe une partie finie F_K de A telle que, si $\alpha \in A \setminus \{F_K\}$, u_α n'a pas de pôle dans K (i.e., est holomorphe au voisinage de K) et telle que la série

$$\sum_{\alpha\in A\setminus\{F_K\}} u_\alpha \tag{12}$$

converge normalement sur K.

Lorsque cette condition est satisfaite, la réunion F des ensembles de pôles des u_α, $\alpha \in A$, est une partie discrète de Ω, et pour tout $z \in \Omega \setminus F$, la série

$$u(z) := \sum_{\alpha\in A} u_\alpha(z)$$

est absolument convergente.

En appliquant le corollaire 3.5 aux sommes (12) on obtient la proposition suivante.

Proposition 4.8 – série de fonctions méromorphes

(i) La fonction u est méromorphe sur Ω.

(ii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions méromorphes $\sum_{\alpha \in A} u_\alpha^{(k)}$ est normalement convergente sur tout compact de Ω, et sa somme est $u^{(k)}$.

(iii) Enfin, si $z_0 \in \Omega$ et si les développements en série de Laurent en z_0 des u_α et de u s'écrivent

$$u_\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{\alpha,n}(z - z_0)^n,$$

et

$$u(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n,$$

alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{\alpha \in A} |a_{\alpha,n}| < \infty \quad \text{et} \quad a_n = \sum_{\alpha \in A} a_{\alpha,n}.$$

Exercice de cours 4.11 (dérivées logarithmiques de produits infinis). Soient Ω un ouvert connexe et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ une série de fonctions holomorphes sur Ω, donc aucune ne vaut identiquement -1, convergeant normalement sur tout compact de Ω. Montrer que la série de fonctions méromorphes sur Ω

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1 + u_n(z)}$$

converge normalement sur tout compact de Ω vers la dérivée logarithmique $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ du produit infini

$$f(z) := \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n(z)).$$

D'après le théorème 3.12, f est une fonction holomorphe non identiquement nulle sur Ω.

Soient f une fonction méromorphe sur Ω et F l'ensemble de ses pôles. C'est une partie discrète (donc dénombrable) de $\mathbb{C}$ et pour tout $a \in F$, la partie singulière de f en a s'écrit $P_a\left(\dfrac{1}{z-a}\right)$, où P_a est un polynôme complexe non nul, sans terme constant.

Attention : on ne peut pas toujours écrire

$$f(z) = \sum_{a \in F} P_a\left(\frac{1}{z-a}\right) + g(z),$$

avec g holomorphe sur Ω, car le membre de droite n'est pas convergent en général !

Lorsque $\Omega = \mathbb{C}$, une telle décomposition est possible quitte à modifier la partie singulière par $P_a\left(\dfrac{1}{z-a}\right) - p_a(z)$ où p_a est un polynôme.

Théorème 4.9 – décomposition d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$

Soient F une partie discrète de $\mathbb{C}$ et $(P_a)_{a\in F}$ une famille de polynômes non nuls sans terme constant.

(i) Il existe une famille $(p_a)_{a\in F}$ de polynômes telle que la série de fonctions méromorphes
$$\sum_{a\in F}\left[P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)-p_a(z)\right]$$
soit normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$, et définisse donc une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ admettant exactement F comme ensemble de pôles et $P_a\left(\dfrac{1}{z-a}\right)$ comme partie singulière en tout point a de F.

(ii) Toute fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$ satisfaisant à ces conditions s'écrit
$$f(z)=\sum_{a\in F}\left[P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)-p_a(z)\right]+g(z),$$
où g est une fonction entière.

Démonstration du théorème 4.9. Le seul point à établir est la possibilité de choisir des polynômes p_a rendant la somme
$$\sum_{a\in F}\left[P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)-p_a(z)\right]$$
normalement convergente sur tout compact.

$*$ Lorsque F est fini, on peut prendre tous les p_a nuls.

