Fiche n°1 : espaces vectoriels

(*environ 5 séances*)

Dans ce qui suit, on note $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions k-fois dérivables et dont la k-ieme dérivée est continue, et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 – exemples et contre-exemple d'espaces vectoriels.
Parmi les ensembles suivant, dire lesquels sont des espaces vectoriels, et éventuellement donner un espace vectoriel connu dont ils sont sous-espaces vectoriels. Dans tous les cas, sauf E_7, représenter ces ensembles.

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 5x+2y+z=0\},$$
$$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 3x=-2y\},$$
$$E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+2y=1\},$$
$$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x+4y-z=2\},$$
$$E_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2=1\},$$
$$E_6 = \{(3t+2s, s-t) \in \mathbb{R}^2 \colon t,s \in \mathbb{R}\},$$
$$E_7 = \{(t+3s+4u, s-u^2, u+1, s+u) \in \mathbb{R}^4 \colon t,s,u \in \mathbb{R}\},$$
$$E_8 = \{(2t,-t) \in \mathbb{R}^2 \colon\ t \in [-3,+\infty[\}.$$

Exercice 2 – sous-espaces vectoriels dans des espaces de fonctions.
Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont des espaces vectoriels.

$$E_1 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \colon f(7)=0\},$$
$$E_2 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \colon \int_0^3 f(t)\mathrm{d}t = 1\},$$
$$E_5 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \colon f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\},$$
$$E_6 = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \colon f''-3f'+2f=e^t\},$$
$$E_3 = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon u_{n+2}=2u_{n+1}-3u_n\},$$
$$E_4 = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ :\ u_{n+1} \geqslant u_n\}.$$

♠ **Exercice 3 – union d'espaces vectoriels.**
Soit E un espace vectoriel. Soient F,G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Familles libres, familles generatrices

Exercice 4 – vrai/faux.
Parmi les assertions suivantes dire lesquelles sont vraies ou fausses. Lorsque l'assertion est fausse donner un contre-exemple.

a) toute famille contenant une famille libre de E est libre,
b) toute famille extraite d'une famille libre de E est libre,
c) toute famille contenant une famille liée de E est liée,
d) toute famille extraite d'une famille liée de E est liée,
e) toute famille contenant une famille génératrice de E est une famille génératrice de E,
f) toute famille extraite d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de E.

Exercice 5 – familles libres et génératrices.
Montrer que les trois familles suivantes engendrent $\mathbb{R}^2$. Préciser lesquelles sont libres.

$$((1,0),(2,3),(1,1)), \quad ((1,0),(2,3)), \quad ((2,3),(4,5)).$$

Exercice 6 – liberté d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
La famille de vecteurs $(x=(1,2,3,4), y=(2,1,3,4), z=(0,1,6,8), t=(0,1,3,4))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 7 – une famille libre dans l'espace des suites.
Soit $V = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \colon u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n\}$. Montrer que V est un espace vectoriel, et montrer que la famille $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$ avec

$$u_n = 1, \quad v_n = 3^n+1, \quad w_n = 3^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

est une famille génératrice de V. Est-elle libre ?

Exercice 8 – familles libres dans des espaces variés

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$u_n = n+1, \quad v_n = n^3 - 3n^2 + 3n + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Montrer que la famille

$$x \mapsto e^{3x}, \quad x \mapsto e^x, \quad x \mapsto x^2$$

est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Montrer que la famille

$$x \mapsto x, \quad x \mapsto \cos(x) \quad , x \mapsto \sin(x)$$

est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Est-elle generatrice de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

♠ **Exercice 9 – exemples d'espaces vectoriels de dimension infinie.**

1. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ne possède pas de famille génératrice finie.
2. Montrer que l'ensemble $E = \{f \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}) \colon \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\}$ ne possède pas de famille génératrice finie (vérifier que E est bien un espace vectoriel !).
   Indication : on pourra montrer qu'il existe des polynômes de tout degré dans E, et par récurrence que le degré maximum d'un polynôme engendré par une famille finie est bornée.

En déduire que les espaces $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et E sont de dimension infinie.

Exercice 10 – sous-familles génératrices.

Considérons les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (2, -1, 4), \quad u_2 = (-1, 2, 1), \quad u_3 = (-1, 1, -1), \quad u_4 = (1, 1, 1).$$

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) engendre $\mathbb{R}^3$. Cette famille est-elle libre ? Déterminer toutes les sous-familles de (u_1, u_2, u_3, u_4) qui engendrent $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Déterminer toutes les sous-familles de (u_1, u_2, u_3) qui engendrent E.

EQUATIONS CARTÉSIENNES ET PARAMÉTRIQUES.

Exercice 11 – combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 2, 3, 4), \quad u_3 = (2, -1, 3, 0).$$

Montrer que $u = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ est combinaison linéaire de (u_1, u_2, u_3) si et seulement si

$$y_1 - y_2 - y_3 + y_4 = 0.$$

Montrer que $v = (3, 1, 1 - 1)$ est combinaison linéaire des vecteurs précédents, et donner une combinaison. Une telle combinaison est-elle unique ?

