Fiche n°1 : révisions sur les matrices d'applications linéaires et le déterminant. *(environ 3 séances)*

Matrices de familles de vecteurs

Exercice 1 – matrices de passages entre bases de $\mathbb{R}^2$.
On considère différents vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

$$e_1 = (1,0) \quad e_2 = (0,1) \quad u = (4,3) \quad v = (5,4) \quad w = (6,5).$$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$, $\mathscr{B}' = (u, v)$, $\mathscr{B}'' = (v, w)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Quelle est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$?
2. Montrer que $\mathscr{B}''$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}''$. Quelle est la matrice de passage de $\mathscr{B}''$ à $\mathscr{B}$?
3. Quelle est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}''$?
4. Soit $u = (3,2) \in \mathbb{R}^2$. Donner les coordonnées de u dans les trois bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$.

Matrices d'applications linéaires

Exercice 2 – matrice d'un endomorphisme dans des bases différentes
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par $f(x,y,z) = (z, x-z, y+z)$.

1. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f est bijectif, et calculer, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f^{-1}(x,y,z)$.
3. Calculer, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(f \circ f)(x,y,z)$.
4. Posons $v_1 = (-1,0,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$, $v_3 = (1,0,1)$. Montrer que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Quelle est la matrice de $f \circ f$ dans la base $\mathscr{B}$?
6. On note P la matrice de la famille $\mathscr{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $P^{-1}A^2P$. Le résultat était-il prévisible ? Commenter.

Exercice 3 – une symétrie par rapport à une droite dans le plan.
Soient D et Δ les deux droites de $\mathbb{R}^2$ d'équations respectives $x - 2y = 0$ et $2x - y = 0$.

1. Dessiner D et Δ dans le plan.
2. Vérifier que $D \oplus \Delta = \mathbb{R}^2$. On note s la symétrie par rapport à D parallèlement à Δ. Représenter un vecteur quelconque $v \in \mathbb{R}^2$ et son image $s(v)$ sur le dessin précédent.
3. Que vaut $s(s(v))$ pour un vecteur quelconque $v \in \mathbb{R}^2$? En déduire $\operatorname{Ker} s$ et $\operatorname{Im} s$. Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, l'équation $s(u) = v$ a une unique solution $u \in \mathbb{R}^2$.
4. Écrire la matrice de s dans la base canonique et en déduire $s(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4 – matrices d'une projection de $\mathbb{R}^3$ dans différentes bases.
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Construire une base (u_1, u_2) du plan vectoriel
$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}.$$
2. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $u_3 = (1,1,1)$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$. En déduire que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P parallèlement à la droite D dans la base (u_1, u_2, u_3), puis dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
4. Écrire la matrice de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur la droite D parallèlement au plan P dans la base (u_1, u_2, u_3), puis dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
5. Écrire la matrice de la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan P parallèlement à la droite D dans la base (u_1, u_2, u_3), puis dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 – une projection de $\mathbb{R}^3$ donnée matriciellement.
Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que p est une projection de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Matrices semblables

Exercice 6 – utilisation de certains invariants pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables.

1. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

2. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

3. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 7 – obtention de matrices semblables gâce à un endomorphisme.
Montrez que les matrices suivantes sont semblables

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 – recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme a une allure préalablement fixée.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.1 Vérifier que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1.2 ♠ Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. ♠ Plus généralement, soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ de E dans laquelle la matrice de f est N.

La question 2 montre que toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$ et $A \neq 0$ est semblable à la matrice N.

Déterminants

Exercice 9 – déterminant de matrices particulières.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Que peut-on dire du déterminant d'une matrice *nilpotente* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire telle qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^N = 0$) ?

2. Que peut-on dire du déterminant d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = I_n$?

3. Que peut-on dire du déterminant d'une matrice *antisymétrique* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire telle que $A^T = -A$) lorsque n est impair ?

Exercice 10 – utilisation du déterminant pour savoir si une matrice est inversible.

1. Calculer, pour $t \in \mathbb{C}$, le déterminant de la matrice suivante sous forme factorisée :

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice A_t est inversible.

3. Lorsque A_t n'est pas inversible, déterminer une base de $\operatorname{Ker} A_t$.

Exercice 11 – déterminant d'une matrice circulante.
On pose $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. On rappelle les relations : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

1. Montrer que les vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{C}^3$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}.$$

2. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice *circulante* suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ et écrire la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3).

3. En calculant de déterminant de f de deux manières différentes, obtenir une factorisation de $3abc - a^3 - b^3 - c^3$.

♠ **Exercice 12 – déterminant d'une matrice dépendant d'un paramètre.**
Soient $t \in \mathbb{R}$ et A_t la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 2 & 0 & 0 \\ 1 & t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 2 & t \end{pmatrix}.$$

On rappelle le résultat suivant : si l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ à coefficients réels a, b, c et inconnue x admet deux solutions $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, alors l'équation de degré quatre $at^4 + bt^2 + c = 0$ d'inconnue t admet quatre solutions : $\pm\sqrt{x_1}, \pm\sqrt{x_2}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice A_t, puis en donner une expression factorisée, c'est-à-dire sous forme d'un produit.

2. Pour quelles valeurs du paramètre $t \in \mathbb{R}$ la matrice A_t est-elle inversible ? Montrer que A_t est inversible si et seulement si t n'appartient pas à l'ensemble $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, où t_1, t_2, t_3, t_4 sont des réels à préciser.

3. On suppose dans cette question que A_t n'est pas inversible, autrement dit que $t \in \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$.
Déterminer, selon la valeur de t,

$$\operatorname{Ker} A_t = \{X \in \mathbb{R}^4 \colon A_t X = 0\}.$$

Montrer que $\operatorname{Ker} A_t$ est une droite vectorielle dont on précisera une base V_t.

4. Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a : $A_0 V_{t_i} = (-t_i) V_{t_i}$.
(*Indication : on pourra exprimer A_t en fonction de A_0 et I_4.*)

5. Montrer que $\mathscr{B} = (V_{t_1}, V_{t_2}, V_{t_3}, V_{t_4})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

6. On note f_0 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A_0. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (V_{t_1}, V_{t_2}, V_{t_3}, V_{t_4})$? On note D cette matrice.

7. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base $\mathscr{B} = (V_{t_1}, V_{t_2}, V_{t_3}, V_{t_4})$. Exprimer A_0 en fonction de P, D et l'inverse de P.