$*$ Sinon, F est infini, fermé et discret et on peut énumérer ses éléments par module croissant
$$F=\{a_n,\ n\in\mathbb{N}\}$$
avec
$$|a_0|\leqslant|a_1|\leqslant\cdots\leqslant|a_n|\leqslant|a_{n+1}|\leqslant\cdots,$$
et l'on a
$$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=+\infty.$$

Exercice de cours 4.12. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer que l'on peut choisir un polynôme p_{a_n} de sorte que
$$|z|\leqslant|a_n|-1\quad\Rightarrow\quad\left|P_{a_n}\left(\frac{1}{z-a}\right)-p_{a_n}(z)\right|\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

Si maintenant K est un compact de $\mathbb{C}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que
$$|a_N|\geqslant 1+\max_{z\in K}|z|,$$
et l'exercice 4.12 montre alors que pour tout $z\in K$ et $n\geqslant N$,
$$\left|P_{a_n}\left(\frac{1}{z-a}\right)-p_{a_n}(z)\right|\leqslant\frac{1}{2^n},$$
d'où la convergence requise. □

4.5. Exemples

Dans de nombreux cas particuliers importants, on peut choisir comme polynômes p_a certains polynômes explicites très simples. Le théorème 4.9 conduit alors à des constructions remarquables de fonctions méromorphes ou à des identités remarquables.

Nous allons voir deux illustrations de ce principe.

4.5.1. Développement eulériens des fonctions trigonométriques. Les identités de l'exercice suivant ont été établies par Euler dans les années 1730.

Leonhard Euler*, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 7 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg, est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'Empire russe et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin.*

EXERCICE DE COURS 4.13 (identités d'Euler).

(1) Établir, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

(2) Établir, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned} \operatorname{cotan} z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right) \\ \frac{1}{\sin^2 z} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n\pi)^2}. \end{aligned}$$

(3) Montrer que le produit infini de la question (1) et les séries de fonctions méromorphes de la question (2) convergent normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

En comparant les coefficients du développement en série de Laurent à l'origine des deux membres de la question (1), on obtient une série infinie d'identités remarquables.

Rappelons que l'on définit des nombres réels b_k par
$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}.$$
On a $b_0 = 1$, $b_1 = -1/2$, $b_k = 0$ si $k \geqslant 3$. On pose alors
$$b_{2k} = (-1)^{k+1} B_k, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$
de sorte que l'on peut écrire
$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} B_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$
Les nombres B_k, qui sont rationnels par définition, sont les ***nombres de Bernoulli***.

Daniel Bernoulli *est un médecin, physicien et mathématicien suisse, né à Groningue le 8 février 1700, et mort à Bâle, le 17 mars 1782.*

On a
$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}.$$

EXERCICE DE COURS 4.14 (développements eulériens).

(1) Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_k \pi^{2k}.$$

(2) En déduire les identités :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Les identités de la question (1) montrent d'une part que les nombres de Bernoulli B_k sont strictement positifs, et d'autre part que les réels
$$\frac{1}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$
sont rationnels, ce qui est merveilleux !

4.5.2. Fonction $\wp$ de Weierstrass. Nous étudions dans ce paragraphe des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ admettant un réseau comme période.

Définition 4.10 – réseau et fonction elliptique

(1) On appelle ***réseau*** de $\mathbb{C}$ un sous-groupe Γ de $\mathbb{C}$ de la forme $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, où (ω_1, ω_2) est une base de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(2) On appelle ***fonction elliptique*** relativement à un réseau Γ de $\mathbb{C}$ une fonction méromorphe Γ-périodique sur $\mathbb{C}$.

EXERCICE DE COURS 4.15. Montrer à l'aide du théorème de Liouville (Théorème 2.7) que toute fonction elliptique holomorphe sur $\mathbb{C}$ est constante.

EXERCICE DE COURS 4.16. Soit Γ est un réseau de $\mathbb{C}$. Montrer que la série
$$\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{|\gamma|^{\sigma}}$$
est convergente pour tout $\sigma \in]2, +\infty[$.

Indication : majorer cette série par un multiple d'une intégrale de la forme $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus K} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\sigma/2}}$, où K est un voisinage compact de $(0,0)$.

Grâce à l'exercice 4.16, on peut considérer pour tout $n \geqslant 3$,
$$G_n(\Gamma) := \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{\gamma^n},$$
appelée ***séries de Eisenstein de poids*** n. Avec $-\gamma$ à la place de γ dans l'expression de $G_n(\Gamma)$ on voit que $G_n(\Gamma)$ est nul lorsque n est impair.

