

Antoine Levitt

Analyse de Fourier et applications

Corrections

2020-2021

Corrections

1 Séries de Fourier

1.1 Bases hilbertiennes

Exercice 1.1

Il est trivial de vérifier que cette famille est orthonormale. Pour la complétude, pour tout élément $u = (u_0, u_1, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, on pose $u_N = (u_0, u_1, \dots, u_N, 0, \dots)$, qui est une combinaison linéaire finie des $(e_n)_{n \geq 0}$. On a alors

$$\|u - u_N\|^2 = \sum_{n \geq N+1} |u_n|^2,$$

qui est le reste de la série convergente $\|u\|^2 = \sum_{n \geq 0} |u_n|^2$. Ceci montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\|u - u_N\| \leq \varepsilon$, et donc que la famille $(e_n)_{n \geq 0}$ est complète.

Une famille orthonormée mais pas complète est par exemple $(e_{2n})_{n \geq 0}$.

Exercice 1.2

(i) On a la décomposition orthogonale de u sur V_n et $V_n^\perp$:

$$u = P_n u + (u - P_n u). \quad (8.1)$$

Comme $P_n u \in V_n$, il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $P_n u = \sum_{m=0}^n a_m e_m$. En prenant le produit scalaire par e_m , $0 \leq m \leq n$, il vient $a_m = (P_n u, e_m) = (u, e_m) = u_m$.

Par le théorème de Pythagore appliqué à la décomposition orthogonale (8.1),

$$\|P_n u\|^2 = \|u\|^2 - \|u - P_n u\|^2 \leq \|u\|^2.$$

On en déduit que

$$\sum_{m=0}^n |u_m|^2 = \|P_n u\|^2 \leq \|u\|^2.$$

Cette inégalité étant valable pour tout $n \geq 0$, on peut passer à la limite monotone et en déduire l'inégalité de Bessel.

(ii) La majoration

$$\begin{aligned} \|P_{n+p} u - P_n u\|_V^2 &\leq \sum_{m=n+1}^{n+p} |u_m|^2 \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |u_m|^2 \end{aligned}$$

par le reste d'une série convergente montre que la suite $(P_n u)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans V et donc converge vers une limite $v \in V$.

- (iii) À $m \geq 0$ fixé, pour $n \geq m$, on a $(P_n u - u, e_m) = u_m - u_m = 0$. La continuité du produit scalaire permet le passage à la limite $n \rightarrow \infty$, d'où le résultat.
- (iv) Il s'agit de la propriété fondamentale d'optimalité de la projection orthogonale, qui se démontre par un calcul direct que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned} \|w - w_n\|^2 &= \|(w - P_n w) + (P_n w - w_n)\|^2 \\ &= \|w - P_n w\|^2 + \|P_n w - w_n\|^2 \\ &\geq \|w - P_n w\|^2. \end{aligned}$$

Si $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \geq 0$ et $w_n \in V_n$ tel que $\|w - w_n\| \leq \varepsilon$, d'où $\|w\| = \|w - P_n w\| \leq \|w - w_n\| \leq \varepsilon$. Ceci montre que $w = 0$, donc $P_n u \rightarrow u$, et donc $\|P_n u\| \rightarrow \|u\|$, ce qui prouve l'égalité de Parseval.

1.2 Coefficients de Fourier

Exercice 1.4

Le premier résultat est un simple calcul d'intégration par partie, où les termes de bord disparaissent car $u(-\pi) = u(\pi)$. On a ensuite, pour $n \neq 0$,

$$c_n(u^{(p)}) = (in)^{-p} c_n(u)$$

et donc

$$|c_n(u)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}|n|^p} \int_{-\pi}^{\pi} |u^{(p)}(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|n|^p} \|u^{(p)}\|_{L^1},$$

ce qui donne le résultat.

Exercice 1.5

- (i) Quitte à remplacer u par $u - v$, on ne restreint pas la généralité en considérant $v = 0$. Supposons le théorème prouvé pour des fonctions à valeurs réelles. Si u a ses coefficients de Fourier nuls, alors $\bar{u}$ également, car

$$c_n(\bar{u}) = \overline{c_{-n}(u)}.$$

Les fonctions réelles $\Re(u) = (u + \bar{u})/2$ et $\Im(u) = (u - \bar{u})/(2i)$ ont alors leurs coefficients de Fourier nuls, ce qui montre que ces deux quantités sont nulles presque partout, et donc u aussi.