Exercice 12 – passage d'une équation paramétrique à une équation cartésienne.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $u = (2, 3)$. Donner une équation paramétrique et équation cartésienne de $\mathrm{Vect}(u)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u = (1, 2, 1)$ et $v = (2, 1, 2)$. Donner une equation cartésienne de $\mathrm{Vect}(u, v)$.

Exercice 13 – passage d'une équation cartésienne à une équation paramétrique.

Soit E l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ de

$$(S) : x + y - 2z = 0,$$

et soient $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (4, 2, 3), u_3 = (10, 4, 7)$.

1. Montrer que u_1, u_2, u_3 appartiennent à E.
2. En déduire que (u_1, u_2, u_3) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille generatrice de E. Est-elle libre ? Si non, en extraire une famille libre.
4. Donner une équation paramétrique de E.
5. Soit $u_4 = (1, 1, -2)$. Montrer que (u_1, u_2, u_4) est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Bases et dimension

Exercice 14 – famille libre extraite pour calculer une dimension.
Extraire de la famille

$$u_1 = (1, 2, 0, 3), \quad u_2 = (2, 4, 0, 6), \quad u_3 = (1, -1, 1, -1), \quad u_4 = (4, 5, 1, 8),$$

une base de $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Quelle est la dimension de E ?

Exercice 15 – bases de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$.
Donner une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y - 2z = 0\},$$
$$F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x = -z,\ y + z + t = 0\},$$
$$F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y - 2z = 0,\ t - 3y + 6z = 0,\ t + 3x = 0\},$$
$$F_4 = \{(x + 2y, x + z, x - 2y + 2z) \in \mathbb{R}^3 \colon x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 16 – base dans un espace de fonctions.
Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soient

$$f = \cos, \quad g = \sin, \quad h \colon x \mapsto \sin(2x), \quad k \colon x \mapsto \sin(x) + \cos(x).$$

Donner une base de $\mathrm{Vect}(f, g, h, k)$.

Exercice 17 – utilisation du théorème de la base incomplète.
Soient les vecteurs suivant de $\mathbb{R}^4$;

$$u_1 = (1, 1, 1, 2), \quad u_2 = (0, 1, 2, -1), \quad u_3 = (1, 3, 5, 0),$$

et $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

1. Donner une base $\mathscr{B}$ de E et préciser la dimension de E.

2. Combien faut-il ajouter de vecteur(s) à la famille libre $\mathscr{B}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$?

3. Donner des exemples de vecteurs u, v qui ne soient pas dans E, tels que (u, v) soit libre mais tels que $\mathscr{B} \cup (u, v)$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^4$.

4. Completer $\mathscr{B}$ en une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ (*on pourra utiliser des vecteurs de la base canonique*). Si on note (y_1, y_2, y_3, y_4) les coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$, quelles sont les équations en les y_i qui définissent E ?

5. Donner les coordonnées d'un vecteur quelconque $u \in \mathbb{R}^4$ dans la base $\mathscr{B}'$.

♠ Exercice 18 – décomposition unique d'une fonction comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, P le sous-ensemble de E constitué des fonctions paires, c'est-à-dire $P = \{f \in E \colon \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$ et I le sous-ensemble de E formé des fonctions impaires, c'est-à-dire $I = \{f \in E \colon \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$

1. Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Montrer que tout vecteur de E peut s'écrire de façon unique comme somme d'un vecteur de P et d'un vecteur de I.

Exercice 19 – suite de Fibonacci.
Soit $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ :\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$.

Leonardo Fibonacci *(vers 1175 à Pise – vers 1250) est un mathématicien italien. Il avait, à l'époque, pour nom d'usage «Leonardo Pisano» (il est encore actuellement connu en français sous l'équivalent «Léonard de Pise»), et se surnommait parfois lui-même «Leonardo Bigollo» (bigollo signifiant «voyageur» en italien). S'il est connu pour la suite de Fibonacci, il joue surtout un rôle d'une importance considérable en faisant le lien entre le savoir mathématique des Arabes, notamment des chiffres indo-arabes, et l'Occident.*

1. Montrer que E est un espace vectoriel. Montrer que si $u, v \in E$ vérifient $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ alors $u = v$.

2. Montrer que $X^2 - X - 1$ a deux racines réelles,

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

3. Montrer que $(\phi^n)_n$ et $(\psi^n)_n$ forment une base de E.

4. Soit $(F_n)_n$ la suite de E telle que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. Donner les coordonnées de la suite de Fibonacci $(F_n)_n$ dans la base précédente. En déduire la valeur de F_n. *La suite* $(F_n)_n$ *est appelée la* suite de Fibonacci.

Exercice 20 – argument de dimension pour obtenir une égalité entre espaces vectoriels.
Soit $E \subset F \subset G \subset H$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. On suppose que $E \neq \{0\}$ et $H \neq \mathbb{R}^4$. Montrer que deux de ces sous-espaces sont égaux.

Exercice 21 – polynômes échelonnés.

