École universitaire Paris-Saclay
Licence de Mathématiques 2ème année

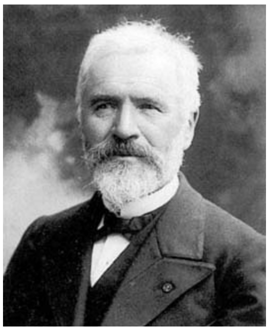
Année 2021–2022

MA202 – Algèbre linéaire

Anne Moreau

anne.moreau@universite-paris-saclay.fr
https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~moreau/

***Johann Carl Friedrich Gauss**, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.*



***Marie Ennemond Camille Jordan**, né le 5 janvier 1838 à Lyon et mort le 22 janvier 1922 à Paris, est un mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent* Cours d'analyse.

Table des matières

1

Matrices d'une application linéaire et changement de bases (révisions)

Prérequis : espaces vectoriels, applications linéaires, matrices et systèmes linéaires (cours d'algèbre linéaire de première année).

Exercice de cours 1. Citer des exemples d'espaces vectoriels variés, et préciser pour chacun d'entre eux des bases. Citer des exemples variés d'applications linéaires entre espaces vectoriels.

Dans tout ce qui suit, la lettre $\mathbb{K}$ désigne ou bien l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou bien l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On pourra, comme en première année, supposer le plus souvent que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Tous les espaces vectoriels sont définis sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire que les scalaires sont des éléments de $\mathbb{K}$.

On rappelle qu'une application $f\colon E \to F$ entre deux espaces vectoriels $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ est dite ***linéaire*** lorsque pour tous a, b de E et tout λ dans $\mathbb{K}$,

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \quad \text{et} \quad f(\lambda.a) = \lambda.f(a).$$

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Comme l'an dernier, on écrit le plus souvent E pour l'espace vectoriel $(E, +)$ lorsque la loi $+$ est évidente.

Dans ce chapitre, on suppose que $(E, +)$ et $(F, +)$ sont de $\boxed{\text{dimension finie}}$, respectivement p et n. L'objectif du chapitre est de revoir les notions de matrices d'une application linéaire et de changement de bases qui seront cruciales dans le chapitre 3 sur la réduction des endomorphismes. Comme il s'agit d'un chapitre de révisions, les démonstrations et certains détails sont omis. On renvoie au cours d'algèbre de première année pour plus de précisions.

1. Matrices d'une application linéaire

1.1. Définition. On choisit une base $\mathscr{B}_E = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de E, et une base $\mathscr{B}_F = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire. La donnée de l'image par f des vecteurs de la base $\mathscr{B}_E$ détermine entièrement l'application f.

D'autre part, les vecteurs $f(u_1), \ldots, f(u_p)$ sont eux parfaitement déterminés par la donnée de leurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}_F$. Autrement dit, la donnée du tableau à n lignes et p colonnes constituées des coordonnées des $f(u_j)$ dans la base $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de F détermine entièrement l'application linéaire f. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire. On appelle ***matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$*** la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les p colonnes sont les coordonnées des images par f des vecteurs de $\mathscr{B}_E$ dans la base $\mathscr{B}_F$. On la note

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F \leftarrow \mathscr{B}_E}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & \dots & f(u_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \end{array}$$

avec, pour $j \in \{1,\dots,p\}$,

$$f(u_j) = a_{1,j}v_1 + a_{2,j}v_2 + \dots + a_{n,j}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}v_i.$$

⚠ La phrase « on considère la matrice de l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ » n'a pas de sens ; il faut préciser dans quelles bases de E et F on écrit la matrice !

Remarque 1. Lorsque $E = F$ et $\mathscr{B}_E = \mathscr{B}_F$, on note parfois plus simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E \leftarrow \mathscr{B}_E}(f)$, que l'on appelle la ***matrice de f dans la base $\mathscr{B}_E$*** au lieu de *la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_E$*.

Exercice de cours 2. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par $f(x,y,z) = (x+y, y+z)$. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, puis dans les bases $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ et $\mathscr{C} = ((1,0),(1,1))$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1. On considère une base quelconque $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. La matrice de l'*homothétie $h_\lambda\colon E \to E$ de rapport λ*, définie par $h_\lambda(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$, dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ est

$$H_\lambda = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{B}}(h_\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} h_\lambda(e_1) & h_\lambda(e_2) & \dots & h_\lambda(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \\ e_n \end{array} \end{array} = \lambda.I.$$

Exemple 2. On note $f_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la *rotation d'angle θ* dans $\mathbb{R}^2$, définie par

$$f_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

La matrice de f_θ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est donc

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{B}}(f_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exemple 3. On note $f_\theta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la *rotation d'axe* $(0,0,1)$ *et d'angle θ* dans $\mathbb{R}^3$, définie par

$$f_\theta(x,y,z) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z).$$

La matrice de f_θ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est donc

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{B}}(f_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2. La matrice d'une application linéaire dans des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ dépend en général des bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$. Comme on l'a vu plus haut, ce n'est cependant pas le cas pour les homothéties, et donc en particulier pour l'application identité I (qu'on peut écrire $I = h_\lambda$ avec $\lambda = 1$).

Exercice de cours 3. Soit A une matrice donnée de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On identifie, comme d'habitude, $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^p$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A, c'est-à-dire l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ donnée par $f(X) = A \times X$ pour tout $X \in \mathbb{K}^p$. Quelle est la matrice de l'application linéaire f dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$?

1.2. Liens entre une application linéaire et sa matrice dans des bases données. Soyons plus précis : on a vu que « la donnée du tableau à n lignes et p colonnes constituées des coordonnées des $f(u_j)$ dans la base $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de F détermine entièrement l'application linéaire f », mais comment ?

Proposition 2 – écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire, et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$. Pour tout $x \in E$, de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}_E$, les coordonnées $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de son image $y = f(x)$ dans la base $\mathscr{B}_F$ vérifient $Y = A \times X$.

Exercice de cours 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Que valent $f(1, 1, 1)$, $f(0, 1, 0)$ et $f(1, 2, 1)$?

Proposition 3 – lien entre produit matriciel et composition des applications linéaires

Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie, et deux applications linéaires $f \colon E \to F$ et $g \colon F \to G$. Soient aussi $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases respectives de E, F et G, et

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F \leftarrow \mathscr{B}_E}(f), \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G \leftarrow \mathscr{B}_F}(g).$$

Alors la matrice C de l'application linéaire $g \circ f \colon E \to G$ dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_G$ est donnée par le produit $B \times A$:

$$C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G \leftarrow \mathscr{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G \leftarrow \mathscr{B}_F}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F \leftarrow \mathscr{B}_E}(f) = B \times A.$$

Exercice de cours 5. Soient $f_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $f_{\theta'} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ les rotations d'angle θ et θ' respectivement. Quelle est la matrice de $f_\theta \circ f'_\theta$ dans la base canonique ? Pouvait-on prédire géométriquement ce résultat ?

Exercice de cours 6. Soient $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ donnés par $f(x, y) = (y, 0)$ et $g(x, y) = (x, 2y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Quelles sont les matrices de $f \circ g$ et $g \circ f$ dans la base canonique ?

Proposition 4 – caractérisation matricielle de la bijectivité d'une application linéaire

Soient E et F de dimension finie, respectivement p et n. Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire, et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_E$ de E et $\mathscr{B}_F$ de F. L'application f est bijective si et seulement si la matrice A est une matrice carrée, donc $n = p$, qui est inversible. Dans ce cas

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E \leftarrow \mathscr{B}_F}(f^{-1}) = A^{-1}.$$

Exercice de cours 7. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f_a \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f_a(x, y) = (x+2y, 2x+ay)$. Pour quelle(s) valeur(s) de a l'application f_a est-elle bijective ? Lorsque f_a est bijective, donner f_a^{-1}.

2. Changement de base

La matrice d'une application linéaire f donnée dépend en général des bases dans lesquelles on la définit. On s'intéresse dans ce paragraphe aux relations entre les matrices de f dans des bases différentes.

2.1. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. Soit $(E, +)$ un espace vectoriel de dimension n. Soient $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base de E, et $\mathscr{F} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ une famille de k vecteurs de E, où k est un entier non nul quelconque. En général, les vecteurs de $\mathscr{F} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ sont donnés par leurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Il est naturel et très simple de former la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$. Cette matrice, de taille $n \times k$, est appelée la ***matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$*** :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) := \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,k} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_n \end{array} \end{array}$$

Exercice de cours 8. Soient $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{F}_1 = ((1,1,1),(1,2,3))$, $\mathscr{F}_2 = ((1,1,1),(1,0,1),(2,1,2))$ et $\mathscr{F}_3 = ((1,1,1),(1,0,1),(2,1,2),(0,0,1))$. Écrire les matrices des familles $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3$ dans la base $\mathscr{B}$.

2.2. Matrice de passage d'une base dans une autre. On s'intéresse maintenant au cas où $\mathscr{F}$ est une base de E. En particulier, $k = n$.

Soit $(E, +)$ un espace vectoriel de dimension n. Soient $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base de E, et $\mathscr{B}' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$ une « nouvelle base » de E. En général, les vecteurs de $\mathscr{B}' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$ sont donnés par leurs coordonnées dans « l'ancienne base » $\mathscr{B}$. Comme précédemment, on forme la matrice $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ dans l'ancienne base $\mathscr{B}$:

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & & p_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_n \end{array} \end{array}$$

Cette matrice a un nom, pour l'instant un peu troublant :

Définition 5 – matrice de passage entre deux bases

La matrice P des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ dans l'ancienne base $\mathscr{B}$ est appelée ***matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$***. On la note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

⚠ Attention à l'ordre des bases dans cette définition : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$.

Exemple 4. Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $e'_1 = (1, -1)$, $e'_2 = (0, 2)$. Les vecteurs e'_1 et e'_2 ne sont pas colinéaires, donc $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est la matrice

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} e'_1 & e'_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

Proposition 6 – une matrice de passage est une matrice associée à l'application identité

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $\mathscr{B}' = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_n)$ deux bases de E. La matrice de de passage de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}'$ est la matrice de l'application identité I de E dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$. Autrement dit

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{B}'}(I).$$

Pour démontrer la proposition, il suffit de remarquer que

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u'_1 = I(u'_1) & u'_2 = I(u'_2) & \ldots & u'_n = I(u'_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & & p_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \\ \\ u_n \end{array} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{B}'}(I).$$

Remarque 3. Une matrice de passage est toujours inversible, puisque l'application linéaire identité l'est (voir la proposition 4) !