***Ferdinand Gotthold Max Eisenstein**, (16 avril 1823 – 11 octobre 1852) est un mathématicien prussien. Comme Galois et Abel, Eisenstein est mort avant l'âge de 30 ans, et comme Abel, sa mort est due à la tuberculose. Il est né et mort à Berlin, Allemagne. Il fit ses études à l'Université de Berlin où Dirichlet était son professeur. Gauss aurait déclaré : « Il n'y a que trois mathématiciens qui feront date : Archimède, Newton et Eisenstein. » Le choix par Gauss d'Eisenstein, lequel s'était spécialisé dans la théorie des nombres et l'analyse, peut sembler étrange à certains, mais il est justifié par le fait qu'Eisenstein avait prouvé facilement plusieurs résultats jusqu'alors inaccessibles, même à Gauss, comme d'étendre son théorème de réciprocité biquadratique au cas général.*

Théorème 4.11 – la fonction de Weierstrass

Soit $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ un réseau de $\mathbb{C}$.

(i) La série de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$$

est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Sa somme est une fonction elliptique relativement à Γ, appelée la ***fonction de Weierstrass*** associée à Γ. C'est une fonction paire, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, admettant un pôle double en chaque point de Γ.

Sa dérivée admet le développement

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{(z-\gamma)^3}$$

en série de fonctions méromorphes normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$.

(ii) Le développement en série de Laurent de $\wp(z)$ en l'origine s'écrit

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2(n+1)}(\Gamma) z^{2n}.$$

(iii) La fonction $\wp$ satisfait à l'équation différentielle

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2 \wp(z) - g_3,$$

où

$$g_2 := 60 G_4(\Gamma) \quad \text{et} \quad g_3 := 140 G_6(\Gamma).$$

Exercice de cours 4.17 (démonstration du théorème 4.11).

(1) Démontrer la première partie des assertions (i), et déterminer $\wp'(z)$.

(2) En déduire que $\wp'$ est Γ-périodique puis que $\wp$ est Γ-périodique. Compléter alors la démonstration de (i).

(3) Démontrer l'assertion (ii) à l'aide de la proposition 4.8.

(4) Démontrer l'assertion (iii).

Indication : observer que chacun des membres de l'équation fonctionnelle est une fonction elliptique relativement à Γ, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Utiliser alors l'exercice 4.15 pour conclure.

La fonction de Weierstrass, et sa dérivée, sont plus que de simples exemples : on peut montrer que toute fonction elliptique Γ est une fraction rationnelle de $\wp$ et $\wp'$.

4.6. La fonction Γ

L'étude de la fonction Γ fournit des illustrations remarquables des paragraphes précédents.

4.6.1. La fonction Γ dans le domaine réel. Commençons par quelques rappels, sans détail, dans le domaine réel. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

— Cette intégrale est convergente et définit une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées données par :

$$\Gamma^{(k)}(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} (\log t)^k t^{x-1} dt,$$

pour $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

— De plus, Γ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

— Par ailleurs, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 \quad \text{et} \quad \Gamma(n+1) = n!, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

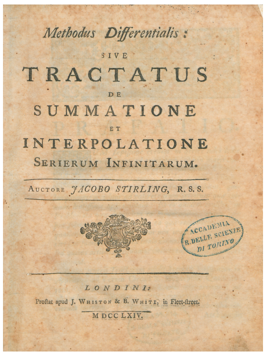
— Le comportement asymptotique de la Γ est donnée par la ***formule de Stirling*** :

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \quad \text{lorsque} \quad x \to +\infty,$$

qui s'écrit encore, compte tenu de l'équation fonctionnelle,

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x} \quad \text{lorsque} \quad x \to +\infty.$$

***James Stirling**, né en mai 16921 à Garden près de Stirling, mort le 5 décembre 1770 à Édimbourg, est un mathématicien écossais. James ou Jacob Stirling, peut-être issu d'une famille plus anglaise qu'écossaise, fait ses études à Oxford, au Balliol College, à partir de 1710. Il en est écarté, vers 1717, pour des raisons politiques, car il soutient les Jacobites, les partisans des Stuarts.*



— À partir de l'équation fonctionnelle et de la formule de Stirling, on déduit la ***formule de Gauss*** :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n! n^x}.$$

— Rappelons enfin que la ***constante d'Euler*** γ est le nombre réel > 0 défini par

$$\begin{aligned}\gamma &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)\\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \log\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right).\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout nombre réel, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}} = 1.$$

