M2 – Fiche n°1 : algèbres de Lie

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

Exercice 1 (algèbres de Lie de dimension un et deux). On se propose dans cet exercice d'étudier les algèbres de Lie de dimension $\leqslant 2$.

1. Vérifier qu'une algèbre de Lie de dimension 1 est nécessairement commutative.

2. Soit L une algèbre de Lie de dimension 2. Montrer que, ou bien L est abélienne, ou bien L possède une base $\{x, y\}$ telle que $[x, y] = x$.

3. Trouver une algèbre de Lie de matrices isomorphe à l'algèbre de Lie non-abélienne de dimension 2 de la question (2). (*Indication : considérer la représentation adjointe.*)

Exercice 2 (valeurs propres de l'endomorphisme adjoint). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. Supposons que x ait n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que les valeurs propres de $\operatorname{ad} x$ sont précisément les n^2 scalaires $\lambda_i - \lambda_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ (qui ne sont bien entendu pas deux à deux distincts !). (*Indication : on pourra commencer par le cas où x est une matrice diagonale.*)

Exercice 3 (produit tensoriel de deux représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$). On s'intéresse dans cet exercice au produit tensoriel de deux représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On commence par un résultat général sur le produit tensoriel de deux représentations d'une algèbre de Lie.

1. Soit L une algèbre de Lie, et soient (V_1, σ_1), (V_2, σ_2) deux représentations de L. Posons pour $x \in L$ et $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$,

$$\sigma(x)(v_1 \otimes v_2) = \sigma_1(x)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \sigma_2(x)v_2.$$

Montrer que la relation ci-dessus définit une représentation $(V_1 \otimes V_2, \sigma)$ de L. La représentation $(V_1 \otimes V_2, \sigma)$ est appelée la ***représentation tensorielle*** de (V_1, σ_1) et (V_2, σ_2) et on note $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2$.

2. On suppose désormais que $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On note comme dans le cours (V_i, σ_i), pour $i \in \mathbb{N}$, l'unique représentation irréductible (à isomorphisme près) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ de dimension $i + 1$.

Montrer que l'on a l'isomorphisme suivant de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-modules :

$$V_3 \otimes V_7 \cong V_4 \oplus V_6 \oplus V_8 \oplus V_{10}.$$

(*Indication : remarquer que si $\{v_0, \ldots, v_3\}$ est une base de V_3 formée de vecteurs propres pour $\sigma_3(h)$, et si $\{w_0, \ldots, w_7\}$ est une base de V_7 formée de vecteurs propres pour $\sigma_7(h)$, alors $\{v_i \otimes w_j\}_{\substack{0 \leqslant i \leqslant 3 \\ 0 \leqslant j \leqslant 7}}$ est une base de $V_3 \otimes V_7$ formé de vecteurs propres pour $(\sigma_3 \otimes \sigma_7)(h)$, puis compter les multiplicités.*)

3. En s'inspirant de l'exemple précédent, trouver une décomposition en somme directe de représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ pour le produit tensoriel $V_m \otimes V_n$, où $m, n \in \mathbb{N}^*$ (le cours assure qu'un telle décomposition existe).

Exercice 4 (une représentation de dimension infinie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$). Dans cet exercice, on construit une représentation de dimension infinie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Nous allons voir que le théorème de complète réductibilité est mis en défaut pour les représentations de dimension infinie.

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et Z_λ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base dénombrable $\{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$. On définit une représentation $(Z_\lambda, \sigma_\lambda)$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ en posant pour $i \in \mathbb{N}$:

(i) $\sigma_\lambda(h)v_i = (\lambda - 2i)v_i$,
(ii) $\sigma_\lambda(f)v_i = (i + 1)v_{i+1}$,
(iii) $\sigma_\lambda(e)v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$,

où par convention, $v_{-1} = 0$.

1. Vérifier que les relations ci-dessus définissent bien une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

2. Montrer que tout sous-module propre W de Z_λ possède au moins un ***vecteur maximal***, c'est-à-dire un élément $w \in W \setminus \{0\}$ tel que $\sigma_\lambda(e)w = 0$. (*Indication : on pourra remarquer que tout sous-module de Z_λ contenant v_0 est égal à Z_λ.*)

3. On suppose dans cette question que $\lambda + 1 = r$ est un entier strictement positif.

3.1 Montrer que Z_λ n'est pas irréductible. (*Indication : remarquer que $\sigma_\lambda(e)v_r = 0$ puis que l'espace engendré par $v_r, v_{r+1}, \ldots$ est un sous-module de Z_λ.*)

3.2 Soit $\phi \colon Z_\mu \to Z_\lambda$ l'application linéaire de Z_μ dans Z_λ qui envoie v_i sur v_{i+r}, où $\mu = \lambda - 2r$.

3.2.1 Montrer que ϕ est un morphisme injectif de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-module.

3.2.2 En déduire que $\operatorname{im}\phi$ et $Z_\lambda / \operatorname{im}\phi \cong V_\lambda$ sont irréductibles.

Remarque : comme Z_λ n'est pas complètement réductible[1]*, ceci montre que le théorème de complète réductibilité pour les représentations de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ vu en cours n'est plus valide pour celles de dimension infinie.*

1. Pour démontrer cela, on pourra remarquer que $\operatorname{im}\phi$ n'admet pas de supplémentaire dans Z_λ qui soit un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-module : en effet, si tel était le cas, celui-ci serait de dimension finie mais Z_λ n'admet pas de sous-module non triviaux de dimension finie (on s'en convainc en faisant opérer $\sigma_\lambda(f)$ sur un vecteur non nul).

4. On suppose dans cette question que $\lambda + 1 \notin \mathbb{N}^*$. On souhaite montrer que Z_λ est irréductible.

4.1 Soit v un vecteur non nul de Z_λ que l'on écrit

$$v = a_s v_s + \cdots + a_r v_r \quad \text{avec} \quad a_s \neq 0 \text{ et } a_r \neq 0,$$

et soit W le sous-module de Z_λ engendré par v. En faisant opérer $\sigma_\lambda(x)$ un certain nombre de fois sur v, montrer que $v_0 \in W$.

4.2 Conclure.

Exercice 5 (une algèbre de Lie de dimension 3 égale à son algèbre dérivée est simple). On suppose que L est une algèbre de Lie de dimension 3 et que $[L, L] = L$.

1. Montrer que L est simple. (*Indication : remarquer tout d'abord que tout image homéomorphe à L est égale à son algèbre dérivée, puis utiliser l'exercice 1.*)

2. En déduire que $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ est simple si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2.

Exercice 6 (une algèbre de Lie résoluble non nilpotente). Montrer que l'algèbre de Lie non-abélienne de dimension 2 de l'exercice 1 est résoluble mais non nilpotente.

Exercice 7 (le théorème de Lie peut être mis en défaut si la caractéristique du corps n'est pas nulle). On suppose dans cet exercice que $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = p > 0$. On considère les matrices carrées d'ordre p à coefficients dans $\mathbb{K}$ suivantes :

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \mathrm{diag}(0, 1, 2, 3, \ldots, p-1).$$

Vérifier que $[x, y] = x$ de sorte que x, y engendrent une algèbre de Lie résoluble de dimension 2 (voir l'exercice 6) mais que x et y n'ont pas de vecteur propre en commun.