- (ii) L'ensemble des polynômes trigonométriques est stable par addition, translation et multiplication, donc T_n est un polynôme trigonométrique, et on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) u(x) dx = 0. \quad (8.2)$$

Sur $[-\pi, \pi]$, la quantité $\cos(x - x_0) - \cos \varepsilon$ est positive sur $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, et strictement négative ailleurs, et elle est d'autre part toujours strictement supérieure à -2 . Le résultat demandé suit immédiatement.

- (iii) Sur $[-\pi, \pi] \setminus [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $|T_n u| \leq |u|$ et $T_n u$ tend vers 0 ponctuellement. Par un théorème de convergence dominée, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} T_n(x) u(x) dx = 0,$$

d'où le résultat, au vu de (8.2).

- (iv) Supposons u continue et non-nulle. Alors il existe un intervalle $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ de $]-\pi, \pi[$ où $|u| \geq \delta > 0$, et on a donc

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} |T_n(x)u(x)| dx \geq \delta \varepsilon$$

ce qui contredit le résultat du point (iii).

- (v) Soit u continue. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} c_n(U) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} U(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}in} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-inx} dx - [U(x) e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{in} [c_n(u) - (-1)^n c_0(u)]. \end{aligned}$$

Par densité des fonctions continues dans L^1 et continuité des c_n , ce résultat est également valable pour $u \in L^1$. En supposant que $u \in L^1$ a tous ses coefficients de Fourier nuls, alors c'est également le cas pour U . En appliquant le résultat précédent à la fonction U , qui est continue car u est L^1 , on en déduit que U est nulle, et donc u aussi.

1.3 Séries de Fourier

Exercice 1.6

- (i) On calcule

$$(e_n, e_m)_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx.$$

Si $n = m$, alors $(e_n, e_n)_{L^2} = 1$. Sinon,

$$(e_m, e_n)_{L^2} = \frac{1}{2\pi i(m-n)} \left[e^{i(m-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

- (ii) Comme $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \subset L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si u vérifie $(u, e_n)_{L^2} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors la fonction u dans L^1 a tous ses coefficients de Fourier nuls. Par le Théorème 1.10, on en déduit que $u = 0$.
- (iii) On sait par le Théorème 1.3 que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (u, e_n)_{L^2} e_n$ converge vers une limite v dans $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. On a ensuite $(u - v, e_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par le même raisonnement que dans le point (iii) de l'Exercice 1.2, ce qui montre que $u = v$.

Exercice 1.7

La Proposition 1.9 montre que, pour $n \neq 0$,

$$|c_n(u)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}|n|^2} \|u''\|_{L^1}.$$

La série S_u converge donc normalement dans C^0 muni de la norme L^∞ (donc uniformément, donc ponctuellement) vers un v continu. Or S_u converge aussi vers u dans L^2 , d'où $v = u$.

Exercice 1.8

(i) On calcule

$$\begin{aligned}
c_n(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\pi} e^{-inx} dx - \int_{-\pi}^0 e^{-inx} dx \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}in} [1 - (-1)^n],
\end{aligned}$$

pour $n \neq 0$, et 0 pour $n = 0$. On vérifie que, comme u est réelle et impaire, les harmoniques paires sont nuls, et les harmoniques impaires sont appariées via $c_{-n}(u) = \overline{c_n(u)}$. En regroupant les termes, on obtient la formule demandée.

(ii) On a $S_N(0) = 0$, en accord avec le Théorème 1.13. On calcule ensuite

$$\begin{aligned}
S_N\left(\frac{\pi}{N}\right) &= \frac{4}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\frac{\pi}{N}\right) + \cdots + \frac{1}{N-1} \sin\left((N-1)\frac{\pi}{N}\right) \right) \\
&= \frac{4}{N} \left(\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{N}\right) + \operatorname{sinc}\left(3\frac{\pi}{N}\right) + \cdots + \operatorname{sinc}\left((N-1)\frac{\pi}{N}\right) \right)
\end{aligned}$$

Le calcul pour N impair est similaire. On reconnaît la somme de Riemann de pas $h = \frac{2\pi}{N}$ de la fonction sinc entre 0 et π . Comme la fonction sinc est continue, on en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sinc}(t) dt = 1 + 2\alpha.$$

(iii) La discontinuité en 0 force la série de Fourier partielle S_N à dépasser sa valeur 1 en π/N . L'amplitude de ce dépassement est égale à α fois l'amplitude de la discontinuité (ici 2). C'est ce que l'on voit sur la Figure 1.1 : les oscillations se rapprochent certes de la discontinuité (la série converge ponctuellement, par le Théorème 1.13), mais l'amplitude des oscillations ne diminue pas (et la série ne converge pas uniformément).

