

Algèbres de Lie semi-simples : représentations et éléments nilpotents

Anne Moreau

anne.moreau@math.univ-lille1.fr

<http://math.univ-lille1.fr/~amoreau/>



Sophus Lie, né à Nordfjordeid en Norvège le 17 décembre 1842 et mort dans ce même pays le 18 février 1899, est un mathématicien norvégien. Il a participé activement à la création de la théorie des symétries continues, théorie qu'il a appliquée à la géométrie et aux équations différentielles. On lui doit la création de la notion d'algèbre de Lie, ainsi que des groupes de Lie.

Table des matières

Introduction	5
Chapitre 1. Algèbres de Lie	7
1. Définitions et exemples	7
2. Représentations et modules	9
2.1. Définitions	9
2.2. Représentations de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$	11
3. Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles	12
3.1. Algèbres de Lie nilpotentes et théorème de Engel	13
3.2. Algèbres de Lie résolubles et radical d'une algèbre de Lie	15
4. Représentations des algèbres de Lie résolubles	16
Chapitre 2. Algèbres de Lie semi-simples	19
1. Décomposition de Jordan-Chevalley et critère de Cartan	19
1.1. Quelques rappels d'algèbre linéaire	19
1.2. Critère de Cartan	20
2. Forme de Killing	21
3. Idéaux d'une algèbre de Lie semi-simple	23
4. Complète réductibilité des représentations de dimension finie	23
4.1. Élément de Casimir d'une représentation	23
4.2. Théorème de Weyl et applications	24
5. Décomposition en sous-espaces radiciels	27
5.1. Sous-algèbres torales	27
Chapitre 3. Systèmes de racines et théorèmes d'isomorphismes	31
1. Systèmes de racines	31
1.1. Axiomes et exemples	31
1.2. Base d'un système de racines et chambres du groupe de Weyl	33
1.3. Systèmes de racines irréductibles	35
2. Classification	35
3. Construction des systèmes de racines	37
4. Théorème d'isomorphisme	39
4.1. Théorème d'isomorphisme	39
4.2. Automorphismes intérieurs	40
4.3. Sous-algèbres de Cartan	42
Chapitre 4. Représentations des algèbres de Lie semi-simples	45
1. L'algèbre enveloppante universelle et théorème d'existence	45
1.1. L'algèbre tensorielle et l'algèbre symétrique	45
1.2. L'algèbre enveloppante universelle	46
1.3. Algèbres filtrées	46
1.4. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt et ses conséquences	47
1.5. Présentation des algèbres de semi-simples par générateurs et relations	49
2. Poids et vecteurs maximaux	51
3. Représentations de dimension finie et multiplicités	53
3.1. Poids entiers et poids dominants	54
3.2. L'élément de Casimir revisité	56
3.3. Formule de Freudenthal	57

Chapitre 5. Polynômes invariants, projection de Harish-Chandra et cône nilpotent d'une algèbre de Lie semi-simple	59
1. Polynômes invariants	59
2. Projection de Harish-Chandra	61
2.1. Caractères centraux	62
2.2. Action tordue du groupe de Weyl	63
3. Formules de Weyl et de Kostant	65
3.1. Caractères formels	65
3.2. Série de Jordan-Hölder et modules de Verma	67
3.3. Formules et applications	69
4. Cône nilpotent	72
4.1. Éléments nilpotents et polynômes invariants	73
4.2. Théorème de Jacobson-Morosov et conséquences	73
4.3. Variété associée à une représentation irréductible de plus haut poids	75
Bibliographie	79
Annexe A. Produits tensoriels	81
Annexe B. Algèbres de Lie classiques	83
Annexe C. Topologie de Zariski	85

Introduction

Une algèbre de Lie est un espace vectoriel L , défini sur un corps \mathbb{K} , muni d'une application bilinéaire antisymétrique $[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L$, le *crochet de Lie*, qui vérifie la relation de Jacobi :

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \text{pour tous } x, y, z \in L.$$

Par exemple, tout espace vectoriel muni du crochet nul est une algèbre de Lie ; l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n muni du crochet $[A, B] = AB - BA$ est une algèbre de Lie, notée le plus souvent $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$; l'espace euclidien \mathbb{R}^3 avec le produit vectoriel comme crochet de Lie est une algèbre de Lie, etc. Un autre exemple fondamental, plus géométrique, est le suivant. Soit M une variété différentielle. Alors l'espace vectoriel formé par les champs de vecteurs sur M possède une structure naturelle d'algèbre de Lie, sans être une algèbre.

Les algèbres de Lie sont naturellement associées aux *groupes de Lie*, qui jouent un rôle aussi bien en mathématique qu'en physique (ils décrivent la *symétrie continue*). La classification des algèbres de Lie est utilisée de façon cruciale pour l'étude des groupes de Lie, des groupes algébriques et de leurs représentations. Nous n'étudierons pas dans ce cours les groupes de Lie, mais les comprendre est l'une des raisons pour étudier les algèbres de Lie. L'étude des groupes et algèbres de Lie fut initiée au 19e siècle avec les travaux des mathématiciens Sophus Lie, Wilhelm Killing, Elie Cartan et Hermann Weyl, entre autres.

Une *représentation* d'une algèbre de Lie L est une application linéaire $\rho: L \rightarrow \text{End}(V)$, où V est un espace vectoriel (que l'on supposera souvent de dimension finie), qui "préserve le crochet", c'est-à-dire

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] := \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x) \quad \text{pour tous } x, y \in L.$$

La théorie des algèbres de Lie et leurs représentations joue un rôle central dans de nombreuses branches des mathématiques (géométrie, théorie des nombres, combinatoire, topologie,...) et de la physique théorique (systèmes intégrables, théorie conforme des champs, théorie de jauge, théorie des cordes...). Quel que soit son domaine d'étude, un chercheur en mathématiques a de grandes chances de rencontrer un jour ou l'autre dans sa carrière la notion d'algèbre de Lie !

Il existe différentes familles importantes d'algèbres de Lie qui permettent leur classification : les algèbres de Lie *résolubles* (l'exemple typique est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures), les algèbres de Lie *nilpotente* (l'exemple typique est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes), et les algèbres de Lie *semi-simples* ; un exemple important est l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices carrées d'ordre n de trace nulle muni du crochet $[A, B] = AB - BA$ (c'est même une algèbre de Lie dite *simple*!).

La structure des algèbres de Lie semi-simples est particulièrement riche, et ces algèbres de Lie possèdent des propriétés remarquables. Les représentations (de dimension finie) d'une algèbre de Lie sont *complètement réductibles* (si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 0$), c'est-à-dire qu'elles sont sommes directes de représentations *irréductibles*.

Les outils combinatoires comme les notions de *systèmes de racines* et de *plus haut poids* qui gouvernent la structure des algèbres de Lie semi-simples, et leurs représentations, apparaissent dans d'autres domaines des mathématiques (groupes algébriques, singularités de type ADE en géométrie, variante quantique, etc). Le cours sera une occasion de les étudier.

Un autre aspect important des algèbres de Lie semi-simples est l'étude des *orbites nilpotentes*. De même qu'en algèbre linéaire les matrices nilpotentes jouent un rôle fondamental, notamment en raison de la décomposition de Dunford, les *éléments nilpotents* d'une algèbre de Lie semi-simple jouent un rôle crucial : pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, ils correspondent tout simplement aux matrices nilpotentes. Rappelons que les classes de conjugaison des matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont en nombre fini et paramétrées par les partitions de n (via les blocs de Jordan). Ceci se généralise au cas des algèbres de Lie semi-simples : les *orbites nilpotentes* sont en nombre fini et paramétrées par des objets combinatoires.

Il existe des liens très intéressants entre les deux catégories d'objets, représentations d'une part et orbites nilpotentes d'autre part, associés à une algèbre de Lie semi-simple. Ces liens sont subtils et permettent de comprendre par exemple certains aspects des représentations de dimension infinie. Nous n'aurons certainement pas le temps de les aborder mais nous les évoquerons comme compléments.

Plan du cours

L'objectif de ce cours est d'introduire la théorie des algèbres de Lie et certains aspects de leurs représentations. Nous aborderons également, en fin de cours et si le temps le permet, quelques méthodes géométriques en théorie des représentations.

Plus précisément, le cours sera structuré ainsi.

Le chapitre 1 concernera des généralités sur les algèbres de Lie : définitions, exemples, notions d'idéaux, de morphismes, de représentations (ou modules), étude "complète" des algèbres de Lie *nilpotentes* et *résolubles*.

► Dans la suite du cours, les algèbres de Lie seront supposées de dimension finie et le corps de base sera algébriquement clos et de caractéristique nulle.

À partir du chapitre 2, on se concentrera sur l'étude des algèbres de Lie semi-simples.

Nous présenterons différentes caractérisations des algèbres de Lie semi-simples, et nous étudierons la structure de celles-ci. Cette dernière est régie par un *système de racines*, que l'on étudiera au chapitre 3. Il s'agit d'un objet combinatoire qui apparaît dans de nombreux domaines des mathématiques. Grâce à la classification des systèmes de racines, nous en déduirons une classification complète des algèbres de Lie simples (et donc semi-simples).

Dans le chapitre 4, on s'intéressera aux représentations des algèbres de Lie semi-simples. Nous introduirons la notion d'*algèbre enveloppante*, une notion intéressante en soi qui apparaît dans d'autres contextes (algèbres de Hopf, théorie des déformations, par exemple). Nous introduirons également la notion de *plus haut poids* et de *modules de Verma*.

Le chapitre 5 portera sur des aspects plus fins de la théorie des représentations et des invariants : théorèmes de Chevalley et de Harish-Chandra, formules de Weyl et de Kostant, notion de variété associée à une représentation irréductible de plus haut poids. Ces thématiques sont étroitement liées aux éléments nilpotents d'une algèbre de Lie semi-simple.

La dernière partie du cours sera une ouverture sur des thèmes plus avancés ; *idéaux primitifs d'une algèbre enveloppante*, *catégorie \mathcal{O}* , notion de *variété associée*, et liens entre ces différentes notions.

Algèbres de Lie

Dans tout ce qui suit, \mathbb{K} est un corps commutatif (ex : $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_3, \dots$).

1. Définitions et exemples

Définition 1 – Algèbre de Lie

Une \mathbb{K} -algèbre de Lie est un \mathbb{K} -espace vectoriel L muni d'une application \mathbb{K} -bilinéaire

$$[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L, \quad (x, y) \mapsto [x, y],$$

appelée **crochet de Lie**, et satisfaisant aux axiomes suivants :

- (i) $[x, x] = 0$ pour tout $x \in L$ (ce qui équivaut à $[x, y] = -[y, x]$ pour tous $x, y \in L$ si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$).
- (ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ pour tous $x, y, z \in L$ (*identité de Jacobi*).

Lorsque \mathbb{K} est évident, on dira simplement que L est une **algèbre de Lie**.

EXEMPLE 1. Tout \mathbb{K} -espace vectoriel L muni du crochet nul, i.e., $[x, y] = 0$ pour tous $x, y \in L$, est une algèbre de Lie.

Une algèbre de Lie L tel que $[x, y] = 0$ pour tous $x, y \in L$ est dite **abélienne** ou **commutative**.

EXEMPLE 2. L'espace vectoriel \mathbb{R}^3 orienté par sa structure euclidienne canonique, et muni du crochet $[x, y] = x \wedge y$ pour $x, y \in \mathbb{R}^3$, est une algèbre de Lie.

EXEMPLE 3 (algèbre associative). Soit $(A, +, \cdot)$ une algèbre associative définie sur \mathbb{K} . Alors A possède une structure d'algèbre de Lie donnée par :

$$\forall (x, y) \in A \times A, \quad [x, y] = x \cdot y - y \cdot x.$$

Si V est un \mathbb{K} -ev, alors $(\text{End}(V), +, \circ)$ muni du crochet ci-dessus est une algèbre de Lie. On la note $\mathfrak{gl}(V)$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$, où $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} , muni du crochet ci-dessus est une algèbre de Lie. On la note $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

Définition 2 – Sous-algèbre de Lie et idéal

Soit L une algèbre de Lie.

- Un sous-ensemble H de L est une **sous-algèbre** (de Lie) de L si H est un sous-espace vectoriel de L et si pour tous $x, y \in H$, on a $[x, y] \in H$.
- Un sous-ensemble I de L est un **idéal** de L si I est un sous-espace vectoriel de L et si pour tout $x \in I$ et tout $y \in L$, on a $[x, y] \in I$.

On vérifie sans peine que si H, K sont des sous-algèbres (resp. idéaux) de L , alors $H \cap K$ et $H + K$ sont des sous-algèbres (resp. idéaux) de L .

EXEMPLE 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les sous-ensembles suivants de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$:

- $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle,
- $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathfrak{d}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices diagonales de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, etc.

On remarquera que $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ est même un idéal de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

EXEMPLE 5 (dérivations d'une algèbre). Soit A une \mathbb{K} -algèbre associative. Une dérivation δ de A est un endomorphisme du \mathbb{K} -espace vectoriel sous-jacent à A vérifiant la formule de Leibniz : $\delta(ab) = (\delta a)b + a(\delta b)$ pour tous $a, b \in A$. L'ensemble $\text{Der}(A)$ des dérivations de A est un sous-espace vectoriel de $\text{End}(A)$. La composée $\delta \circ \delta'$ de deux dérivations δ, δ' n'est pas une dérivation en général (autrement dit, $\text{Der}(A)$ n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre associative $\text{End}(A)$), mais $[\delta, \delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$ est encore une dérivation de A . Ainsi, $\text{Der}(A)$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(A)$.

EXERCICE 1 (algèbre de Lie des dérivations). Vérifier les assertions ci-dessus, à savoir que l'espace $\text{Der}(A)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(A)$, mais pas une sous-algèbre de l'algèbre associative $\text{End}(A)$ en général.

On définit de même une **dérivation** d'une \mathbb{K} -algèbre de Lie L comme un élément f de $\text{End}(L)$ vérifiant $f([x, y]) = [f(x), y] + [x, f(y)]$ pour tous $x, y \in L$. On note $\text{Der}(L)$ l'ensemble des dérivations de L . Ici encore, le sous-espace vectoriel $\text{Der}(L)$ n'est pas stable par produit (composition) mais est stable par le crochet de Lie. C'est donc une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(L)$.

Voici un exemple très important de dérivation d'une algèbre de Lie L . Pour $x \in L$, notons

$$\begin{aligned} \text{ad } x : L &\longmapsto L \\ y &\longmapsto [x, y]. \end{aligned}$$

Compte tenu de l'antisymétrie du crochet, l'identité de Jacobi assure que $\text{ad } x$ est une dérivation de L .

Citons encore quelques exemples d'algèbres de Lie à titre culturel seulement. Nous ne les utiliserons pas dans la suite de ce cours.

EXEMPLE 6 (un exemple plus analytique). Soit M une variété lisse (i.e., différentiable de classe C^∞). On rappelle qu'un champ de vecteurs est une section lisse $\xi : M \rightarrow TM$ du fibré tangent de M (intuitivement, la donnée pour tout $x \in M$ d'un vecteur $\xi(x)$ tangent à M en x et dépendant de manière C^∞ de x). Un tel champ de vecteurs définit une dérivation de l'algèbre $C^\infty(M, \mathbb{R})$ des fonctions lisses sur M qui envoie une fonction f sur la fonction $x \mapsto d_x f(\xi(x))$. On note $\mathcal{V}(M)$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur M . On montre par un calcul local que l'application $\mathcal{V}(M) \rightarrow \text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$ ainsi obtenue est bijective. Il s'ensuit que le \mathbb{R} -espace vectoriel (de dimension infinie) $\mathcal{V}(M)$ de tous les champs de vecteurs sur M est muni d'une structure de \mathbb{R} -algèbre de Lie.

EXEMPLE 7 (algèbre de Lie d'un groupe de Lie, algèbre de Lie d'un groupe algébrique). L'espace tangent en son élément neutre d'un groupe de Lie possède naturellement une structure d'algèbre de Lie. C'est l'exemple historique considéré par Sophus Lie. Nous n'aborderons pas cet aspect de la théorie dans le cours. Mentionnons seulement qu'un **groupe de Lie** est une variété (réelle) lisse G munie d'une loi de groupe lisse $m : G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto xy$, dont l'application «passage à l'inverse», $\iota : G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$, est lisse aussi. Il y a alors plusieurs méthodes pour munir l'espace tangent $T_e G$ d'un groupe de Lie G en son élément neutre e d'une structure de \mathbb{R} -algèbre de Lie : via les champs de vecteurs invariants à gauche ou via différentiation de la représentation adjointe de G .

La version plus algébrique (complexe) assure qu'à tout **groupe algébrique**¹ on peut naturellement associer une algèbre de Lie (là encore, c'est l'espace tangent en l'élément neutre qui possède une structure d'algèbre de Lie). On renvoie à [2, Chap. 23] pour plus de détail sur cet aspect (l'ouvrage [2] contient les bases nécessaires de géométrie algébrique). Ce point de vue sera évoqué plus tard dans le cours.

EXERCICE 2 (algèbre de Lie quotient). Soit I un idéal d'une algèbre de Lie L . Montrer que le quotient L/I muni du crochet :

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I, \quad \forall (x, y) \in L \times L,$$

est une algèbre de Lie. (On commencera par vérifier que le crochet ci-dessus est bien défini.)

1. Un groupe algébrique (complexe) est une variété algébrique qui possède en même temps une structure de groupe telle que la loi de groupe et l'application de passage à l'inverse soient des morphismes de variétés algébriques.

Définition 3 – Morphisme et isomorphisme

Soient L_1 et L_2 deux algèbres de Lie, et $\theta: L_1 \rightarrow L_2$ une application linéaire. On dit que θ est un **morphisme d'algèbres de Lie** si :

$$\forall (x, y) \in L_1 \times L_1, \quad \theta([x, y]) = [\theta(x), \theta(y)].$$

L'application θ est un **isomorphisme d'algèbres de Lie** si de plus θ est bijective.

Les algèbres de Lie L_1 et L_2 sont dites **isomorphes** s'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\theta: L_1 \rightarrow L_2$.

EXERCICE 3 (noyau et image d'un morphisme d'algèbres de Lie). Soit $\theta: L_1 \rightarrow L_2$ un morphisme d'algèbres de Lie.

1. Montrer que le noyau $\ker \theta$ est un idéal de L_1 et que l'image $\text{im} \theta$ est une sous-algèbre de L_2 .
2. Montrer que le quotient $L_1 / \ker \theta$ est isomorphe à $\text{im} \theta$.

2. Représentations et modules

2.1. Définitions. Soit L une algèbre de Lie.

Définition 4

Une **représentation** de L , ou **L -module**, est une paire (V, σ) , où V est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\sigma: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Autrement dit, σ est une application linéaire telle que :

$$\forall (x, y) \in L \times L, \quad \sigma(x) \circ \sigma(y) - \sigma(y) \circ \sigma(x) = \sigma([x, y]).$$

Si (V, σ) est une représentation de L , on écrit parfois simplement $x.v$ à la place de $\sigma(x)(v)$ pour $x \in L$ et $v \in V$ lorsque la représentation est évidente.

REMARQUE 1. En général, on définit plutôt un **L -module (à gauche)** comme étant un espace vectoriel V muni d'une opération

$$L \times V \rightarrow V, \quad (x, v) \mapsto x.v$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $(x, v) \mapsto x.v$ est linéaire en x et en v ,
- (ii) $[x, y].v = x.(y.v) - y.(x.v)$ pour tous $x, y \in L$ et $v \in V$.

On vérifie sans peine que la donnée d'un L -module est équivalente à la donnée d'une représentation de L au sens de la définition 4. Dans ce cours, on utilisera sans distinction les deux notions.

EXEMPLE 8. Si (V, σ) est une représentation de L , on définit la **représentation contragrédiente**, ou **représentation duale**, (V^*, π) de (V, σ) de la façon suivante : pour $x \in L, v \in V$ et $f \in V^*$,

$$(\pi(x)(f))(v) = -f(\sigma(x)(v)).$$

On définit les notions de **sous-représentation** (ou **sous-module**), de **module quotient** et de **somme directe** de façon naturelle.

EXEMPLE 9. L'application

$$\begin{aligned} \text{ad}: L &\longmapsto \mathfrak{gl}(L) \\ x &\longmapsto \text{ad } x. \end{aligned}$$

définit une représentation de L , appelée la **représentation adjointe**. Un sous-module de (L, ad) n'est rien d'autre qu'un idéal de L . La représentation duale de (L, ad) est

$$\begin{aligned} \text{ad}^*: L &\longmapsto \mathfrak{gl}(L^*) \\ x &\longmapsto \left(\begin{array}{ccc} \text{ad}^* x: L^* &\longrightarrow & L^* \\ & f &\longmapsto & -f([x, y]) \end{array} \right). \end{aligned}$$

EXERCICE 4 (représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$). Vérifier que les vecteurs

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, et calculer les matrices de $\text{ad } e$, $\text{ad } h$, $\text{ad } f$ relativement à cette base.

Un **morphisme de L -modules** est une application linéaire $\theta: V \rightarrow W$, où (V, σ) et (W, π) sont deux L -modules, telle que $\theta(\sigma(x)(v)) = \pi(x)(\theta(v))$ pour tous $x \in L$ et $v \in V$. On note $\text{Hom}_L(V, W)$ l'ensemble de tels morphismes. Si $V = W$, on notera simplement $\text{End}_L(V)$ cet espace.

On dit que les modules V et W de L sont **isomorphes** ou **équivalents** s'il existe un isomorphisme de L -modules $\theta: V \rightarrow W$ entre V et W .

Un L -module (V, σ) est dit **simple** ou **irréductible** si $V \neq \{0\}$ et si les seuls sous-modules de V sont V ou $\{0\}$. L'espace V est **semi-simple** ou **complètement réductible** si V est isomorphe à une somme directe de sous-modules irréductibles.

Proposition 5 – Lemme de Schur

On suppose dans cette proposition que \mathbb{K} est algébriquement clos.

- (i) Si V, W sont deux modules simples de L non isomorphes, alors $\text{Hom}_L(V, W) = \{0\}$.
- (ii) Si V est un module simple de L , alors $\text{End}_L(V)$ est un corps. De plus, si V est de dimension finie, alors $\text{End}_L(V) = \mathbb{K} \text{Id}_V$.

DÉMONSTRATION. (i) Comme le noyau et l'image d'un morphisme de L -modules sont des L -modules, un morphisme de L -modules simples est, ou bien le morphisme nul ou bien un isomorphisme. Ceci démontre l'assertion (i).

(ii) L'argument de (i) montre que $\text{End}_L(V)$ est un corps. En effet, si un élément de $\text{End}_L(V)$ est non nul, il est inversible. De plus, ce corps contient clairement $\mathbb{K} \text{Id}_V$.

Si maintenant V est de dimension finie, alors tout $f \in \text{End}_L(V)$ possède une valeur propre λ (le corps \mathbb{K} est supposé algébriquement clos). Ceci implique que $\ker(f - \lambda \text{Id}_V)$ est un sous-module non trivial de V . Comme V est simple, on en déduit que $f = \lambda \text{Id}_V$. \square

Issai Schur, né à Moguilev le 10 janvier 1875 et mort à Tel-Aviv le 10 janvier 1941, est un mathématicien d'origine russe qui a surtout travaillé en Allemagne. Son nom est aussi transcrit Issai Chour (transcription du russe en français).



Une représentation (V, σ) est dite **fidèle** si le morphisme σ est injectif : si tel est le cas, on peut alors identifier L à une sous-algèbre (de Lie) de $\mathfrak{gl}(V)$. On admet le théorème suivant ² :

Théorème 6 – Théorème d'Ado

Toute algèbre de Lie de dimension finie admet une représentation fidèle de dimension finie.

Igor Dmitrievich Ado (1910-1983) est un mathématicien russe. Il obtint son doctorat à Kazan sous la direction de Chebotarev. Le théorème d'Ado, dans sa version la plus générale comme ci-dessus (sur un corps de caractéristique quelconque) est dû à Iwasawa et Harish-Chandra.

2. On renvoie par exemple à [5, Théorème E4] pour une démonstration de ce résultat.

EXERCICE 5 (la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ est simple et fidèle). *Montrer que la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ est simple et fidèle si $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.*

2.2. Représentations de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. On suppose dans ce paragraphe que \mathbb{K} est algébriquement clos et de caractéristique nulle (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), et on étudie les représentations de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Comme nous le verrons au chapitre suivant, elles jouent un rôle essentiel dans l'étude des algèbres de Lie *semi-simples*. Il s'agit donc bien plus que d'un simple exemple !

On reprend les notations de l'exercice 4. Soit $r \in \mathbb{N}$. On pose pour $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$\mu_i = i(r - i + 1).$$

On considère la représentation (V_r, σ_r) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ où $V_r = \mathbb{K}^{r+1}$ et le morphisme σ_r est donné par :

$$\sigma_r(h) = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & r-4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -r \end{pmatrix}, \sigma_r(e) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \sigma_r(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

On a identifié ici $\text{End}(\mathbb{K}^{r+1})$ et $\mathcal{M}_{r+1}(\mathbb{K})$.

Lemme 7

La représentation σ_r est simple.

EXERCICE 6. *Démontrer le lemme 7.* (On pourra reprendre les idées de l'exercice 5.)

Soit (V, σ) une représentation non nulle de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Posons

$$H = \sigma(h), \quad E = \sigma(e), \quad F = \sigma(f).$$

Par une simple récurrence, on vérifie sans peine les relations suivantes pour $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}^*$:

$$[H, E^i] = 2iE^i, \tag{2}$$

$$[H, F^i] = -2iF^i, \tag{3}$$

$$[F, E^j] = -j(H - (j - 1)\text{Id}_V) \circ E^{j-1}. \tag{4}$$

EXERCICE 7. *Vérifier les relations ci-dessus et en déduire que E et F sont nilpotents.* (Indication : on pourra remarquer que $\text{Tr}(F^i) = \text{Tr}(E^i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.)

Soient $\lambda = \min\{n \in \mathbb{N} \mid E^{n+1} = 0\}$ et $w \in V$ tel que $v = E^\lambda(w) \neq 0$. Posons $v_0 = v$ et pour $i \in \mathbb{N}^*$, $v_i = F^i(v_0)$. D'après la relation (4), on a :

$$0 = [F, E^{\lambda+1}](w) \Rightarrow H(v_0) = \lambda v_0.$$

Par conséquent, d'après (3),

$$H(v_i) = (\lambda - 2i)v_i. \tag{5}$$

Il s'ensuit que si $v_i \neq 0$, alors v_i est un vecteur propre de H associé à la valeur propre $\lambda - 2i$. De plus, une simple récurrence donne :

$$E(v_i) = i(\lambda - i + 1)v_{i-1}, \tag{6}$$

où $v_{-1} = 0$. Soit s tel que $v_s \neq 0$ et $v_i = 0$ pour $i > s$, et soit W le sous-espace de V engendré par v_0, \dots, v_s . Alors W est un sous-module de V et $\{v_0, \dots, v_s\}$ est une base de W d'après (5). Notons H_W, E_W, F_W les restrictions de H, E, F à W , respectivement. Comme $[E_W, F_W] = H_W$, on a

$$0 = \text{Tr}(H_W) = \sum_{i=0}^s (\lambda - 2i) = (s + 1)(\lambda - s).$$

Par conséquent, $s = \lambda$ et les matrices de H_W, E_W, F_W dans la base $\{v_0, \dots, v_s\}$ sont celles de (1) avec $r = \lambda$. On en déduit que les représentations $\sigma|_W$ et σ_λ sont équivalentes.

On a ainsi obtenu le théorème suivant.

Théorème 8

Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et (V, σ) une représentation simple de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ de dimension $r + 1$. Alors σ est équivalente à σ_r .

De plus, les valeurs propres de $\sigma(h)$ sont $-r, -r+2, \dots, r-2, r$, et si $v \in V \setminus \{0\}$ vérifie $\sigma(e)(v) = 0$ (resp. $\sigma(f)(v) = 0$), alors v est un vecteur propre de $\sigma(h)$ associé à la valeur propre r (resp. $-r$).

Le résultat suivant sera généralisé au chapitre suivant :

Théorème 9 – Complète réductibilité des représentations de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$

Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ est complètement réductible.

DÉMONSTRATION. Soit (V, σ) une représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Si $\dim V = 0$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc $\dim V \geq 1$. D'après la discussion précédent le théorème 8, il existe un sous-module simple W de V de dimension $\lambda + 1$. Montrons qu'il existe un sous-module U de V tel que $V = U \oplus W$. Le théorème se déduira alors d'une simple récurrence sur la dimension.

Considérons la représentation duale (V^*, π) de V (voir l'exemple 8). Soient $w \in W$ et $\{v_0, \dots, v_\lambda\}$ la base de W comme dans la discussion précédant le théorème 8. Fixons $\xi \in V^*$ tel que $\xi(v_0) = 1$. Alors

$$(\pi(e)^\lambda(\xi))(w) = \xi((-E)^\lambda(w)) = (-1)^\lambda.$$

On a donc $\eta = \pi(e)^\lambda(\xi) \neq 0$ et λ est le plus petit entier tel que $\pi(e)^{\lambda+1} = 0$. D'après la discussion précédant le théorème 8, le sous-espace M de V^* engendré par $\eta_i = \pi(f)^i(\eta)$, $i = 0, \dots, \lambda$, est un sous-module simple de V^* de dimension $\lambda + 1$.

À l'aide de la relation (6), on vérifie que :

$$\eta_i(v_{\lambda-i}) = (-1)^{\lambda-i}(\lambda!)^2, \tag{7}$$

$$\eta_i(v_p) = 0, \text{ si } i + p > \lambda. \tag{8}$$

Soit U l'orthogonal dans V de M , c'est-à-dire $U = \{u \in V \mid \eta_i(u) = 0 \text{ pour tout } i = 0, \dots, \lambda\}$. On a $\dim V = \dim U + \dim W$ et U est un sous-module de V . De plus, (7) et (8) impliquent que $U \cap W = \{0\}$. Il en résulte que V est la somme directe des sous-modules U et W , comme désiré. \square

EXERCICE 8. Vérifier les détails de la démonstration ci-dessus.

Corollaire 10

Soit (V, σ) une représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

- (i) Il existe $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ tels que σ soit équivalent à la somme directe des représentations σ_{r_i} , $i = 1, \dots, n$.
- (ii) On a $V = \sigma(e)(V) \oplus \ker \sigma(f) = \sigma(f)(V) \oplus \ker \sigma(e)$.
- (iii) $\sigma(h)$ est semi-simple et ses valeurs propres sont des entiers.
- (iv) Si V est non trivial, alors σ est irréductible si et seulement si les valeurs propres de $\sigma(h)$ sont sans multiplicité et sont ou bien toutes impaires ou bien toutes paires.

3. Algèbres de Lie nilpotentes et résolubles

On suppose désormais que toutes les algèbres de Lie sont de dimension finie.

Soit L une algèbre de Lie. Si H et K sont deux sous-espaces de L , on note $[H, K]$ le sous-espace de L engendré par les vecteurs $[x, y]$, où $x \in H$ et $y \in K$. Ainsi par exemple, l'algèbre de Lie L est abélienne si et seulement si $[L, L] = \{0\}$.

3.1. Algèbres de Lie nilpotentes et théorème de Engel. On définit la *suite centrale descendante* de L par récurrence :

$$L^1 = L, \quad L^2 = [L, L] = [L^1, L], \quad L^3 = [L^2, L], \dots, L^i = [L^{i-1}, L], \dots$$

Ainsi, L est abélienne si et seulement si $L^2 = 0$.

EXERCICE 9 (la suite centrale descendante est une suite décroissante d'idéaux). *Vérifier que les ensembles L^i , $i \in \mathbb{N}$, sont des idéaux de L , et que $L = L^1 \supset L^2 \supset L^3 \supset \dots$.*

Définition 11 – Algèbre de Lie nilpotente

L'algèbre de Lie L est dite *nilpotente* si $L^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 10 (la représentation adjointe d'une algèbre de Lie nilpotente est nilpotente). *Montrer que L est nilpotente si et seulement s'il existe un entier $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{ad } x_1 \circ \text{ad } x_2 \circ \dots \circ \text{ad } x_j = 0$ pour tous $x_1, x_2, \dots, x_j \in L$.*

EXERCICE 11. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures strictes est une algèbre de Lie nilpotente.*

Nous allons voir que cet exemple est en fait très général.

Lemme 12

Soit L une algèbre de Lie nilpotente. Alors toute sous-algèbre de L et tout quotient de L (par un idéal de L) sont des algèbres de Lie nilpotentes.

EXERCICE 12. *Démontrer le lemme ci-dessus.*

EXERCICE 13. *Supposons que L soit algèbre de Lie nilpotente non nulle. Montrer qu'il existe un idéal de L de codimension 1. (Indication : observer que si L est nilpotente, alors $L^2 \neq L$ et considérer un sous-espace I de L tel que $I \supset L^2$ et $\dim I = \dim L - 1$.)*

Lemme 13

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

- (i) Si $x \in \text{End}(V)$ est nilpotent, alors $\text{ad } x$ est un endomorphisme nilpotent de $\text{End}(\text{End } V)$. Plus précisément, si $x^p = 0$, alors $(\text{ad } x)^{2p-1} = 0$.
- (ii) Si L est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ formée d'endomorphismes nilpotents, alors il existe un vecteur non nul v de V tel que $x(v) = 0$ pour tout $x \in L$.

DÉMONSTRATION. L'assertion (i) est claire car si $y \in \mathfrak{gl}(V)$, alors $(\text{ad } x)^n(y)$ est une somme de termes de la forme $\pm x^i y x^j$ avec $i + j = n$.

(ii) On raisonne par récurrence sur la dimension de L . Si $L = \{0\}$, le résultat est évident. On suppose $\dim L > 0$.

Soit A une sous-algèbre non nulle de L (une telle algèbre existe : par exemple $A = \mathbb{K}x$ avec $x \in L \setminus \{0\}$). Pour $x \in A$, l'endomorphisme de L/A induit par $\text{ad } x$ est nilpotent par (i). D'après notre hypothèse de récurrence, il existe $y \in L \setminus A$ tel que $[A, y] \subset A$. Par conséquent, A est un idéal de $A \oplus \mathbb{K}y$. De cette façon, on construit un idéal I de L de codimension 1 : si $A \oplus \mathbb{K}y = L$, $I = A$ convient, sinon on reprend l'argument précédent avec l'algèbre $A' = A \oplus \mathbb{K}y$.

Soit donc un idéal I de L tel $L = I \oplus \mathbb{K}y$ pour $y \in L \setminus I$. Notons W le sous-espace vectoriel de V formé des vecteurs v tels que $x(v) = 0$ pour tout $x \in I$. D'après l'hypothèse de récurrence, $W \neq \{0\}$ puisque I est une algèbre de Lie nilpotente d'après le lemme 12. Montrons que $y(W) \subset W$. Soit $w \in W$ et $z \in I$. On a

$$z \circ y(w) = y \circ z(w) + [z, y](w) = 0$$

car $z(w) = 0$ et $[I, L] \subset I$ d'où $[z, y](w) = 0$. Ceci prouve que $y(W) \subset W$. Comme y est nilpotent, sa restriction à W l'est aussi, et il existe $v \in W \setminus \{0\}$ tel que $y(v) = 0$. Le vecteur v vérifie alors $x(v) = 0$ pour tout $x \in L$, ce qui démontre le lemme. \square



Friedrich Engel, né le 26 décembre 1861 à Lugau près de Chemnitz et mort le 29 septembre 1941 à Giessen, est un mathématicien allemand.

Théorème 14 – Théorème de Engel

Soit (V, σ) une représentation de L de dimension $n > 0$. Supposons que $\sigma(x)$ soit un endomorphisme nilpotent pour tout $x \in L$. Alors il existe une base \mathcal{B} de V dans laquelle la matrice de $\sigma(x)$, pour tout $x \in L$, est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma(x)) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, il existe un drapeau ^a de V ,

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V,$$

tel que $\sigma(L)V_i \subset V_{i-1}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

a. Un **drapeau** d'un espace vectoriel V est une suite de sous-espaces vectoriels $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ telle que $\dim V_i = i$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.

DÉMONSTRATION. Quitte à quotienter par le noyau de σ , on peut supposer : $L \subset \mathfrak{gl}(V)$. On raisonne par récurrence sur la dimension n de V . Si $n = 1$, le résultat est évident. Supposons $n > 1$. D'après le lemme 13, il existe un vecteur non nul v de V tel que $\sigma(x)v = 0$ pour tout $x \in L$. Considérons la projection canonique

$$\pi: V \longrightarrow V/\mathbb{K}v = W,$$

et appliquons l'hypothèse de récurrence à W . Il existe alors un drapeau $\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{n-1} = W$ de W vérifiant les propriétés désirées. Posons $V_0 = \{0\}$ puis, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $V_i = \pi^{-1}(W_{i-1})$. alors le drapeau $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ de V vérifie $L(V_i) \subset V_{i-1}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ comme désiré. \square

Corollaire 15

Une algèbre de Lie L est nilpotente si et seulement si pour tout $x \in L$, $\text{ad } x$ est un endomorphisme nilpotent de L .

EXERCICE 14. *Démontrer le corollaire ci-dessus.*

3.2. Algèbres de Lie résolubles et radical d'une algèbre de Lie. On définit une nouvelle suite d'idéaux de L , la **suite dérivée**, par récurrence :

$$L^{(0)} = L, \quad L^{(1)} = [L, L], \quad L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}], \dots, L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}], \dots$$

EXERCICE 15 (la suite dérivée est une suite décroissante d'idéaux). *Vérifier que les ensembles $L^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, sont des idéaux de L , et que $L = L^{(0)} \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \dots$.*

Définition 16 – Algèbre de Lie résoluble

On dit qu'une algèbre de Lie L est **résoluble** si $L^{(n)} = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Par exemple, toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble. En particulier, toute algèbre de Lie abélienne est résoluble.

EXERCICE 16. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures est résoluble. Calculer explicitement la suite dérivée de $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$.*

Nous allons voir que cet exemple est en fait très général.

EXERCICE 17. *Soit I un idéal de L . Supposons que I et L/I soient résolubles. Montrer que L est résoluble.*

Proposition-Définition 17 – Radical d'une algèbre de Lie

Toute algèbre de Lie L de dimension finie contient un unique plus grand idéal résoluble R . De plus, le quotient L/R ne contient aucun idéal résoluble non nul. L'idéal R est appelé **le radical** de L . On le note $\text{rad}(L)$.