Exercice de cours 9. Soient $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une famille de $\boxed{n \text{ vecteurs}}$ de E. Montrer que $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ est inversible.

De la définition ci-dessus découle l'importante proposition suivante.

Proposition 7 – matrice d'un vecteur dans une nouvelle base grâce à la matrice de passage

Si $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, alors pour tout vecteur $x \in E$, ses coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}'$ vérifient $X = P \times X'$.

Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x).}$$

Exemple 5. On reprend les vecteurs de l'exemple 4 : $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = (1, -1)$, $e'_2 = (0, 2)$. Si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $x = x'_1e'_1 + x'_2e'_2$ avec

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 8 – inverse d'une matrice de passage

Si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, alors P^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

Exercice de cours 10. Démontrer la proposition à l'aide de la proposition 7 et de la remarque 3.

2.3. Matrices semblables.

Proposition 9 – formule de changement de bases pour les applications linéaires

Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$, et A la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$. Soient aussi $\mathscr{B}'_E$ et $\mathscr{B}'_F$ des nouvelles bases de E et F respectivement. Alors la matrice A' de f dans les bases $\mathscr{B}'_E$ et $\mathscr{B}'_F$ est donnée par

$$A' = (P_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}'_F})^{-1} \times A \times P_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}'_E}$$

On notera que cette relation s'écrit

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_F \leftarrow \mathscr{B}'_E}(f) = (P_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}'_F})^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F \leftarrow \mathscr{B}_E}(f) \times P_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}'_E}$$

ou encore

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_F \leftarrow \mathscr{B}'_E}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_F \leftarrow \mathscr{B}_F}(I) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F \leftarrow \mathscr{B}_E}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E \leftarrow \mathscr{B}'_E}(I).$$

Cette formule est donc une conséquence de la proposition 3.

Corollaire 10 – formule de changement de bases pour les endomorphismes

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme, et A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. Soit aussi $\mathscr{B}'$ une nouvelle base de E. Alors la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'$ vérifie

$$A' = P^{-1} \times A \times P,$$

où $P = P_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

On retiendra la formule suivante :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}', \mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}.}$$

Définition 11 – matrice semblable

On dit que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont ***semblable***s lorsqu'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1} \times A \times P$.

De manière équivalente, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphismes dans des bases différentes, puisqu'une matrice inversible peut être vue comme une matrice de passage. On peut se demander s'il existe une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est la plus simple possible. C'est l'objet central de la *réduction des endomorphismes* (voir le chapitre 3).

3. Projections et symétries vectorielles

Pour finir, on examine en détail deux types d'applications linéaires qui jouent un rôle important et seront des exemples récurrents dans la suite.

3.1. Projections.

Définition 12 – définition géométrique d'une projection

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de l'espace vectoriel E, c'est-à dire que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ (on dit que x_1 est la ***composante*** de x sur E_1 et que x_2 est la ***composante*** de x sur E_2). L'application $p\colon E \to E$ qui à $x \in E$ associe sa composante sur E_1 est appelée la ***projection sur*** E_1 ***dans la direction de*** E_2 (ou encore : ***parallèlement à*** E_2).

Dans le cas où E est l'ensemble des vecteurs du plan, et E_1, E_2 deux droites vectorielles distinctes, comme dans le cas où E est l'ensemble des vecteurs de l'espace, E_2 une droite et E_1 un plan ne contenant pas E_2, la projection sur E_1 dans la direction de E_2 est bien ce que l'on pense, comme l'illustre la figure 1.

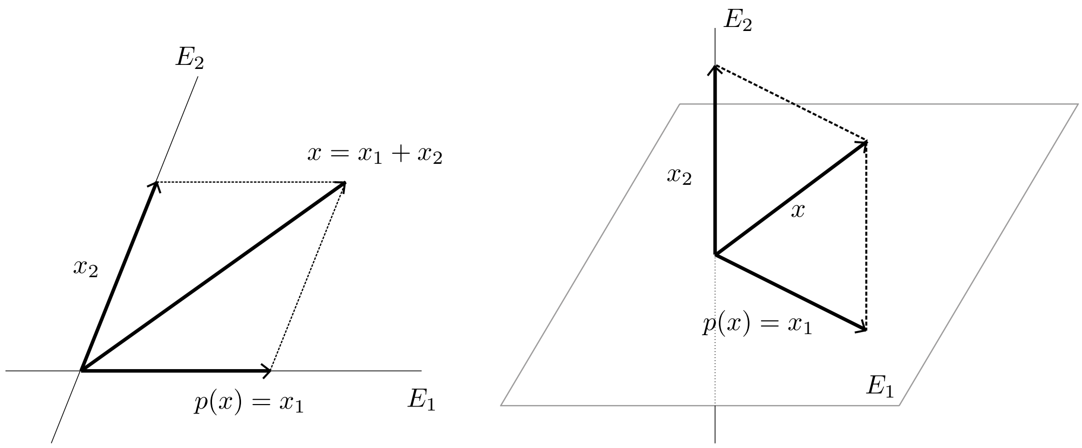


FIGURE 1. Projections vectorielles dans le plan et dans l'espace

EXERCICE DE COURS 11.

1. Vérifier qu'une projection de E est bien une application linéaire. Quel est son noyau ? Quelle est son image ?
2. Soit p une projection de E. Montrer que p vérifie $p \circ p = p$.

La réciproque de l'exercice 11 (2) est vraie :

Proposition 13 – interprétation algébrique d'une projection

Soient E un espace vectoriel, et p un endomorphisme de E. L'endomorphisme p est une projection de E si et seulement si $p \circ p = p$. De plus, si p est une projection, alors $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et p est la projection de E sur $\operatorname{Im} p$ de direction $\operatorname{Ker} p$.

EXERCICE DE COURS 12 (utilisation de la caractérisation algébrique pour montrer qu'un endomorphisme est une projection).

1. Soit $p \in \mathscr{L}(E, E)$ une projection. Montrer que $I - p$ est aussi une projection.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est une projection.
3. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est une projection.

Si A est la matrice d'une projection p dans une base donnée de E, on a $A^2 = A \times A = A$, puisque que $A \times A$ est la matrice dans une même base de $p \circ p = p$. On peut choisir une « autre » base de manière à ce que la matrice de p dans celle-ci soit très simple comme l'illustre l'exercice suivant.

EXERCICE DE COURS 13 (matrice d'une projection). Soient $p\colon E \to E$ une projection, $\mathscr{B}_1 = (u_1, \ldots, u_{k_1})$ une base de $\operatorname{Im} p$ et $\mathscr{B}_2 = (v_1, \ldots, v_{k_2})$ une base de $\operatorname{Ker} p$. Notant A la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$, montrer que l'on a :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}(p) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p(u_1) & \dots & p(u_{k_1}) & p(v_1) & \dots & p(v_{k_2}) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ \\ u_{k_1} \\ v_1 \\ \\ v_{k_2} \end{array}$$

On pourra rapprocher ce résultat de l'exexercice 12 (2).

3.2. Symétries.

Définition 14 – définition algébrique d'une symétrie

Soit E un espace vectoriel. On dit qu'un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ est une ***symétrie*** lorsque $s \circ s = I$.

On notera qu'une symétrie est une application linéaire bijective, qui est sa propre inverse.

Exercice de cours 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que s est une symétrie.

Exercice de cours 15. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que p est une projection si et seulement si $s = I - 2p$ est une symétrie.

Puisque s est une bijection, on a $\operatorname{Ker} s = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} s = E$, donc en particulier on a encore $E = \operatorname{Im} s \oplus \operatorname{Ker} s$, mais cette égalité est sans intérêt pour une symétrie. En revanche, on a aussi la proposition suivante.

Proposition 15 – deux sous-espaces vectoriels supplémentaires associées à une symétrie

Si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie, alors $\operatorname{Ker}(s - I)$ et $\operatorname{Ker}(s + I)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E :

$$E = \operatorname{Ker}(s - I) \oplus \operatorname{Ker}(s + I).$$

Exercice de cours 16. Démontrer la proposition.

Soient $s\colon E \to E$ une symétrie, et $x \in E$. On peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Ker}(s-I)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}(s+I)$, de sorte que $s(x) = s(x_1 + x_2) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$.

Proposition 16 – interprétation géométrique d'une symétrie

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de l'espace vectoriel E. Soit $s\colon E \to E$ l'application qui à $x \in E$ associe $x_1 - x_2$ où x_1 et x_2 sont définis par $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Alors s est une symétrie. On dit que s est la ***symétrie par rapport à*** E_1 ***dans la direction de*** E_2 (ou encore : ***parallèlement à*** E_2).

Exercice de cours 17. Démontrer la proposition.

Dans le cas où E est l'ensemble des vecteurs du plan, et E_1, E_2 deux droites vectorielles distinctes, comme dans le cas où E est l'ensemble des vecteurs de l'espace, E_1 un plan et E_2 une droite qui n'est pas contenue dans E_1, la symétrie par rapport à E_1 dans la direction de E_2 est bien ce que l'on pense, comme l'illustre la figure 2.