1.4 Applications des séries de Fourier**Exercice 1.9**(i) Formellement, on décompose $u(\cdot, t)$ en série de Fourier :

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t) e_n(x).$$

En dérivant terme à terme, on obtient que la composante de Fourier $u_n(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$\ddot{u}_n(t) = -n^2 u_n(t),$$

d'où, en utilisant les conditions initiales fournies,

$$u_n(t) = u_{0,n} \cos(nt),$$

où $u_{0,n}$ est la n -ième composante de Fourier de u_0 . On en déduit la solution

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_{0,n} \cos(nt) e^{inx}. \quad (8.3)$$

(ii) Comme u_0 est régulière, pour $n \neq 0$, par la Proposition 1.9,

$$|u_{0,n}| \leq \sqrt{2\pi} |n|^{-4} \|u_0^{(4)}\|_{L^1}. \quad (8.4)$$

En appliquant les théorèmes de continuité et dérivation des séries justifiés par l'estimée (8.4), on voit que u défini par (8.3) est de classe C^2 par rapport à x et t , et que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 u_{0,n} \cos(nt) e^{inx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

On montre que u vérifie les conditions initiales et aux limites par un argument d'échange de limite et de sommes, toujours en utilisant l'estimée (8.4).

Exercice 1.10

(i) On procède de même que plus haut, avec cette fois-ci l'équation différentielle

$$\dot{u}_n = -n^2 u_n,$$

qui mène à la solution

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_{0,n} e^{-|n|^2 t} e^{inx}. \quad (8.5)$$

La fonction u satisfait l'équation de la chaleur et les conditions aux limites et initiales par le même argument que précédemment.

(ii) Si u_0 n'est que continu, alors on n'a pas nécessairement convergence de la série de Fourier à $t = 0$. Pour $t > 0$ fixé, cependant, on a

$$|u_n(t)| \leq \sqrt{2\pi} e^{-|n|^2 t} \|u_0\|_{L^1},$$

ce qui montre que la série définissant u converge normalement, et satisfait à l'équation de la chaleur.

(iii) Même si la fonction $u(\cdot, T)$ est C^∞ , les coefficients de Fourier sont amplifiés par un facteur $e^{|n|^2(T-t)}$ et la série de Fourier de u peut ne pas converger au temps $t = 0$: l'équation de la chaleur rétrograde est mal posée.

2 Transformée de Fourier dans L^1

2.1 Définition

Exercice 2.1

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \hat{f}(\xi) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1}.$$

La continuité de la fonction $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$ repose sur la continuité de l'application $\xi \mapsto f(x) e^{-i\xi \cdot x}$ à x fixé, associée à un théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale, justifié par la majoration précédente.

Exercice 2.2

Il est clair que l'application $\mathcal{F}$ est linéaire. On déduit en outre de la première assertion de la Proposition 2.3 que $\mathcal{F}$ envoie $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}.$$

Ceci montre que $\mathcal{F}$ est continue de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n))} \leq 1$.

Pour voir que la norme d'opérateur de $\mathcal{F}$ est exactement égale à 1, il suffit de remarquer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ avec $f(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = (\mathcal{F}f)(0) \leq \|\hat{f}\|_{L^\infty},$$

ce qui montre l'inégalité inverse $\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n))} \geq 1$.

2.2 Propriétés algébriques de la transformée de Fourier**Exercice 2.4**

La preuve de la seconde assertion repose sur le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Pour la première assertion, on procède à nouveau par densité. Le résultat est immédiat pour une fonction régulière à support compact, grâce à une intégration par parties. Le résultat s'ensuit par densité des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans l'ensemble des fonctions intégrables de dérivées intégrables.

Exercice 2.6

Si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (l'espace des fonctions régulières à support compact), on sait que $\hat{\phi}$ tend vers 0 à l'infini par le Corollaire 2.7.

