Fiche n°3 : réduction des endomorphismes ($2^{\text{ème}}$ niveau).

(environ 3 séances)

Trigonalisation effective

Exercice 1 – trigonalisation d'une matrice avec valeur propre double.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A, et déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propres de A. En déduire que A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, mais non diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Trouver une base $\mathscr{B} = (V_1, V_2, V_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où α est un réel non nul.

Exercice 2 – trigonalisation d'une matrice avec valeur propre triple.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A, et déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A. En déduire que A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, mais non diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Trouver une base $\mathscr{B} = (V_1, V_2, V_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

où α, β sont des réels non tous les deux nuls, et γ un réel que l'on déterminera.

Exercice 3 – trigonalisation d'une autre matrice avec valeur propre triple.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A, et déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A. En déduire que A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, mais non diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Trouver une base $\mathscr{B} = (V_1, V_2, V_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

où α est un réel non nul, et β, γ des réels non tous les deux nuls.

Trigonalisation et sous-espaces stables

Exercice 4 – trigonalisation et sous-espaces stables.
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension non nulle n et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe un sous-espace de E stable par f de dimension k. Ce résultat reste-t-il vrai en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Calculs de puissances de matrices

Exercice 5 – décomposition de Dunford dans un cas particulier.
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}),$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que les sous-espaces $F = \mathrm{Ker}\left((f - I)^2\right)$ et $G = \mathrm{Ker}\left((f + I)^2\right)$ sont stables par f. On note f_F et f_G les endomorphismes induits par f sur F et G respectivement.

3. ♠ Trouver une base $\mathscr{B}_F$ de F dans laquelle la matrice de f_F est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et trouver une base $\mathscr{B}_G$ de G dans laquelle la matrice de f_G est de la forme $\begin{pmatrix} -1 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, où α et β sont des réels non nuls.
4. Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(*Indication : remarquer que* $N = B - D$, *où* $D = \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)$, *est une matrice nilpotente qui commutent avec* D *et utiliser la formule du binôme de Newton.*)

Matrices nilpotentes

Exercice 6 – matrice nilpotente et forme de Jordan.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

et posons $N = A - 2I_3$.

1. Montrer que $N^3 = 0$ et que $N^2 \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$N = PJP^{-1}, \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(*Indication : considérer l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à* N *et montrer qu'il existe* $x \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $(x, f(x), f^2(x))$ *forme une base de* $\mathbb{R}^3$.)

3. En déduire que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 – commutant d'une matrice nilpotente.
Soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le ***comumutant*** $\mathscr{C}(N)$ de la matrice N dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathscr{C}(N) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \colon MN = NM\}.$$

2. ♠ En déduire le commutant $\mathscr{C}(A)$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de l'exercice précédent dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, où

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \colon MA = AM\}.$$

> Les exercices de cette fiche sont plus délicats mais aident à la compréhension de la diagonalisabilité et, plus généralement, des applications linéaires en dimension finie.