DÉMONSTRATION. Soient I, J deux idéaux résolubles de L . Alors $I + J$ est encore un idéal de L , et $(I + J)/I \cong J/(I \cap J)$. Comme J est résoluble, $J/(I \cap J)$ est résoluble et donc $(I + J)/I$ est résoluble aussi. Comme I est résoluble, on en déduit que $I + J$ est résoluble d'après l'exercice 17. On a donc montré que la somme de deux idéaux résolubles est résoluble. Il en résulte que L admet un unique plus grand idéal résoluble.

Si I/R est un idéal résoluble de L/R , alors I est un idéal résoluble de L d'après l'exercice 17. Par conséquent, $I = R$ et $I/R = \{0\}$. □

EXERCICE 18. *Vérifier les détails de la démonstration ci-dessus, en particulier l'isomorphisme $(I+J)/I \cong J/(I \cap J)$. (Indication : on remarquera tout d'abord que I est un idéal de $I + J$ et que $I \cap J$ est un idéal de J .)*

Définition 18 – Algèbres de Lie simples et semi-simples

Une algèbre de Lie L est dite **semi-simple** si $\text{rad}(L) = 0$. Une algèbre de Lie L est dite **simple** si L n'a pas d'idéaux propres (c'est-à-dire autre que 0 et L) et si L est non abélienne (ce qui exclut le cas des algèbres de Lie de dimension 1).

Nous verrons au prochain chapitre que si l'algèbre de Lie L est semi-simple (resp. simple) alors la représentation (L, ad) est semi-simple (resp. simple).

Proposition 19

Toute algèbre de Lie simple est semi-simple.

DÉMONSTRATION. Supposons que L soit simple mais non semi-simple. Alors $\text{rad}(L) \neq 0$. Comme $\text{rad}(L)$ est un idéal de L , on en déduit $\text{rad}(L) = L$. Par conséquent L est résoluble et il existe $n \geq 0$ tel que $L^{(n)} = \{0\}$. En particulier, $L^{(1)} \neq L$. En effet, $L^{(1)} = L$ impliquerait $L^{(n)} = L$ pour tout $n \geq 1$. Mais $L^{(1)}$ est un idéal de L , donc $L^{(1)} = \{0\}$ puisque L est simple, et donc $[L, L] = \{0\}$, i.e., L est abélienne. Comme L est abélienne, tout sous-espace de L est un idéal. Comme L est simple, on en déduit que $\dim L = 1$, ce qui est impossible puisque L est simple. \square

4. Représentations des algèbres de Lie résolubles

On suppose désormais que le corps \mathbb{K} est algébriquement clos et de caractéristique nulle (par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Remarquons que toute représentation de dimension 1 d'une algèbre de Lie est irréductible. De plus, se donner une représentation de dimension 1 d'une algèbre de Lie L revient à se donner une application linéaire $\sigma : L \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\sigma([L, L]) = 0$. Une telle application linéaire est aussi appelée un *caractère* de l'algèbre de Lie L .

Théorème 20 – Théorème de Lie

Soient L une algèbre de Lie résoluble non nulle, et (V, σ) une représentation irréductible de L de dimension finie. Alors $\dim V = 1$.

Le théorème de Lie assure que si L est résoluble et si (V, σ) est une représentation de L de dimension finie, alors il existe un vecteur propre dans V commun à tous les $\sigma(x)$, pour $x \in L$. Nous avons déjà démontré ce résultat pour les algèbres de Lie nilpotentes : c'est le théorème de Engel.

DÉMONSTRATION. On démontre le théorème par récurrence sur la dimension de L . Si $\dim L = 1$, i.e., $L = \mathbb{K}x$, alors pour tout vecteur propre v de $\sigma(x)$ dans V , $\mathbb{K}v$ est un sous-module de V . Comme V est irréductible, on a $V = \mathbb{K}v$ et V est de dimension 1.

On suppose maintenant $\dim L > 1$. Fixons un idéal I de L de codimension 1 (on démontre l'existence d'un tel idéal comme dans l'exercice 13). Comme V est un I -module, V contient un sous-module irréductible W (pour I) de V . D'après l'hypothèse de récurrence, on a $\dim W = 1$. Soit $w \in W \setminus \{0\}$. Pour tout $y \in I$, on a

$$\sigma(y)w = \lambda(y)w,$$

où $\lambda : I \rightarrow \mathbb{C}$ est la représentation de I de dimension 1 associée à W . Posons

$$U = \{u \in V \mid \sigma(y)u = \lambda(y)u \text{ pour tout } y \in I\}.$$

On a

$$\{0\} \neq W \subset U \subset V.$$

Montrons que U est un sous-module de V . Soient $x \in L$ et $u \in U$. Puisque $[x, y] \in I$, on en déduit que pour tout $y \in I$,

$$\sigma(y)(\sigma(x)u) = \sigma(x)(\sigma(y)u) - \sigma([x, y])u = \lambda(y)\sigma(x)u - \lambda([x, y])u. \tag{9}$$

ASSERTION 1. Pour tous $x \in L$ et $y \in I$, $\lambda([x, y]) = 0$.

DÉMONSTRATION. Comme $\dim I = \dim L - 1$, on a $L = I \oplus \mathbb{K}x$ pour $x \in L \setminus I$. Il suffit de démontrer l'assertion pour un tel x puisque $\lambda([I, I]) = \{0\}$. Soit $u \in U \setminus \{0\}$. Considérons le sous-espace engendré par $v_0 = u, v_1 = \sigma(x)u, \dots, v_i = \sigma(x)^i u, \dots$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que v_0, \dots, v_p soient linéairement indépendants et v_0, \dots, v_{p+1} soient liés. Montrons par récurrence que pour tout $y \in I$,

$$\sigma(y)v_i \in \lambda(y)v_i + \text{Vect}_{\mathbb{K}}(v_0, \dots, v_{i-1})$$

pour tout $i = 0, \dots, p$. Le résultat est vrai pour $i = 0$. Supposons le vrai pour $i - 1$ pour un certain $i \in \{1, \dots, p - 1\}$ et soit $y \in I$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \sigma(y)v_i &= \sigma(y)(\sigma(x)v_{i-1}) = \sigma(x)(\sigma(y)v_{i-1}) - \sigma([x, y])v_{i-1} \\ &\in \sigma(x)(\lambda(y)v_{i-1} + \text{Vect}_{\mathbb{K}}(v_0, \dots, v_{i-2})) - \lambda([x, y])v_{i-1} + \text{Vect}_{\mathbb{K}}(v_0, \dots, v_{i-2}) \\ &\in \lambda(y)v_i + \text{Vect}_{\mathbb{K}}(v_0, \dots, v_{i-1}) \end{aligned}$$

puisque $[x, y] \in I$. Il en résulte que le sous-espace $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(v_0, \dots, v_p)$ est invariant sous l'action de $\sigma(y)$ pour tout $y \in I$. Par construction, il l'est aussi sous l'action de $\sigma(x)$. En conséquence, c'est un sous-module de V , d'où

$$V = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(v_0, \dots, v_p)$$

puisque V est irréductible. Or $[x, y] \in I$ pour tout $y \in I$ et le calcul précédent montre que

$$\text{Tr}_V(\sigma([x, y])) = (p + 1)\lambda([x, y]),$$

d'où $\lambda([x, y]) = 0$ puisque $\text{Tr}_V(\sigma([x, y])) = \text{Tr}_V(\sigma(x) \circ \sigma(y) - \sigma(y) \circ \sigma(x)) = 0$. □

D'après la relation (9), on déduit de ce qui précède que pour $x \in L$, $u \in U$ et $y \in I$,

$$\sigma(y)(\sigma(x)u) = \lambda(y)\sigma(x)u, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sigma(x)u \in U.$$

Le sous-espace U est donc un sous-module non nul de V , d'où $U = V$ puisque V est irréductible. Autrement dit,

$$\sigma(y)v = \lambda(y)v \quad \text{pour tous} \quad y \in I \text{ et } v \in V.$$

Écrivons $L = I \oplus \mathbb{K}x$ pour $x \in L \setminus I$ comme dans la démonstration ci-dessus. Soit v un vecteur propre de $\sigma(x)$ dans V . Alors $\mathbb{K}v$ est un sous-module de V puisqu'il est invariant par les actions de x et de I . Comme V est irréductible, $V = \mathbb{K}v$ et $\dim V = 1$ ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 21

Soient L une algèbre de Lie résoluble, et (V, σ) une représentation de L de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une base \mathcal{B} de V telle que pour tout $x \in L$ la matrice de $\sigma(x)$ soit de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma(x)) = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & * & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, via l'isomorphisme $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ (donné par le choix de \mathcal{B}), $\sigma(L)$ est contenue dans la sous-algèbre $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$.

Corollaire 22

Soit L une algèbre de Lie résoluble de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors L possède une chaîne d'idéaux

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = L,$$

avec $\dim I_i = i$.

EXERCICE 19. Démontrer les corollaires précédents à l'aide du théorème de Lie.

Algèbres de Lie semi-simples

Dans tout ce chapitre, le corps \mathbb{K} est algébriquement clos et de caractéristique nulle. Toutes les algèbres de Lie sont supposées de dimension finie.

1. Décomposition de Jordan-Chevalley et critère de Cartan

1.1. Quelques rappels d'algèbre linéaire. Soient V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $x \in \text{End}(V)$. Il existe une base \mathcal{B} de V dans laquelle la matrice de x est une matrice par blocs dont tous les blocs sont de la forme

$$J_\lambda(p) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad 1 \leq p \leq n, \lambda \in \mathbb{K}.$$

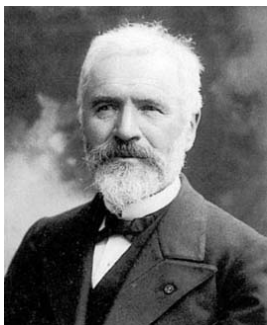
La version matricielle stipule que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice par blocs de matrices de la forme $J_p(\lambda)$, $1 \leq p \leq n$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Rappelons qu'un endomorphisme $x \in \text{End}(V)$ est dit **semi-simple** si les racines de son polynôme minimal sont deux à deux distinctes. Comme \mathbb{K} est algébriquement clos, x est semi-simple si et seulement si x est diagonalisable.

Proposition 23 – Décomposition de Jordan-Chevalley

- (i) Il existe x_s et x_n dans $\text{End}(V)$ tels que $x = x_s + x_n$, x_s est semi-simple, x_n est nilpotent, x_s et x_n commutent.
- (ii) Il existe des polynômes p et q dans $\mathbb{K}[X]$, sans terme constant, tels que $x_s = p(x)$ et $x_n = q(x)$. En particulier, x_s et x_n commutent avec tous les endomorphismes commutant avec x .

La décomposition $x = x_s + x_n$ est appelée la décomposition de **Jordan-Chevalley**, ou décomposition de **Jordan**, de x ; x_s et x_n sont appelés respectivement la **partie semi-simple** et la **partie nilpotente** de x .



Marie Ennemond Camille Jordan, né le 5 janvier 1838 à Lyon et mort le 22 janvier 1922 à Paris, est un mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse.

Claude Chevalley, né le 11 février 1909 à Johannesburg en Afrique du Sud et mort le 28 juin 1984 à Paris, est un mathématicien français spécialiste de l'algèbre. Il l'est l'un des fondateurs du groupe Bourbaki.



EXERCICE 20. Montrer que $\text{ad } x = \text{ad } x_s + \text{ad } x_n$ est la décomposition de Jordan de $\text{ad } x$ dans $\text{End}(\text{End}(V))$.

1.2. Critère de Cartan. Le critère ci-dessous et son corollaire seront très utiles dans l'étude des algèbres de Lie semi-simples.

Théorème 24 – Critère de Cartan

Soit L une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension finie. Supposons que $\text{Tr}(xy) = 0$ pour tout $x \in [L, L]$ et tout $y \in L$. Alors L est résoluble.



Élie Joseph Cartan (9 avril 1869 – 6 mai 1951) est un mathématicien français qui a effectué des travaux fondamentaux dans la théorie des groupes de Lie et leurs applications géométriques. Il a également contribué de manière significative à la physique mathématique, à la géométrie différentielle, aux équations différentielles, à la théorie des groupes et à la mécanique quantique. Il est largement considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du XXe siècle.

DÉMONSTRATION. Observons tout d'abord que L est résoluble si $[L, L]$ est nilpotente. Par ailleurs, d'après le théorème d'Engel (cf. Théorème 14), $[L, L]$ est nilpotente si et seulement si x est un endomorphisme nilpotent pour tout $x \in [L, L] \subset \mathfrak{gl}(V)$. Commençons par énoncer un critère de nilpotence en terme de traces :

ASSERTION 2. Soient A, B deux sous-espaces de $\mathfrak{gl}(V)$ tels que $A \subset B$ ¹. Posons $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, B] \subset A\}$. Soit $x \in M$ tel que $\text{Tr}(xy) = 0$ pour tout $y \in M$. Alors x est nilpotent.

Supposons le critère ci-dessus acquis, et démontrons le théorème. Appliquons le critère à $A = [L, L]$ et $B = L$ de sorte que $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, L] \subset [L, L]\}$. On a clairement : $L \subset M$. D'après l'hypothèse, $\text{Tr}(xy) = 0$ pour tout $x \in [L, L]$ et $y \in L$. Pour montrer que tout $x \in [L, L]$ est nilpotent à l'aide du critère, il suffit de montrer que $\text{Tr}(xy) = 0$ pour tout $x \in [L, L]$ et $y \in M$. Comme tout $x \in [L, L]$ est une somme finie d'éléments de la forme $[u, v]$, avec $u, v \in L$, il suffit de montrer que pour tous $u, v \in L$ et $z \in M$, $\text{Tr}([u, v]z) = 0$. Mais $\text{Tr}([u, v]z) = \text{Tr}(u[v, z]) = \text{Tr}([v, z]u)$ (il est facile de vérifier ces égalités grâce aux propriétés de la trace). Or, par définition de M , on a $[v, z] \in [L, L]$ et donc $\text{Tr}([v, z]u) = 0$ d'après notre hypothèse. On a ainsi montré que tout $x \in [L, L]$ est nilpotent.

Pour terminer la démonstration, il reste à établir le critère ci-dessus.

DÉMONSTRATION DE L'ASSERTION 2. Soit $x = x_s + x_n$ la décomposition de Jordan de x , avec x vérifiant les hypothèses de l'assertion. Fixons une base de V formée de vecteurs propres v_1, \dots, v_m pour x_s associés aux valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Soit E le sous \mathbb{Q} -espace vectoriel de \mathbb{K} engendré par $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Autrement dit,

$$E = \sum_{i=1}^m \mathbb{Q}\lambda_i.$$

1. [△] Dans [6, Lem. 4.3], l'hypothèse $A \subset B$ est omise : or, sans cette hypothèse, le fait que y soit M dans la démonstration ci-dessus n'est plus clair du tout !

On doit montrer que $x_s = 0$ ou, de manière équivalente, que $E = \{0\}$. Comme E est dimension finie sur \mathbb{Q} , il suffit de montrer que son dual E^* est nul, i.e., que toute forme linéaire $f: E \rightarrow \mathbb{Q}$ est nulle.

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{Q}$ et soit $y \in \mathfrak{gl}(V)$ dont la matrice dans base (v_1, \dots, v_m) est $\text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_m))$. Si $\{e_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq m}$ est la base de $\mathfrak{gl}(V)$ associée à (v_1, \dots, v_m) , i.e., $e_{i,j}(v_k) = \delta_{i,l} \delta_{j,k} v_l$ pour $i, j, k, l \in \{1, \dots, m\}$, alors (voir l'exercice 2 de la fiche n°2) pour tout i, j :

$$\text{ad } x_s(e_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)e_{i,j} \quad \text{et} \quad \text{ad } y(e_{i,j}) = (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))e_{i,j}.$$

Soit $r \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme sans terme constant tel que $r(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i) - f(\lambda_j)$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, m\}^2$. L'existence d'un tel polynôme est assurée par le théorème d'interpolation de Lagrange. Le polynôme est bien défini car $\lambda_i - \lambda_j = \lambda_k - \lambda_l$ implique $f(\lambda_i) - f(\lambda_j) = f(\lambda_k) - f(\lambda_l)$ par linéarité de f . Clairement, $\text{ad } y = r(\text{ad } x_s)$.

D'après l'exercice 20, $\text{ad } x_s$ est la partie semi-simple de $\text{ad } x$. En particulier, $\text{ad } x_s$ est un polynôme en $\text{ad } x$ sans terme constant. Par conséquent, $\text{ad } y$ est aussi un polynôme en $\text{ad } x$ sans terme constant. Puisque $x \in M$, $\text{ad } x$ envoie B sur $A \subset B$, il en est de même pour $\text{ad } y$. Autrement dit, $y \in M$. D'après l'hypothèse, on en déduit que

$$0 = \text{Tr}(xy) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f(\lambda_i).$$

Comme le membre de droite est un élément de E , on obtient en appliquant f :

$$0 = \sum_{i=1}^m f(\lambda_i)^2.$$

Comme les $f(\lambda_i)^2$ sont des nombres rationnels, il en résulte que $f(\lambda_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, c'est-à-dire $f = 0$ puisque les λ_i engendrent E . □

□

Comme conséquence du critère de Cartan, on obtient le critère suivant qui peut être vu comme un analogue du Corollaire 15 pour les algèbres de Lie résolubles.

Corollaire 25

Soit L une algèbre de Lie telle que $\text{Tr}(\text{ad } x \text{ ad } y) = 0$ pour tout $x \in [L, L]$ et tout $y \in L$. Alors L est résoluble.

EXERCICE 21. Démontrer le corollaire précédent à l'aide du théorème 24 et de l'exercice 17.

2. Forme de Killing

Soit L une algèbre de Lie. Pour $x, y \in L$, on pose

$$\kappa_L(x, y) = \text{Tr}(\text{ad } x \text{ ad } y).$$

Alors κ_L est une forme bilinéaire symétrique, appelée la **forme de Killing** de L . Cette forme est **invariante**, c'est-à-dire :

$$\forall x, y, z \in L, \quad \kappa_L([x, y], z) = \kappa_L(x, [y, z]). \tag{10}$$

Wilhelm Karl Joseph Killing (10 mai 1847 – 11 février 1923) est un mathématicien allemand connu pour ses nombreuses contributions aux théories des algèbres de Lie et des groupes de Lie et à la géométrie non euclidienne.



EXERCICE 22 (propriétés de la forme de Killing).

1. Vérifier la relation (10), et montrer que le noyau de κ_L , c'est-à-dire l'ensemble

$$\ker \kappa_L = \{x \in L \mid \kappa_L(x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in L\},$$

est un idéal de L .

2. Soit I un idéal de L . Montrer que la forme de Killing de I coïncide avec la restriction de κ_L à I .

3. Déterminer la matrice de la forme de Killing de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ dans la base (e, h, f) (cf. exercice 4). En déduire que la forme de Killing de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ est non-dégénérée.

REMARQUE 2. À l'aide de la question (3) de l'exercice précédent on vérifie facilement que pour $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, $\kappa_L(x, y) = 4\text{Tr}(xy)$ pour tous $x, y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Nous verrons une généralisation de ce résultat pour $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$.

Rappelons qu'une algèbre de Lie (non nulle) est dite **semi-simple** si $\text{rad}(L) = \{0\}$. Ceci est équivalent à demander à ce que L n'admette aucun idéal abélien non nul. En effet, un tel idéal est nécessairement contenu dans $\text{rad}(L)$ et, réciproquement, le radical de L , s'il est non nul, contient un idéal abélien non nul; précisément, le dernier terme de sa série dérivée (cf. Exercice 15).

En particulier, si L est semi-simple, alors son **centre** $Z(L) = \{x \in L \mid [x, y] = 0 \text{ pour tout } y \in L\}$ est nul puisque c'est un idéal abélien. Dans ce cas l'application $L \rightarrow \text{ad } L$, $x \mapsto \text{ad } x$, est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

REMARQUE 3. Une algèbre de Lie L est dite **réductive** si $\text{rad}(L) = Z(L)$. Par exemple, les algèbres de Lie abéliennes et semi-simples sont réductives. L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ est réductive non semi-simple. Quel est son centre ?

Théorème 26

Soit L une algèbre de Lie non nulle. Alors, L est semi-simple si et seulement si sa forme de Killing κ_L est non-dégénérée.

DÉMONSTRATION. Supposons que L soit semi-simple, i.e., $\text{rad}(L) = \{0\}$. Soit K le noyau de κ_L . Par définition, $\text{Tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y) = 0$ pour tous $x \in K$ et $y \in L$ (en particulier pour tout $y \in [K, K]$). D'après le critère de Cartan (ou plutôt son corollaire 25) on en déduit que K est résoluble. Comme K est un idéal de L (cf. Exercice 22), on a $K \subset \text{rad}(L) = \{0\}$. Autrement dit, κ_L est non-dégénérée.

Réciproquement, supposons $K = \{0\}$ et montrons que L ne contient pas d'idéaux abéliens non nuls. Il suffit de montrer que tout idéal abélien est contenu dans K . Soit I un idéal abélien de L . Soient $x \in I$ et $y \in L$. Alors l'image de $(\text{ad } x \circ \text{ad } y)^2$ est contenu dans $[I, [L, [I, L]]] \subset [I, I] = \{0\}$ puisque I est abélien. Ceci démontre que $\text{ad } x \circ \text{ad } y$ est un endomorphisme nilpotent. On a donc : $0 = \text{Tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y) = \kappa_L(x, y)$ pour tous $x \in I$ et $y \in L$. On a montré : $I \subset K = \{0\}$, comme désiré. D'après la remarque précédente le théorème, L est semi-simple. \square

REMARQUE 4. La deuxième partie de la démonstration reste valide pour un corps de caractéristique > 0 . D'autre part, la démonstration précédente montre que l'inclusion $\ker \kappa_L \subset \text{rad}(L)$ est toujours vérifiée.

Une première conséquence de la non-dégénération de la forme de Killing pour les algèbres de Lie semi-simples et le résultat suivant :

Proposition 27 – Toutes les dérivations d'une algèbre de Lie semi-simple sont intérieures

Si L est semi-simple, alors $\text{ad } L = \text{Der } L$.

DÉMONSTRATION. Comme L est semi-simple, l'application $L \rightarrow \text{ad } L$, $x \mapsto \text{ad } x$, est un isomorphisme d'algèbres de Lie. En particulier, la forme de Killing de $M = \text{ad } L$ est non-dégénérée. Posons $D = \text{Der } L$. On a $[D, M] \subset M$ puisque pour tous $\delta \in D$ et $x \in L$,

$$[\delta, \text{ad } x] = \text{ad}(\delta x). \quad (11)$$

Autrement dit, M est un idéal de D et il résulte de l'exercice 22 que κ_M est la restriction à M de κ_D . En particulier, si $I = M^\perp$ est l'orthogonal de M dans D relativement à κ_D , alors $I \cap M = \{0\}$ puisque κ_M est non-dégénérée. Comme I et M sont des idéaux de D , on en déduit que $[I, M] = \{0\}$ et donc que si $\delta \in I$, alors $\text{ad}(\delta x) = 0$ pour tout $x \in L$ d'après (11), d'où $\delta x = 0$ pour tout $x \in L$ puisque ad est fidèle, i.e., $\delta = 0$. En conclusion, $I = \{0\}$ et $\text{Der } L = \text{ad } L$. \square

3. Idéaux d'une algèbre de Lie semi-simple

Soit L une algèbre de Lie semi-simple.

Proposition 28

Alors il existe des idéaux I_1, \dots, I_t de L qui sont tous simples (en tant qu'algèbres de Lie) et tels que $L = I_1 \oplus \dots \oplus I_t$. Tout idéal simple de L coïncide avec l'un des idéaux I_j .

Comme les I_j sont des idéaux de L , on a $[I_j, I_k] \subset I_j \cap I_k = \{0\}$ donc la décomposition ci-dessus est «adaptée» au crochet de Lie, c'est-à-dire que le crochet de Lie sur L peut être décrit à partir de celui sur chacun des I_j .

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, remarquons que si I est un idéal non nul de L , alors son orthogonal I^\perp relativement à la forme de Killing κ_L est encore un idéal de L d'après la propriété d'invariance de κ_L . Le critère de Cartan implique que l'idéal $I \cap I^\perp$ de L est résoluble. Il est donc nul puisque L est semi-simple. Par conséquent, $\dim L = \dim I + \dim I^\perp$ et $L = I \oplus I^\perp$.

On raisonne maintenant par récurrence sur la dimension de L , le cas $\dim L = 0$ ou 1 étant évidemment. Supposons $\dim L > 1$. Si L n'a pas d'idéaux propres non nuls, le résultat est clair : L est simple. Sinon, soit I_1 un idéal non nul minimal. D'après la première étape, $L = I_1 \oplus I_1^\perp$ et tout idéal de I_1 est un idéal de L , donc I_1 est semi-simple. Par minimalité, il est donc simple. De la même façon, I_1^\perp est semi-simple. Par récurrence, on a une décomposition $I_1^\perp = I_2 \oplus \dots \oplus I_t$ où les I_j sont des idéaux simples de I_1^\perp (et donc de L qui vérifient les propriétés d'unicité de la proposition).

Il reste à prouver que ces idéaux simples sont uniques (à permutations près). Soit I un idéal simple de L . Alors $[I, L]$ est un idéal de I , non nul car le centre $Z(L)$ de L est nul. Par conséquent, $[I, L] = I$ puisque I est simple. D'autre part, comme $[I, L] = [I, I_1] \oplus \dots \oplus [I, I_t]$, tous les facteurs doivent être nuls sauf un. Par exemple, $[I, I_1] = I$. On a alors $I \subset I_1$ d'où comme I_1 est simple, $I = I_1$. \square

On déduit de la proposition précédente que l'on a pour L semi-simple :

$$L = [L, L]$$

puisque $[I_j, I_j] = I_j$ pour chaque j dans les notations de la proposition. De plus, si I est un idéal de L , alors I est une somme directe de I_k : en effet, on peut supposer quitte à permuter les indices que $I \cap I_j \neq 0$ pour $i = 1, \dots, p$. Par simplicité des I_j , on a $I \cap I_j = I_j$. En particulier, I est semi-simple aussi.

EXERCICE 23. Soit $\sigma : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation d'une algèbre de Lie semi-simple L . Alors $\sigma(L)$ est contenue dans $\mathfrak{sl}(V)$. En particulier, L opère trivialement sur tout L -module de dimension 1.

4. Complète réductibilité des représentations de dimension finie

Soit L une \mathbb{K} -algèbre de Lie (de dimension finie).

4.1. Élément de Casimir d'une représentation. On suppose dans ce paragraphe que L est une algèbre de Lie semi-simple.

Soit $\sigma : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation fidèle de L de dimension finie. On définit une forme bilinéaire symétrique en posant pour tous $x, y \in L$:

$$\beta_\sigma(x, y) = \text{Tr}(\sigma(x) \circ \sigma(y)).$$

La forme est invariante au sens de la relation (10) avec β_σ à la place de κ_L . En particulier, son noyau est un idéal de L . De plus, β_σ est non-dégénérée. En effet, d'après le critère de Cartan (cf. Théorème 24) l'algèbre de Lie $\sigma(\ker \beta_\sigma) \cong \ker \beta_\sigma$ est résoluble et donc $\ker \beta_\sigma = \{0\}$.

Soit (x_1, \dots, x_n) une base de L , et soit (y_1, \dots, y_n) la base de L duale de (x_1, \dots, x_n) relativement à β_σ . Autrement dit, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\beta_\sigma(x_i, y_j) = \delta_{i,j}$. Posons :

$$c_\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma(x_i) \circ \sigma(y_i) \in \text{End}(V).$$

EXERCICE 24.

1. Soit $z \in L$. Écrivons pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $[z, x_i] = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$ et $[z, y_i] = \sum_{j=1}^n b_{i,j} y_j$. À l'aide de la propriété d'invariance de β_σ , montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,k} = -b_{k,i}$.
2. Montrer que c_σ est un endomorphisme de V qui commute avec tout endomorphisme de $\sigma(L)$. Autrement dit, pour tout $z \in L$, $[c_\sigma, \sigma(z)] = 0$. (Indication : utiliser le fait que $\text{ad } x$ est une dérivation dans $\text{End } V$, i.e., $[x, yz] = [x, y]z + y[x, z]$ et la question précédente.)
3. Que vaut la trace de c_σ ?
4. On suppose dans cette question que (V, σ) est une représentation irréductible de L . Montrer à l'aide du Lemme de Schur (cf. Lemme 5) que c_σ est un scalaire, égale à $\dim L / \dim V$. En déduire que c_σ est indépendant de la base (x_1, \dots, x_n) choisie.

L'élément c_σ est appelé **l'élément de Casimir** de σ . Il joue un rôle très important dans la théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples.

Hendrik Brugt Gerhard Casimir (15 juillet 1909– 4 mai 2000) fut un physicien néerlandais surtout connu pour ses recherches sur les modèles de super-conducteurs à deux fluides (avec C. J. Gorter) en 1934 et l'effet qui porte son nom (avec D. Polder) in 1948.

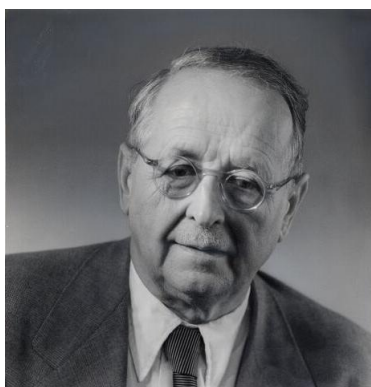


EXERCICE 25. Supposons que $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ et que $\sigma: L \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{K}^2) \cong \mathfrak{gl}_2(\mathbb{K})$ soit la **représentation standard**, c'est-à-dire que $\sigma(x)v = xv$ pour x une matrice de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ et v un vecteur de \mathbb{K}^2 . Calculer la base duale de (e, h, f) relativement à β_σ et déterminer c_σ . Comparer vos résultats avec les observations de l'exercice précédent.

4.2. Théorème de Weyl et applications. L'objectif de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 29 – Théorème de Weyl

Soit $\sigma: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation non nulle de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple L . Alors V est complètement réductible.



Hermann Weyl, né le 9 novembre 1885 à Elmshorn et mort le 8 décembre 1955 à Zurich, est un mathématicien et physicien théoricien allemand du XXe siècle. Il fut le premier, dès 1918, à combiner la relativité générale avec l'électromagnétisme en développant la géométrie de Weyl (ou géométrie conforme) et en introduisant la notion de jauge. L'invariance de jauge est à la base du modèle standard et reste un ingrédient fondamental pour la physique théorique moderne. Ses recherches en mathématiques portèrent essentiellement sur la topologie, la géométrie et l'algèbre. Weyl publia également de nombreux travaux sur l'espace, le temps, la matière, la mécanique quantique, la philosophie, la logique, la théorie des nombres et l'histoire des mathématiques.

EXERCICE 26 (Réciproque du théorème de Weyl). *Montrer que si toute représentation non nulle de dimension finie de L est complètement réductible, alors L est semi-simple.* (Indication : considérer la représentation adjointe.)

On commence par un résultat préliminaire.

Lemme 30 – Premier lemme de Whitehead

Soient L une algèbre de Lie semi-simple, (V, σ) une représentation de dimension finie de L et $f: L \rightarrow V$ une application linéaire. Supposons que pour tous $x, y \in L$,

$$f([x, y]) = \sigma(x)f(y) - \sigma(y)f(x).$$

Alors il existe $v \in V$ tel que pour tout $x \in L$, $f(x) = \sigma(x)v$.

John Henry Constantine Whitehead, né à Madras le 11 novembre 1904 et mort le 8 mai 1960, neveu du philosophe et logicien Alfred North Whitehead, J. H. C. Whitehead fit ses études à Oxford; il y rencontra, en 1920, O. Veblen, avec qui il collabora pendant trois ans à Princeton. Whitehead enseigne à l'université d'Oxford de 1932 à 1946; il passa ensuite une année à l'Institute pour "Advanced Study", puis retourna à Oxford de 1947 jusqu'en 1960. Whitehead fut membre de la Royal Society et président de la London Mathematical Society.



DÉMONSTRATION. On peut supposer que L est non nulle. L'idéal $I = \ker \sigma$ est semi-simple d'après la remarque qui succède la proposition 28. En particulier, $I = [I, I]$ et d'après l'hypothèse, $f(I) = f([I, I]) = \{0\}$. On peut donc supposer que (V, σ) est fidèle.

Supposons tout d'abord que (V, σ) soit simple. Soit c_σ l'élément de Casimir associé à σ . Rappelons que l'on a (cf. Exercice 24).

$$c_\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma(x_i) \circ \sigma(y_i) = \frac{n}{\dim V} \text{Id}_V,$$

où (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) sont des bases duales de L relativement à β_σ . Si le vecteur v que nous cherchons existe, alors

$$\sum_{i=1}^n \sigma(x_i) \circ f(y_i) = \left(\sum_{i=1}^n \sigma(x_i) \circ \sigma(y_i) \right) v.$$

Il est alors naturel de poser :

$$v = c_\sigma^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \sigma(x_i) \circ f(y_i) \right).$$

Soit $z \in L$. D'après l'exercice 24, on a pour $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$[z, x_i] = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j, \quad [z, y_i] = - \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j.$$

Montrons que $f(x) = \sigma(x)v$ pour tout $x \in L$, c'est-à-dire $c_\sigma \circ f(x) = c_\sigma \circ \sigma(x)v$ pour tout $x \in L$. On a :

$$\begin{aligned} c_\sigma \circ f(z) &= \sum_{i=1}^n \sigma(x_i) \circ \sigma(y_i) \circ f(z) = \sum_{i=1}^n \sigma(x_i) \circ f([y_i, z]) + \sum_{i=1}^n \sigma(x_i) \circ \sigma(z) \circ f(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma(x_i) \circ f([y_i, z]) + \sum_{i=1}^n \sigma([x_i, z]) \circ f(y_i) + \sum_{i=1}^n \sigma(z) \circ \sigma(x_i) \circ f(y_i) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^n \sigma(z) \circ \sigma(x_i) \circ f(y_i) = c_\sigma \circ \sigma(z)v. \end{aligned}$$

d'où $\sigma(z)v = f(z)$ pour tout $z \in L$, comme désiré.

Pour le cas général, on procède par récurrence sur la dimension de V . D'après le cas précédent, on peut supposer que V contient un sous-module propre W . Soit $\pi: V \rightarrow V/W$ la projection canonique. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée au module quotient V/W , il existe $v \in V$ tel que $(\pi \circ f)(x) = \pi \circ \sigma(x)v$ pour

tout $x \in L$. Posons pour $x \in L$, $\theta(x) = f(x) - \sigma(x)v$. Alors $\theta(x) \in W$ pour tout $x \in L$ et $\theta \in \mathcal{L}(L, W)$ vérifie l'hypothèse de la proposition. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc $w \in W$ tel que $\theta(x) = \sigma(x)w$ pour tout $x \in L$. En conclusion, $f(x) = \sigma(x)(v + w)$ pour tout $x \in L$, comme désiré. \square

On peut désormais démontrer le théorème de Weyl.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 29. Soient (V, σ) une représentation de L de dimension finie, U un sous-module non trivial, $\pi: V \rightarrow V/U$ la projection canonique et $(V/U, \tau)$ la représentation induite. Fixons $\phi_0 \in M$, où $M = \mathcal{L}(V/U, V)$, tel que $\pi \circ \phi_0 = \text{Id}_{V/U}$. On a évidemment $V = \phi_0(V/U) \oplus U$. Malheureusement, $\phi_0(V/U)$ n'est pas un sous-module de V a priori! On va chercher $\theta_0 \in M$ tel que $V = \theta_0(V/U) \oplus U$ et $\theta_0(V/U)$ soit un sous-module de V . Pour cela on va chercher $\psi_0 \in N$, où $N = \{\phi \in M \mid \phi(V/U) \subset U\}$, tel que $\theta_0(V/U)$ soit un sous-module de V , où $\theta_0 = \phi_0 - \psi_0$ de sorte que $V = \theta_0(V/U) \oplus U$.

L'application $\lambda: L \rightarrow \text{End}(M)$ définie par :

$$\forall x \in L, \forall \phi \in M, \quad \lambda(x)(\phi) = \sigma(x) \circ \phi - \phi \circ \tau(x),$$

est une représentation de L pour laquelle N est un sous-module. On remarque que pour $\phi \in M$, si $\lambda(x)(\phi) = 0$ pour tout $x \in L$, alors $\phi(V/U)$ est sous-module de V . On cherche donc $\psi_0 \in N$ tel que $\lambda(x)(\phi_0) = \lambda(x)(\psi_0)$ pour tout $x \in L$.

L'application linéaire $f: L \rightarrow M$, $x \mapsto \lambda(x)(\phi_0)$ vérifie $f(L) \subset N$ puisque pour tout $w \in V/U$,

$$\begin{aligned} \pi(f(x)(w)) &= \pi \circ \sigma(x) \circ \phi_0(w) - \pi \circ \phi_0 \circ \tau(x)(w) \\ &= \tau(x) \circ \pi \circ \phi_0(w) - \tau(x)(w) = \tau(x)(w) - \tau(x)(w) = 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la condition du lemme 30 est satisfaite pour la représentation (N, μ) induite par λ . En conséquence, il existe $\psi_0 \in N$ tel que $f(x) = \mu(x)(\psi_0) = \lambda(x)(\psi_0)$ pour tout $x \in L$.

Posons $\theta_0 = \phi_0 - \psi_0$. Alors $\lambda(x)(\theta_0) = 0$ pour tout $x \in L$, d'où $\pi \circ \theta_0 = \text{Id}_{V/U}$ (puisque pour $w \in V/U$, $\pi \circ \theta_0(w) = \pi \circ \phi_0(w) - \pi \circ \psi_0(w) = w - 0 = w$) et $\theta_0 \circ \tau(x) = \sigma(x) \circ \theta_0$ pour tout $x \in L$ (donc $\theta_0(V/U)$ est un sous L -module). Par suite, V est la somme directe des sous-modules U et $\theta_0(V/U)$.

Par une récurrence sur la dimension, on montre ainsi que σ est semi-simple. \square

Proposition 31

Soient V un espace vectoriel de dimension finie et L une sous-algèbre de Lie semi-simple de $\mathfrak{gl}(V)$. Alors L contient les parties semi-simples et nilpotentes de tous ses éléments.