Ensuite, par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ (pour la norme L^1), on peut trouver, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, une suite $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge en norme L^1 vers f . En utilisant la Proposition 2.3, il résulte que

$$\|\hat{f} - \hat{\phi}_k\|_{L^\infty} \leq \|f - \phi_k\|_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Cela signifie donc que la suite de fonctions $(\hat{\phi}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^n$ vers la fonction $\hat{f}$. Comme chaque $\hat{\phi}_k$ tend vers 0 à l'infini, il en est de même pour $\hat{f}$.

Exercice 2.7

Posons $h = f \star g$. Alors

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy$$

est définie presque partout et de classe L^1 par le théorème de Fubini. En effet, posons $F(x, y) = f(y) g(x-y)$. Alors F est mesurable et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)| dx dy = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f| \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g| \right) < +\infty,$$

en effectuant d'abord l'intégration en x puis celle en y (ce qui est légitime car on travaille avec des fonctions positives). On vérifie ensuite facilement que

$$\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|F\|_{L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}.$$

On peut ainsi considérer la transformée de Fourier de h . Par le théorème de Fubini toujours, et avec le changement de variable $z = x - y$,

$$\begin{aligned}\hat{h}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy \right) e^{-ix \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) e^{-ix \cdot \xi} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy \cdot \xi} g(x - y) e^{-i(x-y) \cdot \xi} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x - y) e^{-i(x-y) \cdot \xi} dx \right) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy \cdot \xi} dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(z) e^{-iz \cdot \xi} dz \right) \\ &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi),\end{aligned}$$

qui est bien la relation annoncée.

2.3 Exemples

Exercice 2.8

Commençons par prouver ce résultat en dimension 1. La transformée de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi} dx$$

est de classe C^1 (et même C^∞), et une intégration par parties montre que cette fonction est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle du premier ordre

$$\hat{f}'(\xi) = -\frac{\xi}{2\alpha} \hat{f}(\xi).$$

On en déduit donc que $\hat{f}(\xi) = C e^{-\xi^2/4\alpha}$, où C est une constante dont on obtient la valeur par

$$\hat{f}(0) = C = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Ce résultat est étendu à la dimension $n \geq 2$ en écrivant

$$e^{-\alpha|x|^2} = \prod_{j=1}^n e^{-\alpha x_j^2},$$

et en utilisant le résultat de tensorisation (2.3).

2.4 Transformée de Fourier inverse

Exercice 2.12

On voit déjà qu'il suffit de montrer l'une des deux égalités de (2.4), par exemple la première (l'autre s'en déduit en remplaçant $f(x)$ par $f(-x)$).

(i) Commençons par montrer le résultat pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ donnée.

- (a) Comme $\phi \in \mathcal{D}$, $\hat{\phi}$ est intégrable et C^∞ par le Corollaire 2.7. La continuité de ϕ_ε et $\check{\phi}$ suit par le théorème de continuité d'une intégrale à paramètres. La suite de fonctions $\xi \mapsto \chi(\varepsilon\xi) \hat{\phi}(\xi) e^{-ix \cdot \xi}$ converge ponctuellement vers $\hat{\phi}(\xi) e^{-ix \cdot \xi}$, et est dominée en module par la fonction intégrable $|\hat{\phi}|$, ce qui montre par le théorème de convergence dominée que $\phi_\varepsilon \rightarrow \check{\phi}$ simplement.

- (b) Montrons maintenant que $\phi_\varepsilon(x) \rightarrow \phi(x)$. Comme la fonction $(\xi, y) \mapsto e^{i(x-y)\xi} \chi(\varepsilon\xi) \phi(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, une application du théorème de Fubini du même type qu'à l'exercice 2.7 donne

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\varepsilon\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) e^{-iy \cdot \xi} dy \right) e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi(\varepsilon\xi) e^{i(x-y) \cdot \xi} d\xi \right) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \hat{\chi}\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy, \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété (2.2). Avec le changement de variables $u = (x - y)/\varepsilon$,

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x + \varepsilon u) \hat{\chi}(u) du \longrightarrow \phi(x) \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\chi}(u) du \quad (8.6)$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, à nouveau par une application du théorème de convergence dominée. La Proposition 2.9 montre que $\hat{\chi}(u) = (2\pi)^{n/2} e^{-|u|^2/2}$, et donc

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\chi}(u) du = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|u|^2/2} du = 1.$$

Ainsi, on a bien la convergence simple $\phi_\varepsilon(x) \rightarrow \phi(x)$, ce qui prouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\phi(x) = \check{\phi}(x)$.