— On obtient alors, grâce à l'identité

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)=\frac{(x+1)\cdots(x+n)}{n!},$$

la ***formule de Weirstrass*** : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}.$$

4.6.2. La fonction Γ dans le domaine complexe. D'après l'exercice 3.11, l'intégrale

$$\Gamma(z):=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$$

est absolument convergente pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z)>0$ et définit une fonction holomorphe sur le demi-plan

$$\mathbb{O}=\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z)>0\}.$$

De plus, pour tout z dans ce demi-plan et tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\Gamma^{(k)}(z):=\int_0^{+\infty}e^{-t}(\log t)^k t^{z-1}dt.$$

EXERCICE DE COURS 4.18. Démontrer que pour tout $z\in\mathbb{O}$ on a encore l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),$$

et que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\Gamma(z)=\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\Gamma(z+n)}{z+i}.$$

En déduire que Γ admet un prolongement analytique sur le demi-plan

$$\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z)>-n\},$$

dont les seuls pôles sont simples et situés aux entiers négatifs.

Proposition 4.12 – prolongement méromorphe de la fonction Γ

La fonction Γ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$. Elle est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, admet un pôle simple en $-n$. Les équations fonctionnelles précédentes restent valables pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$.

EXERCICE DE COURS 4.19. Démontrer la proposition.

Corollaire 4.13 – expression de la dérivée logarithmique de Γ

La fonction Γ'/Γ, méromorphe sur $\mathbb{C}$, admet le développement suivant, sous forme de séries de fonctions méromorphes normalement convergentes sur tout compact de $\mathbb{C}$:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{z+k}\right),\quad z\in\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N}).$$

EXERCICE DE COURS 4.20. Démontrer le corollaire.

Indication : étendre au domaine complexe les formules de Gauss et de Weierstrass.

Le corollaire 4.13 permet d'obtenir des identités remarquables que nous mentionnons ici sans détail.

— Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\pi} \sin \pi z.$$

Avec $z = 1/2$, on en déduit

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

— Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{j=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{z+j}{p}\right) = (2\pi)^{(p-1)/2} p^{\frac{1}{2}-z} \Gamma(z).$$

5 Théorème des résidus et applications

5.1. Indice d'un lacet par rapport à un point

En termes géométriques, l'indice $\operatorname{Ind}(\gamma, a)$ d'un lacet par rapport à un point a est un $\boxed{\text{entier}}$ qui compte le nombre de tours (avec un signe) que le lacet effectue autour du point a (voir la remarque 5.1).

On le définit analytiquement de la façon suivante.

Définition 5.1

Soient $\gamma \subset \mathbb{C}$ un lacet et $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ un point pris hors de l'image de γ. On appelle ***indice*** du lacet γ par rapport au point a l'intégrale :

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Le ***support*** d'un lacet γ est l'image de γ dans Ω. On notera souvent $\gamma \subset \Omega$ ou $a \in \Omega \setminus \gamma$ pour indiquer que γ est tracé dans Ω ou bien que γ évite a.

EXERCICE DE COURS 5.1 (propriétés élémentaires de l'indice). Soit $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ lacet. Montrer les assertions suivantes :

(i) l'application $\mathbb{C} \setminus \gamma \to \mathbb{C}$, $a \mapsto \operatorname{Ind}(\gamma, a)$ est à valeurs entières, i.e,

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} \in \mathbb{Z}.$$

(ii) elle est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$,

(iii) elle est nulle sur l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Indication pour (i) : considérer λ_0 tel que $e^{\lambda_0} = \gamma(0) - a$, et montrer que l'application continue

$$\lambda\colon [0,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \lambda_0 + \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds$$

vérifie

$$\exp(\lambda(t)) = \gamma(t) - a$$

pour tout $t \in [0,1]$.

Grâce à l'exercice, l'indice se calcule « visuellement » (voir la figure 15).