DÉMONSTRATION. Soient $x \in L$, et $x = x_s + x_n$ sa décomposition de Jordan dans $\mathfrak{gl}(V)$. On doit montrer que x_s et x_n sont dans L . Comme $\text{ad } x(L) \subset L$, $\text{ad } x_s(L) \subset L$ et $\text{ad } x_n(L) \subset L$ puisque $\text{ad } x_s$ et $\text{ad } x_n$ sont des polynômes en $\text{ad } x$. Autrement dit, x_s et x_n appartiennent au normalisateur $N_{\mathfrak{gl}(V)}(L)$ de L dans $\mathfrak{gl}(V)$, c'est-à-dire l'ensemble des $y \in \mathfrak{gl}(V)$ tels que $[y, L] \subset L$.

Si on avait $N_{\mathfrak{gl}(V)}(L) = L$, on conclurait immédiatement. Mais ce n'est malheureusement pas le cas! Par exemple, si $L = \mathfrak{sl}(V)$, alors $N_{\mathfrak{gl}(V)}(L) = \mathfrak{gl}(V)$...

On doit donc montrer que x_s et x_n appartiennent à une sous-algèbre plus petite. Soit \mathcal{V} l'ensemble de tous les sous L -modules de V . Pour $W \in \mathcal{V}$, on pose $L_W = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid x(W) \subset W \text{ et } \text{Tr}(x|_W) = 0\}$. Par exemple, $L_V = \mathfrak{sl}(V)$. Comme $[L, L] = L$, on a $L \subset L_W$ pour tout $W \in \mathcal{V}$. Posons

$$N = N_{\mathfrak{gl}(V)}(L) \cap \left(\bigcap_{W \in \mathcal{V}} L_W \right).$$

Alors N est une sous-algèbre de $N_{\mathfrak{gl}(V)}(L)$ contenant L en tant qu'idéal (les scalaires ne sont pas dans N en revanche!). De plus, si $x \in L$, alors x_s et x_n sont dans L_W pour tout $W \in \mathcal{V}$ car x_s et x_n stabilisent W et $0 = \text{Tr}(x|_W) = \text{Tr}(x_s|_W) + \text{Tr}(x_n|_W) = \text{Tr}(x_s|_W)$ (puisque x_n est nilpotent); ils sont donc dans N .

Il reste à démontrer que $L = N$. Comme N est un L -module, le théorème de Weyl assure qu'il existe un sous-module M tel que $N = L \oplus M$. Comme $[N, L] \subset L$, l'action de L dans M est triviale. Montrons que $M = \{0\}$. Soit $W \in \mathcal{V}$ irréductible. Si $y \in M$, alors $[L, y] = \{0\}$. Le lemme de Schur assure alors que y opère comme un scalaire dans W . Comme par ailleurs $y \in L_W$, on a $\text{Tr}(y|_W) = 0$. Donc y opère trivialement dans W . Mais V est une somme directe de modules irréductibles (c'est le théorème de Weyl), d'où $y = 0$. Il s'ensuit que $M = 0$, d'où $L = N$. \square

Soient L une algèbre de Lie semi-simple et $x \in L$. Comme la représentation adjointe de L est fidèle, le centre de L étant triviale, la proposition précédente nous dit que l'on a $\text{ad } x = \text{ad } x_s + \text{ad } x_n$, avec $x_s, x_n \in L$,

uniques, tels que $\text{ad } x_s = (\text{ad } x)_s$ et $\text{ad } x_n = (\text{ad } x)_n$. Les éléments x_s et x_n sont appelés, respectivement, la **partie semi-simple** et la **partie nilpotente** de x . On dira ainsi qu'un élément x est **semi-simple** si $\text{ad } x$ est semi-simple, i.e., $x = x_s$, et qu'un élément x est **nilpotent** si $\text{ad } x$ est nilpotent, i.e., $x = x_n$.

△ Cette terminologie n'a pas de sens a priori si l'algèbre n'est pas semi-simple !

5. Décomposition en sous-espaces radiciels

On suppose dans cette partie que L est une algèbre de Lie semi-simple.

5.1. Sous-algèbres torales. Si L n'était formée que d'éléments nilpotents (i.e., ad-nilpotents), alors L serait nilpotente d'après de théorème de Engel. Or ce n'est pas le cas. Il existe donc $x \in L$ tel que sa partie semi-simple x_s soit non nulle. Or L contient les parties semi-simples et nilpotentes de tous ses éléments, donc $x_s \in L$. On en déduit que L contient une sous-algèbre non nulle formée uniquement d'éléments semi-simples (par exemple $\mathbb{K}x_s$).

Définition 32 – Sous-algèbres torales

Une sous-algèbre de L formée uniquement d'éléments semi-simples est dite **torale**.

Le lemme suivant est un analogue du théorème d'Engel :

Lemme 33

Une sous-algèbre torale est abélienne.

DÉMONSTRATION. Soit T une algèbre torale. Il s'agit de montrer que $\text{ad}_T x = 0$ pour tout $x \in T$, où $\text{ad}_T : T \rightarrow \text{End}(T)$, $x \mapsto (\text{ad } x)|_T$. Comme $\text{ad } x$ est diagonalisable, il suffit de montrer que $\text{ad}_T x$ n'a pas de valeurs propres non nulles. Supposons le contraire, i.e., $[x, y] = \lambda y$, avec $y \in T \setminus \{0\}$ et $\lambda \neq 0$. Écrivons $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, $x_i \in \mathbb{K}$, dans une base (v_1, \dots, v_n) de vecteurs propres pour $\text{ad}_T y$ ($\text{ad}_T y$ est semi-simple), associés aux valeurs propres μ_1, \dots, μ_n . On a

$$-\lambda y = \text{ad}_T y(x) = \sum_{i=1}^n x_i \text{ad}_T y(v_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i v_i,$$

d'où une contradiction puisque y est vecteur propre de $\text{ad}_T y$ associé à la valeur propre 0. □

Fixons désormais une sous-algèbre torale H maximale pour l'inclusion. Comme H est abélienne d'après le lemme précédent, $\text{ad } H$ est formé d'éléments semi-simples commutant deux à deux. D'après un résultat bien connu d'algèbre linéaire, on en déduit que les éléments de $\text{ad } H$ sont simultanément diagonalisables. On a donc :

$$L = \bigoplus_{\alpha \in H^*} L_\alpha, \quad L_\alpha = \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ pour tout } h \in H\}.$$

On remarque que $L_0 = C_L(H)$, le centralisateur de H dans L . Il contient H d'après le lemme. Notons Φ l'ensemble des $\alpha \in H^* \setminus \{0\}$ tels que $L_\alpha \neq \{0\}$. Les éléments de Φ sont appelés les **racines** de L . Ils sont en nombre fini. D'après ce qui précède, on obtient la **décomposition en sous-espaces radiciels** :

$$L = C_L(H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha. \tag{12}$$

Nous allons voir que $H = C_L(H)$.

EXERCICE 27. On suppose $L = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

1. Vérifier que l'on peut choisir pour H l'ensemble des matrices diagonales de trace nulle.
2. Écrire la décomposition (12) pour $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ avec ce choix de H . Vérifier sur cet exemple que $C_L(H) = H$.

Proposition 34

Pour tous $\alpha, \beta \in H^*$, $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$. Si $x \in L_\alpha$, $\alpha \neq 0$, alors $\text{ad } x$ est nilpotent. Si $\alpha, \beta \in H^*$ et $\alpha + \beta \neq 0$, alors L_α est orthogonal à L_β relativement à κ_L .

EXERCICE 28.

1. Démontrer la proposition ci-dessus à l'aide de la propriété d'invariance de la forme de Killing.
2. Dédurre de la proposition que la restriction de κ_L à $L_0 = C_L(H)$ est non-dégénérée.

Proposition 35

Soit H une sous-algèbre torale maximale de L . Alors $H = C_L(H)$. En particulier, la restriction à H de κ_L est non-dégénérée.

DÉMONSTRATION. Posons $C = C_L(H)$.

(1) C contient les parties semi-simples et nilpotentes de tous ces éléments. Si $x \in C$, alors $[x, H] = \{0\}$ et il en est de même pour $(\text{ad } x)_s$ et $(\text{ad } x)_n$. Or $(\text{ad } x)_s = \text{ad } x_s$ et $(\text{ad } x)_n = \text{ad } x_n$

(2) Tous les éléments semi-simples de C appartiennent à H . Si x est semi-simple et centralise H , alors $H + \mathbb{K}x$ est une sous-algèbre torale : la somme de deux éléments semi-simples qui commutent est encore semi-simple. Par maximalité, $H = H + \mathbb{K}x$ donc $x \in H$.

(3) La restriction de κ_L à H est non-dégénérée. Soit $h \in H$ tel que $\kappa_L(h, H) = \{0\}$. Montrons que $h = 0$. Comme la restriction de κ_L à C est non-dégénérée d'après l'exercice 28 (2), il suffit de montrer que $\kappa_L(h, C) = \{0\}$. Soit $x \in C$. Comme C contient les parties semi-simples et nilpotentes de tous ses éléments par (2) et que $x_s \in H$ par (1), il suffit de montrer que $\kappa_L(h, x) = 0$ pour tout $x \in C$ nilpotent. Si $x \in C$ est nilpotent, alors $[x, H] = \{0\}$ et pour tout $y \in H$ (en particulier h), $\text{ad } x$ et $\text{ad } y$ commutent, avec $\text{ad } x$ nilpotent, donc $\text{Tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y) = 0$ puisque $\text{ad } x \circ \text{ad } y$ est nilpotent, i.e., $\kappa_L(x, y) = 0$.

(4) C est nilpotente. Si $x \in C$ est semi-simple, alors $x \in H$ par (2) d'où $\text{ad}_C x (= 0)$ est nilpotent. Par ailleurs, si $x \in C$ est nilpotent, alors $\text{ad}_C x$ est nilpotent aussi. Pour $x \in C$ quelconque, $x = x_s + x_n$ et d'après (1), $x_s, x_n \in C$. Comme $\text{ad}_C x_s$ et $\text{ad}_C x_n$ sont deux endomorphismes nilpotents qui commutent, leur somme $\text{ad}_C x$ est un endomorphisme nilpotent. D'après le théorème de Engel, C est une algèbre de Lie nilpotente.

(5) $H \cap [C, C] = \{0\}$. Comme $[H, C] = \{0\}$ et comme κ_L est invariante, $\kappa_L(H, [C, C]) = \{0\}$. Or la restriction de κ_L à $H \times H$ est non-dégénérée, donc $H \cap [C, C] = \{0\}$.

(6) C est abélienne. Supposons le contraire. Alors $[C, C] \neq \{0\}$. Comme C est nilpotente par (4), on a $Z(C) \cap [C, C] \neq \{0\}$ ². Soit $z \neq 0$ dans cette intersection. D'après (2) et (5), z ne peut pas être semi-simple. Sa partie nilpotente z_n est donc non nulle, et est dans C par (1). Il est donc aussi dans $Z(C)$ puisque si un élément qui commute avec z commute avec z_n . Mais alors $\kappa_L(z_n, C) = \{0\}$. En effet, pour tout $x \in C$, $\text{ad } x \circ \text{ad } z_n$ est nilpotent puisque $\text{ad } x$ et $\text{ad } z_n$ avec $\text{ad } z_n$ nilpotent. Ceci contredit l'exercice 28 (2).

(7) $C = H$. Sinon, C contient un élément nilpotent non nul, disons x , d'après (1) et (2). Mais alors $\kappa_L(x, y) = \text{Tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y) = 0$ pour tout $y \in C$, et ceci contredit à nouveau l'exercice 28 (2). \square

La démonstration ci-dessus montre que la restriction de κ_L à H est non-dégénérée. On peut donc identifier H à H^* via κ_L . Ainsi, à tout $\phi \in H^*$ correspond un unique $t_\phi \in H$ tel que $\phi(h) = \kappa_L(t_\phi, h)$ pour tout $h \in H$. En particulier, à Φ correspond un sous-ensemble $\{t_\alpha; \alpha \in \Phi\}$ de H .

2. En effet, $[C, C]$ est un idéal de C , donc C opère dans $[C, C]$ via la représentation adjointe et il existe $x \in [C, C]$, non nul, annulé par $\text{ad } C$ (cf. Lemme 13), i.e., $[C, x] = \{0\}$ donc $x \in Z(C) \cap [C, C]$.

Proposition 36 – Propriétés d’orthogonalité

- (i) Φ engendre H^* .
- (ii) Si $\alpha \in \Phi$, alors $-\alpha \in \Phi$.
- (iii) Soient $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$, alors $[x, y] = \kappa_L(x, y)t_\alpha$.
- (iv) Si $\alpha \in \Phi$, alors $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ est de dimension un, de base t_α .
- (v) $\alpha(t_\alpha) = \kappa_L(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$ pour $\alpha \in \Phi$.
- (vi) Si $\alpha \in \Phi$ et x_α est un élément non nul de L_α , alors il existe $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tels que $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ engendrent une sous-algèbre de L de dimension trois simple isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ via

$$x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
- (vii) $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\kappa_L(t_\alpha, t_\alpha)}$, $h_\alpha = -h_{-\alpha}$.

EXERCICE 29. Démontrer la proposition ci-dessus.

Pour tout $\alpha \in \Phi$, notons $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ la sous-algèbre de L engendrée par $x_\alpha, h_\alpha, y_\alpha$. Cette sous-algèbre opère dans L de sorte que L est un S_α -module. Grâce à l’étude des \mathfrak{sl}_2 -représentations vue au chapitre 1 (paragraphe 2.2), on montre la proposition suivante :

Proposition 37

- (i) Si $\alpha \in \Phi$ alors $\dim L_\alpha = 1$. En particulier, $S_\alpha = L_\alpha + L_{-\alpha} + H_\alpha$, où $H_\alpha = [L_\alpha, L_{-\alpha}]$, et pour tout $x_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\}$, il existe un unique $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tel que $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$.
- (ii) Si $\alpha \in \Phi$, les seuls multiples de α qui sont des racines sont α et $-\alpha$.
- (iii) Si $\alpha, \beta \in \Phi$, alors $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ et $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$.
- (iv) Si $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$, alors $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.
- (v) Soient $\alpha, \beta \in \Phi$, $\beta \neq \pm\alpha$. Soient p, q les entiers maximaux tels que, respectivement, $\beta - p\alpha$ et $\beta + q\alpha$ soient des racines. Alors $\beta + i\alpha$ est une racine pour tout $i \in \{-p, \dots, q\}$ et $\beta(h_\alpha) = p - q$. Cette suite de racines est appelée la **α -chaîne de racines passant par β** .
- (vi) L est engendré en tant qu’algèbre de Lie par les espaces poids L_α .

Comme la restriction de la forme de Killing de L à H est non dégénérée, on peut définir une forme bilinéaire sur H par :

$$(\gamma|\delta) = \kappa_L(t_\gamma, t_\delta), \quad \gamma, \delta \in H^*.$$

Rappelons que Φ engendre H^* en tant qu’espace vectoriel. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ une base de H^* formée d’éléments de Φ .

EXERCICE 30 (Une condition de rationalité).

1. Soit $\beta \in \Phi$ que l’on écrit $\beta = \sum_{i=1}^\ell c_i \alpha_i$, avec $c_i \in \mathbb{K}$. Montrer que tous les c_i sont des nombres rationnels.

Le \mathbb{Q} -espace vectoriel $E_{\mathbb{Q}}$ de H^* engendré par toutes les racines est donc de dimension $\ell = \dim_{\mathbb{K}} H^*$.

2. Montrer que pour tous $\gamma, \delta \in E_{\mathbb{Q}}$, on a : $(\gamma|\delta) \in \mathbb{Q}$.

D’après la question (2) de l’exercice précédent, $(|)$ définit une forme bilinéaire de $E_{\mathbb{Q}} \times E_{\mathbb{Q}}$ dans \mathbb{Q} .

EXERCICE 31. Montrer que la forme bilinéaire $(|)$ est définitive positive.

D'après l'exercice ci-dessus, la forme bilinéaire $(\cdot | \cdot)$ induit un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$. Autrement dit, $(E, (\cdot | \cdot))$ est un espace euclidien.

Dans le langage du chapitre 3, le théorème suivant assure que l'ensemble Φ est un **système de racines** de l'espace euclidien E .

Théorème 38

- (i) Φ engendre E et 0 n'appartient pas à Φ .
- (ii) Si $\alpha \in \Phi$, alors $-\alpha \in \Phi$ et il n'y a pas d'autre multiple de α dans Φ .
- (iii) Si $\alpha, \beta \in \Phi$, alors $\beta - \frac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha \in \Phi$,
- (iv) Si $\alpha, \beta \in \Phi$, alors $\frac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Systèmes de racines et théorèmes d'isomorphismes

On introduit dans ce chapitre la notion de système de racines (abstrait) dans un espace euclidien et nous énonçons des résultats de classifications. Nous établirons ensuite une correspondance entre systèmes de racines irréductibles et algèbres de Lie simples qui permettra de classer ces dernières.

Nous omettons la plupart des démonstrations pour la partie combinatoire des systèmes de racines : voir [6, 2, 3] pour plus de détails.

1. Systèmes de racines

Dans toute cette partie, E est un espace euclidien. En particulier, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. On note $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire.

1.1. Axiomes et exemples. Rappelons qu'une réflexion de E est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E . Pour $\alpha \in E \setminus \{0\}$, on note s_α la réflexion par rapport à $\alpha^\perp = \{x \in E \mid (x|\alpha) = 0\}$. Puisque $s_\alpha = \text{id}_E - 2p_\alpha$, où p_α est la projection orthogonale de E sur $\mathbb{R}\alpha$, on a :

$$\forall x \in E, \quad s_\alpha(x) = x - \frac{2(x|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha.$$

Comme le ratio $\frac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}$ apparaîtra très fréquemment, on pose pour $\alpha, \beta \in E$,

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}.$$

△ L'application $(\beta, \alpha) \mapsto \langle \beta, \alpha \rangle$ n'est linéaire qu'en la variable β !

EXERCICE 32. Soit Φ un ensemble fini de E qui engendre E . Supposons que toutes les réflexions s_α , $\alpha \in \Phi$, préservent Φ . Soit σ un élément de $GL(E)$ tel que σ préserve Φ , σ fixe (point par point) un hyperplan de E et $\sigma(\alpha) = -\alpha$ pour un certain $\alpha \in \Phi \setminus \{0\}$. Montrer : $\sigma = s_\alpha$.

Définition 39 – système de racines

Un sous-ensemble Φ de E est appelé un **système de racines** dans E si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (R1) Φ est fini, engendre E et ne contient pas 0,
- (R2) si $\alpha \in \Phi$, alors les seuls multiples de α appartenant à Φ sont $\pm\alpha$,
- (R3) si $\alpha \in \Phi$, la réflexion s_α préserve Φ ,
- (R4) si $\alpha, \beta \in \Phi$, alors $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLE 10. Soient L une algèbre de Lie semi-simple et H une sous-algèbre torale maximale de L . Alors l'ensemble Φ des racines associées à (L, H) est un système de racines (cf. Théorème 38).

Soit Φ un système de racines. On note $\mathcal{W}(\Phi)$, ou simplement \mathcal{W} lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, le sous-groupe de $GL(E)$ engendré par les réflexions s_α , $\alpha \in \Phi$. D'après (R3), \mathcal{W} permute les éléments de Φ qui, d'après (R1), est un ensemble fini engendrant E . Par conséquent, \mathcal{W} s'identifie à un sous-groupe du groupe symétrique de Φ . En particulier, \mathcal{W} est fini.

Définition 40 – Groupe de Weyl

L'ensemble \mathcal{W} est appelé le **groupe de Weyl** de Φ .

Le groupe de Weyl va jouer un rôle extrêmement important dans la suite du cours.

EXERCICE 33. Soit $\sigma \in GL(E)$ tel que σ préserve Φ . Montrer que $\sigma \circ s_\alpha \circ \sigma^{-1} = s_{\sigma(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Phi$, et que $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \sigma(\beta), \sigma(\alpha) \rangle$ pour tous $\alpha, \beta \in \Phi$.

On dit que deux systèmes de racines Φ et Φ' d'espaces euclidiens respectifs E et E' sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $f: E \rightarrow E'$ tel que $f(\Phi) = \Phi'$ et tel que pour tous $\alpha, \beta \in \Phi$, $\langle f(\beta), f(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$. On a alors pour tous $\alpha, \beta \in \Phi$, $s_{f(\alpha)}(f(\beta)) = f(s_\alpha(\beta))$. Un tel isomorphisme de systèmes de racines induit un isomorphisme, $\mathcal{W}(\Phi) \rightarrow \mathcal{W}(\Phi')$, $s \mapsto f \circ s \circ f^{-1}$ entre groupes de Weyl.

Compte tenu de l'exercice 33, les automorphismes de Φ sont les automorphismes de E qui préservent Φ . En particulier, on peut voir le groupe de Weyl $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Phi)$ comme un sous-groupe de $\text{Aut}(\Phi)$, où $\text{Aut}(\Phi)$ est l'ensemble des automorphismes de Φ .

Pour $\alpha \in \Phi$, on pose $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}$ de sorte que $s_\alpha = \text{id}_E - \alpha\alpha^\vee$, où α^\vee s'identifie à la forme linéaire de E qui à $x \in E$ associe $\frac{2(x|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}$. On appelle l'ensemble $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$ le **dual** de Φ . C'est un système de racines de $E \cong E^*$, dont le groupe de Weyl est canoniquement isomorphe à celui de Φ .

REMARQUE 5. Dans le cas des algèbres de Lie semi-simples, α correspond à t_α et α^\vee correspond à h_α via l'identification de H^* avec H à l'aide de la forme de Killing.

Voyons quelques exemples. Le **rang** du système de racines Φ est la dimension ℓ de E . Lorsque $\ell \leq 2$, on peut facilement représenter des exemples sur une figure.

* Pour $\ell = 1$, compte tenu de l'axiome **(R2)**, il y a seulement une possibilité (à isomorphisme près). On note A_1 cette classe.



* Pour $\ell = 2$, il y a plus de possibilités. Voir la figure 1 pour quelques exemples (nous verrons que ce sont les seuls, à isomorphismes près).

EXERCICE 34 (systèmes de racines de rang 2). Vérifier que les systèmes de la figure 1 décrivent bien des systèmes de racines dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 , et montrer que le groupe de Weyl de $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 et G_2 est respectivement le groupe diédral d'ordre 4, 6, 8, 12. Enfin, représenter le système Φ^\vee dans chacun des exemples.

L'axiome **(R4)** rigidifie fortement la structure des systèmes de racines. Rappelons que pour $\alpha, \beta \in E$, le cosinus de l'angle θ entre α et β est donné par : $\|\alpha\|\|\beta\| \cos \theta = (\alpha|\beta)$. On a donc : $\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} = 2 \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos \theta$, d'où $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta$. Le nombre $4 \cos^2 \theta$ est alors un entier positif. Or $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ donc $\langle \alpha, \beta \rangle$ et $\langle \beta, \alpha \rangle$ doivent être des entiers de même signe dont le produit est compris entre 0 et 4.

Les seules possibilités lorsque $\alpha \neq \pm\beta$ et $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$ sont décrites dans le Tableau 2.

Les exemples de systèmes de racines en rang 1 et 2 montrent que toutes ces configurations peuvent se produire.

EXERCICE 35 (le système de racines A_2 correspond à $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$). Vérifier que le système de racine de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, relativement à la sous-algèbre torale maximale formée des matrices diagonales de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, est le système de racines A_2 .

Reconnaître de même le système de racines pour $\mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$, relativement à la sous-algèbre torale maximale formée des matrices diagonales de $\mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$.

EXERCICE 36. Soient α et β deux racines non proportionnelles. Montrer que si $(\alpha|\beta) > 0$, alors $\alpha - \beta$ est une racine et que si $(\alpha|\beta) < 0$, alors $\alpha + \beta$ est une racine.

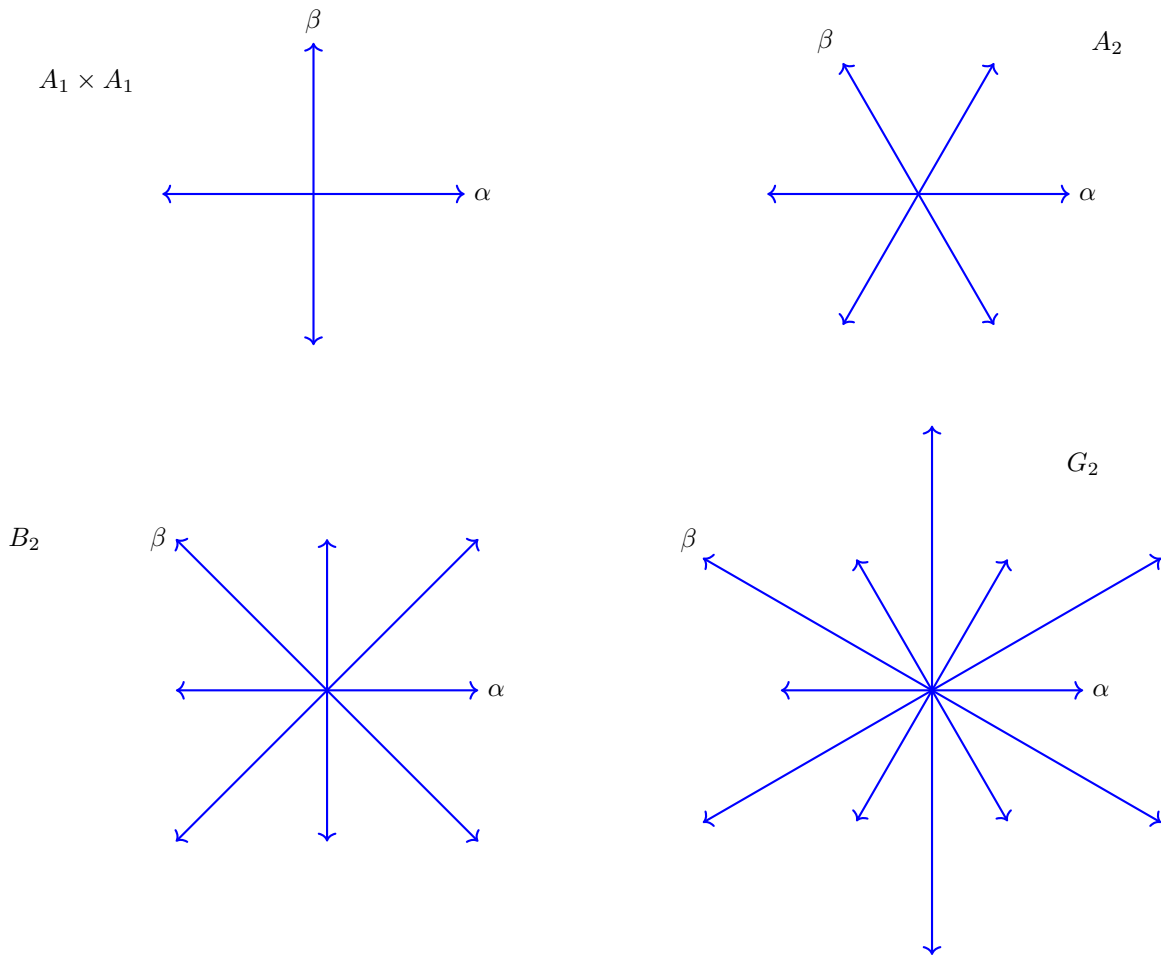


FIGURE 1. Exemples de systèmes de racines en rang 2

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\ \beta\ ^2/\ \alpha\ ^2$
0	0	$\pi/2$	indéterminé
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

FIGURE 2. Configurations possibles pour $\alpha, \beta \in \Phi$, lorsque $\alpha \neq \pm\beta$ et $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$.

Soient α et β deux racines non proportionnelles comme dans l'exercice 36 et considérons toutes les racines de la forme $\beta + i\alpha$, la *chaîne de α -racines passant par β* . On note p (resp. q) le plus grand entier tel que $\beta - p\alpha \in \Phi$ (resp. $\beta + q\alpha \in \Phi$). L'exercice 36 montre alors que pour tout $i \in \{-p, -p + 1, \dots, q - 1, q\}$, $\beta + i\alpha \in \Phi$. De plus, on peut montrer que $p - q = \langle \beta, \alpha \rangle$ et qu'ainsi (voir le tableau 2) une chaîne de racines est de longueur au plus 4 (le système G_2 contient des chaînes de racines de longueur exactement 4).

1.2. Base d'un système de racines et chambres du groupe de Weyl. Comme précédemment, Φ est un système de racines de l'espace euclidien E .

Définition 41 – Base d'un système de racines

Un sous-ensemble Δ de Φ est appelé une **base** de Φ si :

(B1) Δ est une base de E ,

(B2) toute racine $\beta \in \Phi$ s'écrit $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, où les k_α sont des entiers ou bien tous positifs, ou bien tous négatifs.

Les éléments de Δ sont appelés des **racines simples**.

Compte tenu de (B1), on a $|\Delta| = \ell$. De plus, l'expression de β dans (B2) est unique. On définit la **hauteur** d'une racine β par $ht(\beta) = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \in \mathbb{Z}$. Si tous les k_α sont positifs, on dit que β est une **racine positive** ; si tous les k_α sont négatifs, on dit que β est une **racine négative**. On note Φ^+ l'ensemble des racines positives, et Φ^- l'ensemble des racines négatives. On a $\Phi^- = -\Phi^+$ et,

$$\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-.$$

On définit un ordre partiel sur Φ en posant $\beta < \alpha$ si $\alpha - \beta$ est une somme de racines simples ou si $\beta = \alpha$. On note $\beta \succ 0$ si $\beta \in \Phi^+$ (c'est compatible avec la définition de l'ordre partiel).

EXERCICE 37 (une intersection de parties positives de demi-plans associés à une base de E est non vide).

Soit $B = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ une base de E . Montrer qu'il existe $\gamma \in E$ tel que $(\gamma|v_i) > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$.

Indication : considérer l'image δ_i de v_i par la projection orthogonale sur la droite $\text{Vect}(\{v_j; j \neq i\})^\perp$, et poser $\gamma = \sum_{i=1}^\ell \delta_i$.

Une question naturelle est la suivante : existe-t-il des bases pour Φ ? La réponse est positive et on construit une base de Φ comme suit.

Pour tout $\gamma \in E$, on pose $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi \mid (\gamma|\alpha) > 0\}$; c'est l'ensemble de toutes les racines appartenant à la partie «positive» délimitée par l'orthogonal de γ . Si $\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha^\perp$, on dit que γ est **régulier**. Supposons désormais que γ soit régulier. On a $\Phi = \Phi^+(\gamma) \sqcup -\Phi^+(\gamma)$. On dit qu'un élément $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ est **décomposable** si $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ avec $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$; il est dit **indécomposable** sinon. On montre alors que l'ensemble $\Delta(\gamma)$ formé de toutes les racines indécomposables de $\Phi^+(\gamma)$ est une base Φ . De plus, toute les bases de Φ toutes obtenues de cette manière.

On obtient ainsi le théorème crucial suivant.

Théorème 42 – Existence d'une base pour un système de racines

Le système de racines Φ admet une base.

DÉMONSTRATION. Comme annoncé, la stratégie est de montrer que $\Delta(\gamma)$ est une base de Φ . Par construction, il est aisé de voir que $\Delta(\gamma)$ engendre E puisque $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup (-\Phi^+(\gamma))$ et que Φ engendre E . De plus, tout élément de $\Phi^+(\gamma)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'éléments de $\Delta(\gamma)$. Par conséquent, tout élément de $-\Phi^+(\gamma)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers négatifs d'éléments de $\Delta(\gamma)$.

Montrons que $\Delta(\gamma)$ est une famille libre. Supposons que $\sum_{\alpha \in \Delta(\gamma)} k_\alpha \alpha = 0$. Quitte à réordonner, on peut écrire :

$$\sum_{\alpha \in \Delta_1} p_\alpha \alpha = \sum_{\beta \in \Delta_2} q_\beta \beta,$$

où Δ_1 et Δ_2 sont deux sous-ensembles disjoints (éventuellement vides) de $\Delta(\gamma)$ avec $p_\alpha > 0, q_\beta > 0$ pour tous $\alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$. Posons $\varepsilon = \sum_{\alpha \in \Delta_1} p_\alpha \alpha$. Alors

$$0 \leq \|\varepsilon\|^2 = \sum_{\alpha \in \Delta_1} \sum_{\beta \in \Delta_2} p_\alpha q_\beta (\alpha|\beta).$$

Mais $(\alpha|\beta) \leq 0$ pour tous $\alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$; sinon, d'après l'exercice 36, $\alpha - \beta$ serait une racine (nécessairement de $\Phi^+(\gamma)$), ce qui est impossible puisque α est indécomposable. On en déduit que $\|\varepsilon\|^2 = 0$, d'où $\varepsilon = 0$. Il en résulte que Δ_1 et Δ_2 sont vides, i.e., $k_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta(\gamma)$.

Il reste à montrer que toute base de Φ est de la forme $\Delta(\gamma)$ pour γ régulier. Soient Δ une base de Φ et $\gamma \in E$ tel que $(\gamma|\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$ (un tel élément existe d'après l'exercice 37, ou d'après l'exercice 39

ci-dessous : l'élément $\gamma = \rho$ convient). Alors $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$ et $\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$, d'où $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$, $\Phi^- = -\Phi^+(\gamma)$ et $\Delta = \Delta(\gamma)$. \square

Le vocabulaire suivant sera utile dans la suite du cours. Les hyperplans α^\perp , $\alpha \in \Phi$, subdivisent l'espace E en un nombre fini de régions. Les composantes connexes de $E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} \alpha^\perp$ sont appelées les **chambres de Weyl** de E . Pour γ régulier, on note $\mathcal{C}(\gamma)$ l'unique chambre de Weyl à laquelle appartient γ . Dire que $\mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\gamma')$, pour γ, γ' réguliers, signifie exactement que $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$ et $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$. On a ainsi une correspondance bijective entre les chambres de Weyl et les bases de Φ .

On écrit $\mathcal{C}(\Delta) = \mathcal{C}(\gamma)$ si $\Delta = \Delta(\gamma)$. La chambre de Weyl $\mathcal{C}(\Delta)$ est appelée la **chambre de Weyl fondamentale** associée à la base Δ .

EXERCICE 38 (bases et chambres de Weyl en rang 2). *Vérifier que les ensembles $\{\alpha, \beta\}$ des systèmes de racines en rang 2 représentés dans la figure 1 sont des bases du système de racines correspondant. Représenter les chambres de Weyl et préciser la chambre de Weyl fondamentale relative à $\{\alpha, \beta\}$.*

On note $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\beta > 0} \beta$ la demi-somme des racines positives. Cet élément sera de grande importance dans les chapitres suivants.

EXERCICE 39 (demi-somme des racines positives). *Soit Δ une base de Φ .*

1. *Soit $\alpha \in \Delta$. Montrer que s_α permute l'ensemble des racines positives différentes de α . (Indication : pour $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$, écrire $\beta = \sum_{\gamma \in \Phi^+} k_\gamma \gamma$, $k_\gamma \in \mathbb{N}$, remarquer que $k_\alpha \neq 0$ pour un certain $\gamma \neq \alpha$, et calculer le coefficient en γ de $s_\alpha(\beta)$.)*
2. *Déduire de la question précédente que $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$.*

En particulier, $(\rho|\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$ et donc ρ appartient à la chambre de Weyl fondamentale. D'après le théorème suivant, le groupe de Weyl $\mathcal{W}(\Phi)$ opère simplement et transitivement sur l'ensemble des bases de Φ . En particulier, le cardinal du groupe de Weyl est égal au nombre de chambres de Weyl. Les différentes parties du théorème donnent les étapes de la démonstration (que l'on admet ici).

Théorème 43 – Action du groupe de Weyl sur les bases de Φ

Soit Δ une base de Φ .

- (i) Si $\gamma \in E$ est régulier, alors il existe $\sigma \in \mathcal{W}$ tel que $(\sigma(\gamma)|\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$. En particulier, \mathcal{W} opère transitivement sur les chambres de Weyl.
- (ii) Si Δ' est une base de Φ , alors il existe $\sigma \in \mathcal{W}$ tel que $\sigma(\Delta') = \Delta$. En particulier, \mathcal{W} opère transitivement sur les bases de Φ .
- (iii) Si α est une racine, alors il existe $\sigma \in \mathcal{W}$ tel que $\sigma(\alpha) \in \Delta$.
- (iv) \mathcal{W} est engendré par les réflexions s_α , $\alpha \in \Delta$.
- (v) Si $\sigma(\Delta) = \Delta$, pour $\sigma \in \mathcal{W}$, alors $\sigma = \text{id}_E$. En particulier, \mathcal{W} opère simplement et transitivement sur les bases de Φ .

1.3. Systèmes de racines irréductibles. Le système de racines Φ est dit **irréductible** s'il ne peut être écrit comme une union de deux sous-ensembles propres Φ_1 et Φ_2 tels que toute racine de Φ_1 soit orthogonale à toute racine de Φ_2 .

EXEMPLE 11. *On vérifie sans peine que les systèmes de racines de type A_2 , B_2 et G_2 de la figure 1 sont irréductibles tandis que $A_1 \times A_1$ ne l'est pas.*

Il s'avère que Φ est irréductible si et seulement si pour toute base Δ de Φ , l'ensemble Δ ne peut être écrit comme une union de deux sous-ensembles propres Δ_1 et Δ_2 tels que toute racine de Δ_1 soit orthogonale à toute racine de Δ_2 .

2. Classification

Fixons une base ordonnée $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ de racines simples. La matrice $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq \ell}$ est appelée la **matrice de Cartan** de ϕ .

EXEMPLE 12. Pour les systèmes de rang 2 de la figure 1, les matrices de Cartan sont :

$$A_1 \times A_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Cartan ne dépend pas, à l'ordre près des éléments, de la base $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$, grâce au théorème 43. De plus, comme $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ est une base de E , la matrice de Cartan est inversible. Il s'avère qu'elle détermine entièrement le système de racines Φ :

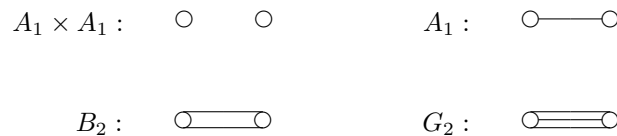
Proposition 44

Soit $\Phi' \subset E'$ un autre système de racines d'un espace euclidien E' , de base $\Delta' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_\ell\}$. On suppose que $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq \ell} = (\langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq \ell}$. Alors la bijection $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$ s'étend uniquement en un isomorphisme $f: E \rightarrow E'$ qui envoie Φ sur Φ' et tel que $\langle f(\alpha), f(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ pour tous $\alpha, \beta \in \Phi$. Par conséquent, la matrice de Cartan de Φ détermine entièrement Φ , à isomorphisme près.

On peut donc théoriquement reconstruire le système de racines Φ à partir de sa matrice de Cartan.