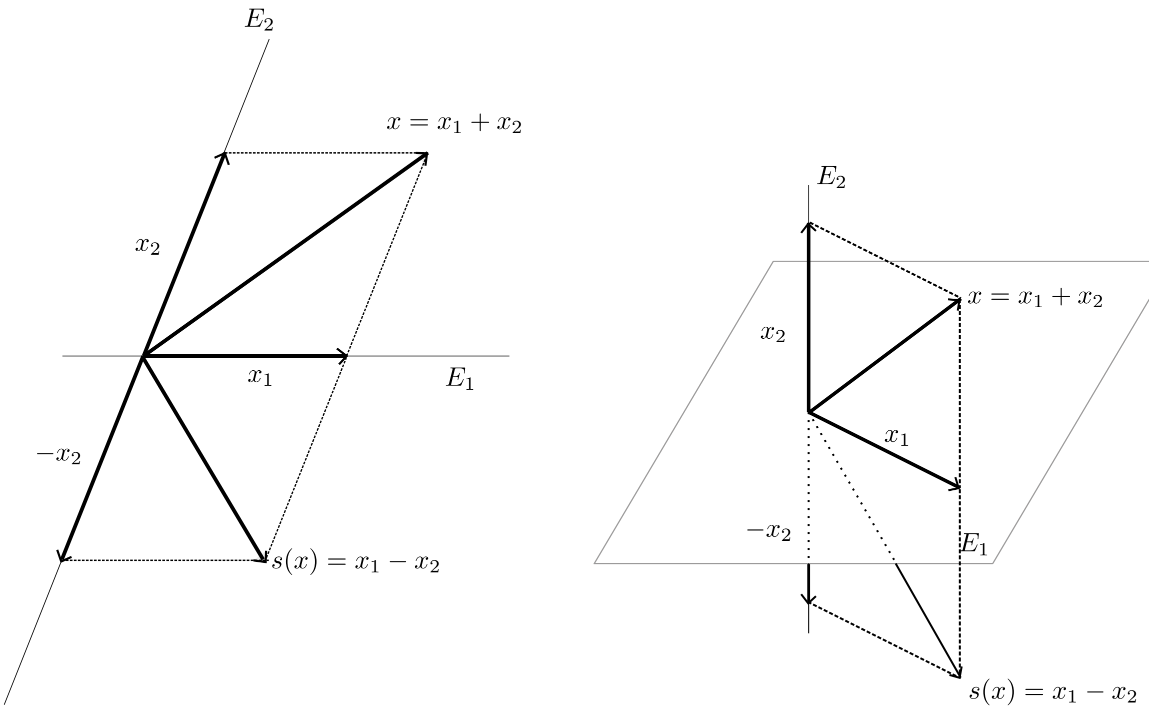


FIGURE 2. Symétries vectorielles dans le plan et dans l'espace

Si A est la matrice d'une symétrie s dans des bases données, on a $A^2 = A \times A = I$, puisque que $A \times A$ est la matrice dans les mêmes bases de $s \circ s = I$. Pour une symétrie aussi, on peut trouver des bases dans lesquelles la matrice de A est très simple comme l'illustre l'exercice suivant.

EXERCICE DE COURS 18. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E, et $s : E \to E$ la symétrie par rapport à E_1 dans la direction de E_2. Soient aussi $\mathscr{B}_1 = (u_1, \dots, u_{k_1})$ une base de E_1 et $\mathscr{B}_2 = (v_1, \dots, v_{k_2})$ une base de E_2. Notant A la matrice de s dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$, montrer que l'on a :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{B}}(s) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} s(u_1) & \dots & s(u_{k_1}) & s(v_1) & \dots & s(v_{k_2}) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} u_1 \\ \\ u_{k_1} \\ v_1 \\ \\ v_{k_2} \end{array} \end{array}$$

Là encore, on pourra rapprocher ce résultat de l'exercice 14.

2

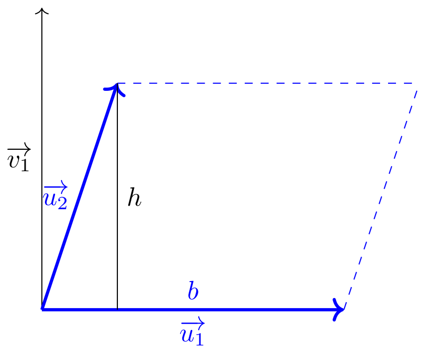
Déterminant (révisions)

On rappelle dans ce chapitre la définition et les propriétés du déterminant. On retrace également les principales méthodes pour calculer le déterminant d'une matrice carrée. Comme il s'agit là encore d'un chapitre de révisions, les démonstrations et certains aspects sont omis. On renvoie au cours de première année pour les détails.

1. Introduction

Le *déterminant* d'une matrice carrée peut être vu comme une généralisation (ou une formalisation) des notions d'aire et de volume, qui tient compte de l'*orientation*. Nous tentons ici de motiver sa définition dans le cas des matrices carrées d'ordre 2.

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthonormée, où $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{j} = (0, 1)$, que l'on convient d'appeler *directe*. Les termes *orthonormée* et *directe* seront définis de manière rigoureuse au deuxième semestre. Ici, *orthonormée* est à comprendre au sens de la géométrie du lycée. Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (x_1, y_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ écrits dans la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On appelle *parallélogramme engendré* par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ l'ensemble $\{\alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} : (\alpha_1, \alpha_2) \in [0, 1]^2\}$.



Calculons l'aire $\mathscr{A}$ de ce parallélogramme. On sait qu'elle est égale à la longueur b d'un côté (par exemple $\|\overrightarrow{u_1}\|$), multipliée par la hauteur h correspondante : $\mathscr{A} = b \times h$. Pour obtenir $\mathscr{A}$ en fonction des coordonnées de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, il suffit d'introduire le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (-y_1, x_1)$. Ce vecteur est en effet orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et de même norme, de sorte que

$$|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{u_2}| = h \times \|\overrightarrow{u_1}\| = h \times b = \mathscr{A},$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$. On a donc

$$\mathscr{A} = | - y_1x_2 + x_1y_2|.$$

Comme nous le verrons au cours de ce chapitre, pour $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$, le *déterminant* de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, noté $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$, est défini par :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2.$$

En particulier, $|\det(A)|$ représente l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ de A. Le déterminant possède de plus un signe : il est strictement positif si les vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ forment une base *directe*, strictement négatif s'ils forment une base *indirecte*, et nul si ces vecteurs sont liés.

On peut de même introduire le déterminant d'une matrice carrée réelle d'ordre 3 de sorte que sa valeur absolue soit le volume du *parallélépipède* engendré par les vecteurs colonnes d'une telle matrice.

Dans ce chapitre, nous allons définir le déterminant d'une matrice carré d'ordre quelconque. Il sera bon de garder à l'esprit cet exemple introductif pour mieux comprendre les propriétés du déterminant et la façon dont il est construit.

2. Definition du déterminant

On commence avec une proposition dont l'énoncé est simple, mais dont la preuve requiert un assez gros travail (esquissée l'an dernier). Elle affirme l'existence et l'unicité d'une fonction vérifiant trois propriétés élémentaires.

Proposition 17 – existence et unicité de l'application « déterminant »

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique application Δ_n de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $A \mapsto \Delta_n(A)$ est linéaire par rapport à chacune des lignes de A.
2. Si $\tilde{A}$ se déduit de A par l'échange de deux lignes distinctes, alors $\Delta_n(\tilde{A}) = -\Delta_n(A)$.
3. $\Delta_n(I_n) = 1$.

Nous verrons plus loin que les propriétés analogues portant sur les colonnes (qui correspondent à l'intuition vue en introduction) se déduisent de celles sur les lignes (voir la proposition 30). Comme nous allons utiliser le pivot de Gauss, il est plus aisé de travailler sur les lignes dans un premier temps.

Définition 18 – déterminant

L'application donnée par la proposition précédente est appelée application ***déterminant***. On la note $\det\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ le déterminant de A.

On dit que $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ est un ***déterminant d'ordre*** n.

En dimension 1 et 2, on peut obtenir assez rapidement une formule explicite pour le déterminant à partir des propriétés (1), (2) et (3). C'est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice de cours 19 (déterminant de matrices d'ordre 1 ou 2).

1. Supposons $n = 1$. Une matrice $A \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ s'écrit $A = (a)$ avec $a \in \mathbb{K}$. Montrer que $\det(A) = a$.
2. Supposons $n = 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$
(*Indication : écrire* $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.)

Exercice de cours 20 (déterminant d'une matrice diagonale). Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale, montrer que

$$\det(A) = a_{1,1} \times \cdots \times a_{n,n}.$$

On donnera plus loin une expression explicite du déterminant pour une matrice de taille $\geqslant 3$, mais cette expression est en général inutilisable pour le calculer. On va voir que la méthode du pivot donne un procédé effectif de calcul.

3. Calcul d'un déterminant par la méthode du pivot de Gauss

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $E_{k,\ell} = (e_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice élémentaire dont le seul élément non nul est $e_{k,\ell} = 1$. On a

$$E_{k,\ell} \times A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{\ell,1} & \dots & a_{\ell,p} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } k.$$

Ainsi, multiplier une matrice A par $E_{k,\ell}$ à gauche permet d'extraire la ℓ-ième ligne de A et de la placer sur la ligne k.

Proposition 19 – opérations élémentaires et multiplications par une matrice élémentaire

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ non nul.

— Effectuer l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ sur la matrice A, avec $i \neq j$, revient à multiplier A à gauche par $T_{i,j}(\alpha) := I_n + \alpha E_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

— Effectuer l'opération $L_i \leftarrow \alpha L_i$ sur la matrice A revient à multiplier A à gauche par $D_i(\alpha) := I_n + (\alpha - 1)E_{i,i} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

— Effectuer l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ sur la matrice A, avec $i \neq j$, revient à multiplier A à gauche par $P_{i,j} := I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

Remarque 4. Comme $P_{i,j} \times I_n = P_{i,j}$, la matrice $P_{i,j}$ est tout simplement la matrice obtenue en échangeant les lignes i et j de la matrice identité (voir la figure 3).

Remarque 5. Pour opérer sur les colonnes, on multiplie à droite par une matrice d'opération élémentaire. Autrement dit, pour opérer sur les colonnes, il suffit donc de remplacer dans la proposition 19, « ligne » par « colonne » et « gauche » par « droite ». Par exemple, $A \times P_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ obtenue en échangeant les colonnes i et j de la matrice A.

De ces observations, on déduit un calcul pratique du déterminant à l'aide de la méthode du pivot de Gauss : à partir d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on effectue par la méthode du pivot de Gauss des opérations élémentaires jusqu'à obtenir une matrice triangulaire (supérieure par exemple). Étudions alors l'effet des opérations élémentaires sur le déterminant.

$$P_{i,j} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccccccc} & & i & & & j & & \\ & & \downarrow & & & \downarrow & & \\ \end{array}$$

$$P_{i,j} = \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } j \\ \\ \\ \end{array}$$

FIGURE 3. La matrice $P_{i,j}$

***Johann Carl Friedrich Gauss**, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il a apporté de très importantes contributions à ces trois sciences. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.*

• *Échange de lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$).* Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $A_{i\leftrightarrow j}$ la matrice obtenue en échangeant deux lignes de A. On a

$$\det A_{i\leftrightarrow j} = -\det A. \tag{1}$$

On en déduit :

Corollaire 20 – une matrice avec deux lignes identiques est de déterminant nul

Si A a deux lignes identiques, alors $\det(A) = 0$.