- (ii) Toujours dans le cadre $\phi \in \mathcal{D}$ précédent, on peut également montrer la convergence de ϕ_ε vers ϕ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ en remarquant que

$$\begin{aligned} \|\phi_\varepsilon - \phi\|_{L^1} &\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x + \varepsilon u) - \phi(x)| e^{-|u|^2/2} dx du \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d_\phi(\varepsilon u) e^{-|u|^2/2} du, \end{aligned}$$

en application du théorème de Fubini, et où on a introduit $d_\phi(v) = \|\phi(\cdot + v) - \phi\|_{L^1}$. On note que $0 \leq d_\phi(v) \leq 2\|\phi\|_{L^1}$ et que $d_\phi(\eta) \rightarrow 0$ lorsque $\eta \rightarrow 0$ (par un théorème de convergence dominée). On en déduit, à nouveau par un théorème de convergence dominée, que $\|\phi_\varepsilon - \phi\|_{L^1} \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour conclure dans le cas général d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on procède par densité, en définissant toujours

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\varepsilon\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$$

La convergence $f_\varepsilon \rightarrow \check{f}$ intervient par exemple au sens des distributions. En effet, en appliquant un théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon \varphi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \check{f} \varphi$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

On montre maintenant que $f_\varepsilon \rightarrow f$ dans L^1 . Pour montrer cela, soit $\eta > 0$ arbitrairement petit. On choisit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support compact telle que $\|f - \phi\|_{L^1} \leq \eta/3$. Alors,

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^1} \leq \|f_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L^1} + \|\phi_\varepsilon - \phi\|_{L^1} + \|\phi - f\|_{L^1}.$$

Le second terme tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, et est donc plus petit que $\eta/3$ si $\varepsilon \leq \varepsilon_\eta$. Pour le premier terme, on écrit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - \phi_\varepsilon(x)| dx &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x + \varepsilon u) - \phi(x + \varepsilon u)| \hat{\chi}(u) du dx \\ &\leq \frac{\|f - \phi\|_{L^1}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\chi}(u) du = \|f - \phi\|_{L^1} \leq \frac{\eta}{3} \end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini. Ainsi, $\|f_\varepsilon - f\|_{L^1} \leq \eta$ si $\varepsilon \leq \varepsilon_\eta$, ce qui montre bien la convergence de f_ε vers f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. A fortiori, on a la convergence au sens des distributions.

L'unicité de la limite au sens des distributions montre que $f = \hat{\hat{f}}$ au sens des distributions, et en fait dans L^1 car $f \in L^1$.

3 Transformée de Fourier des distributions

Exercice 3.1

Soit g une fonction non-nulle, analytique sur $\mathbb{R}$ et à support compact. Soit $[a, b]$ son support, avec $-\infty < a < b < \infty$. Comme $g(x) = 0$ pour $x \geq b$, on a $g^{(p)}(b) = 0$ pour tout $p \geq 0$ et donc, comme g est analytique, g est nulle dans un voisinage de b . Ce n'est pas possible par la définition du support. Par contradiction, ceci montre que la transformée de Fourier d'une fonction $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ne peut pas être à support compact à moins d'être nulle.

3.1 Fonctions lisses à décroissance rapide

Exercice 3.3

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $\chi(x) = 1$ sur la boule unité $B(0, 1)$. On considère la suite $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\phi_k(x) = \phi(x) \chi\left(\frac{x}{k}\right).$$

Il est clair que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\phi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, la formule de Leibniz montre que

$$\partial^\beta(\phi - \phi_k)(x) = \partial^\beta \phi(x) \left[1 - \chi\left(\frac{x}{k}\right)\right] - \sum_{|\gamma| \geq 1, \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \frac{1}{k^{|\gamma|}} \partial^{\beta-\gamma} \phi(x) \partial^\gamma \chi\left(\frac{x}{k}\right).$$

Il existe donc une constante $C_{\alpha, \beta} < +\infty$ telle que

$$\|x^\alpha \partial^\beta(\phi - \phi_k)\|_{L^\infty} \leq \sup_{|x| \geq k} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| + \frac{C_{\alpha, \beta}}{k} \sum_{|\gamma| \geq 1, \gamma \leq \beta} \|x^\alpha \partial^{\beta-\gamma} \phi\|_{L^\infty}.$$

