Fiche n°2 : réduction des endomorphismes (1$^{\text{er}}$ niveau).

(environ 6 séances)

Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice par calculs « directs », sans recours au polynôme caractéristique

Exercice 1 – exemples et contre-exemples.

1. Donner un exemple de matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont le spectre est vide.
2. Donner un exemple de matrice diagonalisable de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont le spectre est réduit à $\{1\}$. Que peut-on dire d'une telle matrice ?
3. Donner un exemple de matrice non diagonalisable de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont le spectre est réduit à $\{1\}$.
4. Donner un exemple de matrice non diagonale de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont le spectre est $\{-1,1\}$. Une telle matrice est-elle toujours diagonalisable ?
5. Donner un exemple de matrice non nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont le spectre est réduit à $\{0\}$. Une telle matrice peut-elle être diagonalisable ?
6. Donner un exemple de couple $(A,B)\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ telle que $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)=\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(B)=\{1\}$ et telle que A et B ne soient pas semblables.
7. Peut-on trouver une paire $(A,B)\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ telle que $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)=\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(B)=\{-1,1\}$ et telle que A et B ne soient pas semblables ?

Exercice 2 – diagonalisabilité d'une matrice d'ordre 3 (presque) sans calcul.
On considère la matrice
$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

1. Sans aucun calcul, en observant seulement les colonnes de la matrice A, repérer deux valeurs propres réelles λ et μ pour A.
2. En déduire que la matrice A est semblable à une matrice du type
$$T=\begin{pmatrix}\lambda&0&\alpha\\0&\mu&\beta\\0&0&\nu\end{pmatrix},$$
où α, β et ν sont trois réels.
3. En utilisant la trace, déterminer la valeur de ν. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 – obtention d'éléments propres par résolution d'un système linéaire.
Soit
$$A=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&1\\1&\cdots&1&2\end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} A$?
2. Trouver les valeurs propres non nulles de A. (*Indication : résoudre directement l'équation $AX=\lambda X$. On peut aussi calculer le polynôme caractéristique mais les calculs sont plus fastidieux.*)
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Propriétés et utilisation du polynôme caractéristique

Exercice 4 – matrice d'une symétrie.
Soient
$$A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\-2&2&3\end{pmatrix},$$
et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de f ?
2. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.
3. Expliciter une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour f et écrire la matrice de f dans cette base.
4. Comment s'interprète géométriquement l'endomorphisme f ?
5. Pouvait-on obtenir les résultats des questions 2 et 4 par une autre méthode ?

Exercice 5 – diagonalisation effective de matrices d'ordre 3.
Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$?
$$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\1&2&1\\0&2&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&0&1\\1&-2&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&3&1\\2&2&2\end{pmatrix}.$$
Le cas échéant, diagonaliser la matrice.

Exercice 6 – éléments propres et polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.

Dans cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

On dit que A est la ***matrice compagnon du polynôme***

$$P = X^3 - a_2X^2 - a_1X - a_0 \in \mathbb{K}[X].$$

1. On cherche à étudier dans cette question à quelle condition sur P la matrice A est diagonalisable.

1.1 Montrer que les valeurs propres de A sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme P. (*Indication : résoudre directement l'équation* $AX = \lambda X$, *sans calculer le polynôme caractéristique.*)

1.2 En déduire que si le polynôme P a exactement 3 racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{K}$, alors A est diagonalisable. Déterminer dans ce cas une base de $\mathbb{K}^3$ formée de vecteurs propres pour A.

1.3 ♠ Réciproquement, montrer que si A est diagonalisable, alors le polynôme P est scindé et à racines simples dans $\mathbb{K}$. (*Indication : utiliser la résolution précédente* $AX = \lambda X$ *pour déterminer les vecteurs propres.*)

1.4 ♠ **Exemple d'application.** Démontrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. (*Indication : étudier les variations de la fonction polynomiale* $x \mapsto x^3 + x^2 + 1$ *sur* $\mathbb{R}$.)

2. Calculer le polynôme caractéristique de A. Retrouver ainsi le résultat de la question 1.1.

Utilisation d'un polynôme annulateur

Exercice 7 – diagonalisabilité d'une matrice dont on connaît un polynôme annulateur.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 2$. On suppose de plus que la matrice A vérifie

$$A^4 + A^3 + A^2 + A = 0.$$

Que peut-on dire du spectre de A ? Si de plus on suppose la matrice A inversible, peut-elle être diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

♠ **Exercice 8 – diagonalisation simultanée**

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes de E. On suppose que f et g commutent, c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$, et que f et g sont diagonalisables.

1. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

2. Montrer que les endomorphismes induits par g sur chaque sous-espace propre de f sont diagonalisables.

3. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de g et f sont diagonales, autrement dit, qu'on peut diagonaliser « simultanément » f et g.

4. Illustrer par un exemple que ce résultat est mis en défaut si f et g ne commutent pas.

5. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver des matrices diagonales D et D' et une matrice inversible $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1} \quad \text{et} \quad B = PD'P^{-1}.$$

(*Indication : vérifier que* $AB = BA$ *et considérer les endomorphismes de* $\mathbb{R}^4$ *canoniquement associés à* A *et* B.)

Applications de la diagonalisation

Exercice 9 – recherche de sous-espaces stables grâce aux éléments propres.

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Le but de cet exercice est de trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ *stables par* f.

1. Trouver les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

2. Montrer que le plan vectoriel

$$P_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$$

est stable par f.

3. Trouver les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par f. (*Indication : si P est stable par f, $P \neq P_0$, observer que $P \cap P_0$ est une droite stable par f.*)

4. Conclusion : quels sont les sous-espaces stables de $\mathbb{R}^3$ par f ?

Exercice 10 – calcul de puissances d'une matrice carrée.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable et diagonaliser A.

2. Calculer A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$. *(Par convention $A^0 = I_n$.)*

3. Montrer que A est inversible, et calculer A^{-1}.

4. En déduire A^k, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. *(Par convention, si $k \in \mathbb{Z}$ avec $k < 0$, $A^k = (A^{-1})^{-k}$.)*

Exercice 11 – étude de trois suites récurrentes linéaires d'ordre 2 « imbriquées ».

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable et diagonaliser de la matrice A.

2. Considérons trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 2v_n + w_n}{12} \\ v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 2v_n - w_n}{3} \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n - 2v_n + 7w_n}{12}. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

3. Calculer A^n à l'aide de la question 1. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n et des réels u_0, v_0 et w_0.

4. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sont-elles convergentes ? Si oui, préciser la limite de chacune d'elles.

Exercice 12 – résolution d'un système différentiel linéaire d'ordre un.

On cherche dans cet exercice tous les triplets (f,g,h) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, vérifiant le système différentiel $(\mathscr{S})$ suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f'(t) &= f(t) + 2g(t) - h(t) \\ g'(t) &= 2f(t) + 4g(t) - 2h(t) \\ h'(t) &= -f(t) - 2g(t) + h(t). \end{cases}$$

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable, et trouver une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

2. Résoudre le système différentiel suivant, où u, v, w sont trois fonctions dérivables :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

3. En déduire les solutions du système $(\mathscr{S})$.

Les exercices 1, 4 et 5 doivent être maîtrisés ; pour s'entrainer, on pourra aussi reprendre les nombreux exercices du cours du même type que l'exercice 5.