On a aussi les propriétés élémentaires suivantes, pour γ_1, γ_2 deux lacets dont l'image ne contient pas a :

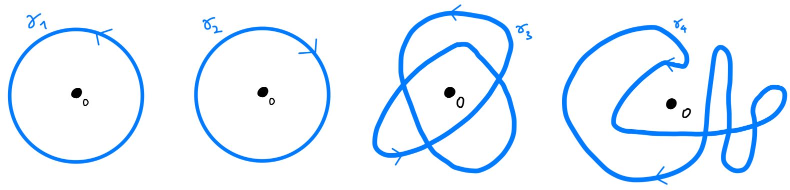


FIGURE 15 – Calcul « visuel » de l'indice. Ici $\mathrm{Ind}(\gamma_1, 0) = 1$, $\mathrm{Ind}(\gamma_2, 0) = -1$, $\mathrm{Ind}(\gamma_3, 0) = 2$, $\mathrm{Ind}(\gamma_4, 0) = 0$.

— (lacet opposé) $\mathrm{Ind}(\gamma_1^*, a) = -\mathrm{Ind}(\gamma_1, a)$,

— (concaténation) $\mathrm{Ind}(\gamma_1 * \gamma_2, a) = \mathrm{Ind}(\gamma_1, a) + \mathrm{Ind}(\gamma_2, a)$.

REMARQUE 5.1. Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur tout $\mathbb{C}^*$. La démonstration de l'assertion (i) de l'exercice 5.1 fournit cependant une détermination continue $\lambda\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ du logarithme de $t \in [0,1] \mapsto \gamma(t) - a \in \mathbb{C}^*$. On dit que λ est une ***détermination continue du logarithme*** de $z - a$ le long du chemin γ.

On a alors que l'application $\mathrm{Im}(\lambda)\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ fournit, pour chaque $t \in [0,1]$, un argument pour $\gamma(t) - a$ qui dépend continûment de t. Autrement dit, $\mathrm{Im}(\lambda)$ est une détermination continue de l'argument de $z - a$ le long du chemin γ.

L'interprétation géométrique de l'indice vient alors de ce que l'on a, par définition,

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi}(\mathrm{Im}(\lambda(1)) - \mathrm{Im}(\lambda(0))).$$

Voici une première généralisation de la formule de Cauchy (on intègre sur un lacet qui n'est plus nécessairement un cercle).

Théorème 5.2 – formule de Cauchy dans un ouvert étoilé

Soient Ω un ouvert $\boxed{\text{étoilé}}$ de $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, γ un lacet tracé dans Ω et $a \in \Omega$ pris hors de l'image de γ. On a :

$$f(a)\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

REMARQUE 5.2. 1) Lorsque f est constante égale à 1 on retrouve la définition de l'indice.

2) Lorsque γ est un cercle $\mathscr{C}(z_0, r)$ avec $a \in D(z_0, r)$, on retrouve la formule de Cauchy (Théorème 2.2).

EXERCICE DE COURS 5.2. Démontrer le théorème.

Indication : considérer la fonction $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$, holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$, définie par

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} & \text{si } z = a, \\ f'(a) & \text{si } z \neq a, \end{cases}$$

montrer que g s'entend en une fonction holomorphe sur Ω et que son intégrale sur γ est nulle.

EXEMPLE 5.1. On illustre sur la figure 16 le théorème 5.2. Le lacet γ découpe trois composantes connexes dans Ω. On indique la valeur donnée par l'intégrale du théorème lorsqu'on prend a dans chacune de ces composantes.

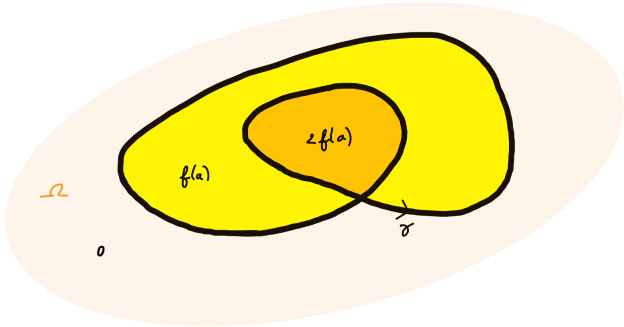


FIGURE 16 – Le théorème 5.2 sur un exemple

Corollaire 5.3 – formule de Cauchy pour les dérivées

Soient Ω un ouvert $\boxed{\text{étoilé}}$ de $\mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, γ un lacet tracé dans Ω et $a \in \Omega \setminus \gamma$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

EXERCICE DE COURS 5.3. Démontrer le corollaire.

5.2. Ouverts élémentaires

Définition 5.4

Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit ***élémentaire*** s'il est non vide, connexe et si toute fonction holomorphe $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ admet une primitive sur Ω.