1. On note $P_1, \ldots, P_k$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degrés deux à deux distincts, i.e., $\deg P_i \neq \deg P_j$ si $i \neq j$. Montrer que la famille $(P_1, \ldots, P_k)$ est libre.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $(X, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Donner les coordonnées d'un polynôme quelconque P de $\mathbb{R}[X]$ dans la base précédente.

Joseph Louis, comte de Lagrange *(1736-1813) est un mathématicien, mécanicien et astronome. Élève brillant issu d'un milieu aisé, il étudie au collège de Turin. Il prend goût pour les mathématiques par hasard à l'âge de 17 ans après la lecture d'un mémoire de Edmund Halley portant sur les applications de l'algèbre en optique. Il devient rapidement un mathématicien confirmé. Dans une lettre adressée à Leonhard Euler, sans doute le plus grand mathématicien de l'époque, il jette les bases du calcul variationnel. Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, il démontre le théorème de Wilson sur les nombres premiers et la conjecture de Bachet sur la décomposition d'un entier en quatre carrés. On lui doit un cas particulier du théorème auquel on donnera son nom en théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, l'équation différentielle de Lagrange.*

♠ Exercice 22 – polynômes de Lagrange.

Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, montrer qu'il existe un unique polynôme L_j tel que

$$L_j(\alpha_j) = 1, \quad \text{et pour tout } i \neq j, \quad L_j(\alpha_i) = 0.$$

2. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Donner les coordonnées d'un polynôme quelconque $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$.

Intersection, somme et supplémentaires

Exercice 23 – base de la somme et de l'intersection de sous-espaces vectoriels via des familles génératrices.

Soit $E_1 = \text{Vect}((1,0,1,1),(5,-1,6,1))$ et $E_2 = \text{Vect}((1,1,2,0),(1,2,2,0),(3,1,6,0))$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Donner une base de E_1+E_2 et une base de $E_1 \cap E_2$. La somme est-elle directe ?

Exercice 24 – base de la somme et de l'intersection de sous-espaces vectoriels via des équations.

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces

$$E_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y+z+t=0\}$$

et

$$E_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0,\ z=2t\}.$$

1. Déterminer les dimensions et des bases de E_1 et E_2.

2. Trouver la dimension et une base de $E_1 \cap E_2$.

3. Que vaut E_1+E_2 ? La somme est-elle directe ?

Exercice 25 – recherche d'un supplémentaire dans un cas particulier.

Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $E_1 = \text{Vect}((1,1,0),(0,1,0))$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ y=0\}$.

1. Représenter E_1 et E_2 sur une même figure.

2. Donner une base de E_1 et E_2, ainsi que de $E_1 \cap E_2$.

3. E_1 et E_2 sont-ils en somme directe ? Donner un supplémentaire de E_2.

Exercice 26 – calcul de supplémentaires.

Dans $\mathbb{R}^5$, on considère

$$u_1 = (3,2,3,-1,2), \quad u_2 = (1,2,1,-1,-2), \quad u_3 = (1,-6,1,3,14),$$

et

$$v_1 = (3,4,3,-2,-2), \quad v_2 = (-2,-3,-3,1,2), \quad v_3 = (2,1,-3,-3,2),$$

et on note $E = \text{Vect}(u_1,u_2,u_3)$, $F = \text{Vect}(v_1,v_2,v_3)$.

1. Trouver une base et la dimension de E et de F.

2. Donner une famille generatrice de $E+F$.

3. Trouver une base et la dimension de $E+F$.

4. Trouver la dimension de $E \cap F$. Les sous-espaces vectoriels E et F sont-ils en somme directe ?

5. Donner une base de $E \cap F$.

6. Dans $\mathbb{R}^5$, trouver un supplémentaire de $E + F$, de E et de F.

Exercice 27 – recherche de supplémentaires dans l'espace des polynômes.
On se place dans $\mathbb{R}_5[X]$, et on pose

$$E = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \colon \exists Q \in \mathbb{R}_5[X],\, P = (X^2 - X - 1)Q\},$$

$$F = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \colon P(a) = P'(a) = P''(a) = 0\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_5[X]$.

2. Donner des bases de E et F.

3. Montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ est un supplémentaire de E et de F dans $\mathbb{R}_5[X]$.

4. ♠ Que peut-on en déduire sur $E \cap F$? Calculer $E \cap F$ suivant les valeurs de a.

5. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_5[X]$ il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ tels que

$$P = (X^2 - X - 1)Q + R.$$

Exercice 28 – un calcul de dimension grâce à un supplémentaire.
Dans $\mathbb{R}^n$, posons

$$E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_3 = 0,\, 4x_1 + 2x_2 = 0\}.$$

1. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(1, 0, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0))$ est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^n$.

2. Quelle est la dimension de F ?

3. En déduire la dimension de E.

Exercice 29 – un exemple d'une droite et d'un hyperplan supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
Soient dans $\mathbb{R}^n$ la droite $D = \mathrm{Vect}(1, 1, \dots, 1)$ et l'hyperplan

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Montrer que D et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.