Fiche n°0 : matrices de passage et formules de changement de base

(*environ 2 séances*)

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Matrice d'une famille de vecteurs dans des bases

Exercice 1 – matrices de passages entre bases de $\mathbb{K}^2$.
Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$, c'est-à-dire $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, et $u = (2, 4)$, $v = (3, -1)$.

1. Vérifier que $\mathscr{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{K}^2$ et écrire la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
2. Calculer l'inverse de P. Quelle est la matrice de passage $P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$?
3. Que vaut la matrice du vecteur $(7, -1)$ dans la base $\mathscr{B}' = (u, v)$?

♠ Exercice 2 – recherche d'une base particulière dans un espace de polynômes.
On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, la matrice de P dans la base $\mathscr{B}$ soit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} P(-1) \\ P(0) \\ P(1) \end{pmatrix}.$$

Matrice d'un endomorphisme dans des bases

Exercice 3 – un exemple de projection de $\mathbb{R}^3$.
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Construire une base (u_1, u_2) du plan vectoriel
$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}.$$
2. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $u_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$. En déduire que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P parallèlement à la droite D dans la base (u_1, u_2, u_3), puis dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
4. Écrire la matrice de la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur la droite D parallèlement au plan P dans la base (u_1, u_2, u_3), puis dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
5. Écrire la matrice de la symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan P parallèlement à la droite D dans la base (u_1, u_2, u_3), puis dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 – quelques propriétés des projections vectorielles.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E. On note $p_{F,G}$ la projection vectorielle de E sur F parallèlement à G. On rappelle que $p_{F,G}$ est un endomorphisme de E.

1. Quel est le noyau de $p_{F,G}$? Quelle est son image ?
2. Montrer : $p_{F,G} \circ p_{F,G} = p_{F,G}$.
3. Soient $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases de F et G respectivement, et $\mathscr{B}$ la base de E obtenue par concaténation des familles libres $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$. Écrire la matrice de $p_{F,G}$ dans la base $\mathscr{B}$.
4. Soit $s_{F,G}$ la symétrie vectorielle de E par rapport à F parallèlement à G. Montrer que $s_{F,G} \circ s_{F,G} = \mathrm{Id}_E$ et écrire la matrice de $s_{F,G}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 5 – les projecteurs d'un espace vectoriel sont les projections vectorielles de cet espace.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle ***projecteur de*** E tout endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
Le but de cet exercice est de démontrer qu'un projecteur de E est une projection de E (nous avons vu la réciproque, «toute projection de E est un projecteur », au cours de l'exercice précédent).

1. Soit p un projecteur de E, c'est-à-dire $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont en somme directe dans E, autrement dit que $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, p = \{0_E\}$.
2. En remarquant que tout vecteur x de E s'écrit $x = (x - p(x)) + p(x)$, montrer que $E = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Im}\, p$. En déduire que $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont supplémentaires dans E, autrement dit que $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$.
3. Montrer que p est la projection de E sur $\mathrm{Im}\, p$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$, et conclure.

De la même façon, on peut montrer que les symétries vectorielles de E sont les endomorphismes s de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, qu'on appelle des symétries de E.

Exercice 6 – recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisms a une allure préalablement fixée.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.1 Vérifier que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1.2 ♠ Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ de E dans laquelle la matrice de f est $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3 Écrire la formule de changement de bases entre les matrices A et N, et vérifier sa cohérence.

2. ♠ Plus généralement, soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ de E dans laquelle la matrice de f est N.

Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On rappelle que A est dite **semblable** à B, et on note $A \sim B$, s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Exercice 7 – propriétés de la relation $\sim$.

1. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. On rappelle que la trace d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est la somme des éléments diagonaux de A.
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2.1 Montrer que si $A \sim B$, alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

2.2 Montrer que si $A \sim B$, alors $A^k \sim B^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 – utilisation de certains invariants pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables.

1. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

2. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

3. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?