Fiche n°2 : déterminants

(*environ 2 séances*)

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Généralités sur le déterminant

Exercice 1 – vrai ou faux.
Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier l'assertion ou citer le cours si la réponse est «vraie», et donner un contre-exemple simple sinon.

(a) Pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a : $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(b) Pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a : $\det(A + B) = \det(A)\det(B)$.

(c) Pour tous $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a : $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$

(d) Pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que A et B soient *semblables* (voir la fiche n°0), on a : $\det(A) = \det(B)$.

Exercice 2 – déterminant de matrices particulières.

1. Que peut-on dire du déterminant d'une matrice *nilpotente* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^N = 0$) ?

2. Que peut-on dire du déterminant d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = I_n$?

3. Que peut-on dire du déterminant d'une matrice *antisymétrique* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire que ${}^tA = -A$) lorsque n est impair ?

Calculs de déterminants

Exercice 3 – calcul d'un déterminant à l'aide d'opérations élémentaires.
Pour $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

(*Indication : commencer par effectuer l'opération élémentaire* $C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{j=2}^{n} C_j$.)

Exercice 4 – utilisation du déterminant pour savoir si une matrice est inversible.

1. Calculer, pour $t \in \mathbb{C}$, le déterminant de la matrice suivante sous forme factorisée :

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice A_t est inversible.

3. Lorsque A_t n'est pas inversible, déterminer une base de $\operatorname{Ker} A_t$.

Exercice 5 – déterminant d'une matrice circulante.
On pose $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$. On rappelle les relations : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

1. Montrer que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{C}^3$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix}.$$

2. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice *circulante* suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ et écrire la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3).

3. En calculant de déterminant de f de deux manières différentes, obtenir une factorisation de $3abc - a^3 - b^3 - c^3$.

Exercice 6 – un calcul de déterminant pas récurrence.
Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & \alpha & -1 & & \vdots \\ a_3 & 0 & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix},$$

où $\alpha, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. (*Indication : on pourra établir une relation de récurrence entre* Δ_n *et* Δ_{n-1} *et raisonner par récurrence.*)

Exercice 7 – déterminant de Vandermonde.

> ***Alexandre-Théophile Vandermonde**, né à Paris le 28 février 1735 et mort à Paris le 1er janvier 1796, est un mathématicien français. Il fut aussi économiste, musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne Bézout et Antoine Lavoisier. Son nom est maintenant surtout associé à une matrice et son déterminant.*

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On appelle ***déterminant de Vandermonde*** le déterminant d'ordre n suivant :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de calculer $V(x_1, \dots, x_n)$, et de déterminer pour quels n-uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ce déterminant est non nul.

1. Calculer $V(x_1)$, $V(x_1, x_2)$, $V(x_1, x_2, x_3)$.

2. Que peut-on dire de $V(x_1, \dots, x_n)$ si $x_i = x_j$ pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ tel que $i < j$?

3. ♠ On fixe dans cette question des complexes $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts.

3.1 Montrer que l'application $t \mapsto V(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ est une fonction polynomiale de degré $n-1$. Autrement dit, $V(x_1, \dots, x_{n-1}, T) \in \mathbb{C}[T]$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ en la variable T.

3.2 À l'aide de la question **2**, trouver $n-1$ racines distinctes du polynôme $V(x_1, \dots, x_{n-1}, T)$. En déduire une expression de $V(x_1, \dots, x_{n-1}, T)$ en fonction de $x_1, \cdots, x_{n-1}$ et de $V(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$.

3.3 Calculer $V(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ et obtenir, à l'aide d'une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $V(x_1, \dots, x_n)$ sous forme factorisée.

4. Montrer que $V(x_1, \dots, x_n)$ est non nul si et seulement si les complexes $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.