Fiche n°3 : applications linéaires

(4 séances)

On rappelle que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ celui des suites réelles, $\mathbb{R}[X]$ celui des polynômes réels, $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ celui des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$ celui des fonctions continues k fois dérivables dont toutes les dérivées $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ sont continues sur I, où $k \in \mathbb{N}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Applications linéaires

Exercice 1 – reconnaître une application linéaire définie sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
Parmi les applications suivantes, dire lesquelles sont des applications linéaires. Justifier les réponses.

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x+2y-z, x+z, -2y+4z) \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, y-x, -y) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x^2+2y-z, \cos(x), -2y+4z) \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, y-x, 1-y). \end{array}$$

Exercice 2 – reconnaître une application linéaire définie sur des espaces vectoriels variés.
Parmi les applications suivantes, dire lesquelles sont des applications linéaires. Justifier les réponses. On commencera par vérifier que les ensembles de définitions et d'arrivées sont bien des espaces vectoriels !

$$\varphi_1 : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & 3A \end{array}$$

$$\varphi_2 : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+z & z \\ y & x-z \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\varphi_3 : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\varphi_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\geqslant 0} & \longmapsto & (1, u_0+1, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)_{n\geqslant 0} \end{array}$$

$$\varphi_5 : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & 3f' + f'' \end{array}$$

$$\varphi_6 : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 (f(z)+1)\mathrm{d}z \end{array}$$

$$\varphi_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(2) + P'. \end{array}$$

Noyaux et images d'applications linéaires

Dans les exercices qui suivent, vérifier brièvement que les applications sont bien linéaires lorsqu'on demande de déterminer le noyau, l'image, la matrice dans une base, etc.

Exercice 3 – calcul explicite du noyau et de l'image d'une application linéaire donnée.
Soient $E = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b+c = 0\}$ et

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & \frac{1}{3}(2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z). \end{array}$$

1. Déterminer le noyau de l'application linéaire f. L'application f est-elle injective ?
2. Calculer l'image de f. L'application f est-elle surjective ?

Exercice 4 – utilisation du théorème du rang pour calculer le rang d'une application linéaire.
Quel est le rang de l'application linéaire $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & 4P' \end{array}$?

Exercice 5 – rang d'une application linéaire donnée.
Soit l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x+y+3z, x+2x, 2x+2y+2z). \end{array}$$

Calculer le rang de f et en déduire que f n'est pas injective.

Exercice 6 – utilisation du théorème du rang pour déterminer l'image d'une application linéaire.
Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y-2x+z, x-2y+z, 2z-x-y). \end{array}$$

1. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$. En déduire le rang de f.

2. Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

Matrice d'une famille de vecteurs dans des bases

Exercice 7 – matrices de passages entre bases de $\mathbb{R}^2$.
Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, et $u = (2,4)$, $v = (3,-1)$.

1. Vérifier que $\mathscr{B}' = (u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

2. Calculer l'inverse de P. Quelle est la matrice de passage $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$?

3. Quelles sont les coordonnées du vecteur $(7,-1)$ dans la base $\mathscr{B}' = (u,v)$?

Exercice 8 – matrices de passages entre bases de $\mathbb{R}^2$ et puissances de matrices.
On considère différents vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

$$e_1 = (1,0) \quad e_2 = (0,1) \quad u = (4,3) \quad v = (5,4) \quad w = (6,5).$$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$, $\mathscr{B}' = (u,v)$, $\mathscr{B}'' = (v,w)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Quelle est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$?

2. Montrer que $\mathscr{B}''$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}''$. Quells est son inverse ?

3. Quelle est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}''$?

4. Soit $u = (3,2) \in \mathbb{R}^2$. Donner les coordonnées de u dans les trois bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$.

5. Soit

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -31 & 41 \\ -25 & 33 \end{pmatrix}$$

À l'aide la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, calculer A^3 puis A^7.

♠ Exercice 9 – recherche d'une base particulière dans un espace de polynômes.
On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$ soient $P(-1), P(0), P(1)$.

Matrice d'un endomorphisme dans des bases et matrices semblables.