• *Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul ($L_i \leftarrow \alpha L_i$).* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $L_1, \ldots, L_n$ ses lignes. Soient $i \in \{1, \ldots, n\}$ fixé et $A_{i,\alpha}$ la matrice obtenue en multipliant la ligne L_i par $\alpha \in \mathbb{K}$ non nul. On a

$$\det(A_{i,\alpha}) = \alpha \det(A). \tag{2}$$

En effet, puisque det est linéaire par rapport à la ligne L_i,

$$\det(L_1, \ldots, L_{i-1}, \alpha.L_i, L_{i+1} \ldots L_n) = \alpha \det(L_1, \ldots, L_{i-1}, L_i, L_{i+1} \ldots L_n) = \alpha \det(A).$$

Corollaire 21 – une matrice avec une ligne nulle est de déterminant nul

Si A a une ligne nulle, alors $\det(A) = 0$.

• *Ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne ($L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$).* Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ non nul. On note $A_{i,\alpha,j}$ la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, où $i \neq j$. On a

$$\det(A_{i,\alpha,j}) = \det A. \tag{3}$$

En effet, supposons par exemple que $i < j$. Alors, puisque det est linéaire par rapport à la i-ème ligne,

$$\begin{aligned}\det(A_{i,\alpha,j}) &= \det(L_1, \dots, L_i + \alpha L_j, \dots, L_j, \dots, L_n) \\ &= \det(L_1, \dots, L_i, \dots, L_j, \dots, L_n) + \alpha \det(L_1, \dots, L_j, \dots, L_j, \dots, L_n) \\ &= \det(A) + 0 = \det(A).\end{aligned}$$

3.1. Calcul effectif. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice donnée et $\tilde{A}$ la matrice obtenue à partir de A en appliquant l'algorithme du pivot. On se souvient qu'il s'agit d'effectuer sur A des opérations du type $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ jusqu'à obtenir une matrice échelonnée. Les formules (1) et (3) donnent donc

$$\det(\tilde{A}) = (-1)^e \det A,$$

où $e \in \mathbb{N}$ est le nombre d'échanges de lignes qu'il a été nécessaire de faire. On distingue alors deux cas :

— $\tilde{A}$ a (au moins) une ligne nulle. D'après le corollaire 21, on a $\det(\tilde{A}) = 0$, donc finalement

$$\det A = 0.$$

— $\tilde{A}$ n'a pas de ligne nulle. Dans ce cas, on peut réduire la matrice $\tilde{A}$ jusqu'à obtenir la matrice I_n. Il s'agit alors de faire subir à $\tilde{A}$ des opérations du type précédent, et plus précisément de multiplier chaque ligne L_i de $\tilde{A}$ par l'inverse de son pivot $\tilde{a}_{i,i}$, puis d'effectuer des opérations du type $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$. Avec (2) et (3) on obtient

$$\det(I_n) = \frac{1}{\tilde{a}_{1,1}} \frac{1}{\tilde{a}_{2,2}} \cdots \frac{1}{\tilde{a}_{n,n}} \det(\tilde{A}).$$

Dans ce cas, puisque $\det(I_n) = 1$, on a donc

$$\det(A) = (-1)^e \tilde{a}_{1,1} \tilde{a}_{2,2} \dots \tilde{a}_{n,n}, \tag{4}$$

où les $\tilde{a}_{i,i}$ sont les coefficients diagonaux de la matrice échelonnée $\tilde{A}$.

Notant que A n'a pas de ligne nulle si et seulement si elle est de rang n, ou encore si et seulement si A est inversible, on a démontré la proposition suivante.

Proposition 22 – caractérisation de l'inversibilité d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

De plus, si A est inversible, le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux de la matrice obtenue en échelonnant A, multiplié par -1 si le nombre d'échanges de lignes effectués est impair.

⚠ Il n'est pas recommandé d'apprendre par cœur la formule (4) source d'erreurs. En revanche, la méthode est à connaître sur des exemples.

EXERCICE DE COURS 21. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -8 & 12 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. Déterminant d'un produit de matrices

On s'intéresse au déterminant d'un produit $A \times B$ de matrices. On rappelle sans justification le résultat très important suivant.

Proposition 23 – le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 24 – le déterminant de l'inverse d'une matrice inversible est l'inverse du déterminant

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. On a
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Exercice de cours 22.

1. Vérifier l'assertion du corollaire.
2. Montrer, toujours à l'aide de la proposition 23, que deux matrices semblables ont le même déterminant.

L'exercice précédent permet de définir le déterminant d'un endomorphisme.

Définition 25 – déterminant d'un endomorphisme

Soit $f\colon E \to E$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E, supposé de dimension finie. Soient $\mathscr{B}$ une base de E, et
$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f).$$
On appelle ***déterminant de*** f, et l'on note $\det(f)$, le nombre $\det(A)$. Ce nombre ne dépend pas du choix de $\mathscr{B}$.

Exercice de cours 23.

1. Démontrer l'assertion de la définition à l'aide de l'exercice 22 (2) et du corollaire 10.
2. Établir qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ d'un espace vectoriel E de dimension finie est bijectif si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

5. Déterminant et matrice transposée

Définition 26 – transposée d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle ***transposée*** de A, et on note A^T la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par
$$A^T = (t_{i,j}) \text{ avec } t_{i,j} = a_{j,i} \text{ pour tous } i \in \{1, \dots p\}, j \in \{1, \dots, n\}.$$

De manière un peu imprécise, on peut dire que A^T s'obtient à partir de A en échangeant les coefficients de A par symétrie par rapport à sa diagonale. De la définition il vient immédiatement que la transposée de la transposée d'une matrice est la matrice elle-même :

$$(A^T)^T = A. \tag{5}$$

Exemple 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. On a $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice de cours 24.

1. Soit $E_{k,\ell}$ une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Vérifier que l'on a :
$$(E_{k,\ell})^T = E_{\ell,k}.$$

2. Vérifier que la transposée de la somme de deux matrices et la somme des transposées, et que pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$(\lambda.A)^T = \lambda.A^T.$$

Autrement dit, l'application de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui à une matrice A associe sa transposée A^T est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La transposée d'un produit de matrices est le produit des transposées, dans l'ordre inverse. Plus précisément :

Proposition 27 – transposée d'un produit de matrices

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, de sorte que $A \times B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est bien définie. Alors $B^T \times A^T \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est bien définie, et on a

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T.$$

Corollaire 28 – transposée d'une matrice inversible

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si A^T l'est. Dans ce cas

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Outre son intérêt propre, le résultat suivant ouvre la porte à l'étude des propriétés du déterminant d'une matrice comme fonction de ses colonnes, ce qui est d'une certaine façon plus naturel si on repense à l'introduction.

Proposition 29 – transposer une matrice ne change pas son déterminant

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\det(A^T) = \det(A).$$

On en déduit que le déterminant possède les mêmes propriétés par rapport aux colonnes que par rapport aux lignes (voir la proposition 17).

Proposition 30 – propriétés du déterminant relatives aux colonnes

La fonction $\det\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $A \mapsto \det(A)$ est linéaire par rapport aux colonnes de A.

2. Si $\widetilde{A}$ se déduit de A par un échange de deux colonnes, alors $\det(\widetilde{A}) = -\det(A)$.

6. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

On rappelle ici que le déterminant d'une matrice $n \times n$ peut être calculé à partir de n déterminants de taille $n-1$. La proposition ci-dessous à surtout un intérêt théorique, mais peut être utilisée pour calculer des déterminants pour des matrices de petite taille (typiquement $n = 3, 4$ ou 5). Cette formule est appelée « développement du déterminant suivant la j-ème colonne ».

$$\widehat{A}_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

FIGURE 4. La matrice extraite $\widehat{A}_{i,j}$

Proposition 31 – développement du déterminant suivant la j-ème colonne

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on note $\widehat{A}_{i,j} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue à partir de A en rayant la i-ième ligne et la j-ième colonne (voir la figure 4). Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\widehat{A}_{i,j}).$$

Définition 32 – mineurs et cofacteurs

Dans les notations de la proposition précédente, on appelle ***mineur de la place*** (i, j) ***dans*** A le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en rayant dans le déterminant de A la i-ième ligne et la j-ième colonne :

$$\Delta_{i,j} := \det(\widehat{A}_{i,j})$$

On appelle ***cofacteur de la place*** (i, j) ***dans*** A, et on note $A_{i,j}$, le produit de $(-1)^{i+j}$ par le mineur de la place (i, j) dans A :

$$A_{i,j} := (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

En utilisant la transposition des matrices, qui ne change pas le déterminant, on peut en déduire le résultat suivant (développement du déterminant par rapport à sa i-ième ligne).

Corollaire 33 – développement du déterminant par rapport à sa i-ième ligne

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(\widehat{A}_{i,j}).$$

REMARQUE 6.
1. Il est souvent utile de développer un déterminant par rapport une ligne ou une colonne qui comporte peu de termes non nuls.
2. Pour le calcul numérique des déterminants, il existe des méthodes nettement plus rapides que celle consistant à développer par rapport à une ligne ou une colonne. En général, l'utilisation des opérations élémentaires est la méthode la plus efficace (voir la section 3). Pour n petit (par exemple $n = 3, 4$), développer par rapport à une ligne ou une colonne peut s'avérer toutefois commode lorsqu'il y a beaucoup de zéros.
Pour $n = 2$, le mieux est d'apprendre par cœur la formule

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.}$$

Exercice de cours 25. Calculer les déterminants de l'exercice 21 en développant par rapport à une ligne ou une colonne.

7. Comatrice

Ce paragraphe est nouveau par rapport à l'an dernier et ne sera pas utilisé dans la suite (sauf la formule de l'inverse pour une matrice carrée inversible d'ordre deux : voir l'exercice 26). Nous l'ajoutons en guise de complément et pour la culture générale.

Définition 34 – comatrice

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle ***comatrice de*** A la matrice carrée d'ordre n, notée $\operatorname{com}(A)$, définie par :

$$\operatorname{com}(A) = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$

où $A_{i,j}$ est le cofacteur de la place (i,j) de A.

On admet le théorème suivant (pas difficile mais un peu technique à démontrer) :

Théorème 35 – relation entre la comatrice et le déterminant

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A \times \operatorname{com}(A)^T = \operatorname{com}(A)^T \times A = \det(A)\, I_n.$$

Corollaire 36 – expression de l'inverse d'une matrice à l'aide de sa comatrice

Soit A une matrice inversible. Alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{com}(A)^T.$$

Remarque 7. La formule précédente, donnant A^{-1} à l'aide de $\operatorname{com}(A)$, est en pratique quasiment inutilisable dès que $n \geqslant 3$. En effet, l'application de cette formule nécessite a priori le calcul d'un déterminant d'ordre n ($\det A$) et de n^2 déterminants d'ordre $n-1$ (les cofacteurs de A). La formule présente en revanche un intérêt théorique : on dispose d'une formule générale pour l'inverse d'une matrice inversible.