Nous savons que les ouvert étoilés, et donc en particulier les ouverts convexes, sont élémentaires (voir la proposition 3.1). Il y en a bien d'autres comme le montre l'exercice suivant !

EXERCICE DE COURS 5.4 (ouverts élémentaires).

(1) Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$. Montrer que s'il existe une application biholomorphe
$$\varphi\colon \Omega_1 \xrightarrow{\sim} \Omega_2$$
et si Ω_1 est un ouvert élémentaire, il en va de même de Ω_2.

(2) Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts élémentaires de $\mathbb{C}$. Montrer que si $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est non vide et connexe, alors $\Omega_1 \cup \Omega_2$ est un ouvert élémentaire.

(3) Montrer que si $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$ est une suite croissante d'ouverts élémentaires de $\mathbb{C}$, alors
$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$$
est un ouvert élémentaire.

> Indication pour (2) et (3) : montrer que l'ouvert Ω est élémentaire si et seulement si tout $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ possède une unique primitive $F \in \mathscr{O}(\Omega)$ telle que $F(a) = 0$.

Définition 5.5

Un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ est dit ***simplement connexe*** lorsque tout lacet tracé dans Ω est homotope à 0.

Il est possible de classifier complètement les ouverts élémentaires de $\mathbb{C}$ et de montrer que pour tout ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Ω est un ouvert élémentaire,

(ii) Ω est simplement connexe,

(iii) $\Omega = \mathbb{C}$ ou bien il existe une bijection biholomorphe

$$\varphi\colon \Omega \xrightarrow{\sim} D(0,1).$$

5.3. Le théorème des résidus

Soient $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, Ω un voisinage ouvert de $\bar{D}(a,r)$ dans $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Cette fonction possède un développement de Laurent en a

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n,$$

normalement convergent sur tout compact de $\bar{D}(a,r) \setminus \{a\}$.

Définition 5.6 – résidu

Le ***résidu***, noté $\mathrm{Res}(f,a)$, de f en a est le coefficient a_{-1} de $(z-a)^{-1}$ dans ce développement :

$$\mathrm{Res}(f,a) := a_{-1}.$$

EXERCICE DE COURS 5.5. Vérifier que l'on a :

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathscr{C}(a,r)} f(z)dz.$$

On se souvient que a_{-1} est l'obstruction à ce que la fonction f admette une primitive sur $D(a,r)\setminus\{a\}$.

Voici quelques recettes pour le calcul des résidus.

Proposition 5.7 – résidu en un pôle

Soient f une fonction méromorphe non identiquement nulle sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ et a un point de Ω. Si $v_a(f) \geqslant -1$, alors

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a} (z-a)f(z).$$

Plus généralement, si a est un pôle d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de f, alors

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{(k-1)!}\tilde{f}^{(k-1)}(a) \quad \text{où} \quad \tilde{f}(z) = (z-a)^k f(z).$$

Proposition 5.8 – résidu de quotients de fonctions méromorphes

Soient f, g deux fonctions méromorphes non identiquement nulles sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ et a un point de Ω.

(i) Si $v_a(f) \geqslant 0$ et $v_a(g) = 1$ (i.e., f est holomorphe en a et g possède un zéro simple en a), alors
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

(ii) La fonction f'/f est méromorphe sur Ω. Ses pôles sont tous simples; ce sont exactement les zéros et les pôles de f et on a :
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = v_a(f).$$
Si de plus $v_a(g) \geqslant 0$, alors
$$\operatorname{Res}\left(g\frac{f'}{f}, a\right) = g(a)v_a(f).$$

EXERCICE DE COURS 5.6. Démontrer les deux propositions.

EXERCICE DE COURS 5.7. Déterminer les pôles des fonctions $\tan$, th, cotan et coth, leur ordre ainsi que le résidu en chaque pôle, où $\operatorname{th} = \operatorname{sh}/\operatorname{ch}$ est la tangente hyperbolique, et $\operatorname{coth} = 1/\operatorname{th}$.

EXERCICE DE COURS 5.8. Démontrer que la fonction Γ, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ (voir la proposition 4.12) admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un pôle simple de résidu $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ en $-n$.

Indication : utiliser l'expression de $\Gamma(z)$ obtenue à l'exercice 4.18.