EXERCICE 40. Décrire un algorithme permettant de décrire toutes les racines positives de Φ à partir de la connaissance de la matrice de Cartan.

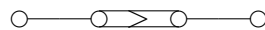
Si α, β sont deux racines positives distinctes, on sait que $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0, 1, 2$, ou 3. On définit le **graphe de Coxeter** de la façon suivante : c'est un graphe avec ℓ sommets, le i -ième est joint au j -ième ($i \neq j$) par $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ arêtes. Par exemple les graphes de Coxeter pour $A_1 \times A_1, A_2, B_2, G_2$ sont respectivement :



Lorsqu'une arête double ou triple apparaît dans le graphe de Coxeter, on peut ajouter une flèche pointant vers la racine la plus courte. Cette information permet de construire la matrice de Cartan, et donc Φ , à partir de ce nouveau graphe. On l'appelle le **diagramme de Dynkin** de Φ . Par exemple, pour B_2 et G_2 , on obtient (pour $A_1 \times A_1$ et A_2 le diagramme de Dynkin et le graphe de Coxeter coïncident) :

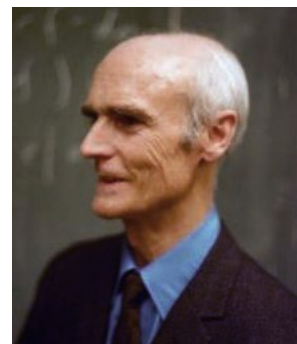


Voici un autre exemple (qui sera le système de racines de type F_4) :



⚠ Le diagramme de Dynkin de B_2 correspond ici au choix d'une base $\{\alpha, \beta\}$ où α est de plus grande longueur.

Harold Scott MacDonald Coxeter, né le 9 février 1907 à Londres et mort le 31 mars 2003 à Toronto (Canada) est un mathématicien britannique. Il est considéré comme un des grands géomètres du XXe siècle. Une de ses idées originales fut de définir une conique comme une courbe auto-duale. Il s'est fait connaître par son travail sur les polytopes réguliers et la géométrie en dimension supérieure. Il a rencontré M. C. Escher et son œuvre géométrique a été une source importante d'inspiration pour ce dernier. Il a aussi inspiré certaines des innovations de Buckminster Fuller.





Eugene B. Dynkin, né le 11 mai 1924 à Leningrad (URSS) et mort le 14 novembre 2014 à Ithaca (État de New York, États-Unis), est un mathématicien russe.

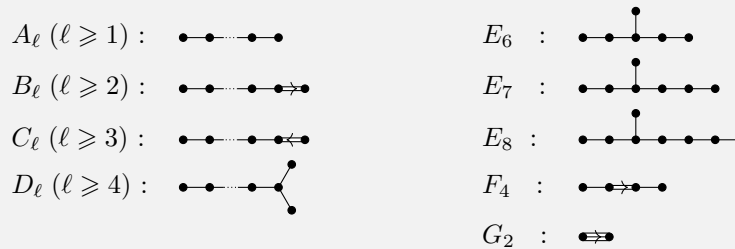
EXERCICE 41. Montrer que la matrice de Cartan associée à ce graphe est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De la définition d'un système de racines irréductible, on déduit aisément que le système Φ se décompose comme une union de composantes irréductibles $\Phi = \Phi_1 \sqcup \dots \sqcup \Phi_t$, où les Φ_i sont des systèmes de racines d'espaces euclidiens E_i tels que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_t$ soit une somme directe orthogonale. Il est clair que Φ est irréductible si et seulement si son graphe de Coxeter est connexe. Pour classifier tous les systèmes de racines irréductibles, il suffit donc de classifier tous les diagrammes de Dynkin connexes.

Théorème 45 – Classification des diagrammes de Dynkin connexes

Si Φ est un système de racines irréductible de rang ℓ , alors son diagramme de Dynkin est l'un des suivants (avec ℓ sommets dans chaque cas) :



EXERCICE 42. Écrire les matrices de Cartan correspondantes.

3. Construction des systèmes de racines

Nous allons maintenant montrer que tous les diagrammes de Dynkin du théorème 45 correspondent bien à des systèmes de racines (irréductibles). Pour cela, nous allons construire explicitement des systèmes de racines de chaque type. Pour les familles $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$, on peut utiliser les systèmes de racines provenant des algèbres de Lie classiques (voir la fiche d'exercices n°2). Mais on peut aussi donner une construction directe.

Dans ce qui suit, \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) est muni de sa structure euclidienne canonique, et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est la base canonique.

On décrit ci dessous, pour chaque type de diagrammes de Dynkin, un système de racines Φ d'un espace euclidien E dont le diagramme de Dynkin est du type correspondant. On indique alors son cardinal, le choix d'une base $\Delta = \{\beta_1, \dots, \beta_\ell\}$ de Φ , la **plus grande racine positive** θ^1 , et l'ordre du groupe de Weyl $\mathcal{W}(\Phi)$.

Type $A_\ell, \ell \geq 1$. Ici, E est l'hyperplan de $\mathbb{R}^{\ell+1}$ formé des vecteurs $(x_1, \dots, x_{\ell+1})$ tels que $x_1 + \dots + x_{\ell+1} = 0$.

- $\Phi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j\}_{1 \leq i < j \leq \ell+1}$,
- Nombre de racines : $\ell(\ell + 1)$.
- $\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \beta_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, \beta_\ell = \varepsilon_\ell - \varepsilon_{\ell+1}$,

1. En effet, on peut montrer que si un système de racines est irréductible, alors il admet une unique plus grande racine positive, c'est-à-dire une racine positive θ telle que $\theta + \alpha \notin \Phi$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$. Autrement dit, θ est l'unique racine positive de hauteur maximale.

- $\theta = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\ell$,
- $|\mathcal{W}(\Phi)| = (\ell + 1)!$.

Type B_ℓ , $\ell \geq 2$. Ici, $E = \mathbb{R}^\ell$.

- $\Phi = \{\pm\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq \ell} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}_{1 \leq i < j \leq \ell}$,
- Nombre de racines : $2\ell^2$,
- $\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\beta_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, ..., $\beta_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell$, $\beta_\ell = \varepsilon_\ell$.
- $\theta = \beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + 2\beta_\ell$,
- $|\mathcal{W}(\Phi)| = 2^\ell \cdot \ell!$.

Type C_ℓ , $\ell \geq 3$. Ici, $E = \mathbb{R}^\ell$.

- $\Phi = \{\pm 2\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq \ell} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}_{1 \leq i < j \leq \ell}$,
- Nombre de racines : $2\ell^2$,
- $\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\beta_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, ..., $\beta_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell$, $\beta_\ell = 2\varepsilon_\ell$.
- $\theta = 2\beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + 2\beta_{\ell-1} + \beta_\ell$,
- $|\mathcal{W}(\Phi)| = 2^\ell \cdot \ell!$.

Type D_ℓ , $\ell \geq 4$. Ici, $E = \mathbb{R}^\ell$.

- $\Phi = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}_{1 \leq i < j \leq \ell}$,
- Nombre de racines : $2\ell(\ell - 1)$,
- $\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\beta_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, ..., $\beta_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell$, $\beta_\ell = \varepsilon_{\ell-1} + \varepsilon_\ell$.
- $\theta = \beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + 2\beta_{\ell-2} + \beta_{\ell-1} + \beta_\ell$,
- $|\mathcal{W}(\Phi)| = 2^{\ell-1} \cdot \ell!$.

Type E_6 . Ici, E est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^8 formé des vecteurs (x_1, \dots, x_8) tels que $x_6 = x_7 = -x_8$.

- $\Phi = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}_{1 \leq i < j \leq 5} \cup \left\{ \pm \frac{1}{2} \left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^5 (-1)^{\nu_i} \varepsilon_i \right) \right\}_{\substack{\nu_i \text{ tel que} \\ \nu_1 + \cdots + \nu_5 \text{ pair}}}$,
- Nombre de racines : 72,
- $\beta_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8)$, $\beta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\beta_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\beta_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, $\beta_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3$,
 $\beta_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4$,
- $\theta = \beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + 2\beta_5 + \beta_6$,
- $|\mathcal{W}(\Phi)| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$.

Type E_7 . Ici, E est l'orthogonal dans \mathbb{R}^8 du vecteur $\varepsilon_7 + \varepsilon_8$.

- $\Phi = \{\pm(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)\} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}_{1 \leq i < j \leq 6} \cup \left\{ \pm \frac{1}{2} \left(\varepsilon_7 - \varepsilon_8 + \sum_{i=1}^6 (-1)^{\nu_i} \varepsilon_i \right) \right\}_{\substack{\nu_i \text{ tel que} \\ \nu_1 + \cdots + \nu_6 \text{ impair}}}$,
- Nombre de racines : 126,
- $\beta_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8)$, $\beta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\beta_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\beta_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, $\beta_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3$,
 $\beta_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4$, $\beta_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5$,
- $\theta = 2\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 4\beta_4 + 3\beta_5 + 2\beta_6 + \beta_7$,
- $|\mathcal{W}(\Phi)| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

Type E_8 . Ici, $E = \mathbb{R}^8$.

- $\Phi = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}_{1 \leq i < j \leq 8} \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 (-1)^{\nu_i} \varepsilon_i \right\}_{\substack{\nu_i \text{ tel que} \\ \nu_1 + \cdots + \nu_8 \text{ pair}}}$,
- Nombre de racines : 240,
- $\beta_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8)$, $\beta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\beta_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\beta_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, $\beta_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3$,
 $\beta_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4$, $\beta_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5$, $\beta_8 = \varepsilon_7 - \varepsilon_6$,
- $\theta = 2\beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_3 + 6\beta_4 + 5\beta_5 + 4\beta_6 + 3\beta_7 + 2\beta_8$,
- $|\mathcal{W}(\Phi)| = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Type F_4 . Ici, $E = \mathbb{R}^4$.

- $\Phi = \{\pm\varepsilon_i\}_{1 \leq i \leq 4} \cup \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\}_{1 \leq i < j \leq 4} \cup \left\{ \frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4) \right\}$,
- Nombre de racines : 48,
- $\beta_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \beta_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \beta_3 = \varepsilon_4, \beta_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$,
- $\theta = 2\beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_3 + 2\beta_4$,
- $|\mathcal{W}(\Phi)| = 2^7 \cdot 3^2$.

Type G_2 . Ici, E est l'hyperplan de \mathbb{R}^3 formé des vecteurs (x_1, x_2, x_3) tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

- $\Phi = \{\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\} \cup \{\pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\} \cup \{\pm(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\} \cup \{\pm(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)\} \cup \{\pm(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3)\} \cup \{\pm(2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\}$,
- Nombre de racines : 12,
- $\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \beta_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$,
- $\theta = 3\beta_1 + 2\beta_2$,
- $|\mathcal{W}(\Phi)| = 12$.

4. Théorème d'isomorphisme

On retourne maintenant au cadre des algèbres de Lie semi-simples. Soient L une algèbre de Lie semi-simple, H une sous-algèbre torale maximale de L , et Φ le système de racines associé comme au chapitre 2. Le théorème 38 assure que Φ est bien un système de racines de l'espace euclidien $E = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$, où $E_{\mathbb{Q}}$ est le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par Φ , au sens de ce chapitre (définition 39).

4.1. Théorème d'isomorphisme. On remarque que si L est simple alors Φ est irréductible (on le vérifie aisément). De plus, comme toute algèbre de Lie semi-simple est une somme directe orthogonale pour la forme de Killing d'idéaux simples (voir la proposition 28), la décomposition du système de racines Φ en composantes irréductibles $\Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_t$ est adaptée à celle de $L = I_1 \oplus \dots \oplus I_t$ en somme directe d'idéaux simples, c'est-à-dire que si $H_i = H \cap I_i$, alors H_i est une sous-algèbre torale maximale de I_i et son système de racines est Φ_i , qui est irréductible.

EXERCICE 43. Vérifier les assertions précédentes.

Ainsi, le problème de caractériser une algèbre de Lie semi-simple par son système de racines associé au choix d'une sous-algèbre torale maximale se réduit au problème de caractériser une algèbre de Lie simple par son système de racines (irréductible) associé au choix d'une sous-algèbre torale maximale. Dès lors, plusieurs questions très naturelles se posent.

- (Q1) Si L' est une algèbre de Lie simple, avec une sous-algèbre torale maximale H' et un système de racines associé Φ' , un isomorphisme de systèmes de racines entre Φ et Φ' induit-il un isomorphisme d'algèbres de Lie entre L et L' ? *Le théorème 47 ci-dessous répond positivement à la question.*
- (Q2) A priori, le système Φ dépend du choix de la sous-algèbre torale maximale H ; qu'en est-il si on en choisit une autre? *Nous verrons au paragraphe 4.3 de ce chapitre que les sous-algèbres torales maximales sont toutes conjuguées par un élément du groupe $\text{Aut}(L)$, et donc que Φ est indépendant de ce choix.*
- (Q3) Les systèmes de racines construits à la section 3 correspondent-ils tous à une algèbre de Lie simple? *On sait déjà les systèmes de racines de types $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$ correspondent aux algèbres de Lie classiques du type correspondant; on verra (au chapitre suivant seulement) que les autres correspondent aussi à des algèbres de Lie simples, dite exceptionnelles.*

Comme nous l'avons vu à la proposition 37 (vi), les sous-espaces radiciels $L_\alpha, \alpha \in \Phi$, engendrent L en tant qu'algèbre de Lie. Grâce à la notion de base d'un système de racines, on peut préciser et améliorer ce résultat :

Proposition 46

Soit Δ une base de Φ . Alors L est engendrée en tant qu'algèbre de Lie par les espaces radiciels $L_\alpha, L_{-\alpha}, \alpha \in \Delta$.

Soient $x_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\}$, $y_\alpha \in L_{-\alpha} \setminus \{0\}$, et $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$. L'ensemble $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ est appelé un **ensemble standard de générateurs** pour L .

EXERCICE 44. *Démontrer cette proposition.*

Supposons désormais que L soit simple. Soient L' une autre algèbre de Lie simple, H' une sous-algèbre torale maximale de L' et Φ' le système de racines correspondant. On veut montrer qu'un isomorphisme entre les systèmes de racines Φ et Φ' induit un isomorphisme d'algèbres de Lie entre L et L' qui envoie H sur H' . Ceci répondra à la question (Q1).

Soit $\psi: \Phi \rightarrow \Phi'$, $\alpha \mapsto \alpha'$ un isomorphisme de systèmes de racines. Il induit un isomorphisme $\tilde{\psi}: E \rightarrow E'$ entre les espaces euclidiens correspondants. A priori, $\tilde{\psi}$ n'est pas une isométrie! Cependant les axiomes d'un système de racines sont inchangés si on multiplie le produit scalaire par un réel strictement positif. On peut donc supposer que $\tilde{\psi}$ est une isométrie. Par ailleurs, comme Φ et Φ' engendrent respectivement H^* et H'^* en tant qu'espaces vectoriels, $\tilde{\psi}$ s'étend de façon unique en un isomorphisme d'espaces vectoriels $\psi: H^* \rightarrow H'^*$. Via la forme de Killing, ψ induit un isomorphisme $\pi: H \rightarrow H'$; précisément, $\pi(t_\alpha) = t_{\alpha'}$ pour tout $\alpha \in \Phi$. Comme l'isomorphisme provient d'une isométrie vectorielle, on en déduit que $\pi(h_\alpha) = h_{\alpha'}$ pour tout $\alpha \in \Phi$ puisque $h_\alpha = 2t_\alpha/(\alpha|\alpha)$.

Comme H et H' sont abéliennes, π peut être vu comme un morphisme d'algèbres de Lie. On veut l'étendre en un isomorphisme $L \rightarrow L'$. Si un tel isomorphisme existe, on s'attend à ce que $x_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\}$ s'envoie sur un élément non nul de $L'_{\alpha'}$. Ceci ne peut certainement pas se faire de façon arbitraire. En effet, si α, β sont des racines telles que $\alpha + \beta \in \Phi$, et si $x_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\}$, $x_\beta \in L_\beta \setminus \{0\}$, $x_{\alpha+\beta} \in L_{\alpha+\beta} \setminus \{0\}$ sont tels que $[x_\alpha, x_\beta] = x_{\alpha+\beta}$, alors on veut $[x'_{\alpha'}, x'_{\beta'}] = x'_{\alpha+\beta}$ si on note $x'_{\alpha'}$ l'image par l'isomorphisme obtenu, pour $\alpha \in \Phi$. Les choix de $x'_{\alpha'}$ et $x'_{\beta'}$ déterminent donc $x'_{\alpha+\beta}$.

La discussion ci-dessus suggère qu'il suffit de déterminer les images des vecteurs x_α , pour α dans une base Δ de Φ , et que celles-ci peuvent être choisies arbitrairement.

Nous démontrerons le théorème suivant plus tard, grâce à la notion d'algèbre enveloppante (on pourrait le démontrer directement à ce stade du cours, mais ce serait un peu fastidieux).

Théorème 47

Fixons une base Δ de Φ de sorte que $\Delta' = \{\alpha' \mid \alpha \in \Delta\}$ soit une base de Φ' . Pour chaque $\alpha \in \Delta$, $\alpha' \in \Delta'$, on choisit arbitrairement $x_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\}$ et $x'_{\alpha'} \in L_{\alpha'} \setminus \{0\}$. Autrement dit, on fixe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\pi_\alpha: L_\alpha \rightarrow L_{\alpha'}$, $x_\alpha \mapsto x'_{\alpha'}$. Alors il existe un unique isomorphisme $\pi: L \rightarrow L'$ qui étend $\pi: H \rightarrow H'$ et tous les isomorphismes $\pi_\alpha: L_\alpha \rightarrow L_{\alpha'}$, $\alpha \in \Delta$.

4.2. Automorphismes intérieurs. On suppose dans ce paragraphe, sauf mention explicite du contraire, que L est une algèbre de Lie quelconque, et que \mathbb{K} est de caractéristique nulle.

Rappelons qu'un automorphisme de L est un morphisme d'algèbres de Lie $\theta: L \rightarrow L$ qui est en même temps un automorphisme d'espaces vectoriels. On note $\text{Aut}(L)$ l'ensemble des automorphismes de L .

EXEMPLE 13. *Supposons que L soit une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$, avec V est un espace vectoriel de dimension finie. Si $g \in GL(V)$ est tel que $gLg^{-1} \subset L$, alors l'application $x \mapsto gxg^{-1}$ est un automorphisme de L .*

Des exemples importants d'automorphismes viennent des dérivations nilpotentes (la notion de dérivation d'une algèbre de Lie est donnée après l'exercice 1).

EXERCICE 45 (les dérivations nilpotentes induisent des automorphismes de l'algèbre de Lie). *Soit δ une dérivation nilpotente de L , i.e., $\delta: L \rightarrow L$ est une dérivation et $\delta^n = 0$ pour n assez grand.*

1. *Montrer la règle de Leibniz : pour tout $r \in \mathbb{N}$,*

$$\delta^r([x, y]) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} [\delta^i x, \delta^{r-i} y]. \tag{13}$$

2. *En déduire que $\exp \delta$ appartient à $\text{Aut}(L)$.*

En particulier, si $x \in L$ est tel que $\text{ad } x$ soit un endomorphisme nilpotent alors $\exp \text{ad } x \in \text{Aut}(L)$. De tels automorphismes sont dits **intérieurs**. On note $\text{Int}(L)$ le sous-groupe de $\text{Aut}(L)$ engendré par les automorphismes intérieurs de L ; c'est un sous-groupe distingué de $\text{Aut}(L)$. Précisément, si $\theta \in \text{Aut}(L)$ et si $\text{ad } x$ est un endomorphisme nilpotent, alors $\theta \circ (\text{ad } x) \circ \theta^{-1} = \text{ad } \theta(x)$ et donc $\theta \circ \exp(\text{ad } x) \circ \theta^{-1} = \exp(\text{ad } \theta(x))$.

REMARQUE 6. Si L est semi-simple, le groupe $\text{Int}(L)$ est aussi appelé le **groupe adjoint** de L ².

Définition 48 – Sous-algèbres conjuguées

On dit que deux sous-algèbres M_1 et M_2 de L sont **conjuguées** s'il existe $\theta \in \text{Int}(L)$ tel que $M_2 = \theta(M_1)$.

EXERCICE 46 (automorphismes intérieurs dans $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$). On suppose dans cet exercice que $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, avec sa base usuelle (e, h, f) . Posons $\sigma = \exp(\text{ad } e) \circ \exp(\text{ad } (-f)) \circ \exp(\text{ad } e)$ de sorte que $\sigma \in \text{Int}(L)$.

1. Montrer que $\sigma(e) = -f$, $\sigma(f) = -e$, $\sigma(h) = -h$. En particulier, σ est d'ordre 2.
2. On considère l'élément $s = \exp(e) \exp(-f) \exp(e) \in GL_2(\mathbb{K})$. Vérifier que s est un élément de $SL_2(\mathbb{K})$. En particulier, l'application $z \mapsto szs^{-1}$ est un automorphisme de L . Calculer la matrice s , et en déduire que l'action par conjugaison de s a le même effet que σ sur la base (e, h, f) et donc sur L .

Le phénomène observé dans l'exercice précédent n'est pas une simple coïncidence : si L est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ et si $x \in L$ est nilpotent, alors on a pour tous $x, y \in L$,

$$(\exp x)y(\exp x)^{-1} = \exp(\text{ad } x)y. \tag{14}$$

Pour s'en convaincre, remarquons que $\text{ad } x = \lambda_x + \rho_{-x}$, où λ_x et ρ_x sont les multiplications à gauche et à droite par $x \in L$, respectivement, dans $\text{End}(V)$. Ces deux endomorphismes commutent et sont nilpotents. D'après les propriétés de l'exponentielle, on a donc $\exp(\text{ad } x) = \exp(\lambda_x + \rho_{-x}) = \exp(\lambda_x) \exp(\rho_{-x}) = \lambda_{\exp x} \rho_{\exp(-x)}$, ce qui implique la relation (14).

Ce qui suit s'inspire de l'exemple de l'exercice 46. Appliquons le théorème d'isomorphisme 47 à la situation suivante : L est semi-simple, H est une sous-algèbre torale maximale de L , Φ est le système de racines correspondant et $\psi: \Phi \rightarrow \Phi$ l'automorphisme de systèmes de racines qui envoie α sur $-\alpha$. L'automorphisme ψ induit un morphisme d'algèbres de Lie $\sigma: H \rightarrow H$, $h \mapsto -h$. En particulier, $\sigma(h_\alpha) = -h_\alpha = h_{-\alpha}$. En vue d'appliquer le théorème 47, on s'apprête à envoyer x_α sur $-y_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$, où Δ est une base de Φ ³. D'après le théorème 47, σ s'étend de façon unique en un automorphisme de L qui envoie x_α sur $-y_\alpha$, $\alpha \in \Delta$. Un tel automorphisme est nécessairement d'ordre 2.

En résumé, on a obtenu :

Proposition 49

Soit L comme dans le théorème 47. Fixons pour $\alpha \in \Delta$, $x_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\}$ et $y_\alpha \in L_{-\alpha} \setminus \{0\}$ tels que $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Alors il existe un automorphisme σ de L , d'ordre 2, tel que $\sigma(x_\alpha) = -y_\alpha$, $\sigma(y_\alpha) = -x_\alpha$, $\sigma(h) = -h$ pour tous $\alpha \in \Delta$ et $h \in H$.

Le groupe de Weyl \mathcal{W} permet de décrire presque tous les automorphismes de Φ ⁴. Le théorème 47 assure l'existence d'automorphismes de L provenant de l'action de \mathcal{W} dans H . Si $\sigma \in \mathcal{W}$, alors l'extension de σ en un automorphisme de L envoie L_β sur $L_{\sigma\beta}$, pour $\beta \in \Delta$. On peut aussi donner une construction directe d'un tel automorphisme en s'inspirant de l'exercice 46. Il suffit de faire la construction pour les réflexions s_α , $\alpha \in \Delta$. Comme x_α est nilpotent, l'automorphisme $\tau_\alpha = \exp(\text{ad } x_\alpha) \exp(\text{ad } (-y_\alpha)) \exp(\text{ad } x_\alpha)$ est bien défini. Quel est l'action de τ_α dans H ? On écrit $H = \ker \alpha \oplus \mathbb{C}h_\alpha$. Clairement, $\tau_\alpha(h) = h$ pour tout $h \in \ker \alpha$, et $\tau_\alpha(h_\alpha) = -h_\alpha$. Par conséquent, s_α et τ_α coïncident sur H . De plus, τ_α envoie L_β sur $L_{\sigma\beta}$ aussi.

⚠ Cette façon de représenter une réflexion de \mathcal{W} (et donc tout élément de \mathcal{W}) par un élément de $\text{Int}(L)$ ne permet pas toujours d'identifier \mathcal{W} à un sous-groupe de $\text{Int}(L)$ (voir l'exercice ci-dessous).

2. En toute rigueur, le **groupe adjoint** d'une algèbre de Lie L et le plus petit sous-groupe algébrique de $\text{Aut}(L)$ dont l'algèbre de Lie contient $\text{ad } L$ (l'algèbre de Lie de $\text{Aut}(L)$ est $\text{Der}(L)$, l'algèbre de Lie des dérivations de L). Or, si L est semi-simple, le groupe adjoint coïncide avec le sous-groupe de $\text{Aut}(L)$ engendré par les automorphismes intérieurs, c'est-à-dire $\text{Int}(L)$.

3. Remarquons que l'unique $z \in L_\alpha$ tel que $[-y_\alpha, z] = h_{-\alpha}$ est $-x_\alpha$.

4. On peut montrer que $\text{Aut}(\Phi) = \mathcal{W} \rtimes \Gamma$, où $\Gamma = \{\sigma \in \text{Aut}(\Phi) \mid \sigma(\Delta) = \Delta\}$ est le **groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin**. On a $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si Φ est de type $A_\ell, D_\ell, \ell > 4$, ou E_6 , $\Gamma = \mathfrak{S}_3$ si Φ est de type D_4 , et $\Gamma = 1$ pour tous les autres types.

EXERCICE 47 (le groupe de Weyl ne s'identifie pas toujours à un sous-groupe de $\text{Int}(L)$). *Supposons que $L = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{K})$ (type A_2). Montrer que le sous-groupe de $\text{Int}(L)$ engendré par toutes les réflexions $\tau_\alpha, \alpha \in \Delta$, est strictement plus grand que le groupe de Weyl \mathcal{W} (égal ici à \mathfrak{S}_3).*

4.3. Sous-algèbres de Cartan. Nous répondons maintenant à la question de savoir si le système de racines Φ dépend de la sous-algèbre torale maximale H d'une algèbre de Lie simple L . Dans bien des cas, un argument de dimension suffit car $\dim L = \text{rank } \Phi + |\Phi|$, mais cela ne permet pas de distinguer les types B_ℓ et C_ℓ .

Nous allons voir que les sous-algèbres torales maximales de L sont toutes conjuguées au sens de la définition 48. Pour cela, la notion de *sous-algèbres de Cartan* que nous introduisons ici est plus adaptée (et de telles sous-algèbres existent pour n'importe quelle algèbre de Lie).

Pour le moment, L est une algèbre de Lie quelconque.

Définition 50 – Sous-algèbres de Cartan

Une sous-algèbre H de L est dite de **Cartan** si H est une algèbre de Lie nilpotente et si $H = N_L(H)$.

Par exemple, si L est semi-simple (et \mathbb{K} algébriquement clos de caractéristique nulle), alors toute sous-algèbre torale maximale est de Cartan (voir le paragraphe 5.1 du chapitre 2).

Le premier objectif est de voir que toute algèbre de Lie admet des sous-algèbres de Cartan. Pour $x \in L$, on note $L_0(\text{ad } x)$ le sous-espace caractéristique de $\text{ad } x$ associée à la valeur propre 0, i.e.,

$$L_0(\text{ad } x) = \{y \in L \mid \exists n \in \mathbb{N}, (\text{ad } x)^n y = 0\}.$$

Par exemple, si $\text{ad } x$ est nilpotent, alors $L_0(\text{ad } x) = L$. Un élément $x \in L$ est dit **générique** si la dimension de $L_0(\text{ad } x)$ est minimale. Par construction, une algèbre de Lie contient des éléments génériques.

Théorème 51

Soit x un élément générique de L . Alors $L_0(\text{ad } x)$ est une sous-algèbre de Cartan. En particulier, L possède des sous-algèbres de Cartan.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. On pose $H = L_0(\text{ad } x)$. On doit montrer que H est une sous-algèbre, que H est nilpotente et que $H = N_L(H)$.

1. Pour montrer que H est une sous-algèbre, on applique la règle de Leibniz (13) à la dérivation $\text{ad } x$ (exercice).
2. La stratégie pour montrer que H est nilpotente est de montrer que tous les éléments $\text{ad } y: H \rightarrow H, y \in H$, sont nilpotents et d'appliquer le théorème d'Engel; c'est la partie la plus délicate de la démonstration.
3. Pour montrer $H = N_L(H)$, soit $z \in N_L(H)$. Alors $[x, z] \in H$ et donc

$$(\text{ad } x)^n [x, z] = 0$$

pour un certain n . Mais alors $(\text{ad } x)^{n+1}(z) = 0$ et donc $z \in H$. L'autre inclusion $H \subset N_L(H)$ est claire.

□

La réciproque est vraie aussi (nous l'admettons) :

Théorème 52

Si H est une sous-algèbre de Cartan, alors il existe un élément générique x de L tel que $H = L_0(\text{ad } x)$.

Corollaire 53

Si L est semi-simple (et \mathbb{K} de caractéristique nulle), alors les sous-algèbres de Cartan de L sont exactement les sous-algèbres torales maximales de L .

DÉMONSTRATION. On suppose que L est semi-simple. Nous avons déjà observé que les sous-algèbres torales maximales de L sont des sous-algèbres de Cartan. Réciproquement, soit H une sous-algèbre de Cartan. Si $x = x_s + x_n$ est la décomposition de Jordan de $x \in L$, alors $L_0(\text{ad } x_s) \subset L_0(\text{ad } x)$. Par ailleurs, si x est semi-simple alors $L_0(\text{ad } x) = C_L(x)$, puisque $\text{ad } x$ est diagonalisable. Ici, $C_L(x) = \{y \in L \mid [y, x] = 0\}$ est le **centralisateur** de x dans L . Par minimalité de H , on a donc $H = L_0(\text{ad } x) = L_0(\text{ad } x_s) = C_L(x_s)$ pour $x \in H$. Mais $C_L(x_s)$ contient une sous-algèbre torale maximale de L (les sous-algèbres torales sont abéliennes), c'est-à-dire une sous-algèbre de Cartan. Toujours par minimalité, on conclut que $H = C_L(x_s)$. \square

La démonstration ci-dessus montre que si L est semi-simple, les sous-algèbres de Cartan, et donc les sous-algèbres torales maximales, sont les centralisateurs de certains éléments semi-simples. De tels éléments sont dits **semi-simples réguliers**.

On suppose désormais que \mathbb{K} est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Théorème 54

Toutes les sous-algèbres de Cartan sont conjuguées.

La dimension commune des sous-algèbres de Cartan est appelée le **rang** de L . Un élément x d'une algèbre de Lie semi-simple L est dit **régulier** si $\dim C_L(x) = \text{rang } L$.

Nous omettons la démonstration de ce théorème. On la présente seulement dans les grandes lignes.

GRANDES LIGNES DE LA DÉMONSTRATION. Soit L une algèbre de Lie quelconque.

On dit qu'un élément x est **fortement nilpotent** s'il existe $y \in L$ et une valeur propre non nulle λ de $\text{ad } y$ tels que $x \in L_\lambda(\text{ad } y)$, où $L_\lambda(\text{ad } y)$ est le sous-espace caractéristique de $\text{ad } y$ relativement à λ , i.e.,

$$L_\lambda(\text{ad } y) = \{z \in L \mid \exists n \in \mathbb{N}, (\text{ad } y - \lambda \text{id}_L)^n z = 0\}.$$

Comme $[L_\lambda(\text{ad } y), L_\mu(\text{ad } y)] \subset L_{\lambda+\mu}(\text{ad } y)$ pour toutes valeurs propres λ, μ de $\text{ad } y$, on remarque que si x est fortement nilpotent, alors $\text{ad } x$ est nilpotent.

On note $\mathcal{E}(L)$ le sous-groupe de $\text{Int}(L)$ engendré par les éléments fortement nilpotents. L'avantage de cette définition est que si K est une sous-algèbre de L , alors $\mathcal{E}(K)$ est la restriction à K du sous-groupe de $\mathcal{E}(L)$ engendré par les éléments $\exp(\text{ad } x)$, où x est fortement nilpotent pour K car si x est fortement nilpotent pour K alors il l'est pour L ; ceci n'est pas valable pour $\text{Int}(K)$.

Les étapes de la démonstration sont les suivantes :

1. Si L est résoluble, on montre que les sous-algèbres de Cartan sont conjuguées. Plus précisément, on montre que les sous-algèbres de Cartan sont conjuguées par $\mathcal{E}(L)$.
2. Pour passer du cas résoluble au cas général, on utilise la notion de **sous-algèbre de Borel**. Ce sont par définition les sous-algèbres résolubles maximales d'une algèbre de Lie L . Par exemple, $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de Borel de l'algèbre de Lie $L = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Si B est une sous-algèbre de Borel d'une algèbre de Lie L , alors $B = N_L(B)$. Ceci se voit facilement : si x normalise B , alors $B + \mathbb{K}x$ est une sous-algèbre résoluble de L qui contient B .

Armand Borel, né le 21 mai 1923 à La Chaux-de-Fonds et mort le 11 août 2003 à Princeton était un mathématicien suisse. Armand Borel a été professeur permanent à l'Institut pour "Advanced Study", à Princeton, de 1957 à 1993. Il a travaillé en topologie algébrique, dans la théorie des groupes de Lie, et fut un des créateurs de la théorie moderne des groupes algébriques linéaires.



3. On se ramène ensuite au cas où L est semi-simple grâce au résultat suivant : si $\text{rad}(L) \neq L$, alors les sous-algèbres de Borel de L sont en correspondance bijective avec les sous-algèbres de Borel de l'algèbre de Lie semi-simple $L/\text{rad } L$.
4. Si L est semi-simple, soit H une sous-algèbre de Cartan et Φ sont système de racines. Pour toute base Δ de Φ , alors

$$B(\Delta) := H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha > 0} L_\alpha \right)$$

est une sous-algèbre de Borel, dite **standard**. On montre alors que toutes les sous-algèbres de Borel standards de L sont conjuguées par $\mathcal{E}(L)$.

5. On montre ensuite que toute sous-algèbre de Borel d'une algèbre de Lie semi-simple est conjuguée par un élément de $\mathcal{E}(L)$ à une sous-algèbre de Borel standard. C'est l'étape la plus difficile du théorème.
6. On montre enfin le théorème. Soient H et H' deux sous-algèbres de Cartan d'une algèbre de Lie (quelconque) L . Comme H et H' sont nilpotentes et donc résolubles, elles sont contenues dans des sous-algèbres de Borel B et B' , respectivement, de L . D'après les étapes précédentes, il existe $\sigma \in \mathcal{E}(L)$ tel que $\sigma(B) = B'$. Alors $\sigma(H)$ et H' sont deux sous-algèbres de Cartan de l'algèbre de Lie résoluble B' ; elles sont donc conjuguées par $\mathcal{E}(B')$ d'après l'étape (1). Il existe donc $\tau' \in \mathcal{E}(B')$ tel que $\tau' \circ \sigma(H) = H'$. Mais τ' est la restriction à B' d'un élément $\tau \in \mathcal{E}(L)$ (voir la discussion au début de la démonstration). Finalement, $\tau \circ \sigma(H) = H'$, et $\tau \circ \sigma \in \mathcal{E}(L) \subset \text{Int}(L)$.

□

Représentations des algèbres de Lie semi-simples

Le principal objectif de ce chapitre est d'étudier les représentations de dimension finie des algèbres de Lie semi-simples (définies sur un corps algébriquement clos et de caractéristique nulle). Nous évoquerons aussi quelques résultats sur les représentations de dimension infinie. Grâce au théorème de Weyl (Théorème 29), les représentations irréductibles jouent un rôle crucial dans l'étude des représentations de dimension finie.

Nous commençons par introduire un outil essentiel, l'*algèbre enveloppante*. L'algèbre enveloppante nous permettra en outre de démontrer les théorèmes d'isomorphisme et d'existence du chapitre précédent.

1. L'algèbre enveloppante universelle et théorème d'existence

Dans cette partie, \mathbb{K} est un corps quelconque. On précisera les hypothèses plus tard dans le chapitre.

1.1. L'algèbre tensorielle et l'algèbre symétrique. Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Posons $T^0V = \mathbb{K}1$, $T^1V = V$, $T^2V = V \otimes V$, ..., $T^mV = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{m \text{ fois}}$, ... On définit TV comme la somme directe des espaces vectoriels T^mV ,

$$TV = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^iV.$$

L'espace TV est naturellement muni d'un produit associatif que l'on définit sur les éléments homogènes ainsi :

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_k).(w_1 \otimes \dots \otimes w_m) = v_1 \otimes \dots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m, \quad v_i, w_j \in V, k, m \in \mathbb{N}.$$

L'algèbre associative ainsi obtenue est appelée l'*algèbre tensorielle* de V . L'élément $1 \in T^0V$ est l'unité de TV . L'algèbre tensorielle TV vérifie la propriété universelle suivante : pour toute application \mathbb{K} -linéaire $\phi: V \rightarrow A$, où A est une \mathbb{K} -algèbre associative avec unité, il existe un unique morphisme de \mathbb{K} -algèbres $\psi: TV \rightarrow A$ tel que $\psi(1) = 1$ et tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & TV \\ & \searrow \phi & \downarrow \psi \\ & & A \end{array}$$

i.e., $\psi \circ i = \phi$, où $i: V \hookrightarrow TV$ est l'inclusion.