Exercice de cours 26 (expression de l'inverse d'une matrice d'ordre 2). Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$. Si $ad - bc \neq 0$, vérifier que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et que

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.}$$

8. Résumé

8.1. Propriétés du determinant. On récapitule ici les principales propriétés du determinant :

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\det(I_n) = 1$,

2. pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$,

3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,

4. A est inversible $\iff \det(A) \neq 0$,

5. si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$,

6. $\det(A^T) = \det(A)$.

Remarque 8. Par récurrence, à l'aide de la propriété 3, on montre aisément que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\det(A^k) = \det(A)^k.$$

8.2. Applications du déterminant. Voici enfin quelques applications du déterminant.

1. Déterminer si une matrice carrée donnée est inversible (voir la proposition 22),

2. Étant donnés un espace vectoriel E de dimension finie n et une famille $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ de n vecteurs de E, déterminer si $\mathscr{F}$ est une base de E. En effet, la famille $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement la matrice de $\mathscr{F}$ dans n'importe quelle base $\mathscr{B}$ de E est inversible (voir l'exercice 9).

3. Calculer le *polynôme caractéristique* d'une matrice carrée et en déduire les *valeurs propres* de cette matrice : voir le chapitre 3 suivant.

Il existe beaucoup d'autres applications du déterminant, par exemple *orienter* un espace vectoriel (voir le cours d'algèbre linéaire au second semestre), que nous n'abordons pas ici.

Exercice de cours 27. Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère la famille $\mathscr{F}_t = ((1,0,1),(0,1,0),(t,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de t la famille $\mathscr{F}_t$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

2. Soit f_t l'endomorphisme $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{F})$. Pour quelle(s) valeur(s) de t l'endomorphisme f_t est-il bijectif ?

3. Lorsque f_t n'est pas bijectif, donner une base de $\operatorname{Ker} f_t$.

3

Réduction des endomorphismes (1^{er} niveau) : diagonalisation et polynômes d'endomorphismes

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(E, +)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie non nulle n.

Certaines notions (espaces stables, valeurs propres, vecteurs propres, par exemple) sont valables en dimension infinie mais nous n'abordons pas cet aspect dans le cours.

La *réduction des endomorphismes* d'un espace vectoriel a pour objectif de trouver, étant donné un endomorphisme de cet espace, des bases dans lesquelles la matrice de l'endomorphisme à une forme simple, par exemple diagonale, triangulaire, diagonale par blocs, etc. Cela permet entre autres de simplifier des calculs. La réduction d'un endomorphisme consiste essentiellement à trouver une décomposition de l'espace vectoriel ambiant en une somme directe de *sous-espaces stables* sur lesquels l'endomorphisme induit est plus simple (voir la section 2).

1. Exemples introductifs

En guise d'introduction, étudions trois exemples illustratifs sous forme d'exercices.

Exercice de cours 28 (un exemple d'endomorphisme dont la matrice dans une base est diagonale). Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et f l'endomorphisme $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^3$ est A.

1. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $f(x, y, z)$.

2. Vérifier que la famille $\mathscr{B} = ((-1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. On note D cette matrice.

4. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}$. Exprimer A en fonction de P, D et l'inverse de P.

5. Application : déterminer la matrice de $f^5 = f \circ f \circ f \circ f \circ f$ dans la base $\mathscr{B}$.

La matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$ permet de bien comprendre géométriquement cet endomorphisme sur les trois « axes » $D_0 = \mathrm{Vect}\{(-1, 0, 1)\}$, $D_1 = \mathrm{Vect}\{(0, 1, 0)\}$ et $D_2 = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1)\}$: les vecteurs de D_0 sont annulés par f, les vecteurs de D_1 sont fixés points par points par f et les vecteurs de D_2 sont multipliés par 2 sous l'action de f. Par combinaisons linéaires, on visualise aisément l'image de tout vecteur de l'espace $\mathbb{R}^3$ par f.

6. Faire un dessin !

Exercice de cours 29 (un exemple de projection). Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, et préciser les éléments géométriques de f : sa direction et le sous-espace vectoriel sur lequel f se projette.
2. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Faire une figure représentant l'image par f d'un vecteur v de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Dans les deux exercices précédents, nous avons trouvé une base dans laquelle la matrice de f est diagonale. Ce n'est pas toujours le cas comme l'illustre l'exercice suivant.

Exercice de cours 30 (un exemple de rotation). Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On remarquera que f est la *rotation* de $\mathbb{R}^3$ d'axe $(0,0,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$: voir l'exemple 3.

1. Soit $\mathscr{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$. Montrer que pour tout $x \in \mathscr{P}$, on a $f(x) \in \mathscr{P}$. On dit que $\mathscr{P}$ est *stable* par f.
2. Trouver des vecteurs (non nuls) v de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(v) = v$.
3. Montrer que les seuls vecteurs v de $\mathbb{R}^3$ dont l'image par f est proportionnelle à v sont les vecteurs de la droite engendrée par $(0,0,1)$, l'axe de la rotation.
(*Indication : on pourra commencer par s'en convaincre géométriquement.*)

Dans cet exemple, il n'existe pas de base dans laquelle la matrice de f est diagonale. Toutefois, la matrice de f dans la base canonique est relativement agréable : elle est diagonale par blocs.

2. Préambule sur les sous-espaces stables

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E.

Définition 37 – sous-espace stable

On dit que F est ***sous-espace stable par*** u si pour tout $x \in F$, on a $u(x) \in F$.
Si F est stable par u, on peut définir l'***endomorphisme induit par*** u ***sur*** F, noté u_F :
$$u_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x). \end{array}$$

⚠ L'endomorphisme induit u_F est la <u>double restriction</u> de l'endomorphisme initial u avec à la fois un nouvel ensemble de <u>départ</u> et un nouvel ensemble d'<u>arrivée</u>.

Exemple 7.
1. Dans les notations de l'exercice 28, les droites D_0, D_1, D_2 sont stables par l'endomorphisme f.
2. Dans les notations de l'exercice 30, le plan $\mathscr{P}$ est stable par la rotation f.

On rappelle que tout sous-espace vectoriel de E admet (au moins) un supplémentaire dans E. Il existe donc un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.

⚠ Un tel supplémentaire n'est pas unique en général !

Exercice de cours 31. Soient G un supplémentaire de F dans E, et $\mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}_G$ des bases de F et G respectivement.

1. Supposons que F soit stable par u. Quelle est l'allure de la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ obtenue par « concaténation » des familles libres $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$?

2. Réciproquement, supposons qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ soit de la forme suivante, où $p \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(e_1) & \dots & u(e_p) & u(e_{p+1}) & \dots & u(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u).$$

Que peut-on dire du sous-espace vectoriel de E engendré par $e_1, \dots, e_p$? Comment interpréter la matrice A ?

Les sous-espaces stables par un endomorphisme les plus simples sont les *droites stables* par cet endomorphisme. Si D est une droite stable par u de base (x), c'est-à-dire que $D = \mathbb{K}x$, cela signifie que $u(x)$ est un multiple de x. Le cas le plus favorable est lorsque E est somme directe de droites stables pour u : il existe alors une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. C'est le cas auquel nous allons principalement nous intéresser dans ce chapitre.

⚠ Il se peut qu'un endomorphisme ne possède aucune droite stable, ou que l'espace ambiant ne soit pas somme directe de droites stables !

EXERCICE DE COURS 32.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et h_λ l'homothétie de E de rapport λ. Quelles sont les droites stables par h_λ ?

2. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et r_θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de θ l'endomorphisme r_θ admet-il des droites stables ? *(On attend une réponse intuitive, purement géométrique, sans calcul.)*

3. Soient D et P une droite et un plan de $\mathbb{R}^3$ tels que $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$. On note p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Quelles sont les droites stables par p ? Quels sont les plans stables par p ? *(Là encore, on attend une réponse intuitive, purement géométrique, sans calcul.)*

4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f possède une et une seule droite stable.

3. Éléments propres

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 38 – éléments propres pour un endomorphisme

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une ***valeur propre de*** f si il existe $x \in E$, $\boxed{\text{non nul}}$, tel que

$$f(x) = \lambda x.$$

Soit $x \in E$. On dit que x est un ***vecteur propre de*** f si $\boxed{x \text{ est non nul}}$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$f(x) = \lambda x.$$

On appelle ***spectre de*** f ***sur*** $\mathbb{K}$, et on note $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f)$, l'ensemble des valeurs propres de f.

⚠ L'hypothèse $\boxed{x \text{ non nul}}$ dans la définition est essentielle. Le vecteur nul 0_E vérifie toujours $f(0_E) = \lambda 0_E$ pour n'importe quel $\lambda \in \mathbb{K}$.

Par définition, $\boxed{\text{un vecteur propre n'est jamais nul.}}$

Définition 39 – éléments propres pour une matrice carrée

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une ***valeur propre de*** A s'il existe une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\boxed{\text{non nulle}}$, telle que

$$AX = \lambda X.$$

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur colonne. On dit que X est un ***vecteur propre de*** A si $\boxed{X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$AX = \lambda X.$$

On appelle ***spectre de*** A ***sur*** $\mathbb{K}$, et on note $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.

⚠ L'ensemble $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$ dépend de l'ensemble $\mathbb{K}$. Par exemple, considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}).$$

On a $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$ mais $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{i, -i\}$.

Exercice de cours 33. Dans les notations de l'exercice 32, quelles sont les valeurs propres réelles de h_λ ? r_θ ? de p ? de f ?

Remarque 9. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et supposons que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors

— pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une valeur propre de A,

— pour tout $x \in E$, x est un vecteur propre de f si et seulement si $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ est un vecteur propre de A.

En particulier, cela vaut si f est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A, c'est-à-dire que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 40 – une caractérisation des valeurs propres

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

1. λ est une valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}(f - \lambda I) \neq \{0_E\}$, c'est-à-dire si et seulement si $f - \lambda I$ est non injectif.
2. λ est une valeur propre de A si et seulement si $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$, c'est-à-dire si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

En particulier, A est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$.

Exercice de cours 34. Démontrer cette proposition.

La démonstration précédente montre que pour $\lambda \in \mathbb{K}$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f - \lambda I)$ de E est formé des vecteurs propres de f associés à λ et du vecteur nul. De même, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est formé des vecteurs propres de A associés à λ et du vecteur colonne nul.