Théorème 5.9 – théorème des résidus

Soient Ω un ouvert élémentaire de $\mathbb{C}$ (par exemple étoilé), F un ensemble fini de points de Ω, f une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus F$ et γ un lacet de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux à valeurs dans $\Omega \setminus F$. On a alors :
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{a\in F} \operatorname{Res}(f, a)\operatorname{Ind}(\gamma, a).$$

DÉMONSTRATION. Pour chaque $a \in F$, considérons le développement de Laurent de f en a :
$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_{a,n}(z-a)^n,$$
qui est valable sur un voisinage épointé de a dans Ω, puis la partie singulière h_a de f en a, c'est-à-dire la fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ définie par
$$h_a(z) = \sum_{n\in-\mathbb{N}^*} u_{a,n}(z-a)^n.$$
Posons
$$g = f - \sum_{a\in F} h_a.$$

EXERCICE DE COURS 5.9.

(1) Vérifier que la fonction g, a priori holomorphe sur $\Omega \setminus F$, n'a que des singularités illusoires en les points de F et qu'elle se prolonge donc en une fonction holomorphe sur Ω. En déduire que

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{a\in F} \int_\gamma h_a(z)dz.$$

(2) Établir que

$$\int_\gamma h_a(z)dz = \sum_{n\in -\mathbb{N}^*} u_{a,n} \int_\gamma (z-a)^n dz.$$

Le théorème des résidus découle alors de l'exercice précédent et de la formule

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = 2i\pi \operatorname{Ind}(\gamma, a).$$

□

Attention : le théorème des résidus peut être mis en défaut sur un lacet autour d'un « trou » d'un ouvert non élémentaire ! Considérer par exemple un ouvert Ω comme sur la figure 17, γ un lacet qui fait le tour du trou et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui se prolonge à l'ouvert Ω' (obtenu en « bouchant le trou ») en une fonction possédant une singularité isolée au point $z_1 \in \Omega' \setminus \Omega$.

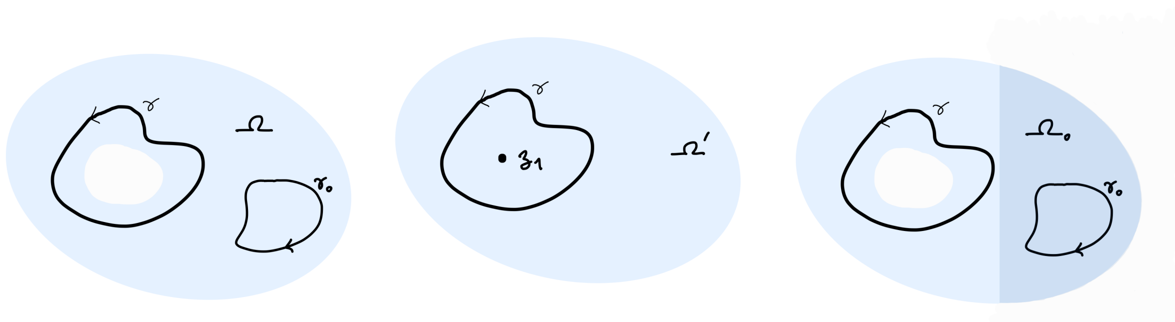


FIGURE 17 – Ouvert avec un trou

Le théorème des résidus s'applique cependant au lacet $\gamma_0 \subset \Omega$ de la figure 17 : il suffit en effet de se restreindre à un ouvert étoilé $\Omega_0 \subset \Omega$ qui contient γ_0.

Le théorème 5.9, appliqué à la fonction

$$\begin{array}{rcl} h\colon \Omega \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ w & \longmapsto & \dfrac{f(w)}{w-a}, \end{array}$$

redonne immédiatement le théorème 5.2.