Soit I l'idéal bilatère de TV engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x$, où $x, y \in V$. On appelle le quotient TV/I l'*algèbre symétrique* de V , et on le note SV . Comme les générateurs de I appartiennent à T^2V , on a $I = (I \cap T^2V) \oplus (I \cap T^3V) \oplus \dots$, donc la surjection canonique $TV \rightarrow SV = TV/I$ induit des injections $T^0V = \mathbb{K} \hookrightarrow SV$ et $T^1V = V \hookrightarrow SV$. On note $x_1 \dots x_k$ l'image dans SV d'un élément homogène $x_1 \otimes \dots \otimes x_k$ de TV par la surjection canonique $TV \twoheadrightarrow SV$. L'algèbre symétrique est naturellement graduée par le degré des éléments :

$$SV = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^iV, \quad S^mV = T^mV / (I \cap T^mV),$$

et $(S^kV).(S^mV) \subset S^{k+m}V$ pour tous $k, m \in \mathbb{N}$. Par construction, SV est une algèbre commutative. De plus, elle vérifie la propriété universelle suivante : pour toute application \mathbb{K} -linéaire $\phi: V \rightarrow A$, où A est une \mathbb{K} -algèbre commutative avec unité, il existe un unique morphisme de \mathbb{K} -algèbres $\psi: SV \rightarrow A$ tel que $\psi(1) = 1$ et tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & SV \\ & \searrow \phi & \downarrow \psi \\ & & A \end{array}$$

i.e., $\psi \circ i = \phi$, où $i: V \hookrightarrow SV$ est l'inclusion.

Si V est de dimension finie et si (v_1, \dots, v_n) est une base de V , alors SV est canoniquement isomorphe à l'algèbre de polynômes $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

1.2. L’algèbre enveloppante universelle. Soient L une \mathbb{K} -algèbre de Lie J l’idéal bilatère de $T(L)$ engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, où $x, y \in L$.

Définition 55

On pose $U(L) = T(L)/J$. Alors $U(L)$ est une \mathbb{K} -algèbre associative (unitaire) appelée l’**algèbre enveloppante universelle** de L .

EXEMPLE 14. Si L est une algèbre de Lie abélienne, alors $U(L) = S(L)$.

Notons $\sigma: L \rightarrow U(L)$ la composée des applications linéaires suivantes :

$$L \hookrightarrow T^1 L \hookrightarrow T(L) \xrightarrow{\pi} U(L).$$

A priori, σ n’est pas injective ! Nous verrons qu’elle l’est mais c’est un résultat subtil.

REMARQUE 7. Comme $J \subset \bigoplus_{i>0} T^i L$, π induit une injection de $T^0 L = \mathbb{K}$ dans $U(L)$, donc $U(L)$ contient au moins les scalaires.

Le terme *universelle* vient de la proposition suivante :

Proposition 56 – propriété universelle de l’algèbre enveloppante

Soit A une algèbre de Lie associative unitaire munie du crochet de Lie : $[a, b] = ab - ba$, pour $a, b \in A$. Pour tout morphisme d’algèbres de Lie $\theta: L \rightarrow A$, il existe un unique morphisme d’algèbres associatives $\phi: U(L) \rightarrow A$ tel que $\phi \circ \sigma = \theta$ et $\phi(1) = 1$, i.e., le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\sigma} & U(L) \\ & \searrow \theta & \downarrow \phi \\ & & A \end{array}$$

De plus, $U(L)$ est, à isomorphisme près, l’unique algèbre associative unitaire vérifiant cette propriété.

EXERCICE 48. Démontrer cette proposition.

En particulier, si (V, θ) est une représentation de L , i.e., $\theta: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est un morphisme d’algèbres de Lie, alors θ induit un morphisme d’algèbres associatives $\psi: U(L) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, i.e., (V, ψ) est un $U(L)$ -module. Nous reviendrons plus loin sur cette correspondance entre représentations de L et modules de $U(L)$.

On note $x_1 \dots x_k$ l’image dans $U(L)$ d’un élément homogène $x_1 \otimes \dots \otimes x_k$ de $T(L)$ par la surjection canonique $T(L) \twoheadrightarrow U(L)$.

1.3. Algèbres filtrées. Une \mathbb{K} -**algèbre filtrée** est une \mathbb{K} -algèbre A munie d’une filtration $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ croissante (i.e., $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ et $A_i \subset A_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$) telle que $1 \in A_0$ et $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$. L’**espace gradué associé** à A est

$$\text{gr } A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i/A_{i-1},$$

où par convention $A_{-1} = \{0\}$. Il est naturellement muni d’une structure de \mathbb{K} -algèbre associative ; on définit un produit,

$$A_i/A_{i-1} \times A_j/A_{j-1} \longrightarrow A_{i+j}/A_{i+j-1}, \quad i, j \in \mathbb{N},$$

en posant

$$(a_i + A_{i-1})(a_j + A_{j-1}) = a_i \cdot a_j + A_{i+j-1}, \quad a_i \in A_i, a_j \in A_j.$$

L’identité est l’élément $1 + A_{-1} \in A_0/A_{-1}$.

REMARQUE 8. L’algèbre graduée $\text{gr } A$ est commutative si et seulement si pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$, on a $a_i a_j - a_j a_i \in A_{i+j-1}$. Nous allons voir que l’algèbre enveloppante est naturellement filtrée et que son algèbre graduée associée est commutative.

Soient A, B deux \mathbb{K} -algèbres filtrées telles que $A_0 \cong \mathbb{K}$, $B_0 \cong \mathbb{K}$, et $f: A \rightarrow B$ un **morphisme de \mathbb{K} -algèbres filtrées**, c'est-à-dire que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $f(A_i) \subset B_i$. Ce morphisme induit un morphisme

$$\text{gr } f: \text{gr } A \rightarrow \text{gr } B,$$

en posant pour $i \in \mathbb{N}$ et $\bar{a} \in A_i/A_{i-1}$,

$$(\text{gr } f)\bar{a} = f(a) + B_{i-1},$$

où a est n'importe quel représentant de \bar{a} dans A_i . L'application est bien définie puisque $f(A_{i-1}) \subset B_{i-1}$.

Le résultat suivant sera utile pour la démonstration du théorème de Harish-Chandra (Théorème 84).

Proposition 57

Si le morphisme $\text{gr } f$ est un isomorphisme alors f est un isomorphisme.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. La démonstration se fait par récurrence en utilisant l'hypothèse de la proposition qui assure que pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'application $\text{gr } f: A_i/A_{i-1} \rightarrow B_i/B_{i-1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels ; précisément, on montre par récurrence que la restriction à A_i de f est un isomorphisme d'espaces vectoriels, le cas $i = 0$ étant clair. □

1.4. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt et ses conséquences. On définit une filtration sur $T(L)$ en posant $T_m(L) = \bigoplus_{i=0}^m T^i(L)$. On pose alors $U_m(L) = \pi(T_m(L))$, $U_{-1}(L) = \{0\}$, où $\pi: T(L) \rightarrow U(L)$ est la projection canonique. On a clairement, $U_m(L).U_p(L) \subset U_{m+p}(L)$ et $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une filtration croissante, ce qui fait de $U(L)$ une algèbre filtrée. Posons $\text{gr}^m U(L) = U_m(L)/U_{m-1}(L)$, et

$$\text{gr } U(L) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \text{gr}^i U(L).$$

La multiplication dans $U(L)$ induit une application bilinéaire $\text{gr}^m U(L) \times \text{gr}^p U(L) \rightarrow \text{gr}^{m+p} U(L)$. Cette dernière s'étend en une application bilinéaire $\text{gr } U(L) \times \text{gr } U(L) \rightarrow \text{gr } U(L)$ ce qui fait de $\text{gr } U(L)$ une algèbre associative unitaire graduée.

Considérons la composée $\phi_m: T^m(L) \xrightarrow{\pi} U_m(L) \rightarrow \text{gr}^m U(L)$. Elle est surjective car $\pi(T_m(L) \setminus T_{m-1}(L)) = U_m(L) \setminus U_{m-1}(L)$. Par conséquent, ϕ_m induit une application linéaire surjective, $\phi: T(L) \rightarrow \text{gr } U(L)$, qui envoie 1 sur 1.

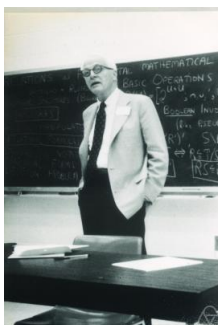
EXERCICE 49. Rappelons que I est le noyau de la surjection canonique $T(L) \rightarrow S(L)$. Montrer que ϕ est un morphisme d'algèbres et que $\phi(I) = \{0\}$.

D'après l'exercice précédent, l'application ϕ se factorise en un morphisme

$$\omega: S(L) \rightarrow \text{gr } U(L).$$

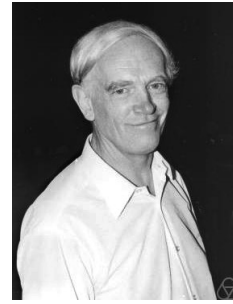
En particulier, $\text{gr } U(L)$ est une algèbre commutative.

Henri Poincaré, est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français, né le 29 avril 1854 à Nancy et mort le 17 juillet 1912 à Paris.



Garrett Birkhoff, né le 19 janvier 1911 à Princeton dans le New Jersey (états-Unis) et mort le 22 novembre 1996 à Water Mill dans l'État de New York (États-Unis), est un mathématicien américain.

Ernst Witt, né le 26 juin 1911 à Als et mort le 3 juillet 1991 à Hambourg est un mathématicien allemand. En 1936 il obtient, encadré par Emmy Noether à l'université de Göttingen, son doctorat dont le sujet porte sur le théorème de Riemann-Roch. Il enseigne alors jusqu'en 1937 à l'université de Hambourg. Les travaux de Witt portent surtout sur l'algèbre et les formes quadratiques.



Théorème 58 – Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW)

Le morphisme $\omega : S(L) \rightarrow \text{gr } U(L)$ est un isomorphisme d'algèbres graduées. En particulier, $\text{gr } U(L)$ est une algèbre commutative.

Le corollaire est tout aussi fondamental (on l'associe parfois au théorème PBW) :

Corollaire 59

L'application canonique $\sigma : L \rightarrow U(L)$ est injective. On peut donc identifier L à une sous-algèbre de $U(L)$. De plus, si $\{x_i ; i \in I\}$ une base ordonnée de L , alors l'unité 1 et les monômes

$$x_{i_1}^{r_1} \dots x_{i_n}^{r_n},$$

pour $n > 0, r_i > 0$ et $i_1, \dots, i_n \in I$ tels que $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, forment une base de $U(L)$.

Une telle base de $U(L)$ est appelée une **base de Poincaré-Birkhoff-Witt** (base PBW).

EXERCICE 50.

1. Soit W un sous-espace de $T^m(L)$. Supposons que l'application canonique $\rho : T^m(L) \rightarrow S^m(L)$ envoie W isomorphiquement sur $S^m(L)$, c'est-à-dire $W \cong \rho(W) = S^m(L)$. Montrer que $\pi(W)$ est un supplémentaire de $U_{m-1}(L)$ dans $U_m(L)$, i.e., $U_m(L) = \pi(W) \oplus U_{m-1}(L)$.
2. Démontrer le corollaire ci-dessus à l'aide du théorème PBW.

Corollaire 60

Soit H une sous-algèbre de L , et complétons une base $\{h_i ; i \in J\}$ de H en une base $\{h_i ; i \in J\} \cup \{x_i ; i \in I\}$ de L . Alors le morphisme d'algèbres $U(H) \rightarrow U(L)$ induit par l'injection $H \hookrightarrow L \hookrightarrow U(L)$ est injective, et $U(L)$ est un module libre sur $U(H)$ de base formée de l'élément unité 1 et les ensembles $x_{i_1}^{r_1} \dots x_{i_n}^{r_n}, n > 0, r_i > 0$, et $i_1, \dots, i_n \in I$ tels que $i_1 < \dots < i_n$.

EXERCICE 51. Démontrer le corollaire ci-dessus à l'aide du Corollaire 59.

REMARQUE 9. Si \mathbb{K} est de caractéristique nulle, l'application linéaire

$$S(L) \longrightarrow U(L), \quad x_1 \dots x_m \longmapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)},$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, où \mathfrak{S}_m est le groupe symétrique d'ordre $m, m \in \mathbb{N}^*$. On l'appelle la **symétrisation**.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PBW. Introduisons d'abord quelques notations. Posons, pour simplifier,

$$T = U(L), \quad S = S(L), \quad U = U(L) \quad T^m = T^m(L), \quad T_m(L) = T_m, \quad \text{etc.}$$

Fixons une base ordonnée $\{x_i ; i \in I\}$ de L de sorte que S s'identifie à l'algèbre de polynômes en les variables $z_i, i \in I$. On pose $x_{\underline{i}} = x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_m} \in T^m$ et $z_{\underline{i}} = z_{i_1} \dots z_{i_m} \in S^m$ l'image de $x_{\underline{i}}$ dans S par la projection

canonique $T^m \rightarrow S^m$, si $\underline{i} = (i_1, \dots, i_m)$ est une suite de longueur m . On dira qu'une suite \underline{i} est croissante si $i_1 \leq \dots \leq i_m$. Par convention, $z_\emptyset = 1$ et \emptyset est croissante. L'ensemble $\{z_{\underline{i}}; \underline{i} \text{ croissante}\}$ forme une base de S . On écrira $j \leq \underline{i}$ si $j \leq i_k$ pour tout $i_k \in \underline{i}$. La graduation $S = \bigoplus_{i=0}^\infty S^i$ induit une filtration $S_m = \bigoplus_{i=0}^m S^i$ de S .

L'idée de la démonstration est de montrer qu'il existe une représentation $\rho: L \rightarrow \mathfrak{gl}(S)$ telle que

- (a) $\rho(x_j)z_{\underline{i}} = z_j z_{\underline{i}}$ pour $j \leq \underline{i}$.
- (b) $\rho(x_j)z_{\underline{i}} \equiv z_j z_{\underline{i}} \pmod{S_m}$ si \underline{i} est une suite de longueur m .

EXEMPLE 15. Choisissons pour base ordonnée de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ la base (e, h, f) . On pose $\rho(e).1 = e$, $\rho(h).1 = h$, $\rho(f).1 = f$. On remarque que pour que la relation $(\rho(e)\rho(h) - \rho(h)\rho(e)).1 = \rho([e, h]).1$ soit vérifiée on doit poser $\rho(h).e = he + 2e$. On considérant les autres crochets, on vérifie sans peine que l'on doit poser : $\rho(e).e = e^2$, $\rho(e).h = eh$, $\rho(e).f = ef$, $\rho(h).e = he + 2e$, $\rho(h).h = h^2$, $\rho(h).f = hf$, $\rho(f).e = fe - h$, $\rho(f).h = fh + 2f$, $\rho(f).f = f^2$, etc. Cela donne une idée de la construction...

Plus généralement, l'existence d'une telle représentation résulte de l'assertion suivante :

ASSERTION 3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une unique application linéaire $f_m: L \otimes S_m \rightarrow S$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (A_m) $f_m(x_j \otimes z_{\underline{i}}) = z_j z_{\underline{i}}$ pour $j \leq \underline{i}$, $z_{\underline{i}} \in S_m$,
- (B_m) $f_m(x_j \otimes z_{\underline{i}}) - z_j z_{\underline{i}} \in S_k$ pour $k \leq m$ et $z_{\underline{i}} \in S_k$,
- (C_m) $f_m(x_j \otimes f_m(x_k \otimes z_{\underline{l}})) = f_m(x_k \otimes f_m(x_j \otimes z_{\underline{l}})) + f_m([x_j, x_k] \otimes z_{\underline{l}})$ pour tout $z_{\underline{l}} \in S_{m-1}$.

De plus, la restriction de f_m à $L \otimes S_{m-1}$ coïncide avec f_{m-1} .

Voyons comment en déduire le théorème. Soient $t \in T^m$ et $\pi: T \rightarrow U$ la projection canonique. On doit montrer que si $\pi(t) \in U_{m-1}$, alors $t \in I$, où I est le noyau de la projection canonique $T \rightarrow S$. Les conditions $t \in T^m$ et $\pi(t) \in U_{m-1}$ impliquent qu'il existe $t' \in T_{m-1}$ tel que $\pi(t) = \pi(t')$. Autrement dit, $s = t - t' \in J$, où J est le noyau de π . La composante s_m de degré m de s est t . On conclut alors grâce à l'assertion suivante :

ASSERTION 4. Si $s \in T_m \cap J$, alors la composante s_m de degré m de s appartient à I .

DÉMONSTRATION. Écrivons s_m comme une combinaison linéaire d'éléments $x_{\underline{i}^{(k)}}$, $1 \leq k \leq r$, où les $\underline{i}^{(k)}$ sont des suites de longueur m . La représentation $\rho: L \rightarrow \mathfrak{gl}(S)$ s'étend grâce à la propriété universelle de U en un morphisme d'algèbres, encore noté $\rho: U \rightarrow \mathfrak{gl}(S)$, tel que $J \subset \ker \tilde{\rho}$, où $\tilde{\rho} = \rho \circ \pi: T \xrightarrow{\pi} U \xrightarrow{\rho} \mathfrak{gl}(S)$. En particulier, $\tilde{\rho}(s) = 1$. Mais $\tilde{\rho}(s) = \tilde{\rho}(s).1$ est un polynôme dont le terme de plus haut degré est une combinaison linéaire des éléments $z_{\underline{i}^{(k)}}$, $1 \leq k \leq r$. Cette combinaison linéaire est donc nulle dans S . Autrement dit, $s_m \in I$. □

1.5. Présentation des algèbres de semi-simples par générateurs et relations. Soit L une \mathbb{K} -algèbre de Lie engendrée par un ensemble X .

Définition 61 – Algèbre de Lie libre sur une partie

On dit que L est **libre sur** X si étant donnée une application $\phi: X \rightarrow M$, où M est une algèbre de Lie sur \mathbb{K} , il existe un unique morphisme $\psi: L \rightarrow M$ qui étend ϕ .

L'unicité (à isomorphisme près) d'une telle algèbre de Lie L est facile à vérifier (exercice). Montrons son existence. Soit V un espace vectoriel de base X , et considérons l'algèbre tensorielle TV , vue comme une algèbre de Lie munie du crochet induit de sa structure d'algèbre associative. Soit alors L la sous-algèbre de Lie de TV engendrée par X . Soit $\phi: X \rightarrow M$ une application, où M est une \mathbb{K} -algèbre de Lie. Elle s'étend en une application linéaire $V \rightarrow M \subset U(M)$, et donc de façon canonique en un morphisme d'algèbres associatives $TV \rightarrow U(M)$; cela induit aussi un morphisme d'algèbres de Lie dont la restriction à L donne l'application désirée, $\psi: L \rightarrow M$, puisque ψ envoie les générateurs de L dans M .

REMARQUE 10. Si L est une algèbre de Lie libre sur un ensemble X , alors tout espace vectoriel V est muni d'une structure de L -module. Il suffit de se donner pour tout $x \in X$ un élément de $\mathfrak{gl}(V)$ et d'étendre canoniquement cette application $X \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ en une application $L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Définition 62 – Algèbre de Lie définie par générateurs et relations

Si L est une algèbre de Lie libre sur un ensemble X , et si R est un idéal de L engendré par des éléments $r_j, j \in J$, on appelle le quotient L/R l'algèbre de Lie de **générateurs** $\bar{x}, x \in X$, et **relations** $r_j, j \in J$, où \bar{x} est l'image dans L/R de $x \in X$.

Soient L une algèbre de Lie semi-simple, H une sous-algèbre de Cartan (i.e., une sous-algèbre torale maximale d'après le corollaire 53), Φ le système de racines correspondant, et $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ . Rappelons que

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\alpha_i | \alpha_j)}{(\alpha_j | \alpha_j)} = \alpha_i(h_j),$$

où $h_j = h_{\alpha_j}$. Fixons un ensemble standard de générateurs $x_i \in L_{\alpha_i}, y_j \in L_{-\alpha_i}$ tels que $[x_i, y_i] = h_i$.

Proposition 63

L'algèbre de Lie L est engendrée par $\{x_i, y_i, h_i\}_{1 \leq i \leq \ell}$, et ces générateurs vérifient les relations suivantes (il y en a priori d'autres) :

- (S1) $[h_i, h_j] = 0$,
- (S2) $[x_i, y_i] = h_i, [x_i, y_j] = 0$ si $i \neq j$,
- (S3) $[h_i, x_j] = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle x_j, [h_i, y_j] = -\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle y_j$,
- (S_{ij}⁺) $(\text{ad } x_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(x_j) = 0$,
- (S_{ij}⁻) $(\text{ad } y_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(y_j) = 0$.

EXERCICE 52. Démontrer la proposition ci-dessus à l'aide des propositions 37 et 46.

On remarque que les constantes qui apparaissent dans la proposition ne dépendent que du système de racines Φ . Serre découvre que les relations ci-dessus sont exhaustives (voir le théorème 64 ci-dessous). L'un des avantages de ce point de vue est qu'il permet une étude des algèbres de Lie (éventuellement de dimension infinie) définies par des générateurs $\{x_i, y_i, h_i\}_{1 \leq i \leq \ell}$ et les relations (S1), (S2), (S3). Nous n'aborderons pas cet aspect de la théorie dans ce cours.

Jean-Pierre Serre, né le 15 septembre 1926 à Bages (Pyrénées-Orientales), est un mathématicien français, considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du XXe siècle. Il a reçu de nombreuses récompenses pour ses recherches. Il est lauréat de la médaille Fields en 1954 et du prix Abel en 2003.



Nous admettons le théorème suivant :

Théorème 64 – Serre

Soit Φ un système de racines de base $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$. Soit L l'algèbre de Lie engendrée par 3ℓ éléments $\{x_i, y_i, h_i\}_{1 \leq i \leq \ell}$ et soumise aux relations (S1), (S2), (S3), (S_{ij}⁺), (S_{ij}⁻). Alors L est une algèbre de Lie semi-simple (de dimension finie), de sous-algèbre de Cartan la sous-algèbre engendrée par les $h_i, i = 1, \dots, \ell$, et de système de racines correspondant Φ .

Comme application du théorème de Serre, on peut énoncer le théorème d'existence et d'unicité :

Théorème 65

Soit Φ un système de racines. Alors il existe une algèbre de Lie semi-simple de système de racines Φ . De plus, L est unique à isomorphisme près.

EXERCICE 53. Démontrer le théorème ci-dessus à l'aide du théorème 64.

On sait désormais qu'il existe une unique algèbre de Lie simple de système de racines de type G_2 . On l'appelle l'**algèbre de Lie exceptionnelle de type G_2** . On la note parfois \mathfrak{g}_2 . De même, on note $\mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4$ les algèbres de Lie simples exceptionnelles de systèmes de racines de types respectifs E_6, E_7, E_8, F_4 .

La fiche d'exercices n°3 porte sur des propriétés de l'algèbre de Lie exceptionnelle \mathfrak{g}_2 .

2. Poids et vecteurs maximaux

On suppose désormais que L est une algèbre de Lie semi-simple sur \mathbb{K} , où \mathbb{K} est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. On fixe une sous-algèbre de Cartan H de L , on note Φ le système de racines de (L, H) . Soit $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ , et $\Phi^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ le système de racines positives associé.

Soit V une représentation de dimension finie de L . Il résulte de la proposition 31 que H opère diagonalement dans V . On peut donc écrire

$$V = \sum_{\lambda} V_{\lambda},$$

où $V_{\lambda} = \{v \in V \mid h.v = \lambda(h)v \text{ pour tout } h \in H\}$. Lorsque V n'est plus nécessairement de dimension finie, les V_{λ} sont encore bien définis. Si $V_{\lambda} \neq \{0\}$, on dit que V_{λ} est un **espace poids** et que λ est un **poids** de V (plus précisément, un **poids de H dans V**).

EXEMPLE 16. 1. Si $V = L$ est la représentation adjointe, alors les poids de H dans L sont les racines de Φ et 0 (l'espace poids associé à 0 est H ; il est de dimension ℓ).

2. Si $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ et $H = \mathbb{K}h$, une forme linéaire λ sur H est entièrement déterminée par $\lambda(h)$ et nous avons déjà vu l'importance de $\lambda(h)$ dans la théorie des représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

Lorsque V est de dimension infinie, il n'est pas certain que V soit somme directe de ses espaces poids. Cependant, tout comme en dimension finie, on peut montrer que si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des poids deux à deux distincts, alors la somme $\sum_{i=1}^r V_{\lambda_i}$ est directe. Posons

$$V' = \bigoplus_{\lambda, V_{\lambda} \neq 0} V_{\lambda}.$$

EXERCICE 54. Montrer que V' est un sous-module de L . (Indication : observer que $L_{\alpha}(V_{\lambda}) \subset V_{\alpha+\lambda}$ pour tout $\alpha \in \Phi$.)

Définition 66

Soit $v \in V$. On dit que v est un **vecteur maximal** ou **primitif** s'il existe un poids λ de V tel que $v \in V_{\lambda} \setminus \{0\}$ et $L_{\alpha}.v = 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$ (ou, de manière équivalente, pour tout $\alpha \in \Delta$).

Par exemple, si L est simple alors tout élément non nul de L_{θ} est maximal pour la représentation adjointe, où θ est la plus grande racine positive de Φ .

Si V est de dimension finie, un vecteur maximal existe toujours. En effet, appliquons le théorème de Lie à la sous-algèbre de Borel,

$$B(\Delta) = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} L_{\alpha} \right),$$

déjà rencontrée au cours de la démonstration du théorème 54 : elle admet un vecteur propre commun à tous les éléments de $B(\Delta)$, et annulé par tous les éléments de $\bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} L_{\alpha}$, puisque $\bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} L_{\alpha}$ est l'algèbre dérivée de $B(\Delta)$. Ce vecteur est donc un vecteur maximal au sens précédent.

Si V n'est pas de dimension finie, rien n'assure l'existence d'un vecteur maximal.

Fixons $x_{\alpha} \in L_{\alpha} \setminus \{0\}$, pour $\alpha \in \Phi^+$, et $y_{\alpha} \in L_{-\alpha}$ de sorte que $(x_{\alpha}, h_{\alpha}, y_{\alpha})$ forme un \mathfrak{sl}_2 -triplet. Rappelons que l'on définit un ordre partiel sur H^* en posant $\lambda \succ \mu$ si $\lambda - \mu \in \sum_{j=1}^m \mathbb{N}\beta_j$.

Comme V est une représentation de L , on a d'après la propriété universelle de l'algèbre enveloppante un morphisme d'algèbres de Lie $U(L) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ qui fait de V un $U(L)$ -module.

Théorème 67

Supposons que $V = U(L)v^+$, avec v^+ un vecteur maximal de poids λ . Alors :

1. V est engendré par les vecteurs $y_{\beta_1}^{i_1} \dots y_{\beta_m}^{i_m} v^+$, $i_j \in \mathbb{N}$; en particulier, V est somme directe de ses espaces poids,
2. les poids de V sont de la forme $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{\ell} k_i \alpha_i$, $k_i \in \mathbb{N}$; autrement dit, tous les poids μ de V vérifient $\mu \prec \lambda$,
3. pour tout $\mu \in H^*$, V_μ est de dimension finie et $\dim V_\lambda = 1$,
4. V admet un unique sous-module propre maximal.

EXERCICE 55. Démontrer ce théorème à l'aide du théorème PBW (corollaires 59 et 60).

Définition 68 – représentation cyclique standard/représentation de plus haut poids

Si $V = U(L)v^+$, avec v^+ un vecteur maximal de poids λ , le poids λ est appelé le **plus haut poids** de V (la terminologie est justifiée par le théorème) et on dit que V est une **représentation cyclique standard de plus haut poids** λ ou, plus simplement, que V est une **représentation de plus haut poids**.

L'appellation *représentation de plus haut poids* est la plus courante en théorie des représentations. L'avantage de l'appellation *représentation cyclique standard* est qu'elle fait référence au caractère «cyclique», c'est-à-dire que le module est engendré par un seul élément. C'est cette dernière que nous privilégierons dans ce cours.

Corollaire 69

Supposons que $V = U(L)v^+$, avec v^+ un vecteur maximal de poids λ , et supposons de plus que V soit irréductible. Alors v^+ est l'unique vecteur maximal de V à multiple non nul près.

EXERCICE 56. Démontrer ce corollaire à l'aide du théorème précédent, parties (2) et (3).

On souhaite maintenant montrer que pour tout $\lambda \in H^*$ il existe une unique représentation irréductible cyclique standard de plus haut poids λ (à isomorphisme près). Le théorème suivant répond au problème d'unicité :

Théorème 70

Soit $\lambda \in H^*$. Soient V, W deux représentations irréductibles cycliques standards de plus haut poids λ , i.e., $V = U(L)v^+$ et $W = U(L)w^+$, où v^+ et w^+ sont des vecteurs maximaux de V et W , respectivement, de plus haut poids λ . Alors V et W sont isomorphes.

EXERCICE 57. Démontrer le théorème ci-dessus. (Indication : on pourra considérer le module $X = V \times W$, remarquer $x^+ = (v^+, w^+)$ est un vecteur maximal de plus haut poids λ pour X , considérer les projections $p: Y \rightarrow V$, $p': Y \rightarrow W$, où $Y = U(L)x^+$, et démontrer que p, p' sont injectives.)

On présente deux constructions qui permettent de résoudre le problème d'existence d'une représentation cyclique standard de plus haut poids λ .

1) Par induction. On construit ici un module cyclique de plus haut poids par *induction*. Soient $\lambda \in H^*$ et $\mathbb{K}_\lambda \cong \mathbb{K}$ un espace vectoriel de dimension un de base 1. On définit une action de $B = B(\Delta)$ dans \mathbb{K}_λ en

posant $(h + \sum_{\alpha > 0} x_\alpha).1 = \lambda(h)$, où $h \in H$. On vérifie sans peine que ceci fait de \mathbb{K}_λ une représentation de B , et donc \mathbb{K}_λ est un $U(B)$ -module.

D'autre part, B opère dans $U(L)$ par multiplication à droite. On peut alors poser ¹ :

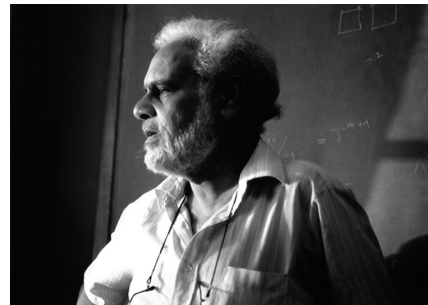
$$M(\lambda) = U(L) \otimes_{U(B)} \mathbb{K}_\lambda.$$

EXERCICE 58. Posons $v^+ = 1 \otimes 1$.

1. Vérifier que v^+ engendre $M(\lambda)$, que v^+ est non nul et que v^+ est de poids λ .
2. Montrer que $M(\lambda)$ est isomorphe, en tant que $U(N_-)$ -module, à $U(N_-).v^+$, où $N_- = \sum_{\alpha < 0} L_\alpha$.

D'après l'exercice précédent, $M(\lambda)$ est un module cyclique standard de plus haut poids λ . Le module $M(\lambda)$ est appelé un **module de Verma**. On le note parfois $\text{Ind}_B^L(\mathbb{K}_\lambda)$.

Daya-Nand Verma, né le 25 juin 1933 à Varanasi et mort le 10 June 2012 à Mumbai était un mathématicien indien de l'Institut Tata de Recherche Fondamentale durant la période 1968-1993. La construction des modules de Verma apparaît dans sa thèse qu'il a effectuée sous la direction de Nathan Jacobson à l'Université de Yale.



2) Par générateurs et relations. On peut aussi définir $M(\lambda)$ par «générateurs et relations». Soit $I(\lambda)$ l'idéal à gauche de $U(L)$ engendré par les éléments $x_\alpha, \alpha \in \Phi^+$, et $h_\alpha - \lambda(h_\alpha).1, \alpha \in \Phi$; autrement dit,

$$I(\lambda) = \sum_{\alpha \in \Phi^+} U(L)x_\alpha + \sum_{\alpha \in \Phi} U(L)(h_\alpha - \lambda(h_\alpha).1).$$

Les générateurs de $I(\lambda)$ annule le vecteur maximal v^+ de $M(\lambda)$. Il en est donc de même de $I(\lambda)$. On en déduit qu'il existe un morphisme de $U(L)$ -modules à gauche $U(L)/I(\lambda) \rightarrow M(\lambda)$ qui envoie $1 + I(\lambda)$ sur v^+ .

EXERCICE 59. À l'aide du théorème PBW, montrer que le morphisme $U(L)/I(\lambda) \rightarrow M(\lambda)$ est un isomorphisme.

Théorème 71

Soit $\lambda \in H^*$. Il existe une représentation irréductible cyclique standard de plus haut poids λ .

DÉMONSTRATION. Soit $M(\lambda)$ comme ci-dessus. Alors $M(\lambda)$ est cyclique standard d'après l'exercice 58. Il admet donc un unique sous-module propre $N(\lambda)$ d'après le théorème 67 (4). Le quotient $M(\lambda)/N(\lambda)$ est alors irréductible, cyclique standard de plus haut poids λ . □

En combinant les théorèmes 70 et 71, on obtient qu'il existe une unique représentation irréductible cyclique standard (à isomorphisme près) de plus haut poids λ . On la note $V(\lambda)$.

Deux questions naturelles auxquelles nous répondrons dans les parties suivantes se posent :

- 1) Pour quels $\lambda \in H^*$, la représentation $V(\lambda)$ est-elle de dimension finie ?
- 2) Pour un tel λ , quels sont les poids μ de $V(\lambda)$ et quels sont leurs *multiplicité*, i.e., $\dim V(\lambda)_\mu$?

3. Représentations de dimension finie et multiplicités

Supposons que V soit une représentation irréductible de dimension finie de L . Comme V est de dimension finie, il admet un vecteur maximal v^+ . Comme V est irréductible, on a $V = U(L).v^+$ et donc $V \cong V(\lambda)$, où $\lambda \in H^*$, d'après le théorème 67.

Pour $i \in \{1, \dots, \ell\}$, on note S_i le sous-espace engendré par $x_i = x_{\alpha_i}, h_i = h_{\alpha_i}$ et $y_i = x_{-\alpha_i}$ de sorte que $S_i \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ en tant qu'algèbre de Lie. Soit $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Le L -module $V(\lambda)$ est un S_i -module et tout vecteur

1. Par définition du produit tensoriel $U(L) \otimes_{U(B)} \mathbb{K}_\lambda$, on a pour tous $u \in U(L), t \in \mathbb{K}_\lambda$ et $b \in B, ub \otimes t = u \otimes bt$

maximal de $V(\lambda)$ pour L est encore maximal pour S_i . Il résulte alors de la théorie des $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ -modules que $\lambda(h_i) \in \mathbb{N}$. Plus généralement, si μ est un poids de $V(\lambda)$, alors $\mu(h_i) \in \mathbb{N}$.

Compte tenu de cette observation, on introduit un peu de vocabulaire lié à ces propriétés sur les poids.

3.1. Poids entiers et poids dominants. Soit Λ l'ensemble des $\lambda \in H^*$ tels que $\lambda(h_i) \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$. C'est un réseau de E de base $\varpi_1, \dots, \varpi_\ell$, où $(\varpi_1, \dots, \varpi_\ell)$ est la base duale de (h_1, \dots, h_ℓ) , i.e.,

$$\varpi_i(h_j) = \delta_{i,j}, \quad i, j \in \{1, \dots, \ell\}.$$

Rappelons ici que E est le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par les racines de Φ ; c'est l'espace euclidien ambiant du système de racines Φ (voir la discussion qui précède le théorème 38). Le réseau Λ contient le **réseau des racines** $\Lambda_r := \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\alpha_i$.

Les éléments $\varpi_1, \dots, \varpi_\ell$ sont appelés les **poids fondamentaux** associés à $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, respectivement. Un élément $\lambda \in \Lambda$ est appelé un **poids entier**. On appellera simplement **poids** les éléments de H^* . Si $\lambda(h_i) \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, on dit que λ est un **poids dominant**. Ainsi, lorsque $\lambda(h_i) \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, on dit que λ est un **poids entier dominant**. On note Λ^+ l'ensemble des poids entiers dominants : Λ^+ est l'ensemble des poids entiers appartenant à l'adhérence de la chambre de Weyl dominante $\mathcal{C}(\Delta)$.

EXERCICE 60. Représenter les poids fondamentaux pour un système de type A_2, B_2, G_2 associés à la base $\{\alpha, \beta\}$ de la figure 1. Représenter le poids fondamental pour la base α d'un système de type A_1 .

EXERCICE 61. On rappelle que ρ désigne la demi-somme des racines positives. Montrer :

$$\rho = \sum_{i=1}^{\ell} \varpi_i.$$

Indication : remarquer qu'il suffit de montrer que $\langle \rho, \alpha_i \rangle = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, et calculer $(s_{\alpha_i}(\rho)|\alpha_i)$ pour y parvenir. On rappelle que $s_{\alpha_i}(\rho) = \rho - \alpha_i$ (cf. Exercice 39) et que le produit scalaire $(|)$ est \mathcal{W} -invariant.

REMARQUE 11. Par définition, la transposée de la matrice de Cartan $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq \ell}$ est la matrice de passage de la base $\{\varpi_1, \dots, \varpi_\ell\}$ à la base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$. On peut donc calculer les poids fondamentaux dans la base Δ en inversant la transposée de la matrice de Cartan. Le réseau Λ_r est d'indice fini dans Λ et le cardinal du quotient Λ/Λ_r (appelé le **groupe fondamental** de Φ) est donné par le déterminant de la matrice de Cartan si Φ est irréductible :

Type	A_ℓ	B_ℓ	C_ℓ	D_ℓ	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$ \Lambda/\Lambda_r $	$\ell + 1$	2	2	4	3	2	1	1	1

FIGURE 1. Cardinal du groupe fondamental d'un système de racines irréductible

L'exercice suivant servira de résultat préliminaire à la démonstration du théorème fondamental ci-dessous (Théorème 72).

EXERCICE 62.

1. Montrer les relations suivantes dans $U(L)$ pour $k \geq 0$ et $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$:

- (a) $[x_j, y_i^{k+1}] = 0$ si $i \neq j$,
- (b) $[h_j, y_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+1}$,
- (c) $[x_i, y_i^{k+1}] = -(k+1)y_i^k(k \cdot 1 - h_i)$,

2. Soient $\lambda \in H^*$ et $\alpha \in \Delta$. Supposons que $n := \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{N}$. Montrer que si v^+ est un vecteur maximal de $V(\lambda)$ (de poids λ), alors $y_\alpha^{n+1} \cdot v^+ = 0$.

D'après la discussion du début de cette section, on obtient la partie «et seulement si» du théorème suivant :

Théorème 72

Le module simple $V(\lambda)$ est de dimension finie si et seulement si $\lambda \in \Lambda^+$. De plus, ceci est le cas si et seulement si $\dim V(\lambda)_\mu = \dim V(\lambda)_{w\lambda}$ pour tous $\mu \in H^*$ et $w \in W$, où $W = W(\Phi)$ est le groupe de Weyl du système de racines Φ .

REMARQUE 12. Nous connaissons ce théorème pour $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$: ceci a été vu au cours de l'exercice 4 de la fiche n° 1.