Pour α et β fixés, chacun des deux termes du membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. On a donc pour tout $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$,

$$\|x^\alpha \partial^\beta(\phi - \phi_n)\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$$

lorsque $k \rightarrow +\infty$. La suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ converge donc vers ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3.4

Pour montrer l'inégalité (3.1), commençons par remarquer que

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \sum_{1 \leq j \leq n} |x_j|^{n+1}\right)^{-1} dx < +\infty.$$

Soit alors $p \geq 0$. Pour tout $|\alpha| \leq p$ et $|\beta| \leq p$, on a

$$\begin{aligned} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^1} &= \left\| \left(1 + \sum_{1 \leq j \leq n} |x_j|^{n+1} \right) x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \frac{1}{1 + \sum_{1 \leq j \leq n} |x_j|^{n+1}} \right\|_{L^1} \\ &\leq \left\| \left(1 + \sum_{1 \leq j \leq n} |x_j|^{n+1} \right) x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{1}{1 + \sum_{1 \leq j \leq n} |x_j|^{n+1}} \right\|_{L^1} \\ &\leq C_n \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi), \end{aligned}$$

avec par exemple $C_n = (n+1)I$.

Cette inégalité montre que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, et on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ par définition. Si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, l'inégalité d'interpolation

$$\|\phi\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^p \leq \|\phi\|_{L^\infty}^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi| = \|\phi\|_{L^\infty}^{p-1} \|\phi\|_{L^1}.$$

montre que $\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$. La densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < +\infty$ suit par celle de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3.5

Soit $p \geq 0$. Pour tout $|\alpha| \leq p$ et $|\beta| \leq p$, plusieurs utilisations successives du Théorème 2.6 montrent que

$$\left\| \xi^\alpha \partial^\beta \hat{\phi}(\xi) \right\|_{L^\infty} = \left\| \widehat{\partial^\alpha (x^\beta \phi)} \right\|_{L^\infty}.$$

Ensuite, la Proposition 2.3 et (3.1) donnent

$$\left\| \xi^\alpha \partial^\beta \hat{\phi}(\xi) \right\|_{L^\infty} \leq \left\| \partial^\alpha (x^\beta \phi(x)) \right\|_{L^1} \leq \widetilde{C}_{n,p} \sup_{|\alpha'| \leq p} \sup_{|\beta'| \leq p} \left\| x^{\alpha'} \partial^{\beta'} \phi(x) \right\|_{L^1} \leq C'_{n,p} \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi).$$

On en déduit que la transformée de Fourier est un endomorphisme séquentiellement continu sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Le fait que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont inverses l'une de l'autre est une conséquence directe du Théorème 2.11.

3.2 Distributions tempérées

Exercice 3.6

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $p \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad |\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| \leq C \mathcal{N}_p(\phi).$$

Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il est clair que T est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $R \geq 1$ tel que $K \subset \overline{B_R(0)}$. On a, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans K ,

$$|\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| \leq C \mathcal{N}_p(\phi) = C \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{|\beta| \leq p} \left\| x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right\|_{L^\infty} \leq C R^p \sup_{|\beta| \leq p} \left\| \partial^\beta \phi \right\|_{L^\infty}.$$

Ceci montre que T définit donc une distribution d'ordre inférieur ou égal à p .

Exercice 3.8

La valeur principale est définie par la limite suivante

$$\left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \phi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

La première intégrale est bien définie car on peut écrire

$$\left| \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x \phi'(t) dt \right| \leq \sup_{x \in [-1, 1]} |\phi'(x)| \leq \mathcal{N}_1(\phi).$$

Pour la seconde intégrale, on écrit

$$\left| \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \frac{\phi(x)}{x} dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \frac{x\phi(x)}{x^2} dx \right| \leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |x\phi(x)| \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \leq 2\mathcal{N}_1(\phi).$$

Ceci montre donc que la valeur principale est une distribution d'ordre au plus 1.