5.4. Applications au dénombrement des zéros et des pôles des fonctions méromorphes

Rappelons que si f est méromorphe non identiquement nulle au voisinage d'un point $a \in \mathbb{C}$, on a d'après la proposition 5.8 (ii) :

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = v_a(f).$$

Appliquée à la dérivée logarithmique d'une fonction méromorphe, la formule des résidus donne :

Proposition 5.10 – formule des résidus appliquée à la dérivée logarithmique d'une fonction méromorphe

Soient Ω un ouvert élémentaire de $\mathbb{C}$, f une fonction méromorphe sur Ω dont l'ensemble F des zéros et des pôles est fini, et γ un lacet à valeurs dans $\Omega \setminus F$. On a alors :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in F} v_a(f)\mathrm{Ind}(\gamma, a).$$

En particulier, lorsque dans la proposition on a, pour tout $a \in F$,

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = 1,$$

on définit le ***nombre de zéros*** $N(0)$ (resp. le ***nombre de pôles*** $N(\infty)$) de f dans Ω, comptés avec leur multiplicité, en posant

$$N(0) = \sum_{\substack{a\in F\\ v_a(f)>0}} v_a(f)$$

et

$$N(\infty) = -\sum_{\substack{a\in F\\ v_a(f)<0}} v_a(f).$$

L'identité de la proposition peut alors s'écrire

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N(0) - N(\infty).$$

Proposition 5.11 – continuité par passage à la limite uniforme du nombre de zéros des fonctions holomorphes

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathscr{O}(\Omega)$ convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$. Soient $z_0 \in \Omega$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\bar{D}(z_0, r) \subset \Omega$ et f ne s'annule pas sur $\partial\bar{D}(z_0, r)$.
Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, f_n ne s'annule pas sur $\partial\bar{D}(z_0, r)$ et

$$\sum_{a\in D(z_0,r)} v_a(f_n) = \sum_{a\in D(z_0,r)} v_a(f).$$

En résumé, pour $n \geqslant N$, f_n et f ont même nombre de zéros (compte tenu des multiplicités) dans le disque ouvert $D(z_0, r)$.

EXERCICE DE COURS 5.10. Démontrer la proposition.

5.5. Applications aux calculs d'intégrales

Appliquée à des fonctions et des lacets bien choisis, la formule des résidus (Théorème 5.9) permet d'évaluer diverses intégrales remarquables. Ce procédé est appelé la ***méthode des résidus***.

EXEMPLE 5.2. Considérons des intégrales de la forme

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}dt,$$

où P et Q sont des polynômes de $\mathbb{C}[X, Y]$, et où Q ne s'annule pas sur le cercle

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}.$$

On définit une fonction rationnelle f en posant

$$f(z) := \frac{1}{iz}\frac{P\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)}{Q\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)},$$

on voit aussitôt que f ne possède aucun pôle sur $\partial\bar{D}(0,1)$ et la formule des résidus donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)} dt = \int_{\mathscr{C}(0,1)} f(z)dz = 2i\pi \sum_{a \in D(0,1)} \operatorname{Res}(f, a).$$

EXERCICE DE COURS 5.11 (application). Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}, \qquad a > 1.$$

Proposition 5.12 – intégrales aux bornes infinies

Soit F un ensemble fini de points dans le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ et soit f une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{H}} \setminus F = \mathbb{R} \cup (\mathbb{H} \setminus F)$ dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\lim_{\substack{z \in \overline{\mathbb{H}} \setminus F \\ |z| \to +\infty}} zf(z) = 0.$$

On a alors

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(t)dt = 2i\pi \sum_{a \in F} \operatorname{Res}(f, a).$$

EXERCICE DE COURS 5.12. Démontrer la proposition.

La proposition permet de calculer des intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(t)dt$$

où $R(t)$ est une fraction rationnelle en t sans pôle réel telle que

$$\lim_{|z| \to +\infty} zR(z) = 0.$$

EXERCICE DE COURS 5.13. Soit

$$R(t) = \frac{t^{2k}}{1 + t^{2n}},$$

où k et n sont deux entiers tels que $0 \leqslant k < n$.

(1) Montrer que les pôles de R dans $\mathbb{H}$ sont les points

$$\exp\left(\frac{2j+1}{2n}\pi i\right), \quad 0 \leqslant j < n,$$

et calculer le résidu de R en ces points.

(2) En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{1 + t^{2n}} dt = \frac{\pi}{n \sin((2k+1)\pi/2n)}.$$

Bibliographie

[1] Jean-Benoît Bost. Fonctions analytiques d'une variable complexe. Majeure de mathématiques.

[2] Dominique Hulin. Cours fonctions holomorphes. https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~dominique.hulin/poly-holo.pdf.

[3] Joël Merker. Analyse Complexe. https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~joel.merker/Enseignement/Analyse-Complexe/analyse-complexe-pdflatex.pdf.

[4] Walter Rudin. Analyse réelle et complexe. Dunod édition.