DÉMONSTRATION. Pour la première partie du théorème, il s'agit de montrer que si $\lambda \in \Lambda^+$, alors $V(\lambda)$ est de dimension finie (l'autre direction a déjà été vue). L'idée est la suivante : pour tout $\mu \in H^*$, $V(\lambda)_\mu$ est de dimension finie d'après le théorème 67 (3). On va donc montrer que $V(\lambda)$ admet un nombre fini de poids. Ceci sera suffisant pour conclure car $V(\lambda)$ est somme de ses espaces poids d'après le théorème 67 (1).

Pour se faire, on considère ici encore la structure de $V(\lambda)$ en tant que S_i -module, pour chaque $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Voici les étapes de la démonstration.

1. Soit $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Comme $n = \langle \lambda, \alpha_i \rangle \in \mathbb{N}$ d'après l'hypothèse, le sous- S_i -module engendré par v^+ est de dimension finie (cela résulte de l'exercice 62), où v^+ le vecteur maximal de $V(\lambda)$.
2. Pour chaque $i \in \{1, \dots, \ell\}$, on montre que $V(\lambda)$ est la somme de tous ses sous- S_i -modules de dimension finie. Notons M_i cette somme; d'après l'étape (1), M_i est non nul. Soit N un sous- S_i -module de dimension finie de $V(\lambda)$. Alors $N \subset M_i$ et $L \otimes N$ est un S_i -module de dimension finie (ici S_i opère dans L par l'action adjointe). L'application $L \otimes N \rightarrow V(\lambda)$ qui à $x \otimes v$ associe $x.v$ est un morphisme de S_i -modules (à vérifier). Son image est donc contenue dans M_i . Ainsi M_i est-il un sous- L -module non nul de $V(\lambda)$ puisque M_i est somme de tels N . Comme $V(\lambda)$ est irréductible, on en déduit que $V(\lambda) = M_i$.
3. D'après l'étape (2), tout vecteur $v \in V(\lambda)$ appartient un sous- S_i -module de dimension finie. Par conséquent, x_i et y_i sont des opérateurs **localement nilpotents** dans $V(\lambda)$, ce qui signifie que pour tout $v \in V(\lambda)$ il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie V' de $V(\lambda)$ dans lequel x_i et y_i opèrent de façon nilpotente. Notons $\sigma : U(L) \rightarrow \text{End } V(\lambda)$ le morphisme induit par la représentation $V(\lambda)$. Les opérateurs $\exp \sigma(x_i) \circ \exp \sigma(-y_i) \circ \exp \sigma(x_i)$ sont donc bien définis localement, puisqu'ils opèrent dans tous les sous- S_i -modules de dimension finie. On définit ainsi un automorphisme r_i de $V(\lambda)$.
4. Si μ est un poids de $V(\lambda)$, alors $r_i(V(\lambda)_\mu) = V(\lambda)_{s_i\mu}$ pour tout i . En effet, le sous-espace poids $V(\lambda)_\mu$ appartient à un sous- S_i -module N de dimension finie d'après l'étape (2) et car $V(\lambda)_\mu$ est de dimension finie. L'assertion résulte alors de la théorie des \mathfrak{sl}_2 -modules (s'inspirer de l'exercice 46). On remarque au passage que $\mu(h_i) \in \mathbb{Z}$ d'après la théorie des \mathfrak{sl}_2 -modules.
5. Comme W est engendrée par les réflexions simples s_i , l'étape (4) implique que tous les espaces poids $V(\lambda)_{w\mu}$, $w \in W$, ont la même dimension. Comme λ est un poids entier dominant par hypothèse, tous les poids de $V(\lambda)$ sont par conséquent des W -conjugués de poids dominants entiers $\mu \prec \lambda$. Mais il y a seulement un nombre fini de tels poids (à vérifier). Il s'ensuit que $V(\lambda)$ a un nombre fini de poids, et donc est de dimension finie.

L'étape (5) et la discussion au début de la démonstration montrent la deuxième assertion du théorème. \square

EXERCICE 63. Vérifier les assertions de chacune des étapes de la démonstration.

Supposons que $V(\lambda)$ soit de dimension finie, et soit $\alpha \in \Phi$. En regardant $V(\lambda)$ comme un S_α -module, on voit que si μ et $\mu + k\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, sont des poids de $V(\lambda)$, alors il en est de même de tous les poids intermédiaires $\mu + i\alpha$: on obtient ainsi la α -**chaîne de poids passant par μ** . Ceci généralise la notion de α -chaîne de racines passant par une racine donnée.

Cette observation combinée au théorème précédent impliquent alors le résultat suivant :

Proposition 73

Si $\lambda \in \Lambda^+$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\mu \in \Lambda$ soit un poids de $V(\lambda)$ est que μ et tous ses W -conjugués soient $\prec \lambda$.

EXERCICE 64. Représenter les poids de $V(\lambda)$ pour L de type A_2 et $\lambda = 4\varpi_1 + 3\varpi_2$, et pour L de type B_2 et $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$.

Faisons une petite digression sur le groupe de Weyl en vue de l'exercice 65 ci-dessous.

Soit $w \in W$. Posons $\ell(w) = n$ si $w = s_1 \dots s_n$ où les s_i sont des réflexions simples, i.e., $s_i = s_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta$, et n minimal pour cette propriété. Une telle expression de w est dite **réduite**. L'entier $\ell(w)$ est appelée la **longueur** de w . Voici quelques propriétés de la longueur des éléments de W :

1. Le nombre de $\alpha \in \Phi^+$ tels que $w\alpha < 0$ est $\ell(w)$. En particulier, si $\alpha \in \Delta$, i.e., $\ell(s_\alpha) = 1$, on a $s_\alpha\beta > 0$ pour tout $\beta \neq \alpha \in \Phi^+$. De plus, w est entièrement déterminé par l'ensemble des $\alpha \in \Phi^+$ tels que $w\alpha < 0$.
2. Si $w \in W$, alors $\ell(w) = \ell(w^{-1})$. Ainsi, $\ell(w) = |\Phi^+ \cap w(\Phi^-)|$.
3. Il existe un unique élément $w_0 \in W$ de longueur maximal $|\Phi^+|$; il envoie Φ^+ sur $-\Phi^+$. De plus, $\ell(w_0w) = \ell(w_0) - \ell(w)$ pour tout $w \in W$.
4. Si $\alpha > 0$ et $w \in W$ vérifient $\ell(ws_\alpha) > \ell(w)$, alors $w\alpha > 0$, tandis que $\ell(ws_\alpha) < \ell(w)$ implique $w\alpha < 0$. Il s'ensuit que $\ell(s_\alpha w) > \ell(w) \iff w^{-1}\alpha > 0$.

EXERCICE 65. Soit $\lambda \in H^*$. Montrer que la représentation duale $V(\lambda)^*$, donnée par l'action $(x.f)(v) = -f(x.v)$ pour $x \in L$, $f \in V(\lambda)^*$ et $v \in V(\lambda)$, est isomorphe à $V(-w_0\lambda)$, où $w_0 \in W$ est l'élément de plus grande longueur. (Indication : observer que $V(\lambda)^*$ est simple, que ses poids relatifs à H sont les opposés de ceux de $V(\lambda)$, et que $w_0\lambda$ est le poids de plus petit pour l'ordre $<$ de $V(\lambda)$.)

3.2. L'élément de Casimir revisité. Rappelons que l'élément de Casimir a été défini au paragraphe 4.1 du chapitre 2. Pour la représentation adjointe, sa trace est par définition la forme de Killing. Choisissons une base de L adaptée à la **décomposition triangulaire**,

$$L = N_- \oplus H \oplus N_+,$$

où $N_\pm = \sum_{\alpha \in \Phi^\pm} L_{\pm\alpha}$. Soient $\{k_1, \dots, k_\ell\}$ la base duale de la base $\{h_1, \dots, h_\ell\}$ relativement à la restriction de κ_L à H . Soient ensuite $x_\alpha \in L_\alpha \setminus \{0\}$, et z_α l'unique élément de $L_{-\alpha}$ tel que $\kappa_L(x_\alpha, z_\alpha) = 1$.

\triangle $z_\alpha \neq y_\alpha$, où $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ est l'unique élément de $L_{-\alpha}$ tel $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. On a $[x_\alpha, z_\alpha] = t_\alpha = \frac{(\alpha|\alpha)}{2} h_\alpha$ (voir la proposition 36).

Par définition, l'élément de Casimir associée à la représentation adjointe est

$$c_{ad} = \sum_{i=1}^{\ell} \text{ad } h_i \text{ ad } k_i + \sum_{\alpha \in \Phi} \text{ad } x_\alpha \text{ ad } z_\alpha.$$

Cette construction suggère de considérer l'élément «correspondant» de l'algèbre enveloppante $U(L)$:

$$c_L = \sum_{i=1}^{\ell} h_i k_i + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha z_\alpha \in U(L).$$

Étendons la représentation adjointe ad en un unique morphisme, encore noté ad , $\text{ad} : U(L) \rightarrow \mathfrak{gl}(U(L))$. Alors $\text{ad } c_L$ est exactement c_{ad} . Pour cette raison, l'élément c_L est appelé l'**élément de Casimir universel**. Les arguments vus au cours de l'exercice 24 montrent que si (V, σ) est une représentation de L , alors $\sigma(c_L)$ commute avec $\sigma(L)$, et donc opère par scalaire dans V si V est irréductible (Lemme de Schur).

EXERCICE 66. Calculer l'élément de Casimir c_L pour $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ relativement à la base standard $\{e, h, f\}$. Vérifier que c_L appartient au **centre** de $U(L)$, i.e., $uc_L = c_L u$ pour tout $u \in U(L)$.

On suppose ici que L est simple. Soit β_σ la forme bilinéaire (déjà rencontrée) qui à $(x, y) \in L \times L$ associe $\text{Tr}(\sigma(x)\sigma(y))$. On rappelle que cette forme est non-dégénérée et invariante. Elle est donc proportionnelle à la forme de Killing (voir l'exercice 4 de la fiche n°2) : $\beta_\sigma = a\kappa_L$, où $a \in \mathbb{K}^*$. En particulier, la base duale relative à κ_L est obtenue en multipliant celle relative à β_σ par a . On a donc $\sigma(c_L) = ac_\sigma$. En particulier, $\sigma(c_L) \neq 0$.

Si L est semi-simple, alors $\sigma(c_L)$ n'est plus nécessairement proportionnel à c_σ , mais si I_1, \dots, I_t sont les idéaux simples de L , alors $\sigma(c_{I_j})$ est proportionnel à la restriction à I_j de c_σ , pour $j = 1, \dots, t$. En particulier, on retrouve que $\sigma(c_L)$ commute avec $\sigma(L)$. De plus, $\sigma(c_L)$ opère par un scalaire (non nul) dans V si V est irréductible (non nul).

3.3. Formule de Freudenthal. Soit $\lambda \in \Lambda^+$ de sorte que $V = V(\lambda)$ soit de dimension finie. Pour $\mu \in H^*$, on appelle **multiplicité** de μ dans V l'entier $m_\lambda(\mu) = \dim V_\mu$. On a $m_\lambda(\mu) = 0$ si μ n'est pas un poids de $V(\lambda)$. On notera simplement $m(\mu)$ pour $m_\lambda(\mu)$ lorsque λ est fixé.

Notons $\sigma : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ la représentation sous-jacente à V , et soit μ un poids de V . On cherche à calculer $m(\mu)$. L'élément $\sigma(c_L)$, où c_L est l'élément de Casimir universel, opère par scalaire dans V car V est irréductible; notons c ce scalaire. L'idée de la formule de Freudenthal ci-dessous (théorème 76) est d'observer que l'on a :

$$\text{Tr}_{V_\mu} \sigma(c_L) = cm(\mu).$$

On cherche donc à exprimer $\text{Tr}_{V_\mu} \sigma(c_L)$ et c en fonction du système de racines Φ et du poids μ .

Lemme 74

Soient $i \in \{1, \dots, \ell\}$ et h_i, k_i comme dans le paragraphe précédent. On a

$$\text{Tr}_{V_\mu} \sum_{i=1}^{\ell} \sigma(h_i) \sigma(k_i) = m(\mu)(\mu|\mu).$$

EXERCICE 67. *Démontrer ce lemme.*

Lemme 75

Soient $\alpha \in \Phi$, et $x_\alpha, z_\alpha, t_\alpha$ comme dans le paragraphe précédent. On a

$$\text{Tr}_{V_\mu} \sigma(x_\alpha) \sigma(z_\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} m(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha|\alpha).$$

EXERCICE 68. *Démontrer ce lemme.* (Indication : l'idée est, comme toujours, de voir V comme un S_α -module; les calculs sont assez techniques.)

Rappelons que l'on note ρ la demi-somme des racines positives : $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$.

Théorème 76 – Formule de Freudenthal

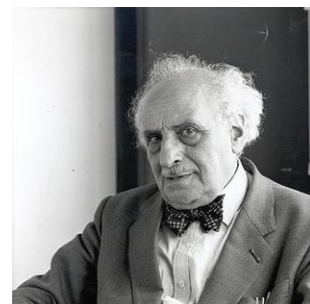
Soit $V(\lambda)$ un module simple de dimension finie de plus haut poids $\lambda \in \Lambda^+$. Si $\mu \in \Lambda$, alors la multiplicité $m_\lambda(\mu)$ de μ dans $V(\lambda)$ est donnée de façon récursive ainsi :

$$((\lambda + \rho|\lambda + \rho) - (\mu + \rho|\mu + \rho)) m_\lambda(\mu) = 2 \sum_{\alpha \in \Phi^+} \sum_{i=1}^{\infty} m_\lambda(\mu + i\alpha)(\mu + i\alpha|\alpha).$$

EXERCICE 69. *Démontrer le théorème.*

Nous verrons plus tard la formule de Weyl donnant aussi les **multiplicités** de $V(\lambda)$. La formule de Weyl est remarquable d'un point de vue théorique. En outre, elle admet certains analogues pour des algèbres de Lie de dimension infinie.

Hans Freudenthal, né le 17 septembre 1905 et mort le 13 octobre 1990 était un mathématicien juif allemand, naturalisé néerlandais, spécialiste en topologie algébrique mais dont les contributions ont largement débordé ce domaine.



La formule de Freudenthal ci-dessus est très utile en pratique car elle donne une méthode effective pour calculer les multiplicités. Elle est utilisée pour implémenter certains programmes informatiques. On trouve notamment ici <http://wwwmathlabo.univ-poitiers.fr/~maavl/LiE/form.html> (page de Marc van Leeuwen, professeur à l'Université de Poitiers) un programme en ligne, le programme LIE, permettant de calculer les multiplicités (entre autres) :

Par exemple, avec L de type A_2 , et $\lambda = \varpi_1 + 3\varpi_2$, on obtient² les poids suivants (voir le tableau 3.3) :

μ	$m_\lambda(\mu)$	μ	$m_\lambda(\mu)$
$\varpi_1 + 3\varpi_2$	1	$2\varpi_1 - 2\varpi_2$	2
$-\varpi_1 + 4\varpi_2$	1	$3\varpi_1 - 4\varpi_2$	1
$2\varpi_1 + \varpi_2$	1	$-\varpi_2$	2
$2\varpi_2$	2	$-3\varpi_1 + 2\varpi_2$	1
$3\varpi_1 - \varpi_2$	1	$\varpi_1 - 3\varpi_2$	1
ϖ_1	2	$-2\varpi_1$	2
$-2\varpi_1 + 3\varpi_2$	1	$-\varpi_1 - 2\varpi_2$	1
$4\varpi_1 - 3\varpi_2$	1	$-4\varpi_1 + \varpi_2$	1
$-\varpi_1 + \varpi_2$	2	$-3\varpi_1 - \varpi_2$	1

TABLE 1. Poids pour $V(\lambda)$, avec $\lambda = \varpi_1 + 3\varpi_2$, et $L \cong \mathfrak{sl}_3(\mathbb{K})$ de type A_2

(L'implémentation du programme est expliquée ici <http://young.sp2mi.univ-poitiers.fr/~marc/LiE/domchar.pdf> : voir la section 19 pour le calcul des multiplicités des poids.)

Le logiciel de calcul GAP4 permet aussi de faire ce genre de calculs : <https://www.gap-system.org/Download/>

2. choisir "full character" dans le programme LIE.

Polynômes invariants, projection de Harish-Chandra et cône nilpotent d'une algèbre de Lie semi-simple

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes (sous l'action du groupe des automorphismes intérieurs) sur une algèbre de Lie semi-simple, et énoncer plusieurs résultats remarquables à propos de cette algèbre et de certaines de ses variations (théorèmes de Chevalley et de Weyl). Ces résultats nous permettront d'une part de démontrer la formule de Weyl sur les caractères des représentations de dimension finie, et d'autre part d'étudier certaines propriétés du *cône nilpotent* d'une algèbre de Lie semi-simple, c'est-à-dire l'ensemble de ses éléments nilpotents. Nous établirons ensuite un lien entre les représentations de plus haut poids d'une algèbre de Lie semi-simple et son cône nilpotent.

On suppose dans tout ce chapitre que L est une algèbre de Lie semi-simple sur \mathbb{K} , où \mathbb{K} est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. On conserve toutes les notations du chapitre précédent. En particulier, une sous-algèbre de Cartan H de L est fixée, on note Φ le système de racines de (L, H) , $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ une base de Φ , et $\Phi^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ le système de racines positives associé.

1. Polynômes invariants

Soit V un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathbb{K}[V]$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur V , c'est-à-dire l'algèbre des fonctions $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ telle qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant : pour tout $v \in V$, $f(v)$ est une fonction polynomiale en les coordonnées de v dans une base de V . Cette notion ne dépend pas de la base choisie donc la définition est légitime.

On a un isomorphisme canonique $S(V^*) \cong \mathbb{K}[V]$ qui envoie un élément homogène $f_1 \dots f_d$ de degré d de $S(V^*)$ sur l'application qui à $v \in V$ associe $f_1(v) \dots f_d(v)$; c'est un élément de $\mathbb{K}[V]$ et cela définit de manière évidente un isomorphisme. Si on fixe une base (e_1, \dots, e_n) de V , alors $\mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}[e_1^*, \dots, e_n^*]$, où (e_1^*, \dots, e_n^*) est la base duale de (e_1, \dots, e_n) .

En particulier, on a

$$\mathbb{K}[H] \cong \mathbb{K}[\varpi_1, \dots, \varpi_\ell],$$

puisque $(\varpi_1, \dots, \varpi_\ell)$ est la base duale de la base (h_1, \dots, h_ℓ) de la sous-algèbre de Cartan H .

Rappelons que le groupe de Weyl $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Phi)$ opère dans H et H^* et donc dans $\mathbb{K}[H] = S(H^*)$. On note $\mathbb{K}[H]^\mathcal{W}$, ou $S(H^*)^\mathcal{W}$, l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes pour l'action du groupe de Weyl.

EXERCICE 70. Décrire $\mathbb{K}[H]^\mathcal{W}$ pour $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

Soit maintenant G le groupe des automorphismes intérieurs de L ; c'est, rappelons-le, le sous-groupe de $\text{Aut}(L)$ engendré par les éléments $\exp(\text{ad } x)$ où x est un élément nilpotent de L . Le groupe G opère dans $\mathbb{K}[L]$ de la façon suivante : pour $\sigma \in G$, $f \in \mathbb{K}[L]$ et $x \in L$, on pose

$$(\sigma.f)(x) = f(\sigma^{-1}x).$$

On note $\mathbb{K}[L]^G$, ou $S(L^*)^G$, l'ensemble des points fixes de $\mathbb{K}[L]$ pour cette opération. C'est une sous-algèbre de $\mathbb{K}[L]$ qu'on appelle l'**algèbre des polynômes G -invariants**.

L'objectif de l'exercice suivant est de produire un grand nombre de polynômes G -invariants grâce à la théorie des représentations.

EXERCICE 71. Soit $\phi: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ une représentation irréductible de dimension finie. On note $\lambda \in \Lambda^+$ son plus haut poids. Soit $z \in N_+$ et posons $\sigma = \exp(\text{ad } z)$.

1. On note ϕ^σ la représentation de L définie par $\phi^\sigma(x) = \phi(\sigma x)$ pour tout $x \in L$. Vérifier que ϕ^σ ainsi définie est bien une représentation de L et que ϕ^σ est irréductible.
2. Quel est le plus haut poids de ϕ^σ ? En déduire que ϕ et ϕ^σ sont équivalentes.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $x \mapsto \text{Tr}(\phi(x)^k)$ est une fonction polynomiale σ -invariante.

4. Conclure que $x \mapsto \text{Tr}(\phi(x)^k)$ est une fonction polynomiale G -invariante, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{K}[L]^G$.

Nous allons maintenant comparer $\mathbb{K}[L]^G$ et $\mathbb{K}[H]^W$. Si $f \in \mathbb{K}[L]$, alors sa restriction à H est un élément de $\mathbb{K}[H]$ (à vérifier). Supposons de plus que $f \in \mathbb{K}[L]^G$. Alors f est en particulier invariant sous l'action de tous les automorphismes τ_α , $\alpha \in \Phi$ (définis après la proposition 49). Mais la restriction de τ_α à H opère comme la réflexion s_α . Comme ces engendrent W , on en déduit que $f|_H$ appartient à $\mathbb{K}[H]^W$. On a ainsi obtenu un morphisme d'algèbre, appelé la **restriction de Chevalley**,

$$\theta: \mathbb{K}[L]^G \rightarrow \mathbb{K}[H]^W.$$

Théorème 77 – Chevalley

Le morphisme θ est un isomorphisme d'algèbres.

Pour la suite du cours, nous aurons besoin seulement de la surjectivité de θ . On peut toutefois établir l'injectivité grâce à des arguments assez élémentaires de géométrie algébrique comme nous le verrons plus loin.

EXERCICE 72 (Démonstration de la surjectivité). *L'objectif de cet exercice est d'établir la surjectivité du morphisme θ .*

1. Montrer que les éléments λ^k , où $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \Lambda$, engendrent l'algèbre $\mathbb{K}[H]$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \Lambda^+$, on pose

$$\text{Sym } \lambda^k = \sum_{w \in W} w.(\lambda^k).$$

Montrer que les éléments $\text{Sym } \lambda^k$, où $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \Lambda^+$, engendrent $\mathbb{K}[H]^W$.

3. Soit $\lambda \in \Lambda^+$ minimal pour l'ordre partiel \prec (éventuellement 0). Montrer que $\text{Sym } \lambda^k$ appartient à l'image de θ .
(Indication : consider l'application $f: x \rightarrow \text{Tr}(\phi(x)^k)$ où $\phi: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation irréductible (de dimension finie) de plus haut poids λ .)
4. En raisonnant par induction sur l'ordre partiel \prec de Λ^+ , montrer que θ est surjectif.
(Indication : on pourra là encore consider l'application $f: x \rightarrow \text{Tr}(\phi(x)^k)$ où $\phi: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation irréductible (de dimension finie) de plus haut poids $\lambda \in \Lambda^+$.)

La démonstration de la surjectivité vue au cours de l'exercice précédent montre que l'algèbre A engendrée par les *fonctions traces*, c'est-à-dire les fonctions comme celles obtenues dans l'exercice 71, s'envoie de manière surjective dans $\mathbb{C}[H]^W$. Cela sert à établir l'injectivité de la restriction à A du morphisme θ comme on le montre dans l'exercice suivant. C'est un résultat moins fort que l'injectivité de θ mais elle s'obtient de façon élémentaire.

EXERCICE 73.

1. Montrer qu'une fonction trace $x \mapsto \text{Tr}(\phi(x)^k)$, où ϕ est une représentation irréductible de dimension finie de L , est entièrement déterminée par sa valeur sur l'ensemble des éléments semi-simples.
2. En utilisant le fait que les sous-algèbres de Cartan sont G -conjuguées, montrer que la restriction à A du morphisme θ est injective.

EXERCICE 74. *Décrire l'algèbre $\mathbb{K}[H]^W$ pour $L = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. En déduire que $\mathbb{K}[L]^G$ est une algèbre de polynômes avec $n - 1$ générateurs.*

L'observation de l'exercice 74 est générale : si L est une algèbre de Lie simple de rang ℓ , alors $\mathbb{K}[L]^G \cong \mathbb{K}[H]^W$ est une algèbre de polynômes avec ℓ générateurs. Il s'agit d'un résultat célèbre de Chevalley-Kostant

(que nous admettons ici). Notons d_1, \dots, d_ℓ la suite des degrés de générateurs homogènes de $\mathbb{K}[L]^G$ de sorte que $d_1 \leq \dots \leq d_\ell$. On a $d_1 \times \dots \times d_\ell = |\mathcal{W}|$.

On pose pour $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $m_i = d_i - 1$. Les éléments m_1, \dots, m_ℓ ne dépendent que de l'algèbre de Lie simple L et sont appelés les **exposants** de L . On a $\sum_{i=1}^{\ell} m_i = |\Phi^+|$.

EXEMPLE 17. *Supposons que $L = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Le groupe de Weyl s'identifie au groupe symétrique \mathfrak{S}_n d'ordre n et on a (voir l'exercice 74) :*

$$\mathbb{K}[H]^{\mathcal{W}} \cong (\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/(X_1 + \dots + X_n))^{\mathfrak{S}_n} \cong \mathbb{K}[\Sigma_2, \dots, \Sigma_n],$$

où pour $k \in \{1, \dots, n\}$, Σ_k est le polynôme symétrique élémentaire de degré k . Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a aussi

$$\mathbb{K}[H]^{\mathcal{W}} \cong \mathbb{K}[T_2, \dots, T_n],$$

où pour $k \in \{1, \dots, n\}$, T_k est le polynôme de Newton de degré k :

$$T_k = \sum_{i=1}^n X_i^k.$$

La suite des degrés des générateurs est $2, 3, \dots, n$; les exposants sont donc $1, 2, \dots, n - 1$.

EXEMPLE 18. *Supposons que L soit l'algèbre de Lie exceptionnelle de type G_2 . Alors la suite des degrés de générateurs homogènes de $\mathbb{K}[L]^G$ est $2, 6$; les exposants sont donc $1, 5$. On peut choisir des générateurs de la façon suivante : soit (σ, \mathbb{K}^7) la représentation issue du plongement de G_2 dans $\mathfrak{so}_7(\mathbb{K})$ (voir la fiche d'exercices n° 3). Alors les fonctions traces $x \mapsto \text{Tr}(\sigma(x)^2)$ et $x \mapsto \text{Tr}(\sigma(x)^6)$ engendrent $\mathbb{K}[L]^G$.*

DÉMONSTRATION DE L'INJECTIVITÉ DU MORPHISME DE CHEVALLEY θ . Pour $x \in L$, on note

$$p_x(X) = \sum_{i=0}^n c_i(x) X^i$$

le polynôme caractéristique de $\text{ad } x$. Chaque fonction c_i est une fonction polynomiale sur L . Soit m le plus petit entier tel que c_m ne soit pas identiquement nul sur L . Comme 0 est toujours valeur propre de $\text{ad } x$, pour $x \in L$, on a $m \geq 1$, et comme il existe des éléments non nilpotent, on a même $m > 1$ (en effet, $\text{ad } x$ est nilpotent si et seulement si $c_i(x) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$). Posons

$$\mathcal{R} = \{x \in L \mid c_m(x) \neq 0\}.$$

On a $x \in \mathcal{R}$ si et seulement si la valeur propre 0 de $\text{ad } x$ est de multiplicité la plus petite possible. Ceci montre que $x \in \mathcal{R}$ si et seulement si $x_s \in \mathcal{R}$. En particulier il existe des éléments semi-simples dans \mathcal{R} .

De manière évidente, l'ensemble \mathcal{R} est Zariski-ouvert dans L . De plus, il est non vide. D'après le corollaire 109 de l'annexe C, l'ensemble \mathcal{R} est donc Zariski-dense dans L .

Soit $x \in L$ un élément semi-simple. Alors il appartient à une sous-algèbre torale maximale de L , c'est-à-dire une sous-algèbre de Cartan de L . Comme les sous-algèbres de Cartan sont toutes G -conjuguées, x est G -conjugué à un élément de H . Mais si $h \in H$, on sait que son centralisateur $C_L(h)$ dans L est de dimension $\geq \ell$. On sait aussi que H possède des éléments réguliers, c'est-à-dire des éléments dont le centralisateur est de dimension exactement ℓ (voir la démonstration du Corollaire 53 et la remarque qui le suit). Comme il existe des éléments semi-simples dans \mathcal{R} , ceux-ci sont exactement les éléments semi-simples réguliers (donc $m = \ell$). Mais il n'existe pas d'élément nilpotent autre que 0 qui centralise un élément semi-simple régulier. Compte tenu d'une remarque précédente, on en déduit que si $x \in \mathcal{R}$, alors $x = x_s$. On a ainsi démontré que l'ensemble \mathcal{R} coïncidait avec l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de L .

On est désormais en mesure de montrer que le morphisme θ est injectif. Soit $f \in \mathbb{K}[L]^G$ tel que $\theta(f) = f|_H = 0$. La sous-algèbre de Cartan H est ses G -conjuguées contiennent tous les éléments semi-simples réguliers de L . Par conséquent, f s'annule sur l'ensemble \mathcal{R} qui est Zariski-dense dans L , donc f est identiquement nul sur L . □

2. Projection de Harish-Chandra

Soit $Z(L)$ le **centre** de l'algèbre enveloppante $U(L)$, c'est-à-dire l'ensemble des $z \in U(L)$ tels que $zu = uz$ pour tout $u \in U(L)$.

REMARQUE 13. La représentation adjointe de l'algèbre de Lie L induit une représentation dans l'algèbre tensorielle $T(L)$, et cette action passe au quotient $U(L) = T(L)/J$. On note encore $\text{ad}: L \rightarrow \mathfrak{gl}(U(L))$ la représentation obtenue. Pour $x \in L$ et $y = y_1 \dots y_n \in U(L)$, on a :

$$(\text{ad } x)u = \sum_{i=1}^n y_1 \dots y_{i-1} [x, y_i] y_{i+1} \dots y_n.$$

On vérifie sans peine que pour $z \in U(L)$, on a

$$z \in Z(L) \iff (\text{ad } x)z = 0 \text{ pour tout } x \in L.$$

EXERCICE 75. Vérifier les assertions de la remarque.

Un automorphisme $\sigma: L \rightarrow L$ s'étend de façon unique en un automorphisme de $U(L)$. En particulier, le groupe G opère dans $U(L)$.

Proposition 78

Le centre $Z(L)$ est l'ensemble des éléments G -invariants de $U(L)$.

EXERCICE 76. Démontrer la proposition.

EXERCICE 77. Vérifier que l'élément de Casimir universel c_L appartient au centre de $U(L)$.

(Indication : reprendre les arguments de l'exercice 24 sans faire référence à la représentation σ .)

2.1. Caractères centraux. Soit $M = U(L)v^+$ un module cyclique standard de plus haut poids λ engendré par un vecteur maximal v^+ . Si $z \in Z(L)$ et $h \in H$, on a :

$$h.(z.v^+) = z.(h.v^+) = \lambda(h)(z.v^+).$$

Comme $\dim M_\lambda = 1$, on en déduit que $z.v^+ = \chi_\lambda(z)v^+$, où $\chi_\lambda(z) \in \mathbb{K}$. De plus, pour tout $u \in U$, on a $z.(u.v^+) = \chi_\lambda(z)(u.v^+)$ car $zu = uz$. Autrement dit, z opère par le scalaire $\chi_\lambda(z)$ dans M .

Pour $\lambda \in H^*$ fixé, l'application

$$\chi_\lambda: Z(L) \rightarrow \mathbb{K}, \quad z \mapsto \chi_\lambda(z)$$

est un morphisme d'algèbres.

Définition 79 – caractère central

Soit $\lambda \in H^*$. Le morphisme d'algèbres χ_λ est appelé le *caractère central associé à λ* . Plus généralement, un morphisme d'algèbres $Z(L) \rightarrow \mathbb{K}$ est appelé un *caractère central*.

On peut décrire χ_λ de façon plus concrète à l'aide du théorème PBW. Considérons la décomposition triangulaire $L = N_- \oplus H \oplus N_+$. Comme $N_+.v^+ = 0$, que $H.v^+ \subset \mathbb{C}v^+$ et qu'un élément de N_- envoie v^+ sur une combinaison linéaire de vecteurs de poids $\prec \lambda$, on voit que $z.v^+$, pour $z \in Z(L)$, ne dépend que des monômes en H . Autrement dit,

$$\chi_\lambda(z) = \lambda(\text{pr}(z)), \tag{15}$$

où $\text{pr}: U(L) \rightarrow U(H)$ est la projection de $U(L)$ relativement à la décomposition

$$U(L) = U(H) \oplus (N_-U(L) + U(L)N_+).$$

Nous avons étendu ici la forme linéaire λ en un morphisme d'algèbres $\lambda: U(H) \rightarrow \mathbb{K}$. Remarquons que $U(H) = S(H)$ puisque H est commutative.

EXERCICE 78. Démontrer à l'aide de la relation (15) que la restriction à $Z(L)$ de pr est un morphisme d'algèbres.

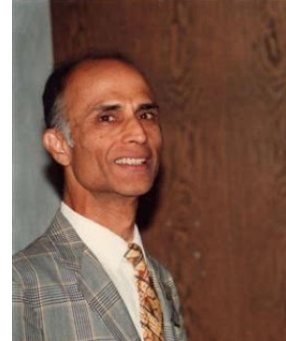
⚠ l'application pr n'est pas un morphisme d'algèbres en général!

Définition 80 – projection de Harish-Chandra

La restriction à $Z(L)$ de pr est appelée le **morphisme de Harish-Chandra**. On la note

$$\xi : Z(L) \rightarrow S(H), \quad z \mapsto \text{pr}(z).$$

Harish Chandra, né Harish Chandra Mehrotra le 11 octobre 1923 à Kanpur (Uttar Pradesh) en Inde et mort le 16 octobre 1983 à Princeton aux États-Unis, était un mathématicien indien qui effectua des travaux fondamentaux en théorie des représentations, en particulier en analyse harmonique des groupes de Lie semi-simples.



Deux questions très naturelles se posent :

1. Le morphisme d'algèbres ξ est-il injectif?
2. Quelle est son image ?

Nous répondons à ces deux questions dans le prochain paragraphe.

2.2. Action tordue du groupe de Weyl. Afin de répondre aux deux questions précédentes, il est important de comprendre à quelle condition deux poids λ et μ vérifient $\chi_\lambda = \chi_\mu$.

Considérons d'abord le cas où $\lambda \in \Lambda$. Supposons qu'il existe $\alpha \in \Delta$ tel que $n = \langle \lambda, \alpha \rangle = \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{N}$. Alors le module de Verma $M(\lambda)$ possède un vecteur maximal de plus haut poids $\lambda - (n + 1)\alpha \prec \lambda$ (voir la démonstration de l'exercice 62 (2)). Dans ce cas, on a $\chi_\lambda = \chi_\mu$, où $\mu = \lambda - (n + 1)\alpha$.

Ceci se traduit ainsi :

$$s_\alpha(\lambda + \rho) = \lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle \alpha + \rho - \alpha = \lambda - (n + 1)\alpha + \rho = \mu + \rho.$$

En effet, $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ car α est une racine simple (voir l'exercice 39 (2)).

Ceci motive la définition qui suit.

Définition 81

On définit une **action tordue** du groupe de Weyl \mathcal{W} dans H^* , notée \circ , de la façon suivante : pour tous $w \in \mathcal{W}$ et $\lambda \in H^*$,

$$w \circ \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho.$$

Soient $\lambda, \mu \in H^*$. On dira que λ et μ sont **\mathcal{W} -liés**, et on notera $\lambda \sim \mu$, si $\lambda = w \circ \mu$ pour un certain $w \in \mathcal{W}$.

La relation \sim est clairement une relation d'équivalence. D'après la définition, $\lambda \sim \mu$ si et seulement si $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$ sont dans la même \mathcal{W} -orbite (pour l'action usuelle de \mathcal{W}).

EXERCICE 79. Décrire l'orbite de $-\rho$. À quelle condition sur $\lambda \in H^*$ a-t-on $|\mathcal{W} \circ \lambda| = |\mathcal{W}|$?

EXERCICE 80. Soient $\lambda \in \Lambda$, et $\mu \in H^*$. Montrer que si λ et μ sont \mathcal{W} -liés, alors $\chi_\lambda = \chi_\mu$. (Indication : remarquer qu'il suffit de montrer que si $\lambda = s_\alpha \circ \mu$, pour $\alpha \in \Delta$, alors $\chi_\lambda = \chi_\mu$; fixer alors $\alpha \in \Delta$, observer que le cas où $n = \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{N}$ a déjà été vu, vérifier que le cas $n = -1$ est facile, puis se ramener aux cas connus en considérant $\mu = s_\alpha \circ \lambda$.)

Proposition 82

Soient $\lambda, \mu \in H^*$. Si $\lambda \sim \mu$, alors $\chi_\lambda = \chi_\mu$.

DÉMONSTRATION. On sait que $\chi_\lambda = \chi_{w\circ\lambda}$ pour tous $w \in \mathcal{W}$ et $\lambda \in \Lambda$ d'après l'exercice 80. Or $\chi_\lambda(z) = \lambda(\xi(z))$ pour tout $z \in Z(L)$. Il en résulte que les fonctions polynomiales $\xi(z)$ et $w^{-1} \circ \xi(z)$ coïncident sur Λ . Comme cet ensemble est Zariski-dense dans H^* , on en déduit qu'elles coïncident sur H^* . \square

Considérons l'application

$$\tau_\rho: \mathbb{K}[H^*] \rightarrow \mathbb{K}[H^*], p \mapsto (\lambda \mapsto p(\lambda - \rho)),$$

puis notons $\psi: Z(L) \rightarrow S(H)$ la composée $\tau_\rho \circ \xi$. L'application ψ est appelée la **projection tordue de Harish-Chandra**. Pour tout $z \in Z(L)$ et $\lambda \in H^*$, on a :

$$\chi_\lambda(z) = (\lambda + \rho)(\psi(z)).$$

Proposition 83

L'image de la projection tordue de Harish-Chandra est contenue dans l'algèbre $S(H)^{\mathcal{W}}$ des fonctions polynomiales \mathcal{W} -invariantes (pour l'action standard).

EXERCICE 81.

1. Démontrer ce théorème.
2. Supposons que $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Calculer l'image par $\chi_\lambda(c)$ pour $\lambda \in H^* \cong \mathbb{K}$, où c est l'élément de Casimir. Retrouver dans ce cas particulier que $\chi_\lambda = \chi_\mu$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, si et seulement si λ et μ sont \mathcal{W} -liés, et décrire explicitement cette condition.