Exercice 10 – matrice dans des bases d'une application linéaire donnée.
Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (4x+y+4z, 3x+y+4z, x+y+3z). \end{array}$$

1. Donner la matrice de l'application linéaire f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note A cette matrice.

2. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer f^{-1}. Exprimer la réponse sous la forme $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \cdots \end{array}$.

4. Posons $u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,0,1), u_3 = (1,-1,0)$. Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donnez la matrice de f dans cette base. On note A' cette matrice.

5. Montrer sans calcul que A' est inversible. Quel est le lien entre A et A' ?

Exercice 11 – noyau et image d'une application linéaire dans un espace de polynômes.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $3XP' + (X^2-1)P''$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique.

2. L'endomorphisme f est-il un automorphisme ?
3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Exercice 12 – composée n-ième d'une application linéaire pour calculer la puissance d'une matrice.
On considère l'application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Que vaut $f(1,2,3)$?
2. Calculer le rang de f.
3. Soient $u_1 = (1,-1,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (0,1,1/2)$. Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.
4. Calculer f^{2021}. En déduire A^{2021}.

♠ Exercice 13 – un calcul de puissance de matrices à l'aide de l'endomorphisme de dérivation.
Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est de calculer les premières puissances de M via une méthode détournée.
Soit $d\colon \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $P \longmapsto P'$ l'endomorphisme de dérivation.

1. Donner la matrice de d dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Considérons la famille $\mathscr{B}' = (1, X^3+2X^2+X+1, X^2+X+1, X+1)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Donner la matrice de d dans la base $\mathscr{B}'$.
4. Déduire des questions précédentes les matrices M^2, M^3, M^4.

Exercice 14 – utilisation de certains invariants pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables.

1. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?
2. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?
3. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 15 – obtention de matrices semblables gâce à un endomorphisme.
Montrez que les matrices suivantes sont semblables

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 – un exemple d'automorphisme explicite.
On considère l'application linéaire suivante

$$u\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-5x+4z, -8x+2y+5z, -6x+5z) \end{array}.$$

1. Donner la matrice de u dans la base canonique $\mathscr{B}$.
2. On note $u_1 = (2,1,3), u_2 = (1,1,1), u_3 = (0,1,0)$. Montrer que $\mathscr{B}' = (u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
3. Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'$.
4. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
5. Calculer u^{-1}.

Exercice 17 – recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme a une allure préalablement fixée.

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   1.1 Vérifier que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.
   1.2 ♠ Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   1.3 Écrire la formule de changement de bases entre les matrices A et N, et vérifier sa cohérence.

2. ♠ Plus généralement, soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = 0$ et $f \neq 0$. Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ de E dans laquelle la matrice de f est N.

Projections et symmétries

Exercice 18 – symmétrie par rapport à une droite dans le plan.
Soient D et Δ les deux droites de $\mathbb{R}^2$ d'équations respectives $x - 2y = 0$ et $2x - y = 0$.

1. Dessiner D et Δ dans le plan.

2. Vérifier que $D \oplus \Delta = \mathbb{R}^2$. On note s la symmétrie par rapport à D parallèlement à Δ. Représenter un vecteur quelconque $v \in \mathbb{R}^2$ et son image $s(v)$ sur le dessin précédent.

3. Que vaut $s(s(v))$ pour un vecteur quelconque $v \in \mathbb{R}^2$? En déduire $\operatorname{Ker} s$ et $\operatorname{Im} s$. Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, l'équation $s(u) = v$ a une unique solution $u \in \mathbb{R}^2$.

4. Écrire la matrice de s dans la base canonique et en déduire $s((x, y))$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 19 – un exemple de projection de $\mathbb{R}^3$.
On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Construire une base (u_1, u_2) du plan vectoriel

$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}.$$

2. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $u_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$. En déduire que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Écrire la matrice de la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P parallèlement à la droite D dans la base (u_1, u_2, u_3), puis dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

4. Écrire la matrice de la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur la droite D parallèlement au plan P dans la base (u_1, u_2, u_3), puis dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

5. Écrire la matrice de la symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan P parallèlement à la droite D dans la base (u_1, u_2, u_3), puis dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.