Définition 41 – sous-espace propre

1. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f - \lambda I)$ est appelé le ***sous-espace propre (abrégé en s.e.p) pour f associé à la valeur propre λ.***
2. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ est appelé le ***sous-espace propre (abrégé en s.e.p) pour A associé à la valeur propre λ.***

Exercice de cours 35. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(f - \lambda I)$ est stable par f. Que vaut l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Ker}(f - \lambda I)$?

Exercice de cours 36. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \text{\Large 1} & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(matrice dont tous les coefficients valent 1). Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.

Exercice de cours 37. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.

Rappelons que deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont en ***somme directe*** dans E si tout vecteur x de $E_1 + E_2$ s'écrit de façon unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. On sait que E_1 et E_2 de E sont en somme directe dans E si et seulement si

$$E_1 \cap E_2 = \{0_E\}, \tag{6}$$

ou encore si pour tout x de E, l'équation

$$x_1 + x_2 = 0_E \quad \text{implique} \quad x_1 = x_2 = 0_E.$$

Plus généralement, on dit que des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$ de E sont en ***somme directe*** dans E, avec $p \in \mathbb{N}^*$, si tout vecteur x de $E_1 + \cdots + E_p$ s'écrit de façon unique $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $x_i \in E_i$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$.

On peut montrer que $E_1, \ldots, E_p$ de E sont en somme directe dans E si et seulement si pour tout $x = x_1 + \cdots + x_p$ de $E_1 + \cdots + E_p$, avec $x_i \in E_i$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, l'équation

$$x_1 + \cdots + x_p = 0_E \quad \text{implique} \quad x_1 = \cdots = x_p = 0_E.$$

⚠ Il n'y a pas de caractérisation analogue à (6) si $p \geqslant 3$.

Proposition 42 – les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ des valeurs propres deux à deux distinctes de f. Alors les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 I), \ldots, \mathrm{Ker}(f - \lambda_N I)$ sont en somme directe dans E.

Exercice de cours 38.

1. Démontrer la proposition pour $N = 2$ (le cas $N = 1$ est évident).
2. Démontrer la proposition par récurrence sur N.

⚠ Bien que les sous-espace propre de f soient en somme directe dans E, cette somme n'est pas nécessairement égale à E : voir l'exemple 4 de l'exercice 32.

EXERCICE DE COURS 39. Reprendre les exercices 28 et 29, et vérifier la cohérence avec la proposition précédente.

4. Polynôme caractéristique

Comme dans la section précédente, on fixe $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

D'après la proposition 40, un élément λ de $\mathbb{K}$ est une valeur propre de A si et seulement $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible ou encore, grâce la proposition 22,

$$\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) \iff \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

De même, d'après la proposition 40, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a grâce à la proposition 22 et la définition 25,

$$\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f) \iff \det(f - \lambda I) = 0.$$

Rappelons en effet que pour tout $\boxed{\text{endomorphisme}}$ u de E,

$$u \text{ injectif} \iff u \text{ surjectif} \iff u \text{ bijectif}.$$

Compte tenu de ces remarques, il est naturel d'introduire les applications :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(A - \lambda I_n) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(f - \lambda I). \end{array}$$

Proposition-définition 43 – polynôme caractéristique d'une matrice et d'un endomorphisme

1. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(A - \lambda I_n) \end{array}$ est un polynôme (i.e., une fonction polynomiale), appelé le ***polynôme caractéristique de*** A, et noté χ_A.
2. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \longmapsto & \det(f - \lambda I) \end{array}$ est un polynôme, appelé le ***polynôme caractéristique de*** f, et noté χ_f.

REMARQUE 10. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, où $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\chi_f = \chi_A$. En particulier, si f est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, alors $\chi_f = \chi_A$.

Compte tenu de la remarque précédente, on énoncera la plupart des résultats pour les matrices ou les endomorphismes seulement.

EXERCICE DE COURS 40.

1. Démontrer la proposition.
2. Que vaut χ_{h_α}, où h_α est l'homothétie de E de rapport $\alpha \in \mathbb{K}$?

D'après la discussion précédente, le résultat suivant est clair :

Proposition 44 – les zéros du polynôme caractéristique d'une matrice sont les valeurs propres.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \text{ si et seulement } \chi_A(\lambda) = 0.$$

Le polynôme caractéristique permet donc de résoudre un problème <u>géométrique</u> (rechercher des droites stables) en un problème <u>algébrique</u> (trouver les racines d'un polynôme).

EXERCICE DE COURS 41. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix}.$$

Proposition 45 – le polynôme caractéristique est de degré n

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + \det(A),$$

où

$$\mathrm{Tr}(A) := a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}$$

est la ***trace*** de A. En particulier, χ_A est un polynôme de $\boxed{\text{degré } n}$ et donc le spectre d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (ou d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n) a au plus n éléments.

EXERCICE DE COURS 42. Démontrer cette proposition pour $n = 2, 3$. La démonstration dans le cas général utilise l'expression du déterminant à l'aide du *groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$ vue en première année (on l'admet ici).

Proposition 46 – deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors : $\chi_A = \chi_B$.

EXERCICE DE COURS 43. Démontrer cette proposition.

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables mais ont le même polynôme caractéristique.

Définition 47 – ordre de multiplicité d'une valeur propre

Soit λ_0 une valeur propre de A (resp. f). On appelle ***ordre de multiplicité de*** λ_0 l'ordre de multiplicité de λ_0 en tant que zéro du polynôme caractéristique χ_A (resp. χ_f).

Par exemple, dans l'exercice 41, -1 est de multiplicité 1 (on dit que -1 est une valeur propre ***simple***) et 2 est de multiplicité 2 (on dit que 2 est une valeur propre ***double***).

REMARQUE 11. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (et tout endomorphisme de E) admet au moins une valeur propre puisque, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, son polynôme caractéristique étant non constant il admet au moins une racine.

⚠ Ceci n'est plus valable sur $\mathbb{R}$ comme nous l'avons vu avec les matrices de rotations d'ordre 2.

Rappel : le théorème de d'Alembert-Gauss assure que *tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe.*

Jean Le Rond d'Alembert *est un mathématicien, physicien, philosophe et encyclopédiste français, né le 16 novembre 1717 à Paris où il est mort le 29 octobre 1783.*

Proposition 48 – la dimension d'un s.e.p est majorée par la multiplicité de la valeur propre associée

Soient $\lambda_0 \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$, α_0 l'ordre de multiplicité de λ_0 et d_0 la dimension du sous-espace propre $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I_n)$ associé à λ_0. Alors on a :

$$1 \leqslant d_0 \leqslant \alpha_0.$$

(*On a un résultat analogue pour les endomorphismes.*)

Exercice de cours 44. Démontrer cette proposition pour les endomophismes (le cas matricielle s'en déduit).
Indication : utiliser le fait que $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda_0 I)$ *est un sous-espace vectoriel stable par* f*, en choisir une base puis utiliser le théorème de la base incomplète pour calculer le polynôme caractéristique.*

Une conséquence de cette proposition est que pour toute valeur propre simple de A (resp. f), la dimension du sous-espace propre associé vaut 1.

5. Diagonalisabilité

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 49 – diagonalisation

1. On dit que f est ***diagonalisable*** s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale.
2. On dit que A est ***diagonalisable*** s'il existe une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que A soit semblable à D. Autrement dit, A est ***diagonalisable*** si et seulement s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que
$$A = PDP^{-1}.$$

Remarque 12.
1. Si f est diagonalisable et si $\mathscr{B}$ est une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, alors $\mathscr{B}$ est formée de vecteurs propres pour f et les éléments diagonaux de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ sont les valeurs propres de f (avec multiplicités).
⚠ Une telle base $\mathscr{B}$ de E n'est pas unique en général ! Penser au cas où f est l'identité de E.
2. Si A est diagonalisable et si D est une matrice diagonale telle que $A = PDP^{-1}$ pour une certaine matrice inversible P, alors les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A (avec multiplicités).
⚠ Une telle matrice P n'est pas unique en général ! Penser au cas où A est la matrice I_n.

Exercice de cours 45. Donner des exemples variés de matrices et d'endomorphismes diagonalisables et non diagonalisables.

Si A est diagonalisable, ***diagonaliser*** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ c'est déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D (et, éventuellement, calculer P^{-1}) telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Remarque 13. S'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, alors

$$f \text{ diagonalisable} \iff A \text{ diagonalisable.}$$

En particulier, si f est l'endomorphisme $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, alors :

$$f \text{ diagonalisable} \iff A \text{ diagonalisable.}$$

Proposition 50 – propriétés équivalentes de la diagonalisabilité

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est diagonalisable,

(ii) $\boxed{\text{il existe une base de } E \text{ formée de vecteurs propres pour } f}$,

(iii) la somme (directe) des sous-espaces propres pour f est égale à E,

(iv) la somme des dimensions des sous-espace propre pour f est égale à $n = \dim E$.

Exercice de cours 46. Démontrer cette proposition.

Exercice de cours 47 (les projections sont diagonalisables). Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E, c'est-à-dire que $E = F \oplus G$. On note p la projection vectorielle de E sur F parallèlement à G. Montrer que p est diagonalisable.

Rappelons qu'un polynôme P à coefficient dans $\mathbb{K}$ est dit ***scindé sur*** $\mathbb{K}$ si P est ou bien constant ou bien un produit de polynômes de degré 1. Par exemple, les polynômes suivants sont scindés sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$: 4, $X-1$, $(X-1)^2(X-2)$, X^2-1, X^2+X-2. Le polynôme X^2+1 est scindé sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$. On rappelle que, comme dans le cours de première année, X^k désigne la fonction polynomiale $X^k\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Le théorème de d'Alembert-Gauss qui affirme que *tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe*, peut se formuler ainsi : *tout polynôme à coefficients complexes est scindé sur* $\mathbb{C}$.

Théorème 51 – une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si :

— χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$,

— pour chaque valeur propre λ de f, la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \lambda I)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ.

(*On a un résultat analogue pour les matrices.*)

Exercice de cours 48. Démontrer ce théorème.

Exercice de cours 49.

1. La matrice de l'exercice 41 est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$
est diagonalisable et diagonaliser A.

Exercice de cours 50. Considérons la matrice de l'exercice 37. Calculer χ_A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Corollaire 52 – une condition suffisante de diagonalisabilité

Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable.
(*On a un résultat analogue pour les matrices.*)

⚠ Cette condition est suffisante mais non nécessaire. Penser à l'identité, aux homothéties, aux projections, etc. qui sont diagonalisables mais ne satisfont pas au critère ci-dessus en général ! Voir aussi l'exemple de l'exercice 50.