Pour la suite, nous aurons du résultat plus fort suivant :

Théorème 84 – Théorème de Harish-Chandra

1. Le morphisme $\psi: Z(L) \rightarrow S(H)^{\mathcal{W}}$ est un isomorphisme.
2. Pour $\lambda, \mu \in H^*$, on a $\chi_\lambda = \chi_\mu$ si et seulement si $\lambda \sim \mu$.

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION. Nous donnons seulement une esquisse de démonstration.

(1) L'idée est de comparer le morphisme ψ et le morphisme de Chevalley $\theta: \mathbb{K}[L]^G \rightarrow \mathbb{K}[H]^{\mathcal{W}}$. On peut identifier $\mathbb{K}[L]$ avec $\mathbb{K}[L^*] \cong S(L)$, et $\mathbb{K}[H]$ avec $\mathbb{K}[H^*] \cong S(H)$, grâce à la forme de Killing. En effet, la forme de Killing, ainsi que sa restriction à $H \times H$, sont non dégénérées. Le théorème de Chevalley assure que le morphisme $\theta: \mathbb{K}[L]^G \rightarrow \mathbb{K}[H]^{\mathcal{W}}$ est un isomorphisme. Or, via les identifications précédentes, ce dernier «ressemble» beaucoup au morphisme ψ ...

Le centre $Z(L)$ est isomorphe à $S(L)^G$ en tant qu'espace vectoriel (pas en tant qu'algèbre) via l'application de symétrisation et, bien que le diagramme suivant ne commute pas :

$$\begin{array}{ccc} S(L)^G & \xrightarrow{\text{sym}} & Z(L) \xrightarrow{\psi} S(H)^{\mathcal{W}} \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathbb{K}[L]^G & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{K}[H]^{\mathcal{W}} \end{array}$$

(voir l'exercice 82 ci-dessous), la comparaison entre $\text{gr } \psi$ et θ suffira à montrer que ψ est un isomorphisme. On peut montrer que

$$\text{gr } \psi: \text{gr } Z(L) \longrightarrow \text{gr } S(H)^{\mathcal{W}} = S(H)^{\mathcal{W}}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels ; on a $\text{gr } Z(L) \cong S(L)^G$ et, via les identifications $S(L) \cong \mathbb{C}[L]$ et $S(H) \cong \mathbb{C}[H]$, on vérifie que $\text{gr } \psi$ coïncide avec l'isomorphisme θ . D'après la proposition 57, on conclut que ψ est un isomorphisme.

(2) Rappelons que $\chi_\lambda(z) = (\lambda + \rho)(\psi(z))$ pour $\lambda \in H^*$ et $z \in Z(L)$. Supposons que $\chi_\lambda = \chi_\mu$, $\lambda, \mu \in H^*$. Alors $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$ coïncident sur $\psi(Z(L))$ qui est égal à $S(H)^{\mathcal{W}}$ d'après (1). Il s'agit d'en déduire que $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$ sont \mathcal{W} -conjugués. Ceci découle de l'assertion suivante :

ASSERTION 5. Si λ et μ appartiennent à des \mathcal{W} -orbites distinctes, alors λ et μ prennent des valeurs distinctes sur certains éléments de $S(H)^{\mathcal{W}}$.

DÉMONSTRATION. Comme \mathcal{W} est fini, on peut choisir une fonction polynomiale p de $S(H)$ qui vaut 1 en λ et s'annule sur les autres \mathcal{W} -conjugués de λ ainsi que sur $\mathcal{W}.\mu$ (utiliser l'interpolation de Lagrange). Posons

$$\tilde{p} = \frac{1}{|\mathcal{W}|} \sum_{w \in \mathcal{W}} w.p.$$

Alors \tilde{p} est un élément de $S(H)^{\mathcal{W}}$ qui s'annule en μ mais pas en λ . □

□

EXERCICE 82. Illustrer avec $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ que le diagramme suivant ne commute pas :

$$\begin{array}{ccc} S(L)^G & \xrightarrow{\text{sym}} Z(L) & \xrightarrow{\psi} S(H)^{\mathcal{W}} \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathbb{K}[L]^G & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{K}[H]^{\mathcal{W}} \end{array}$$

où $\text{sym} : S(L)^G \rightarrow Z(L)$ est l'application de symétrisation.

3. Formules de Weyl et de Kostant

3.1. Caractères formels. Soit $\mathbb{Z}[\Lambda]$ le \mathbb{Z} -module libre de base $\{e(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ en correspondance bijective avec les éléments $\lambda \in \Lambda$. Ainsi, tout élément de $\mathbb{Z}[\Lambda]$ est une combinaison linéaire finie à coefficients dans \mathbb{Z} des éléments $e(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, et l'écriture est unique. On définit une structure d'anneau sur $\mathbb{Z}[\Lambda]$ en posant

$$e(\lambda) e(\mu) = e(\lambda + \mu), \quad 1 = e(0).$$

Définition 85

Soit $\lambda \in \Lambda^+$. Le **caractère formel** de $V(\lambda)$, que l'on note $\text{ch } V(\lambda)$, est l'élément de $\mathbb{Z}[\Lambda]$ défini par :

$$\text{ch } V(\lambda) = \sum_{\mu \in \Lambda} m_{\lambda}(\mu) e(\mu),$$

avec la convention habituelle que $m_{\lambda}(\mu) = 0$ si μ n'est pas un poids de $V(\lambda)$.

EXEMPLE 19. Si $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, et si $\lambda \in \Lambda^+ \cong \mathbb{N}$, montrer : $\text{ch } V(\lambda) = e(\lambda) + e(\lambda - \alpha) + \dots + e(\lambda - m\alpha)$, où $m = \langle \lambda, \alpha \rangle$.

Grâce au théorème de Weyl, tout L -module V de dimension finie est une somme directe de sous-modules simples, $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$, et chaque V_i est isomorphe à un module simple $V(\lambda_i)$ pour un certain $\lambda_i \in \Lambda^+$. L'élément $\text{ch } V$ défini par

$$\text{ch } V = \sum_{i=1}^n \text{ch } V(\lambda_i)$$

est appelé le **caractère formel** de V .

EXERCICE 83. Soient V, W deux L -modules de dimension finie. Montrer :

$$\text{ch}(V \otimes W) = \text{ch } V \text{ ch } W.$$

On aimerait étendre la notion de caractère formel à des modules éventuellement de dimension infinie pour lesquels les multiplicités $\dim V_{\mu}$, $\mu \in H^*$, sont bien définies (par exemple, les modules cycliques standards). Pour se faire, on va utiliser un formalisme un peu différent.

On peut voir $\mathbb{Z}[\Lambda]$ comme l'ensemble des fonctions définies sur Λ et à valeurs dans \mathbb{Z} , nulles hors d'un ensemble fini. Le produit devient le produit de convolution :

$$(f * g)(\lambda) = \sum_{\mu + \nu = \lambda} f(\mu)g(\nu), \quad f, g \in \mathbb{Z}[\Lambda],$$

et $e(\lambda)$ s'identifie à la fonction $e^\lambda: \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ qui vaut 1 en λ et 0 pour tout $\mu \in \Lambda, \mu \neq \lambda$. On notera encore $\text{ch } V$ le caractère formel associé à un L -module de dimension finie, vu comme une fonction sur Λ . En particulier,

$$\text{ch } V(\lambda) = \sum_{\mu \in \Lambda} m_\lambda(\mu) e^\mu,$$

de sorte que

$$(\text{ch } V(\lambda))(\mu) = m_\lambda(\mu), \quad \mu \in \Lambda.$$

Soit \mathfrak{X} l'espace des fonctions définies sur H^* et à valeurs dans \mathbb{K} dont le **support**,

$$\text{supp}(f) = \{\lambda \in H^* \mid f(\lambda) \neq 0\},$$

est contenu dans une réunion finie d'ensembles de la forme $\lambda - \Gamma$, où $\lambda \in H^*$ et

$$\Gamma = \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{N}\alpha.$$

On remarque que \mathfrak{X} est stable par convolution ; ceci en fait une \mathbb{K} -algèbre commutative et associative, dont l'identité est e^0 . On peut étendre la définition des $e^\lambda, \lambda \in \Lambda$, aux $\lambda \in H^*$ en notant e^λ la fonction de H^* dans \mathbb{K} qui vaut 1 en λ et 0 pour tout $\mu \in H^*, \mu \neq \lambda$. Ainsi, tout élément de \mathfrak{X} s'écrit comme une combinaison linéaire formelle d'éléments e^λ .

Soit $\lambda \in H^*$. On définit le **caractère formel** du module cyclique standard $M(\lambda)$ par :

$$\text{ch } M(\lambda) = \sum_{\mu \in H^*} (\dim M(\lambda)_\mu) e^\mu.$$

C'est un élément de \mathfrak{X} d'après le théorème 67.

Le groupe de Weyl \mathcal{W} opère dans \mathfrak{X} par :

$$(wf)(\lambda) = f(w^{-1}\lambda), \quad w \in \mathcal{W}, f \in \mathfrak{X}, \lambda \in H^*.$$

D'après le théorème 72, l'élément $\text{ch } V(\lambda)$ est \mathcal{W} -invariant.

Voici quelques éléments particuliers de \mathfrak{X} qui nous seront très utiles.

Définition 86 – Fonction de Kostant

Pour $\lambda \in H^*$, on note $p(\lambda)$ le nombre d'ensembles $\{k_\alpha; \alpha \in \Phi^+\}$ pour lesquels $-\lambda = \sum_{\alpha \in \Phi^+} k_\alpha \alpha$. C'est un élément de \mathfrak{X} que l'on appelle la **fonction de Kostant**.

On remarque que $p(\lambda) \neq 0$ si et seulement si λ appartient au réseau $\Lambda_r = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\alpha_i$. On a $\text{ch } M(0) = p$ d'après le théorème 67.

Bertram Kostant, né le 24 mai 1928 et mort le 2 février 2017 était un mathématicien américain. Kostant grandit à New York. Il obtint son diplôme de thèse de l'Université de Chicago en 1954 sous la direction d'Irving Segal, Sa thèse portait sur les représentations des groupes de Lie.



Définition 87 – Fonction de Weyl

On pose

$$q = \prod_{\alpha > 0} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}),$$

le produit étant le produit de convolution. C'est un élément de \mathfrak{X} que l'on appelle la **fonction de Weyl**.

EXERCICE 84. Soit $\alpha \in \Phi^+$. On définit un nouvel élément de \mathfrak{X} en posant :

$$f_\alpha(-k\alpha) = 1, \text{ pour } k \in \mathbb{N}, \quad f_\alpha(\lambda) = 1, \text{ pour } \lambda \in H^* \setminus (-\mathbb{N}\alpha).$$

On a

$$f_\alpha = e^0 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots .$$

Montrer les assertions suivantes :

- (a) $p = \prod_{\alpha > 0} f_\alpha$,
- (b) $(e^0 - e^{-\alpha}) * f_\alpha = e^0$,
- (c) $q = \prod_{\alpha > 0} (e^0 - e^{-\alpha}) * e^\rho$,
- (d) $wq = (-1)^{\ell(w)}q$, pour tout $w \in \mathcal{W}$,
- (e) $q * p * e^{-\rho} = e^0$,
- (f) $\text{ch } M(\lambda)(\mu) = p(\mu - \lambda) = (p * e^\lambda)(\mu)$, pour $\mu \in H^*$,
- (g) $q * \text{ch } M(\lambda) = e^{\lambda + \rho}$.

REMARQUE 14. Le signe $(-1)^{\ell(w)}$ qui apparaît à l’assertion (d) peut être vu comme une signature pour $w \in \mathcal{W}$ (on le nomme d’ailleurs souvent ainsi). En effet, si $L = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, alors le groupe de Weyl de Φ est isomorphe au groupe symétrique d’ordre n , et $(-1)^{\ell(w)}$ correspond à la signature de w au sens usuel.

3.2. Série de Jordan-Hölder et modules de Verma. Nous allons chercher à exprimer $\text{ch } V(\lambda)$, pour $\lambda \in H^*$, comme une combinaison linéaire à coefficients dans \mathbb{Z} des $\text{ch } M(\mu)$ à l’aide du théorème de Harish-Chandra. Puis nous utiliserons les résultats combinatoires du paragraphe précédent.

Pour un L -module de dimension infinie le théorème de Weyl ne s’applique plus. On ne peut donc pas a priori écrire son caractère formel (si celui-ci est bien défini) comme une somme de caractères de modules simples comme nous l’avons fait au paragraphe 3.1 de ce chapitre. Pour certaines classes de L -modules, on parviendra à contourner le problème grâce à l’existence d’une suite de *Jordan-Hölder* (voir la définition 88).

Soit \mathfrak{M}_λ la collection des L -modules M possédant les propriétés suivantes, pour $\lambda \in H^*$ fixé :

- (1) M est la somme directe de ses espaces poids (relativement à H),
- (2) le centre $Z(L)$ opère dans M par le scalaire χ_λ , c’est-à-dire que pour tous $z \in Z(L)$ et $m \in M$,

$$z.m = \chi_\lambda(z)m,$$

- (3) le caractère formel de M appartient à \mathfrak{X} , où celui-ci est défini par :

$$\text{ch } M = \sum_{\mu \in H^*} (\dim M_\mu) e^\mu.$$

(En particulier, M_μ est de dimension finie pour tout $\mu \in H^*$.)

Bien entendu, tous les modules standards cycliques de poids λ sont dans \mathfrak{M}_λ , ainsi que leurs sous-modules et leurs images par un morphisme de L -modules ; la somme directe de modules de \mathfrak{M}_λ est également dans \mathfrak{M}_λ .

D’après le théorème de Harish-Chandra, on a $\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{M}_\mu$ si seulement si $\lambda \sim \mu$.

EXERCICE 85. Fixons $\lambda \in H^*$.

- 1. Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte d’éléments de \mathfrak{M}_λ . Montrer que

$$\text{ch } M = \text{ch } M' + \text{ch } M''.$$

- 2. Soient $M \in \mathfrak{M}_\lambda$ et N un L -module de dimension finie. Montrer que $M \otimes N$ appartient à \mathfrak{M}_λ et que

$$\text{ch}(M \otimes N) = \text{ch } M * \text{ch } N.$$

Définition 88 – suite de Jordan-Hölder

Soit M un L -module. On dit que M admet une *suite de Jordan-Hölder* s'il existe une suite strictement décroissante de L -modules,

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_r = \{0\},$$

n'admettant pas d'autre raffinement strictement décroissant qu'elle-même et telle que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, M_i soit un module propre de M_{i-1} et le quotient M_{i-1}/M_i soit simple.

Otto Ludwig Hölder (1859-1937) est un mathématicien allemand né à Stuttgart, capitale de l'actuel Land Baden-Württemberg. En 1877, il entre à l'université de Berlin, et il obtient son doctorat en 1882 à l'université de Tübingen. Le titre de sa dissertation doctorale est Beiträge zur Potentialtheorie (Contributions à la théorie du potentiel). Il enseigne à l'université de Leipzig à partir de 1899 jusqu'à son éméritat en 1929.



EXERCICE 86. Soit $M \in \mathfrak{M}_\lambda$ non nul. Montrer que M possède un vecteur maximal.

(Indication : remarquer à l'aide de la propriété (3) que pour tout poids μ de M et tout $\alpha \in \Phi^+$, $\mu + k\alpha$ n'est plus un poids de M pour k assez grand.)

Proposition 89

Tout module de Verma admet une suite de Jordan-Hölder.

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in H^*$ et montrons que le module de Verma $M(\lambda)$ admet une suite de Jordan-Hölder. Si $M(\lambda) = V(\lambda)$, il n'y a rien à montrer. Sinon, alors $M(\lambda)$ admet un sous-module propre non nul N qui appartient à \mathfrak{M}_λ .

Comme $\dim M(\lambda)_\lambda = 1$, le poids λ n'apparaît pas comme poids de N . D'après l'exercice 86, N admet un vecteur maximal v de poids $\mu \not\geq \lambda$. En particulier, $\chi_\lambda = \chi_\mu$ et donc $\lambda \sim \mu$ d'après le théorème de Harish-Chandra. De plus, N contient un sous-module W , image de $M(\mu)$ (ceci se voit facilement en remarquant que $M(\mu)$ est cyclique standard engendré par un vecteur de plus haut poids μ).

On considère maintenant les L -modules $M(\lambda)/W$ et W . Tout deux sont cycliques standards, appartiennent à \mathfrak{M}_λ , et possèdent ou bien strictement moins de poids liés à λ que $M(\lambda)$, ou bien ont les mêmes poids que $M(\lambda)$ mais avec certaines multiplicités strictement plus petites que dans $M(\lambda)$. Par induction, on démontre le résultat en appliquant les arguments précédents à $M(\lambda)/W$ et W . En effet, le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes. Pour s'en convaincre, on pose

$$V = \sum_{w \in \mathcal{W}} M(\lambda)_{w \circ \lambda}.$$

C'est un espace vectoriel de dimension finie. Comme $\mu \sim \lambda$, on a $N \cap V \neq \{0\}$ et $W \cap V \neq \{0\}$. Par ailleurs, si $W' \subset W$ est un sous-module propre de W' , alors par les mêmes arguments que précédemment, $W' \cap V \neq \{0\}$ et $\dim(W' \cap V) < \dim(W \cap V)$ (car le poids μ n'est plus un poids de W'). Il s'ensuit que toute chaîne de sous-modules propres dans $M(\lambda)$ se termine après un nombre fini d'étapes. \square

Il résulte de la démonstration ci-dessus que chaque quotient successif de la suite est dans \mathfrak{M}_λ ; il possède donc un vecteur maximal d'après l'exercice 86. Chacun de ces quotients est donc cyclique standard puisqu'irréductible. Par conséquent, chaque quotient successif de la suite est isomorphe à $V(\mu)$ pour un certain $\mu \preceq \lambda$, $\mu \sim \lambda$. De plus, $V(\lambda)$ n'apparaît qu'une seule fois dans cette suite de quotients puisque $\dim M(\lambda)_\lambda = 1$.

La proposition 89 et l'exercice 85 (1) permettent ainsi d'écrire

$$\text{ch } M(\lambda) = \text{ch } V(\lambda) + \sum_{\substack{\mu \preceq \lambda \\ \mu \sim \lambda}} d_\lambda(\mu) \text{ch } V(\mu), \quad d_\lambda(\mu) \in \mathbb{N}.$$

On peut ordonner ainsi, μ_1, \dots, μ_t , la suite des éléments $\mu \preceq \lambda$ tels que $\mu \sim \lambda$ de sorte que $\mu_i \preceq \mu_j$ implique $i \leq j$. En particulier, $\lambda = \mu_t$. On obtient alors que la matrice $(d_{\mu_j}(\mu_i))_{1 \leq i, j \leq t}$ est triangulaire supérieure à coefficients dans \mathbb{N} et avec des 1 sur la diagonale. Cette matrice est donc inversible, et on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 90

Soit $\lambda \in H^*$. Alors $\text{ch } V(\lambda)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans \mathbb{Z} des $\text{ch } M(\mu)$:

$$\begin{aligned} \text{ch } V(\lambda) &= \sum_{\substack{\mu \preceq \lambda \\ \mu \sim \lambda}} c_\lambda(\mu) \text{ch } M(\mu), \quad c_\lambda(\mu) \in \mathbb{Z}, \\ &= \sum_{\substack{w \in \mathcal{W} \\ w \circ \lambda \preceq \lambda}} \tilde{c}_\lambda(w) \text{ch } M(w \circ \lambda), \quad \tilde{c}_\lambda(w) \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

avec $c_\lambda(\lambda) = \tilde{c}_\lambda(1) = 1$.

3.3. Formules et applications. On applique maintenant le corollaire au cas où $V(\lambda)$ est de dimension finie, c'est-à-dire $\lambda \in \Lambda^+$.

EXEMPLE 20. *Considérons le cas où $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Alors $\Lambda^+ \cong \mathbb{N}$, $|\mathcal{W}| = 2$ et on obtient :*

$$\text{ch } V(\lambda) = \text{ch } M(\lambda) - \text{ch } M(-\lambda - 2),$$

puisque $s_\alpha \circ \lambda = -\lambda - 2$.

En général, calculer les coefficients $c_\lambda(\mu)$ ou $\tilde{c}_\lambda(w)$ est un problème épineux ! On va effectuer quelques transformations sur la première égalité du corollaire 90.

D'après l'exercice 84 (g), on a

$$q * \text{ch } V(\lambda) = \sum_{\substack{\mu \preceq \lambda \\ \mu \sim \lambda}} c_\lambda(\mu) e^{\mu + \rho},$$

et d'après l'exercice 84 (d), pour $w \in \mathcal{W}$,

$$w(q * \text{ch } V(\lambda)) = w(q) * w(\text{ch } V(\lambda)) = (-1)^{\ell(w)} q * \text{ch } V(\lambda) = \sum_{\substack{\mu \preceq \lambda \\ \mu \sim \lambda}} c_\lambda(\mu) (-1)^{\ell(w)} e^{\mu + \rho}, \quad (16)$$

puisque $w(\text{ch } V(\lambda)) = \text{ch } V(\lambda)$ pour tout $w \in \mathcal{W}$ comme nous l'avons déjà observé. D'autre part,

$$w \left(\sum_{\substack{\mu \preceq \lambda \\ \mu \sim \lambda}} c_\lambda(\mu) e^{\mu + \rho} \right) = \sum_{\substack{\mu \preceq \lambda \\ \mu \sim \lambda}} c_\lambda(\mu) e^{w^{-1}(\mu + \rho)}. \quad (17)$$

Comme \mathcal{W} permute transitivement les éléments $\mu + \rho$ (les $\mu + \rho$ sont \mathcal{W} -conjugués à $\lambda + \rho$) et que $c_\lambda(\lambda) = 1$, on déduit de (16) et (17) que

$$c_\lambda(\mu) = (-1)^{\ell(w)} \quad \text{si} \quad w^{-1}(\mu + \rho) = \lambda + \rho.$$

Par conséquent,

$$q * \text{ch } V(\lambda) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda + \rho)}. \quad (18)$$

Enfin, l'exercice 84 (e) donne

$$\begin{aligned} \text{ch } V(\lambda) &= q * p * e^{-\rho} * \text{ch } V(\lambda) = p * e^{-\rho} * \left(\sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda + \rho)} \right) \\ &= p * \left(\sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda + \rho) - \rho} \right) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} p * e^{w(\lambda + \rho) - \rho}. \end{aligned}$$

Combiné à l'exercice 84 (f), on a montré :

Théorème 91 – Kostant

Si $\lambda \in \Lambda^+$, alors

$$m_\lambda(\mu) = (\text{ch } V(\lambda))(\mu) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} p(\mu + \rho - w(\mu + \rho)).$$

Ce théorème a l'avantage de donner une formule directe pour les multiplicités de $V(\lambda)$. Cependant, la formule récursive de Freudenthal est souvent plus simple en pratique ; en effet, sommer sur les éléments du groupe de Weyl peut devenir extrêmement fastidieux lorsque le rang de L augmente.

Théorème 92 – Formule des caractères de Weyl

1. On a

$$q = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\rho)}.$$

ce qui s'écrit encore (**formule du dénominateur de Weyl**) :

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha}) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\rho) - \rho}.$$

2. Pour $\lambda \in \Lambda^+$, on a :

$$\left(\sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\rho)} \right) * \text{ch } V(\lambda) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda + \rho)}.$$

ce qui s'écrit encore :

$$\text{ch } V(\lambda) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda + \rho)}}{\sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\rho)}}.$$

EXERCICE 87. Démontrer la partie (1) du théorème à l'aide de (18) appliqué à $\lambda = 0$, puis la partie (2) du théorème à l'aide de (18) et de la partie (1).

On souhaite maintenant obtenir une formule pour la dimension de $V(\lambda)$. L'idée est que celle-ci s'obtient en additionnant les $m_\lambda(\mu)$. Dans le formalisme précédent, ceci revient à additionner toutes les valeurs de $\text{ch } V(\lambda)$, vu comme un élément de \mathfrak{X} . On introduit le sous-anneau \mathfrak{X}_0 de \mathfrak{X} engendré par les e^μ , $\mu \in \Lambda$ (il s'identifie à l'anneau $\mathbb{Z}[\Lambda]$). Le morphisme $v: \mathfrak{X}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ qui à $f \in \mathfrak{X}_0$ associe la somme de toutes ses valeurs, i.e.,

$$v(f) = \sum_{\mu \in \Lambda} f(\mu) \in \mathbb{Z}, \quad f \in \mathfrak{X}_0,$$

est bien défini.

Si on applique le morphisme v dans le théorème de Weyl précédent, on se heurte à un problème car le numérateur et le dénominateur donnent 0.

EXEMPLE 21. On considère à nouveau le cas $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. On a

$$\text{ch } V(\lambda) = e^\lambda + e^{\lambda-2} + \dots + e^{-\lambda} = \frac{e^{\lambda+1} - e^{-\lambda-1}}{e^1 - e^{-1}}.$$

Rappelons que $\rho = 1$ via l'isomorphisme $H^* \rightarrow \mathbb{K}$, $\mu \mapsto \mu(h_\alpha)$. On a donc $\dim V(\lambda) = \lambda + 1$, mais si on applique le morphisme v au numérateur et au dénominateur de la fraction on obtient $\frac{0}{0}$.

C'est essentiellement le même problème que celui d'évaluer en $t = 1$ la fraction rationnelle $\frac{t^{\lambda+1} - t^{-\lambda-1}}{t - t^{-1}}$. C'est un exercice d'analyse élémentaire ; on effectue un développement de Taylor en $t = 1$, on simplifie par $t - 1$, puis on évalue en $t = 1$.

Nous allons nous inspirer de cette idée pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 93 – formule de dimension de Weyl

Si $\lambda \in \Lambda^+$, alors

$$\dim V(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha \succ 0} \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{\prod_{\alpha \succ 0} \langle \rho, \alpha \rangle}.$$

DÉMONSTRATION. On présente les principales étapes de la démonstration.

1. Pour chaque $\alpha \succ 0$, on définit un opérateur $\partial_\alpha: \mathfrak{X}_0 \rightarrow \mathfrak{X}_0$ en étendant par linéarité la formule $\partial_\alpha e^\mu = \langle \mu, \alpha \rangle e^\mu$, $\mu \in \Lambda$.

On vérifie sans peine que ∂_α est une dérivation de \mathfrak{X}_0 , c'est-à-dire que pour tous $f, g \in \mathfrak{X}_0$,

$$\partial_\alpha(f * g) = \partial_\alpha(f) * g + f * \partial_\alpha(g).$$

Les opérateurs ∂_α , $\alpha \succ 0$, commutent deux à deux. On pose

$$\partial = \prod_{\alpha \succ 0} \partial_\alpha.$$

On peut voir ∂ comme un opérateur différentiel.

⚠ Ce n'est plus une dérivation, sauf si $L \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$!

2. Rappelons que

$$q = e^{-\rho} * \prod_{\alpha \succ 0} (e^\alpha - 1) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} e^{w\rho}$$

(voir le théorème 92 et l'exercice 84 (c)). On cherche à calculer $v(\partial(q * \text{ch } V(\lambda)))$. On utilise tout d'abord la première expression de q . On remarque que $v(e^\alpha - 1) = 0$. Ainsi, en utilisant la règle de Leibniz pour dériver, on observe que le seul terme qui survit est $v(\partial q)v(\text{ch } V(\lambda))$.

3. On calcule maintenant $v(\partial q)$ à l'aide de la deuxième expression de q . Par linéarité, il suffit de calculer $v(\partial(e^{w\rho}))$. Comme $\partial_\alpha e^\rho = \langle \rho, \alpha \rangle e^\rho$, on a

$$v(\partial e^\rho) = \prod_{\alpha \succ 0} \langle \rho, \alpha \rangle.$$

On calcule de même $v(\partial e^{w\rho})$. Ici, on obtient

$$\prod_{\alpha \succ 0} \langle w\rho, \alpha \rangle = \prod_{\alpha \succ 0} \langle \rho, w^{-1}\alpha \rangle.$$

4. Le nombre de racines positives envoyées sur des racines négatives par w^{-1} est $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$ (voir la digression avant l'exercice 65). Comme $\langle \rho, -\alpha \rangle = -\langle \rho, \alpha \rangle$ pour $\alpha \succ 0$, on peut réécrire l'étape précédente, et conclure que :

$$v(\partial q) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} v(\partial e^{w\rho}) = \sum_{w \in \mathcal{W}} \prod_{\alpha \succ 0} \langle \rho, \alpha \rangle = |\mathcal{W}| \prod_{\alpha \succ 0} \langle \rho, \alpha \rangle.$$

5. La même méthode appliquée au numérateur de la formule de Weyl (2) pour $\text{ch } V(\lambda)$ donne :

$$v\left(\partial \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda + \rho)}\right) = |\mathcal{W}| \prod_{\alpha \succ 0} \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle.$$

Le théorème se déduit alors en simplifiant par $|\mathcal{W}|$.

□

EXERCICE 88. Soit $\alpha \in \Phi^+$. On écrit $\alpha^\vee = \sum_{i=1}^{\ell} c_i^{(\alpha)} \alpha_i^\vee$. Vérifier que $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = \sum_{i=1}^{\ell} c_i^{(\alpha)} (m_i + 1)$, si

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \varpi_i.$$

EXEMPLE 22 (rang un). Pour le type A_1 , on a $\varpi_1 = \frac{\alpha}{2} = \rho$ et la formule donne $\dim V(\lambda) = m + 1$ si $\lambda = m\varpi_1$.

EXEMPLE 23 (rang deux). Supposons que Φ soit de rang 2. On écrit $\lambda = m_1\varpi_1 + m_2\varpi_2$.

Pour le type A_2 , les racines positives sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$. Le numérateur de la formule de dimension de Weyl donne $1 \times 1 \times 2$, tandis que le dénominateur vaut $(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2)$. Les calculs sont similaires pour les types B_2 et G_2 . En résumé, on obtient (on prend ici α_2 pour la racine courte de B_2 , et α_1 pour la racines courte de G_2) :

type	dimension de $V(\lambda)$, avec $\lambda = m_1\varpi_1 + m_2\varpi_2$
A_2	$\frac{1}{2}(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2)$
B_2	$\frac{1}{3!}(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2)(2m_1 + m_2 + 3)$
G_2	$\frac{1}{5!}(m_1 + 1)(m_2 + 1)(m_1 + m_2 + 2)(m_1 + 2m_2 + 3)(m_1 + 3m_2 + 4)(2m_1 + 3m_2 + 5)$

EXERCICE 89. On suppose dans cet exercice que Φ est de type G_2 . Calculer $\dim V(\varpi_1)$ et $\dim V(\varpi_2)$. Reconnaître ces deux représentations.

EXERCICE 90. On suppose dans cet exercice que Φ est de type A_3 .

1. Calculer la dimension des **représentations fondamentales**, c'est-à-dire $V(\varpi_1)$, $V(\varpi_2)$, $V(\varpi_3)$. Pouvez-vous reconnaître ces représentations ?
2. Calculer la dimension de $V(2\varpi_1)$. Pouvez-vous reconnaître $V(2\varpi_1)$?

4. Cône nilpotent

Cette section montre un aspect plus géométrique de la théorie des représentations des algèbres de Lie simples. Nous énonçons certains résultats sans démonstration complète.

On rappelle qu'un élément x de L est nilpotent si $\text{ad } x$ est un élément nilpotent de $\text{End}(L)$. Si L est une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie, un élément x de L est nilpotent si et seulement si x l'est en tant qu'endomorphisme de L .

On note \mathcal{N} l'ensemble des éléments nilpotents de L . C'est un *cône* au sens où si $x \in \mathcal{N}$, alors $tx \in \mathcal{N}$ pour tout $t \in \mathbb{K}^*$.

Définition 94 – cône nilpotent

L'ensemble \mathcal{N} formé des éléments nilpotents de L est appelé le **cône nilpotent** de L .

Rappelons que si $\phi \in \text{Aut}(L)$, où

$$\text{Aut}(L) = \{\phi \in GL(L) \mid \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] \text{ pour tous } x, y \in L\},$$

alors

$$\phi \circ \text{ad}(x) \circ \phi^{-1} = \text{ad}(\phi(x)), \quad x \in \mathcal{N}.$$

Par conséquent, si x est nilpotent, alors $\phi(x)$ l'est pour tout $\phi \in \text{Aut}(L)$. En particulier, le groupe G des automorphismes intérieurs de L opère dans \mathcal{N} . L'ensemble $G.x = \{g(x) \mid g \in G\}$, pour $x \in \mathcal{N}$ est appelée l'**orbite nilpotente** de x .

REMARQUE 15. Si $L = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$G.x = \{PxP^{-1} \mid P \in SL_n(\mathbb{K})\}.$$

Cela résulte de l'égalité (14) du chapitre 3 (paragraphe 4.2). De même, si $L = \mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$, alors $G.x = \{PxP^{-1} \mid P \in SO_n(\mathbb{K})\}$ et si $L = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{K})$, alors $G.x = \{PxP^{-1} \mid P \in Sp_n(\mathbb{K})\}$, où $SO_n(\mathbb{K})$ (resp. $Sp_n(\mathbb{K})$) est le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ formé des matrices P telles que $PS^tP = S$ (resp. $PA^tP = A$) dans les notations de l'annexe B. Comme nous n'avons pas vu la notion de groupe de Lie dans ce cours, il est difficile d'expliquer rigoureusement les deux égalités pour \mathfrak{so}_n et \mathfrak{sp}_n . Disons seulement que cela vient des isomorphismes : $G \cong SO_n(\mathbb{K})$ si $L = \mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$, et $G \cong Sp_n(\mathbb{K})$ si $L = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{K})$.

4.1. Éléments nilpotents et polynômes invariants. Rappelons que l'algèbre $S(L^*) \cong \mathbb{K}[L]$ des fonctions polynomiales sur L est graduée par le degré des éléments. Cela induit une graduation sur l'algèbre $\mathbb{K}[L]^G$ des fonctions polynomiales G -invariantes sur L en posant, pour $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{K}[L]_i^G = \mathbb{K}[L]_i \cap \mathbb{K}[L]^G, \quad \mathbb{K}[L]^G = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{K}[L]_i^G.$$

On pose

$$\mathbb{K}[L]_+^G = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbb{K}[L]_i^G$$

de sorte que $\mathbb{K}[L]_+^G$ est l'**idéal d'augmentation** de $\mathbb{K}[L]^G$. Autrement dit, $\mathbb{K}[L]_+^G$ est l'idéal formé des fonctions polynomiales G -invariantes sans terme constant. Il résulte de la démonstration de la surjectivité du morphisme de Chevalley θ (voir l'exercice 72) que $\mathbb{K}[L]_+^G$ est engendré par les fonctions traces $x \mapsto \text{Tr}(\phi(x)^k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\phi: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation irréductible de dimension finie non nulle.

On rappelle qu'un endomorphisme x d'un espace vectoriel de dimension finie V est nilpotent si et seulement si $\text{Tr}(x^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, un élément x de L est nilpotent si et seulement si $\text{Tr}((\text{ad } x)^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

D'autre part, comme conséquence de la proposition 31, si $\phi: L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation de dimension finie non nulle de L alors, $x \in L$ est nilpotent si et seulement si $\phi(x)$ l'est.

On a démontré le résultat suivant :

Proposition 95

Le cône nilpotent \mathcal{N} est la variété des zéros de l'idéal d'augmentation $\mathbb{K}[L]_+^G$, i.e.,

$$\mathcal{N} = \{x \in L \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } f \in \mathbb{K}[L]_+^G\}.$$

En particulier, \mathcal{N} est un ensemble algébrique affine (fermé pour la topologie de Zariski).

REMARQUE 16. 1. Si $L = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, on retrouve que $x \in L$ est nilpotent si et seulement si $\text{Tr}(x^k) = 0$ pour tout $k = 2, \dots, n$ (voir l'exemple 17). Plus généralement, comme l'algèbre $\mathbb{K}[L]^G$ est une algèbre de polynômes (voir la discussion qui suit l'exercice 74) engendrée par ℓ éléments homogènes p_1, \dots, p_ℓ , le cône nilpotent est la variété des zéros des polynômes p_1, \dots, p_ℓ .

2. D'après un résultat remarquable de Kostant, \mathcal{N} est une variété irréductible et réduite, c'est-à-dire que le radical de $\mathbb{K}[L]_+^G$ est égal à $\mathbb{K}[L]_+^G$ (voir l'annexe C pour la notion de radical d'un idéal).

Parfois, on définit le cône nilpotent de L comme un sous-ensemble de L^* par :

$$\mathcal{N}^* = \{x \in L^* \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } f \in S(L)_+^G \cong \mathbb{K}[L^*]_+^G\},$$

où $\mathbb{K}[L^*]_+^G$ est l'idéal d'augmentation de $\mathbb{K}[L^*]^G$ que l'on définit comme pour $\mathbb{K}[L]^G$. Cette définition est plus naturelle pour la notion de *variété associée* à une représentation irréductible de plus haut poids (voir plus loin le paragraphe 4.3), mais moins naturelle si l'on pense aux matrices nilpotentes.

L'isomorphisme de Killing

$$\kappa_L^\sharp : L \rightarrow L^*, \quad x \mapsto \kappa_L(x, \cdot),$$

permet d'identifier \mathcal{N} et \mathcal{N}^* .

4.2. Théorème de Jacobson-Morosov et conséquences. Dans le cas des algèbres de Lie classiques, nous avons observé que les orbites nilpotentes sont des classes de conjugaison de matrices nilpotentes. Dans le cas où $L = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, il est bien connu que les classes de conjugaison de matrices nilpotentes sont en nombre fini, en bijection avec l'ensemble

$$\mathcal{P}(n) = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t) \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t, \sum_{i=1}^t \lambda_i = n\}$$

des partitions de n . On obtient cette bijection en choisissant comme représentant de la classe de conjugaison nilpotente une matrice diagonale par blocs de Jordan :

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_t} \end{pmatrix}, \quad J_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient des résultats similaires pour les autres algèbres de Lie classiques même si la correspondance entre orbites nilpotentes et partitions est un peu plus délicate.

Plus généralement, nous allons voir qu'il y a toujours un nombre fini d'orbites nilpotentes. Pour une algèbre de Lie semi-simple quelconque, c'est essentiellement une conséquence du théorème suivant (que l'on admet ; voir [4, Théorème 3.3.1] pour plus de détails), même s'il existe des démonstrations plus directes (voir par exemple [8, Theorem 10.2.4]).

