Fiche n°2 : révisions sur les matrices

(1 à 2 séances)

Multiplication matricielles

Exercice 1 – produit d'une matrice carrée par une matrice-colonne

Soient $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^3$ donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 13 \\ 5 & 3 & 34 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

où $\mathbb{R}^3$ est ici identifié à $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Calculer AX. Peut-on calculer XA ? Calculer $X^T A$.

Exercice 2 – produits et commutativité.

Parmi les matrices suivantes, calculer lorsque cela est possible les produits AB et BA. L'égalité $AB = BA$ a-t-elle toujours lieu lorsque les deux produits existent ? Et a-t-on toujours $AB \neq BA$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 – puissances de matrices carrées.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculer A^7 et A^{2021} (*Indication : On pourra tout d'abord calculer* A^3).

Interpréter A comme la matrice d'une rotation c'est-à-dire de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et retrouver le résultat précédent.

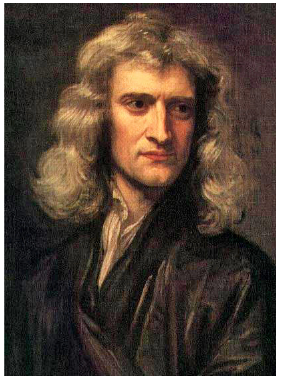
Exercice 4 – produits et binôme de Newton.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, en général, pour deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$. *Indication : On cherchera deux matrices A, B telles que $AB \neq BA$.*
2. Montrer que si deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont telles que $AB = BA$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Isaac Newton *(25 décembre 1642 – 20 mars 1727) est un mathématicien, physicien, philosophe, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Gottfried Wilhelm Leibniz, du calcul infinitésimal.*

Il est aussi connu pour la généralisation du théorème du binôme et l'invention dite de la méthode de Newton permettant de trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction réelle d'une variable réelle.



Échelonnage et rang

Exercice 5 – échelonner une matrice pour déterminer son rang.

Échelonner les matrices suivantes et préciser leur rang :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ 3 & 9 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

Exercice 6 – l'espace vectoriel des vecteurs annulés par une matrice.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

et l'ensemble

$$V = \{X \in \mathbb{R}^3 \colon AX = 0\},$$

où $\mathbb{R}^3$ est identifié ici à $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrez que V est un espace vectoriel, donner sa dimension ainsi qu'une base.

Résolution de systèmes linéaires

Exercice 7 – résolutions de systèmes linéaires.
Résoudre les systèmes linéaires suivants d'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$, où :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Comme toujours, on identifie $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 8 – systèmes linéaire et équations cartésiennes de plans vectoriels.
Soient $P, Q \subset \mathbb{R}^3$ les plans d'équations respectives

$$P \colon x + y + z = 0 \quad \text{et} \quad Q \colon 3x + 2y - 5z = 0.$$

Determiner la dimension et une base de $P \cap Q$.

Inversion de matrices carrées

Exercice 9 – calcul d'inverses de matrices carrées.
Parmi les matrices suivantes, dire lesquelles sont inversibles et, le cas échéant, calculer leurs inverses.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Résoudre l'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$