Exercice de cours 51. Démontrer ce corollaire.

Exercice de cours 52. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$
Montrer que A est diagonalisable $\boxed{\text{dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{C})}$, et diagonaliser A. *(On pourra résoudre directement, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, l'équation $AX = \lambda X$.)*

6. Polynômes d'endomorphismes et de matrices

Avertissement : cette section est un peu plus théorique et subtile.

Comme précédemment, E est un espace vectoriel dimension finie non nulle $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe de nouveau $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Certaines notions sont valables si E est de dimension infinie (polynôme d'endomorphisme, polynôme annulateur, etc.).

6.1. Polynômes d'endomorphismes. On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes (i.e., fonctions polynomiales) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition-définition 53 – polynôme d'endomorphismes, polynôme de matrices

Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. On note $P(f) := a_0I + a_1f + \cdots + a_Nf^N \in \mathscr{L}(E)$, et $P(f)$ est appelé un ***polynôme d'endomorphismes***.
2. On note $P(A) := a_0I_n + a_1A + \cdots + a_NA^N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $P(A)$ est appelé un ***polynôme de matrices***.

Autrement dit, pour obtenir $P(f)$ (ou $P(A)$) on remplace la constante 1 par I (ou I_n), X par f (ou A), X^k par $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ (ou A^k) pour $k \in \mathbb{N}^*$.

⚠ Ne pas confondre $1(f)$ qui vaut I et $X(f)$ qui vaut f.

Exemple 8. Si $P = 2 + 3X$, alors $P(f) = 2I + 3f$ et $P(A) = 2I_n + 3A$.

Proposition 54 – propriétés des polynômes d'endomorphismes

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et P, Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On a :

1. $(\alpha P + Q)(f) = \alpha P(f) + Q(f)$,

2. $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$,

3. $1(f) = I$.

(*On a des propriétés analogues pour les matrices.*)

Exercice de cours 53.

1. Démontrer cette proposition.

2. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f et g ***commutent***, c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que tout polynôme en f commutent avec tout polynôme en g.
(De même, on montre que si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors tout polynôme en A commutent avec tout polynôme en B.)

6.2. Polynôme annulateurs.

Définition 55 – polynôme annulateur

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. On dit que P ***annule*** f (ou que P est un ***polynôme annulateur*** de f) si $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

2. On dit que P ***annule*** A (ou que P est un ***polynôme annulateur*** de A) si $P(A)$ est la matrice nulle.

Exemple 9. On rappelle qu'une projection est un endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$ (voir la proposition 13), et qu'une ***symétrie de*** E est un endomorphisme s de E tel que $s \circ s = I$ (voir la définition 14). Ainsi a-t-on :

— l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est une projection de E si et seulement si $X^2 - X$ annule f.

— l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie de E si et seulement si $X^2 - 1$ annule f.

Proposition 56 – polynôme d'endomorphismes et valeur propre

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Soient λ une valeur propre de f et $x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda I)$. On a alors pour tout polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$,
$$(P(f))(x) = P(\lambda)x.$$

2. Soient λ une valeur propre de A et $x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$. On a alors pour tout polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$,
$$P(A)X = P(\lambda)X.$$

Exercice de cours 54. Démontrer cette proposition.

Corollaire 57 – le spectre est contenu dans l'ensemble des zéros de tout polynôme annulateur

Soit P un polynôme annulateur de f. Alors pour toute valeur propre λ de f, on a $P(\lambda) = 0$. Autrement dit, le spectre $\operatorname{Spec}_{\mathbb{K}}(f)$ de f est contenu dans l'ensemble $P^{-1}(\{0\})$ des zéros de P.
(*On a un résultat analogue pour les matrices.*)

Exercice de cours 55. Démontrer ce corollaire.

⚠ L'inclusion $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A) \subset P^{-1}(\{0\})$ est stricte en général si P un polynôme annulateur de la matrice A. Par exemple $P = X(X-1)$ annule la matrice I_n mais $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(I_n) = \{1\}$ tandis que $P^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\}$.

Théorème 58 – une nouvelle condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

Pour que f soit diagonalisable il faut et il suffit qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples tel que $P(f) = 0$.
(*On a un résultat analogue pour les matrices.*)

Exercice de cours 56 (démonstration de la partie « condition nécessaire »). Montrer que si f est diagonalisable, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples tel que $P(f) = 0$.

On admet la partie « condition suffisante » (la plus intéressante !). C'est une conséquence du *théorème des noyaux* que nous n'énoncerons pas ce cours.

Exemple 10.

1. On retrouve ainsi que les projections et les symétries de E sont diagonalisables. En effet, les polynômes $X^2 - X = X(X-1)$ et $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ sont scindés sur $\mathbb{K}$ et à racines simples (voir l'exemple 9).
2. Soit $A \in \mathscr{M}_{10}(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 7A - 6I_{10}$. Le polynôme $X^3 - 7X + 6 = (X-1)(X-2)(X+3)$ de $\mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples et annule A, donc A est diagonalisable.
3. Considérons la matrice A de l'exercice 52. On vérifie sans peine que l'on a $A^3 = I_n$ (considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A), donc $P = X^3 - 1$ est un polynôme annulateur de A. Il est scindé dans $\mathbb{C}$ et à racines simples :
$$P = (X-1)(X-j)(X-j^2),$$
où $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$. On retrouve ainsi que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Exercice de cours 57. On reprend les exemples de l'exercice 32. Pour chacun de ces exemples, trouver un polynôme annulateur de l'endomorphisme en question de degré le plus petit possible. Pour l'exemple (2), on suppose $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Exercice de cours 58. Trouver un polynôme annulateur de degré le plus petit possible de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le théorème 58 est un outil très efficace pour détecter si un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable. Toutefois, il ne permet pas la diagonanlisation effective (trouver l'ensemble des valeurs propres et une base de vecteurs propres). Dans les exemples 1 et 3 ci-dessus, une analyse plus élémentaire nous a permis d'avoir une diagonalisation plus complète !

Voici une application de ce théorème.

Exercice de cours 59. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que si f est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par f sur F est diagonalisable aussi.

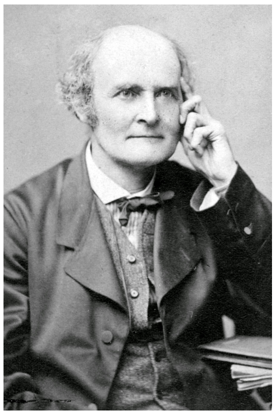
6.3. Théorème de Cayley-Hamilton. Nous admettons le théorème suivant, très célèbre, qui stipule que le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Théorème 59 – théorème de Cayley-Hamilton (admis, hors programme)

1. On a $\chi_f(f) = 0$. Autrement dit, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f annule f.
2. On a $\chi_A(A) = 0$. Autrement dit, le polynôme caractéristique de la matrice A annule A.

*Sir **William Rowan Hamilton**, né le 4 août 1805 et mort le 2 septembre 1865, est un mathématicien, physicien et astronome irlandais (né et mort à Dublin). Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches se révélèrent importantes pour le développement de la mécanique quantique.*

***Arthur Cayley**, né le 16 août 1821 et mort le 26 janvier 1895, est un mathématicien britannique. Il fait partie des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures.*



Comme le théorème de Cayley-Hamilton n'est pas au programme, il n'est bien entendu pas exigible. Toutefois, le connaître permet d'une part de vérifier la cohérence de certains calculs (le polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre n doit être un polynôme annulateur de degré n), et d'autre part de fournir aisément un polynôme annulateur.

⚠ Il se peut qu'une matrice carrée d'ordre n admette un polynôme annulateur de degré $< n$ comme nous l'avons observé dans certains exemples.

7. Applications de la diagonalisation

Voici quelques applications de la diagonalisation.

7.1. Calcul des puissances d'une matrice carrée. Remarquons tout d'abord que les puissances d'une matrice diagonale sont très faciles à calculer.

Supposons que l'on ait à calculer les puissances d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

• Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

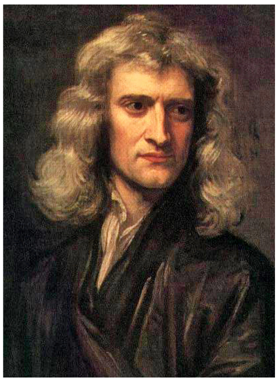
$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Autrement dit, il *suffit* de diagonaliser A pour calculer les puissances de A.

• Si $A = \alpha I_n + N$, avec N nilpotente (i.e., $N^p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$), on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de A (voir le cours d'algèbre de première année).

Isaac Newton *(25 décembre 1642 – 20 mars 1727) est un mathématicien, physicien, philosophe, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Gottfried Wilhelm Leibniz, du calcul infinitésimal.*

Il est aussi connu pour la généralisation du théorème du binôme et l'invention dite de la méthode de Newton permettant de trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction réelle d'une variable réelle.



• Si A n'est ni diagonalisable ni de la forme précédente, nous verrons (dans certains cas) d'autres méthodes au chapitre suivant (voir l'exercice 68 au chapitre 4). Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la *décomposition de Dunford* (hors programme !) permet de calculer les puissances de n'importe quelle matrice carrée par une méthode qui mélange un peu les deux précédentes.

Exercice de cours 60. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable et diagonaliser A.

2. Calculer A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$. *(Par convention $A^0 = I_n$.)*

3. Montrer que A est inversible, et calculer A^{-1}.

4. En déduire A^k, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. *(Par convention, si $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$, $A^k = (A^{-1})^{-k}$.)*

Exercice de cours 61 (étude de trois suites récurrentes linéaires d'ordre 2 « imbriquées »). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par : $u_0 = 0$, $v_0 = 22$, $w_0 = 22$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n), \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + v_n + w_n), \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n). \end{cases}$$
Le but de cet exercice est de calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n, v_n et w_n en fonction de n, et d'étudier la convergence des trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Posons
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et,} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$X_{n+1} = AX_n.$$
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$X_n = A^n X_0.$$

2. Montrer que A est diagonalisable, et diagonaliser A.

3. Conclure en calculant u_n, v_n et w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en étudiant la convergence des trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice de cours 62 (une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n).$$

1. Trouver une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que A est diagonalisable, et diagonaliser A dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Déduire de la question précédente, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n et des réels u_0, u_1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite en fonction de u_0 et u_1.