Théorème 96 – théorème de Jacobson-Morozov

Soit x un élément nilpotent non nul de L . Alors x appartient à un \mathfrak{sl}_2 -*triplet*, c'est-à-dire un triplet $\{x, h, y\}$ d'éléments de L tel que

$$[h, x] = 2x, \quad [x, y] = h, \quad [h, y] = -2y.$$

De plus, le groupe G opère dans l'ensemble des \mathfrak{sl}_2 -triplets par $g.\{x, h, y\} = \{g.x, g.h, g.y\}$, et on a une bijection entre l'ensemble des orbites nilpotentes de L et l'ensemble des G -orbites de \mathfrak{sl}_2 -triplets.

Nathan Jacobson (1910-1999) est un mathématicien américain né à Varsovie. Réputé comme l'un des algébristes de pointe de sa génération, il est aussi connu pour avoir écrit plus d'une douzaine de manuels de référence.



Théorème 97 – Kostant

Il y a un nombre fini d'orbites nilpotentes dans L .

Nous donnons les principales étapes de la démonstration (qui n'est pas tout à fait celle de Kostant).

IDÉES DES GRANDES ÉTAPES DE LA DÉMONSTRATION. **1.** D'après le théorème de Jacobson-Morosov, les orbites nilpotentes de L sont en bijection avec l'ensemble des G -orbites de \mathfrak{sl}_2 -triplets.

2. Si $\{x, h, y\}$ est un \mathfrak{sl}_2 -triplet de L , alors il existe un G -conjugué \tilde{h} de h tel que $\alpha_i(\tilde{h}) \in \{0, 1, 2\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Il est aisé d'établir qu'il existe \tilde{h} dans la chambre de Weyl dominante, c'est-à-dire tel que $\alpha_i(\tilde{h}) \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, puis la théorie des \mathfrak{sl}_2 -modules assure que $\alpha_i(\tilde{h}) \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$. La difficulté est d'obtenir la propriété très restrictive que $\alpha_i(\tilde{h}) \in \{0, 1, 2\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$.

3. D'après l'étape 2, on peut « pondérer » le diagramme de Dynkin de Φ en assignant au sommet correspondant à la racine simple α_i la valeur $\alpha_i(\tilde{h}) \in \{0, 1, 2\}$. On renvoie à [4, Sect. 3.5] pour plus de détails. On voit alors qu'il y a au plus 3^ℓ orbites nilpotentes : trois choix au plus pour chaque sommet du diagramme de Dynkin. Ceci achève la démonstration du théorème. □

REMARQUE 17. **1.** Le **diagramme de Dynkin pondéré** (voir l'étape 2 de la démonstration précédente) est un invariant complet, c'est-à-dire que deux orbites nilpotentes \mathbb{O} et \mathbb{O}' sont les mêmes si et seulement si leur diagrammes de Dynkin pondérés sont les mêmes.

2. La borne 3^ℓ du nombre d'orbites nilpotentes obtenue au cours de la démonstration précédente est très grossière. À titre d'exemple, voici les diagrammes de Dynkin pondérés correspondants aux orbites nilpotentes non nulle de l'algèbre de Lie de type exceptionnel G_2 :



Il y a ici 5 orbites nilpotentes (4 non nulles plus l'orbite nilpotente nulle), ce qui est inférieur à $3^2 = 9$.

4.3. Variété associée à une représentation irréductible de plus haut poids. Nous allons maintenant associer à toute représentation irréductible $V(\lambda)$ de plus haut poids $\lambda \in H^*$ une orbite nilpotente de L . Cette orbite est un invariant particulièrement intéressant dans le cas où $V(\lambda)$ n'est pas de dimension finie, i.e., $\lambda \notin \Lambda^+$, puisqu'alors on ne dispose pas de formule simple pour les multiplicités. La *dimension* de cette orbite, ou plutôt celle de son adhérence pour la topologie de Zariski, «remplace» la notion de dimension dans ce cadre.

Rappelons que $U(L)$ est une algèbre filtrée et que $\text{gr } U(L) = S(L)$ (Théorème de PBW). Soit $J \subset U(L)$ un idéal bilatère de $U(L)$, alors

$$\text{gr } J = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (J \cap U_i(L)) / (J \cap U_{i-1}(L)), \quad U_{-1}(L) = \{0\},$$

est un idéal de $S(L) \cong \mathbb{C}[L^*]$. On définit sa *variété associée* par :

$$\mathcal{V}(J) := \{\lambda \in L^* \mid f(\lambda) = 0 \text{ pour tout } f \in \text{gr } J\}.$$

Autrement dit, $\mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(\text{gr } J)$ dans les notations de l'annexe C.

Soit $\lambda \in H^*$. On définit l'*annulateur* de $V(\lambda)$ dans $U(L)$ par :

$$\text{Ann}_{U(L)} V(\lambda) = \{x \in U(L) \mid x.v = 0 \text{ pour tout } v \in V(\lambda)\}.$$

EXERCICE 91. Vérifier que $\text{Ann}_{U(L)} V(\lambda)$ est un idéal bilatère de $U(L)$.

Définition 98 – variété associée à une représentation irréductible

Soit $\lambda \in H^*$. La *variété associée* à la représentation irréductible de plus haut poids $V(\lambda)$ est

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}_\lambda) = \{\lambda \in L^* \mid f(\lambda) = 0 \text{ pour tout } f \in \text{gr } \mathcal{I}_\lambda\},$$

où $\mathcal{I}_\lambda = \text{Ann}_{U(L)} V(\lambda)$.

Proposition 99

Identifions L et L^* au moyen de l'isomorphisme de Killing κ_L^\sharp . Soit $\lambda \in H^*$. Alors la variété $\mathcal{V}(\mathcal{I}_\lambda)$ associée à $V(\lambda)$ est contenue dans le cône nilpotent $\mathcal{N}^* \cong \mathcal{N}$.

DÉMONSTRATION. Considérons le caractère central $\chi_\lambda: Z(L) \rightarrow \mathbb{K}$ introduit au paragraphe 2.1 de ce chapitre. Son noyau est un idéal maximal de $Z(L)$ ¹. L'idéal \mathcal{I}_λ contient $\ker \chi_\lambda$ par définition de χ_λ . On en déduit que $\text{gr } \mathcal{I}_\lambda$ contient tous les *symbols*² des éléments de $\ker \chi_\lambda$. Comme $\text{gr } Z(L) = S(L)^G$, on montre facilement que ceux-ci engendrent $S(L)_+^G$. Par conséquent, $\text{gr } \mathcal{I}_\lambda \supset S(L)_+^G$, d'où $\mathcal{V}(\mathcal{I}_\lambda) \subset \mathcal{N}^*$ d'après la proposition 95 et l'isomorphisme $\mathcal{N}^* \cong \mathcal{N}$. □

Le théorème suivant est extrêmement subtile et dépasse très largement le cadre du cours.

Théorème 100 – Joseph et Kashiwara (indépendamment), 1984

Soit $\lambda \in H^*$. Alors la variété associée $\mathcal{V}(\mathcal{I}_\lambda)$ est irréductible. En particulier, $\mathcal{V}(\mathcal{I}_\lambda)$ est l'adhérence pour la topologie de Zariski d'une orbite nilpotente de L , i.e., il existe un élément nilpotent e_λ de L tel que

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}_\lambda) = \overline{\mathbb{O}_\lambda}, \quad \text{où } \mathbb{O}_\lambda = G.e_\lambda.$$

1. On utilise ici la bijection canonique $\text{Hom}(A, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Specm}(A)$, $\chi \mapsto \ker \chi$, où A est une \mathbb{K} -algèbre et où $\text{Specm}(A)$ désigne l'ensemble des idéaux maximaux de A . L'application réciproque est donnée par la projection $A = \mathbb{K}.1 \oplus M \rightarrow \mathbb{K} = A/M$ si $M \in \text{Specm}(A)$.

2. si $x \in U_i(L) \setminus U_{i-1}(L)$, $i \in \mathbb{N}$, son symbol $\sigma(x)$ est son image dans $\text{gr } U(L)$ par la projection $U_i \rightarrow U_i(L)/U_{i-1}(L)$.

Anthony Joseph, né le 9 juillet 1942 est un mathématicien français, qui traite des algèbres enveloppantes. Il est professeur au “Weizman Institute of Science” en Israël et a été professeur à l’Université Pierre et Marie Curie à Paris.



Masaki Kashiwara 柏原正樹 est un mathématicien japonais né le 30 janvier 1947 à Yuki. Il est étudiant auprès de Mikio Sato à l’Université de Tokyo. Il obtient son doctorat en 1974 avec une thèse intitulée “On the maximality overdetermined system of linear differential equations”. Il a apporté des contributions majeures à l’analyse algébrique, l’analyse microlocale, la théorie des D -modules, la théorie de Hodge, la théorie des pré-faisceaux et la théorie des représentations.

La deuxième partie du théorème vient de ce que la variété $\mathcal{V}(\mathcal{I}_\lambda)$ est fermée, G -invariante et irréductible d’après la première partie du théorème. Comme le cône nilpotent a un nombre fini d’orbites (Théorème 97), l’assertion en découle. La première partie utilise des méthodes fines de géométrie algébrique.

REMARQUE 18. L’orbite nilpotente \mathbb{O}_λ n’est pas un invariant complet de $V(\lambda)$. En effet, il se peut que deux représentations irréductibles $V(\lambda)$ et $V(\mu)$ aient la même variété associée, i.e., $\overline{\mathbb{O}_\lambda} = \overline{\mathbb{O}_\mu}$, sans qu’elle soient isomorphes (voir l’exercice ci-dessous).

EXERCICE 92. Soit $\lambda \in \Lambda^+$.

1. On note θ la plus grande racine positive de Φ . Montrer qu’il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y_\theta^k \cdot v = 0$ pour tout $v \in V(\lambda)$.
(Indication : remarquer que $V(\lambda)$ est de dimension finie et choisir une base de $V(\lambda)$ formée de vecteurs poids $u_1 \cdot v^+, \dots, u_n \cdot v^+$, où v^+ est un vecteur maximal).
En déduire que y_θ appartient au radical de \mathcal{I}_λ .
2. En remarquant que \mathcal{I}_λ est $(\text{ad } L)$ -invariant, et donc son radical $\sqrt{\mathcal{I}_\lambda}$ aussi, déduire de la question précédente que $\sqrt{\mathcal{I}_\lambda}$ contient L .
3. Conclure que $\mathcal{V}(\mathcal{I}_\lambda) = \{0\}$.

La réciproque de l’exercice précédent est vraie aussi, c’est-à-dire que $\mathcal{V}(\mathcal{I}_\lambda) = \{0\}$ si et seulement si $\lambda \in \Lambda^+$, i.e., $V(\lambda)$ est de dimension finie. Cela donne une caractérisation géométrique des représentations irréductibles de dimension finie.

Voici pour terminer un exemple de représentation irréductible de plus haut poids de dimension infinie dont on connaît la variété associée.

EXEMPLE 24 (Joseph-Levasseur). On suppose dans cet exemple que $L = \mathfrak{so}_7(\mathbb{C})$. On rappelle, dans les notations du chapitre 3 (Section 3), que l’on choisit Φ et Δ ainsi :

$$\Phi = \{\pm \varepsilon_i, \pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq 3\}, \quad \Delta = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3\},$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit $X = \mathcal{V}(I)$ le sous-ensemble algébrique affine de \mathbb{A}^5 , où I est l’idéal de $\mathbb{C}[x, u_1, u_2, y_1, y_2]$ engendré par $x^2 + u_1 y_1 + u_2 y_2$. Posons

$$\mathcal{O}_X = \mathbb{C}[x, u_1, u_2, y_1, y_2]/I.$$

C’est l’algèbre des fonctions régulières définies sur X . On note \mathcal{D}_X l’anneau des opérateurs différentiels sur la variété X . Expliquons brièvement comme celui-ci est défini (voir par exemple [8, Sect. 1.1] pour plus de détails). On note Θ_X l’ensemble des champs de vecteurs sur X :

$$\Theta_X = \{\theta \in \text{End}(\mathcal{O}_X) \mid \theta(fg) = \theta(f)g + f\theta(g) \text{ pour tous } f, g \in \mathcal{O}_X\}.$$

On identifie \mathcal{O}_X à une sous-algèbre de $\text{End}(\mathcal{O}_X)$ via l’application (injective)

$$f \in \mathcal{O}_X \longmapsto (g \in \mathcal{O}_X \mapsto fg \in \mathcal{O}_X) \in \text{End}(\mathcal{O}_X).$$

On définit alors \mathcal{D}_X comme étant la sous-algèbre de $\text{End}(\mathcal{O}_X)$ engendrée par Θ_X et \mathcal{O}_X .

REMARQUE 19. La construction se généralise à tout ensemble algébrique affine. Par exemple, l'algèbre des opérateurs différentiels sur \mathbb{A}^n est

$$\mathcal{D}_{\mathbb{A}^n} = \left\{ \sum_{\text{finie}} a_k(x) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} ; a_k(x) \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n], k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \right\}.$$

L'algèbre \mathcal{D}_X est naturellement une algèbre de Lie, et le crochet provient de celui de l'algèbre associative $\text{End}(\mathcal{O}_X) : [f, g] = fg - gf, f, g \in \text{End}(\mathcal{O}_X)$. On a

$$[\partial_t, \partial_s] = 0, \quad [\partial_t, s] = \delta_{t,s}, \quad s, t \in \{x, u_1, u_2, y_1, y_2\}.$$

Posons :

$$I = x\partial/\partial x + \sum_{i=1}^2 (u_i\partial/\partial u_i + y_i\partial/\partial y_i),$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\partial^2/\partial x^2 + 2\sum_{i=1}^2 \partial^2/\partial u_i\partial y_i.$$

On définit un morphisme $\varphi : U(\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})) \rightarrow \mathcal{D}(X)$ de la façon suivante (on identifie ici $\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})$ à son image dans $\mathcal{D}(X)$) :

$$\begin{aligned} X_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} &= \frac{1}{2}u_1\Delta - \partial/\partial y_1(I + \frac{1}{2}), & X_{-(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} &= y_1, \\ X_{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} &= y_1\partial/\partial y_2 - u_2\partial/\partial u_1, & X_{-(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)} &= y_2\partial/\partial y_1 - u_1\partial/\partial u_2, \\ X_{\varepsilon_3} &= y_2\partial/\partial x - 2x\partial/\partial u_2, & X_{-\varepsilon_3} &= 2x\partial/\partial y_2 - u_2\partial/\partial x, \\ X_{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} &= \frac{1}{2}u_2\Delta - \partial/\partial y_2(I + \frac{1}{2}), & X_{-(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} &= y_2, \\ X_{\varepsilon_2} &= y_1\partial/\partial x - 2x\partial/\partial u_1, & X_{-\varepsilon_2} &= 2x\partial/\partial y_1 - u_1\partial/\partial x, \\ X_{\varepsilon_1} &= x\Delta - \partial/\partial x(I + \frac{1}{2}), & X_{-\varepsilon_1} &= 2x, \\ X_{\varepsilon_2 + \varepsilon_3} &= y_1\partial/\partial u_2 - y_2\partial/\partial u_1, & X_{-(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)} &= u_2\partial/\partial y_1 - u_1\partial/\partial y_2, \\ X_{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} &= \frac{1}{2}y_2\Delta - \partial/\partial u_2(I + \frac{1}{2}), & X_{-(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)} &= u_2, \\ X_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} &= \frac{1}{2}y_1\Delta - \partial/\partial u_1(I + \frac{1}{2}), & X_{-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} &= u_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} &= (u_1\partial/\partial u_1 - y_1\partial/\partial y_1) - (I + \frac{3}{2}), \\ H_{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} &= y_1\partial/\partial y_1 - y_2\partial/\partial y_2 + u_2\partial/\partial u_2 - u_1\partial/\partial u_1, \\ H_{\varepsilon_3} &= 2(y_2\partial/\partial y_2 - u_2\partial/\partial u_2). \end{aligned}$$

Il faudrait bien entendu s'assurer que la sous-algèbre de \mathcal{D}_X ainsi définie est bien isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})$.

ASSERTION 6. En tant que $\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})$ -module, $\mathcal{O}_X \cong V(-\frac{3}{2}\varpi_1)$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, \mathcal{O}_X est engendré par la fonction constante 1 en tant que $\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})$ -module puisque $\mathcal{O}_X \subset \varphi(U(\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})))$. Les éléments de N_+ (correspondants aux racines positives, c'est-à-dire ceux de la colonne de gauche dans les équations précédentes) annulent 1. De plus, l'action de la sous-algèbre de Cartan (donnée par les trois dernières équations) montre que 1 est un vecteur de plus haut poids $-\frac{3}{2}\varepsilon_1 = -\frac{3}{2}\varpi_1$.

Remarquons ici que les poids fondamentaux de $\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})$ sont donnés par (exercice) :

$$\varpi_1 = \varepsilon_1, \quad \varpi_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \varpi_3 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Ceci montre que \mathcal{O}_X contient une image homomorphe à $M(-\frac{3}{2}\varpi_1)$. Il resterait à montrer que \mathcal{O}_X est simple en tant que $\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})$ -module ce que nous admettons ici. En fait, \mathcal{O}_X est simple même en tant que \mathfrak{g}_2 -module, où \mathfrak{g}_2 est l'algèbre de Lie simple de type exceptionnelle G_2 (voir la fiche de TD n°3) plongée dans $\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})$. \square

REMARQUE 20. Le caractère central opère par $-\frac{3}{2}\varpi_1 + \rho = \varepsilon_1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3$.

Le noyau $\mathcal{I}_{-\frac{3}{2}\varpi_1}$ du morphisme φ est un idéal de $U(\mathfrak{so}_7(\mathbb{C}))$ tel que

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}_{-\frac{3}{2}\varpi_1}) = \overline{\mathbb{O}_{min}}, \quad (19)$$

où \mathbb{O}_{min} est l'unique orbite nilpotente non nulle de $\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})$ de plus petite dimension ; c'est celle associée à la partition $(2^2, 1^3)$ de 7 qui est de dimension 8. Autrement dit, la variété associée au $\mathfrak{so}_7(\mathbb{C})$ -module simple \mathcal{O}_X est $\overline{\mathbb{O}_{min}}$.

On appelle l'idéal $\mathcal{I}_{-\frac{3}{2}\varpi_1}$ l'**idéal de Joseph**. Il est défini dans un cadre plus général et joue un rôle très important en théorie des représentations. Nous admettons ici l'égalité (19) qui utilise la géométrie des orbites nilpotentes et une description explicite de l'idéal $\mathcal{I}_{-\frac{3}{2}\varpi_1}$.

Bibliographie

- [1] James Humphreys. Introduction to Lie algebras and Representation Theory. Springer-Verlag GmbH, 1972.
- [2] Patrice Tauvel and Rupert Wei Tze Yu. Lie algebras and algebraic groups. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [3] Roger W. Carter. Lie algebras of finite and affine type. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 96. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [4] David H. Collingwood and William M. McGovern. Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras. Van Nostrand Reinhold Co. New York, 65, 1993.
- [5] William Fulton and Joe Harris. Representation theory. A first course. Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [6] James Humphreys. Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category \mathcal{O} . *Graduate Studies in Mathematics*, 94. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [7] Victor Kac. Infinite-dimensional Lie algebras. Third edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [8] Ryoshi Hotta, Kiyoshi Takeuchi and Toshiyuki Tanisaki. D-modules, perverse sheaves, and representation theory. Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi. Progress in Mathematics, 236. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008.
- [9] Patrice Tauvel. Cours d'algèbre, agrégation de mathématiques. Dunod, 1999.

Produits tensoriels

Dans cette annexe, \mathbb{K} est un corps commutatif. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On note $\mathbb{K}^{(E \times F)}$ le \mathbb{K} -espace vectoriel formé des combinaisons linéaires formelles d'éléments du produit $E \times F$. Plus précisément,

$$\mathbb{K}^{(E \times F)} = \left\{ \sum_{(x,y) \in I} \lambda_{(x,y)}(x,y) \mid I \text{ partie finie de } E \times F, \lambda_{(x,y)} \in \mathbb{K} \right\}.$$

On note N le sous-espace de $\mathbb{K}^{(E \times F)}$ engendré par les éléments de la forme

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y), \\ (x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2), \\ (\lambda x, y) - \lambda(x, y), \\ (x, \lambda y) - \lambda(x, y), \end{aligned}$$

où $x, x_1, x_2 \in E$, $y, y_1, y_2 \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 101 – Produit tensoriel de deux espaces vectoriels

On appelle **produit tensoriel** des espaces E et F , et on note $E \otimes_{\mathbb{K}} F$, ou $E \otimes F$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, l'espace quotient $\mathbb{K}^{(E \times F)} / N$. Si $x \in E$ et $y \in F$, on note $x \otimes y$, et on appelle **produit tensoriel** de x et y , l'élément de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ image canonique de $(x, y) \in \mathbb{K}^{(E \times F)}$ dans $\mathbb{K}^{(E \times F)} / N$.

Par définition, l'application canonique

$$\varphi: E \times F \longrightarrow E \otimes_{\mathbb{K}} F, \quad (x, y) \longmapsto x \otimes y$$

est une application bilinéaire : pour $x, x_1, x_2 \in E$, $y, y_1, y_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, & x \otimes (y_1 + y_2) &= x \otimes y_1 + x \otimes y_2, \\ (\lambda x) \otimes y &= x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y). \end{aligned}$$

De la définition résulte aussi que tout élément de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ est une combinaison linéaire finie de termes $x \otimes y$, avec $x \in E$ et $y \in F$.

⚠ Attention : $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ n'est pas l'ensemble des produits tensoriels $x \otimes y$, avec $x \in E$ et $y \in F$!

On énonce maintenant sans démonstration quelques propriétés importantes du produit tensoriel. On renvoie par exemple à [9, Chap. 21] pour plus de détails.

Théorème 102

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels.

(i) Soit v une application linéaire de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ dans G . Alors l'application

$$u: E \times F \longrightarrow G, \quad (x, y) \longmapsto v(x \otimes y)$$

est bilinéaire.

(ii) Réciproquement, soit $u: E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire. Alors il existe une unique application linéaire $v: E \otimes_{\mathbb{K}} F \rightarrow G$ telle que $u(x, y) = v(x \otimes y)$ pour tout $(x, y) \in E \times F$.

L'importance du produit tensoriel réside dans la propriété universelle suivante :

Théorème 103 – propriété universelle du produit tensoriel

Le produit tensoriel $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ est l'unique \mathbb{K} -espace vectoriel, à isomorphisme près, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout \mathbb{K} -espace vectoriel G et toute application bilinéaire $g: E \times F \rightarrow G$, il existe une unique application $\theta: E \otimes_{\mathbb{K}} F \rightarrow G$ telle que $g = \theta \circ \varphi$:

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{g} & G \\ \varphi \downarrow & \nearrow \exists! \theta & \\ E \otimes_{\mathbb{K}} F & & \end{array}$$

Le théorème précédent définit un isomorphisme canonique de $\mathcal{L}_2(E, F; G)$ sur $\mathcal{L}(E \otimes_{\mathbb{K}} F, G)$, où $\mathcal{L}_2(E, F; G)$ est l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G , et $\mathcal{L}(E \otimes_{\mathbb{K}} F, G)$ celui des applications linéaires de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ dans G .

Voici quelques isomorphismes entre produits tensoriels :

Proposition 104

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels.

- (i) Il existe un unique isomorphisme de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ sur $F \otimes_{\mathbb{K}} E$ qui envoie $x \otimes y$ sur $y \otimes x$ pour tout $(x, y) \in E \times F$.
- (ii) Il existe un unique isomorphisme de $E \otimes_{\mathbb{K}} (F \otimes_{\mathbb{K}} G)$ sur $(E \otimes_{\mathbb{K}} F) \otimes_{\mathbb{K}} G$ qui envoie $x \otimes (y \otimes z)$ sur $(x \otimes y) \otimes z$ pour tout $(x, y, z) \in E \times F \times G$.
- (ii) Les applications

$$u_1: E \rightarrow \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} E, \quad x \mapsto 1 \otimes x \quad \text{et} \quad u_2: E \rightarrow E \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}, \quad x \mapsto x \otimes 1$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels. L'isomorphisme réciproque de u_1 (resp. u_2) envoie $\lambda \otimes x$ (resp. $x \otimes \lambda$) sur λx pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Soient $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(f_j)_{j \in J}$ une base de F .

Proposition 105

La famille $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$. En particulier, si E et F sont de dimension finie, alors $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ l'est aussi et

$$\dim E \otimes_{\mathbb{K}} F = (\dim E) \times (\dim F).$$

Soit $(x_j)_{j \in J} \in E^{(J)}$. Écrivons $x_j = \sum_i \lambda_{i,j} e_i$. On a :

$$0 = \sum_j x_j \otimes f_j \Rightarrow 0 = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_i \otimes f_j.$$

Comme $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ d'après la proposition 105, il s'ensuit que tout élément de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ s'écrit uniquement sous la forme

$$\sum_{i,j} x_j \otimes f_j, \tag{20}$$

où $(x_j)_{j \in J}$ est une famille presque nulle (i.e., tous les éléments sont nuls sauf peut-être un nombre fini) de E . Autrement dit, les espaces vectoriels $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ et $E^{(J)}$ sont isomorphes.

D'autre part, si

$$x = \sum_i x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_j y_j f_j,$$

alors

$$x \otimes y = \sum_j \left(y_j \sum_i x_i e_i \right) \otimes f_j.$$

Par conséquent, compte tenu de (20), la relation $x \otimes y = 0$ dans $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ implique $x = 0$ ou $y = 0$.

Algèbres de Lie classiques

Soit V un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ sur \mathbb{K} . Rappelons que $\mathfrak{gl}(V)$ est l'algèbre de Lie $\text{End}(V)$ munie du crochet $[x, y] = x \circ y - y \circ x$, et que $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre de Lie $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ munie du crochet $[x, y] = xy - yx$. Par le choix d'une base (v_1, \dots, v_n) de V , on identifie $\mathfrak{gl}(V)$ à $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. Dans ce qui suit, $e_{i,j}$ désigne la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associée au coefficient (i, j) .

REMARQUE 21. La notation $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ vient de ce que cette algèbre de Lie est étroitement liée au groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$: en fait, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre de Lie (cf. Exemple 7) du groupe linéaire (un groupe algébrique) $GL_n(\mathbb{K}) \cong \{(g, \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K} \mid (\det g)\lambda = 1\}$.

On introduit dans cette annexe quatre familles infinies d'algèbres de Lie, $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$ ($\ell \geq 1$), dite **algèbres de Lie classiques**. Ce sont certaines sous-algèbres de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. Nous verrons dans la fiche n°2 d'exercices qu'il s'agit d'algèbres de Lie semi-simples (et plus tard, grâce à la notion de systèmes de racines, qu'elles sont même simples).

Type A_ℓ . On note $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre $\ell + 1$ de trace nulle. C'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_{\ell+1}(\mathbb{K})$ qu'on appelle **algèbre de Lie spéciale linéaire**¹. Une base de $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbb{K})$ est

$$\{h_i\}_{1 \leq i \leq \ell} \cup \{e_{i,j}\}_{1 \leq i \neq j \leq \ell+1},$$

où

$$h_i = e_{i,i} - e_{i+1,i+1}, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

On dira qu'une algèbre de Lie est de **type A_ℓ** si elle est isomorphe à $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbb{K})$.

Type C_ℓ . Soit f la forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée sur $\mathbb{C}^{2\ell}$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & I_\ell \\ -I_\ell & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}_{2\ell}(\mathbb{K})$ formé des matrices x telles que $f(xv, w) = -f(v, xw)$ pour tous $v, w \in \mathbb{C}^{2\ell}$, c'est-à-dire $Ax = -{}^t xA$. Autrement dit,

$$\mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -{}^t a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{K}), b, c \text{ symétriques} \right\}.$$

On montre aisément que $\mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{K})$ est stable par crochet. Comme $\mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{K})$ est contenu dans $\mathfrak{sl}_{2\ell}(\mathbb{K})$, c'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}_{2\ell}(\mathbb{K})$ qu'on appelle **algèbre de Lie symplectique**².

On vérifie sans peine qu'une base de $\mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{K})$ est donnée par

$$\begin{aligned} \{h_i\}_{1 \leq i \leq \ell} \cup \{e_{i,j} - e_{\ell+j,\ell+i}\}_{1 \leq i \neq j \leq \ell} \cup \{e_{i,\ell+i}\}_{1 \leq i \leq \ell} \cup \{e_{i,\ell+j} + e_{j,\ell+i}\}_{1 \leq i < j \leq \ell} \\ \cup \{e_{\ell+i,i}\}_{1 \leq i \leq \ell} \cup \{e_{\ell+i,j} + e_{\ell+j,i}\}_{1 \leq i < j \leq \ell}, \end{aligned}$$

où

$$h_i = e_{i,i} - e_{\ell+i,\ell+i}, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

En particulier, $\mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{K})$ est de dimension $2\ell^2 + \ell$.

On dira qu'une algèbre de Lie est de **type C_ℓ** si elle est isomorphe à $\mathfrak{sp}_{2\ell}(\mathbb{K})$.

1. La notation et la terminologie viennent de ce que cette algèbre de Lie est l'algèbre de Lie du groupe spécial linéaire $SL_{\ell+1}(\mathbb{K}) \cong \{g \in \mathcal{M}_{\ell+1}(\mathbb{K}) \mid \det g = 1\}$.

2. C'est l'algèbre de Lie du groupe symplectique $Sp_{2\ell}(\mathbb{K}) = \{g \in GL_{2\ell}(\mathbb{K}) \mid {}^t gA = A\}$.

Type B $_{\ell}$. Soit f la forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $\mathbb{C}^{2\ell+1}$ dont la matrice dans la base canonique est $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\ell} \\ 0 & I_{\ell} & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathfrak{so}_{2\ell+1}(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}_{2\ell+1}(\mathbb{K})$ formé des matrices

x telles que $f(xv, w) = -f(v, xw)$ pour tous $v, w \in \mathbb{C}^{2\ell+1}$, c'est-à-dire $Sx = -{}^t xS$. Autrement dit,

$$\mathfrak{so}_{2\ell+1}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ -{}^t v & a & b \\ -{}^t u & c & -{}^t a \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathcal{M}_{1,\ell}(\mathbb{K}), a, b, c \in \mathcal{M}_{\ell}(\mathbb{K}), b, c \text{ anti-symétriques} \right\}.$$

On montre aisément que $\mathfrak{so}_{2\ell+1}(\mathbb{K})$ est stable par crochet. Comme $\mathfrak{so}_{2\ell+1}(\mathbb{K})$ est contenu dans $\mathfrak{sl}_{2\ell+1}(\mathbb{K})$, c'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}_{2\ell+1}(\mathbb{K})$ qu'on appelle **algèbre de Lie orthogonale**³. On vérifie sans peine qu'une base de $\mathfrak{so}_{2\ell+1}(\mathbb{K})$ est donnée par

$$\begin{aligned} \{h_i\}_{1 \leq i \leq \ell} \cup \{e_{1,i+1} - e_{\ell+i+1,1}\}_{1 \leq i \leq \ell} \cup \{e_{1,\ell+i+1} - e_{i+1,1}\}_{1 \leq i \leq \ell} \cup \{e_{i+1,j+1} - e_{\ell+j+1,\ell+i+1}\}_{1 \leq i \neq j \leq \ell} \\ \cup \{e_{i+1,\ell+j+1} - e_{j+1,\ell+i+1}\}_{1 \leq i < j \leq \ell} \cup \{e_{\ell+i+1,j+1} - e_{\ell+j+1,i+1}\}_{1 \leq i < j \leq \ell}, \end{aligned}$$

où

$$h_i = e_{i+1,i+1} - e_{\ell+i+1,\ell+i+1}, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

En particulier, $\mathfrak{so}_{2\ell+1}(\mathbb{K})$ est de dimension $2\ell^2 + \ell$ (la même que \mathbb{C}_{ℓ} !).

On dira qu'une algèbre de Lie est de **type B $_{\ell}$** si elle est isomorphe à $\mathfrak{so}_{2\ell+1}(\mathbb{K})$.

Type D $_{\ell}$. On construit ici une autre algèbre de Lie orthogonale.

Soit f la forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $\mathbb{C}^{2\ell}$ dont la matrice dans la base canonique est $S = \begin{pmatrix} 0 & I_{\ell} \\ I_{\ell} & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathfrak{so}_{2\ell}(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}_{2\ell}(\mathbb{K})$ formé des matrices x telles que $f(xv, w) = -f(v, xw)$ pour tous $v, w \in \mathbb{C}^{2\ell}$, c'est-à-dire $Sx = -{}^t xS$. Autrement dit,

$$\mathfrak{so}_{2\ell}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -{}^t a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathcal{M}_{\ell}(\mathbb{K}), b, c \text{ anti-symétriques} \right\}.$$

Comme pour le type B_{ℓ} , $\mathfrak{so}_{2\ell}(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}_{2\ell}(\mathbb{K})$ qu'on appelle aussi **algèbre de Lie orthogonale**⁴. On vérifie sans peine qu'une base de $\mathfrak{so}_{2\ell}(\mathbb{K})$ est donnée par

$$\{h_i\}_{1 \leq i \leq \ell} \cup \{e_{i,j} - e_{\ell+j,\ell+i}\}_{1 \leq i \neq j \leq \ell} \cup \{e_{i,\ell+j} - e_{j,\ell+i+1}\}_{1 \leq i < j \leq \ell} \cup \{e_{\ell+i,j} - e_{\ell+j,i}\}_{1 \leq i < j \leq \ell},$$

où

$$h_i = e_{i,i} - e_{\ell+i,\ell+i}, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

En particulier, $\mathfrak{so}_{2\ell}(\mathbb{K})$ est de dimension $2\ell^2 - \ell$.

On dira qu'une algèbre de Lie est de **type D $_{\ell}$** si elle est isomorphe à $\mathfrak{so}_{2\ell}(\mathbb{K})$.

3. C'est l'algèbre de Lie du groupe orthogonal $SO_{2\ell+1}(\mathbb{K}) = \{g \in GL_{2\ell+1}(\mathbb{K}) \mid {}^t g S g = S\}$.

4. C'est l'algèbre de Lie du groupe orthogonal $SO_{2\ell}(\mathbb{K}) = \{g \in GL_{2\ell}(\mathbb{K}) \mid {}^t g S g = S\}$.

Topologie de Zariski

Soit $\mathbb{A}^n = \mathbb{K}^n$ l'espace affine (canonique) de dimension n . Si $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, où $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est l'algèbre des polynômes à n indéterminées, l'application $\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x)$ est appelée une **fonction polynomiale** sur \mathbb{A}^n .

Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. On pose

$$\mathcal{V}(I) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } f \in I\}.$$

On munit \mathbb{A}^n d'une topologie en déclarant que les ensembles $\mathcal{V}(I)$ sont **fermés** : clairement, \emptyset et \mathbb{A}^n sont fermés et on vérifie sans peine que les unions finies et intersections quelconques de fermés sont fermées (utiliser la relation $\mathcal{V}(\sum_{\alpha} I_{\alpha}) = \bigcap \mathcal{V}(I_{\alpha})$).

Définition 106 – topologie de Zariski

Les ensembles $\mathcal{V}(I)$ sont appelés des **ensembles algébriques affines**, et cette topologie sur \mathbb{A}^n est appelée la **topologie de Zariski**.

Un ensemble Zariski-fermé est aussi fermé pour la topologie usuelle sur $\mathbb{A}^n = \mathbb{K}^n$ mais la réciproque n'est pas vraie en générale.

Oscar Zariski, né le 24 avril 1899 et mort le 4 juillet 1986 fut un mathématicien russe-américain et l'un des géomètres-algébristes les plus influents du XX^{ème} siècle.



Le **radical** d'un idéal I de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, noté \sqrt{I} , est l'ensemble des $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ pour lesquels il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n \in I$. On dit que I est **radiciel** si $I = \sqrt{I}$.

Si X est un sous-ensemble de \mathbb{A}^n , on note $\mathcal{I}(X)$ l'ensemble des $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tels que $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$. Il est clair que $\mathcal{I}(X)$ est un idéal radical de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. On vérifie sans difficulté les propriétés suivantes :

- si I, J sont deux idéaux de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ tels que $I \subset J$, alors $\mathcal{V}(J) \subset \mathcal{V}(I)$,
- si $X \subset Y$, alors $\mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{I}(X)$,
- si X est un ensemble algébrique, alors $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) = X$,
- si I est un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, alors $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$,
- l'application $I \mapsto \mathcal{V}(I)$ induit une bijection entre l'ensemble des idéaux radiciels de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et l'ensemble des sous-ensembles algébriques de \mathbb{A}^n .

Une fonction polynomiale sur \mathbb{A}^n est clairement continue pour la topologie de Zariski, où $\mathbb{K} = \mathbb{A}$ est munie de la topologie de Zariski. Lorsque \mathbb{K} est de cardinal infini (par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), le seul polynôme s'annulant sur \mathbb{A}^n est le polynôme nul.

Définition 107 – ensemble irréductible

Un sous-ensemble de \mathbb{A}^n est dit **irréductible** s'il n'est pas l'union de deux Zariski-fermés propres.

Un ensemble irréductible est connexe mais la réciproque n'est pas vraie en générale. Par exemple, dans $\mathbb{A}^2 = \mathbb{K}^2$, si I est l'idéal engendré par XY , alors $\mathcal{V}(I)$ est connexe (c'est l'union des deux axes de coordonnées $x = 0$ et $y = 0$) mais il est clairement non irréductible : $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2)$, où I_1 est l'idéal engendré par X et I_2 celui engendré par Y .

Lemme 108

L'espace affine \mathbb{A}^n est irréductible.

DÉMONSTRATION. Supposons que $A = \mathcal{V}(I_1) \cup \mathcal{V}(I_2)$, et supposons que chacun de ces sous-ensembles Zariski-fermés soient propres. Alors $I_1 \neq 0$ et $I_2 \neq 0$. Soient $f \in I_1$ et $g \in I_2$ non nuls. Alors $fg \neq 0$, mais fg est identiquement nul sur \mathbb{A}^n , d'où une contradiction. \square

Corollaire 109

Tout sous-ensemble Zariski-ouvert non vide de \mathbb{A}^n est Zariski-dense dans \mathbb{A}^n .

DÉMONSTRATION. Soit U un ensemble Zariski-ouvert non vide. Supposons que U ne soit pas Zariski-dense. Alors il existe un sous-ensemble Zariski-ouvert non vide V de \mathbb{A}^n tel que $U \cap V = \emptyset$. Les sous-ensembles $\mathbb{A}^n \setminus V$ et $\mathbb{A}^n \setminus U$ sont donc des sous-ensembles Zariski-fermés propres, qui couvrent \mathbb{A}^n , ce qui contredit le lemme précédent. \square