# Fiche n°1 : groupes

*(1 à 2 séances)*

## Généralités sur les groupes

**Exercice 1 – réunion de sous-groupes dans un groupe.**
La réunion de deux sous-groupes d'un groupe est-elle encore un sous-groupe ? Justifier votre réponse.

**Exercice 2 – un exemple de groupe non abélien.**
Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans $G$ définie par :

$$(x, y) * (x', y') = \left(xx', xy' + \frac{y}{x'}\right).$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif.
2. Montrer que $\mathbb{R}_+^* \times \{0\}$, $\{1\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ sont des sous-groupes de $G$.

**Exercice 3 – groupe linéaire et groupe spécial linéaire.**
Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ muni de la multiplication $\times$ des matrices est un groupe. Quel est son élément neutre ? Quel est le symétrique d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ? Pour quelle(s) valeur(s) de $n$ le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ est-il abélien ?

   *Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$ est appelé le* **groupe linéaire d'ordre** $n$.
2. (*À faire après le cours sur le déterminant.*)
   On note $SL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de déterminant 1.
   Montrer que $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$. On le démontrera de deux façons différentes :
   (a) «directement», en utilisant la définition d'un sous-groupe,
   (b) en remarquant que $SL_n(\mathbb{K})$ est le noyau d'un certain morphisme de groupes que l'on précisera.

   *Le groupe $SL_n(\mathbb{K})$ est appelé le* **groupe spécial linéaire d'ordre** $n$.

*De même, on peut montrer que si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes de $E$ muni de la composition $\circ$ des endomorphismes et un groupe, appelé le* **groupe linéaire de** $E$*, et que l'ensemble $SL(E)$ des automorphismes de $E$ de déterminant 1 est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé le* **groupe spécial linéaire de** $E$.

## Propriétés du groupe symétrique

**Exercice 4 – le groupe symétrique n'est pas commutatif en général.**
Montrer que le groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est non commutatif dès que $n \geqslant 3$.

**Exercice 5 – involutions du groupe symétrique.**
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Quelles sont les permutations involutives de $\{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire les permutations $\sigma$ de $\{1, \ldots, n\}$ telles que $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\{1,\ldots,n\}}$ ?

**Exercice 6 – les transpositions $\tau_{1,j}$ engendrent le groupe symétrique.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$.

1. Vérifier, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ tel que $2 \leqslant i < j \leqslant n$ :
$$\tau_{i,j} = \tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}.$$
2. En déduire que l'ensemble $\{\tau_{1,i}\ ;\ 2 \leqslant i \leqslant n\}$ engendre le groupe $\mathfrak{S}_n$.

## Étude de permutations

**Exercice 7 – étude d'une permutation particulière de $\{1, \ldots, 6\}$.**
Soit
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le nombre d'inversions de $\sigma_1$. En déduire la parité de $\sigma_1$.
2. Décomposer $\sigma_1$ (d'au moins une façon) en un produit de transpositions.
3. Décomposer $\sigma_1$ en un produit de cycles à supports disjoints. Retrouver ainsi la signature $\varepsilon(\sigma_1)$ de $\sigma_1$.
4. Reprendre les questions précédentes avec les permutations
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

**♠ Exercice 8 – étude d'une permutation particulière de $\{1, \ldots, n\}$.**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la signature de
$$\begin{array}{rccc} \sigma\colon & \{1, \ldots, n\} & \longrightarrow & \{1, \ldots, n\} \\ & i & \longmapsto & n + 1 - i. \end{array}$$
On la déterminera de deux façons différentes : en calculant le nombre d'inversions de $\sigma$, et en décomposant $\sigma$ en un produit de transpositions.