L'exercice précédente se généralise aisément à toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sont tels que $a^2 + 4b > 0$.

7.2. Résolution de systèmes différentiels linéaires. On ne présente pas de théorie générale et on illustre seulement sur un exemple l'utilisation de la diagonalisation pour la résolution d'un système différentiel linéaire d'ordre un.

Exercice de cours 63. On cherche dans cet exercice tous les couples (f, g) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, vérifiant le système différentiel $(\mathscr{S})$ suivant :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f'(t) = 4f(t) - g(t) \\ g'(t) = 2f(t) + g(t). \end{cases}$$

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable. Trouver une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

2. Résoudre le système différentiel suivant, où u et v sont deux fonctions dérivables :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

3. En déduire les solutions du système $(\mathscr{S})$.

4

Réduction des endomorphismes (2$^{\text{ème}}$ niveau) : exemples d'endomorphismes non diagonalisables

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Nous allons étudier dans ce chapitre d'autres cas de réductions (autres que la diagonalisation). Nous allons voir des exemples d'endomorphismes non diagonalisables qui admettent toutefois des bases dans lesquelles leur matrice est agréable (triangulaire supérieure, diagonale par blocs, triangulaire supérieure avec des 1 ou des 0 sur la sur-diagonale, etc.).

Nous énoncerons peu de résultat généraux. Les théories plus élaborées (critère de *trigonalisation*, *décomposition de Dunford*, *réduction de Jordan*, etc.) seront évoquées seulement pour la culture.

1. Exemples d'endomorphismes et de matrices trigonalisables

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

Définition 60 – endomorphisme et matrice trigonalisables

1. On dit que f est ***trigonalisable*** (ou ***triangularisable***) s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ soit triangulaire.
2. On dit que A est ***trigonalisable*** (ou ***triangularisable***) s'il existe une matrice triangulaire supérieure T semblable à A, c'est-à-dire s'il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible P telles que
$$A = PTP^{-1}.$$

Comme pour la diagonalisabilité, la base $\mathscr{B}$ et la matrice P dans la définition ci-dessus ne sont pas uniques.

Exercice de cours 64. Montrer que toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

(Indication : considérer la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$*.)*

Si A est trigonalisable, ***trigonaliser*** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ c'est déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale T (et, éventuellement, calculer P^{-1}) telles que
$$A = PTP^{-1}.$$

Exemple 11. On reprend les notations de l'exercice 32 :
- les endomorphismes h_λ et p des exemples (1) et (3) sont diagonalisables et donc trigonalisables ;
- l'endomorphisme r_θ de l'exemple (2) n'est ni trigonalisable ni diagonalisable pour $\theta \neq 0 \bmod \pi$;
- l'endomorphisme f de l'exemple (4) est trigonalisable (c'est évident !) mais n'est pas diagonalisable.

Voyons à présent d'autres exemples, plus subtiles, sous forme d'exercices.

EXERCICE DE COURS 65. Considérons la matrice de l'exercice 41 :
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ -9 & -22 & -22 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix}.$$
Calculer le polynôme caractéristique de A. Trouver une matrice triangulaire supérieure T de la forme
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$
avec $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Que vaut λ ?

EXERCICE DE COURS 66. Considérons la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & \frac{4}{3} \\ 8 & -1 & \frac{5}{3} \\ -21 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$$
Calculer le polynôme caractéristique de A. Trouver une matrice triangulaire supérieure T de la forme
$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, et une matrice inversible P telles que $A = PTP^{-1}$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

EXERCICE DE COURS 67. On suppose $n \geqslant 2$. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} A$? En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :
$$\chi_A(X) = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda).$$

2. À l'aide de la trace, déterminer la valeur de λ.

3. En déduire que A n'est pas diagonalisable, mais que A est trigonalisable. Trigonaliser A.

Dans les trois exemples précédents, on remarque que le polynôme caractéristique de A est scindé et que A est trigonalisable. On a en fait le résultat très général suivant (admis) :

Une matrice A est trigonalisable si et seulement si son polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

En particulier, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, toute matrice de $\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ est trigonalisable.

⚠ Les matrices de $\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ ne sont pas toutes trigonalisables. Penser aux matrices de rotations d'ordre 2 !

2. Décomposition de Dunford dans un cas particulier

Nous avons vu comment calculer les puissances d'une matrice diagonalisable (voir le paragraphe 7.1). De la même façon, on peut calculer les puissances d'une matrice trigonalisable : il suffit essentiellement de savoir calculer les puissances d'une matrice triangulaire. L'idéal est d'avoir une matrice triangulaire avec « beaucoup de zéros » pour laquelle on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

On illustre cela dans cet exercice.

Exercice de cours 68 (calcul de puissances d'une matrice). Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. Trouver une matrice inversible $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$, où

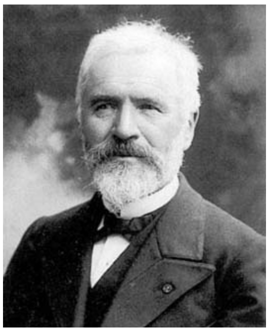
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que A est inversible, et calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
(*Indication : calculer les puissances par blocs et penser à la formule du binôme de Newton.*)

Dans cet exemple, nous avons obtenu une version raffinée de la trigonalisation : la matrice A de l'exercice 68 est semblable à une matrice triangulaire supérieure (la matrice J) qui est en même temps diagonale par blocs. Ceci est un résultat général pour les matrices dont le polynôme caractéristique est scindé, connu sous le nom de *décomposition de Dunford.*

***Nelson Dunford**, né le 12 décembre 1906 et mort le 7 septembre 1986, est un mathématicien américain, connu pour ses travaux en analyse fonctionnelle. Il a notamment donné son nom à la décomposition de Dunford, la propriété de Dunford-Pettis et le théorème de Dunford-Schwartz.*

La décomposition, dite « de Dunford », a été démontrée une première fois en 1870 par Camille Jordan, puis dans les années 1950 par Claude Chevalley dans le contexte de la théorie des groupes algébriques. Dans le monde francophone, elle est parfois attribuée à tort à Nelson Dunford, dont les travaux sont postérieurs à ceux de Chevalley !



***Marie Ennemond Camille Jordan**, né le 5 janvier 1838 à Lyon et mort le 22 janvier 1922 à Paris, est un mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse.*

***Claude Chevalley**, né le 11 février 1909 à Johannesburg en Afrique du Sud et mort le 28 juin 1984 à Paris, est un mathématicien français spécialiste de l'algèbre. Il l'est l'un des fondateurs du groupe Bourbaki.*

Théorème 61 – décomposition de Dunford, expression matricielle (admis, hors programme)

On suppose que $\boxed{\chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K}}$ (par exemple, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(f)$ et, pour $k \in \{1, \dots, p\}$, on note α_k la multiplicité de λ_k dans χ_f. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\begin{array}{r} \mathscr{M}_{\alpha_1}(\mathbb{K}) \ni \\ \\ \\ \mathscr{M}_{\alpha_p}(\mathbb{K}) \ni \end{array} \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \\ \hline \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{|ccc} \hline \lambda_p & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{array} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f).$$

Remarque 14. Comme application de la décomposition de Dunford, on peut calculer les puissances d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à l'aide des méthodes vues au paragraphe 7.1 et lors de l'exercice 68.

3. Matrices nilpotentes : cas particuliers de la réduction de Jordan

Un endomorphisme f de E est dit ***nilpotent*** s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que l'endomorphisme $f^N = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{N \text{ fois}}$ soit nul. Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***nilpotente*** s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que la matrice A^N soit nulle.

La réduction des endomorphismes nilpotents (ou des matrices nilpotentes) est particulièrement agréable.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{K}).$$

Par convention, $J_0 = 0$.

Théorème 62 – structure des éléments nilpotents (admis, hors programme)

Soit f un endomorphisme nilpotent non nul de E. Il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & & 0 \\ & J_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_p} \end{pmatrix},$$

où $k_1 \geqslant k_2 \cdots \geqslant k_p \geqslant 0$.

Une telle matrice J (avec des 0 ou des 1 sur la sur-diagonale, et des zéros partout ailleurs) est appelée une ***matrice de Jordan***.

Nous ne démontrerons pas ce théorème dans le cas général, mais nous allons construire explicitement une base $\mathscr{B}$ comme dans le théorème pour quelques exemples.

Exercice de cours 69. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. Vérifier que $A^4 = 0$ et $A^3 \neq 0$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

2. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ tel que $(x, f(x), f^2(x), f^3(x))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$. Exhiber un tel vecteur x.

3. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Trouver une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.

Exercice de cours 70. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. Vérifier que $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Trouver une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.

Exercice de cours 71. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. Vérifier que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Trouver une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.

Exercice de cours 72. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. Vérifier que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Trouver une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.

Remarque 15. Les matrices des quatre exercices de cours précédents sont deux à deux non semblables, et toute matrice nilpotente de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ est semblable à l'une d'entre elles.

4. Un exemple de matrice non trigonalisable semblable à une matrice diagonale par blocs

Nous avons étudié en détail des exemples de matrices trigonalisables. Lorsqu'une matrice n'est pas trigonalisable, on peut essayer de lui trouver une matrice semblable diagonale par blocs.

Examinons pour conclure un tel exemple.

Exemple 12. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

On vérifie sans peine que

$$\chi_A(X) = (X^2+1)(X^2+4).$$

Le polynôme χ_A n'admet aucun zéro réel. En particulier, A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. Elle n'est pas non trigonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ car χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (en revanche, elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ car χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.) Nous allons voir que A est cependant semblable, dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, à une matrice diagonale par blocs.

Posons $P_1 = X^2+1$ et $P_2 = X^2+4$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

On remarque que $\operatorname{Ker} P_1(f)$ et $\operatorname{Ker} P_2(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ stables par f (exercice).

Cherchons des bases de chacun de ces sous-espaces. En remarquant que, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$X \in \operatorname{Ker} P_1(f) \iff (A^2+I_4)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on vérifie aisément que $\operatorname{Ker} P_1(f)$ a pour base (V_1, V_2), où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De même, on vérifie que $\operatorname{Ker} P_2(f)$ a pour base (V_3, V_4), où $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La famille (V_1, V_2, V_3, V_4) forme une base de $\mathbb{R}^4$. Par conséquent, on a :

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \operatorname{Ker} P_2(f),$$

et (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base adaptée à cette décomposition. En notant $P = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_0}(V_1, V_2, V_3, V_4)$, où $\mathscr{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on obtient

$$A = PBP^{-1} \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$