Pour montrer que cette distribution tempérée n'est pas d'ordre 0, on considère l'exemple simple suivant. On introduit une suite de fonctions (ϕ_n) de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, à valeurs dans $[0, 1]$. La fonction ϕ_n est égale à 1 sur $[2, n]$ et à support dans $[1, n+1]$. On a donc $\mathcal{N}_0(\phi_n) = 1$ alors que

$$\left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \phi_n \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \geq \int_2^n \frac{1}{x} dx = \ln \left(\frac{n}{2} \right),$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3.9

Si f est à croissance lente, elle est L^1_{loc} , et on peut lui associer canoniquement une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ définie, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, par l'action $\langle T_f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}^n} f\phi$. On étend cette forme linéaire sur $\mathcal{S}$ en notant que, pour tout $\phi \in \mathcal{S}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f\phi| \leq C \int (1 + |x|)^p |\phi(x)| dx \leq C' \sup_{|\alpha| \leq p} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \phi(x)| dx \leq C'' \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi),$$

où on a utilisé (3.1).

Exercice 3.10

- (i) La fonction $f(x) = e^{|x|^2}$, est bien une fonction continue et définit donc une distribution. En revanche, ce n'est pas une distribution tempérée car le crochet de dualité n'est pas défini pour $\phi(x) = e^{-|x|^2}$ par exemple.
- (ii) Si χ est la fonction chapeau centrée en 0, alors la fonction

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^n \chi(e^{n^2}(x - n))$$

est formée de pics centrés en n , de hauteur e^n , et de largeur e^{-n^2} . Elle est continue, n'est pas à croissance lente (puisque $f(n) = e^n$ pour n suffisamment grand), mais elle est intégrable :

$$\|f\|_{L^1} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{n-n^2} \|\chi\|_{L^1}.$$

Elle définit donc une distribution tempérée, puisque, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f\phi \right| \leq \|f\|_{L^1} \|\phi\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} \mathcal{N}_0(\phi).$$

Exercice 3.13

Soit $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\langle \partial^\alpha T_k, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = (-1)^{|\alpha|} \langle T_k, \partial^\alpha \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \partial^\alpha T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}},$$

ce qui est bien la convergence au sens de $\mathcal{S}'$.

Exercice 3.14

On voit que $f_N(x)$ converge simplement vers $f(x) = e^x$. Considérons une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec $R > 0$ tel que $\text{supp}(\phi) \subset [-R, R]$. Alors, par convergence dominée,

$$\langle f_N, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \int_{-R}^R f_N \phi \rightarrow \int_{-R}^R e^x \phi(x) dx = \langle f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Ceci montre que f_N converge vers f au sens des distributions. En revanche, la suite (f_N) ne peut pas converger au sens des distributions tempérées : en effet, si elle convergeait, le Théorème 3.11 montre que sa limite serait nécessairement f . Or, f n'est pas une distribution tempérée parce que son crochet de dualité contre la fonction de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\right)$$

par exemple n'est pas bien défini.

Exercice 3.15

Pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(k)$ ne comporte qu'un nombre fini de termes et la série converge donc. Pour tout $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$\sum |a_k \phi(k)| \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|)^p |\phi(k)| \leq C' \mathcal{N}_{p+2}(\phi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|)^{-2}$$

pour une constante $C' > 0$, ce qui montre que la distribution T définie par son action

$$\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(k)$$

est bien une distribution tempérée. Si $T_N = \sum_{|k| \leq N} a_k \delta_k$, pour tout $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\langle T - T_N, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$ est le reste d'une série convergente et tend donc vers 0, ce qui montre que $T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$.

Si par exemple $a_k = e^{k^2}$, le produit de dualité de T par la fonction test $\phi(x) = e^{-x^2}$ n'est pas défini, ce qui montre que T ne définit pas une distribution tempérée.

Exercice 3.16

Soit $f \in L^p$, pour $1 \leq p \leq \infty$, et p' tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

D'après le Théorème 3.4, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\phi\|_{L^{p'}} \leq C \mathcal{N}_{n+1}(\phi).$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on voit alors que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \phi \right| \leq \|f\|_{L^p} \|\phi\|_{L^{p'}} \leq C \|f\|_{L^p} \mathcal{N}_{n+1}(\phi),$$

ce qui montre que la forme linéaire T_f définie par $\langle T_f, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$ est une distribution tempérée. Si $f_n \rightarrow f$ dans L^p , alors, pour tout $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$|\langle T_{f_n} - T_f, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| \leq C \|f_n - f\|_{L^p} \mathcal{N}_{n+1}(\phi),$$

et T_{f_n} converge donc vers T_f au sens des distributions tempérées.

Exercice 3.17

Vérifions d'abord que $\mathcal{F}T$ est bien une distribution tempérée. Il est clair que $\mathcal{F}T$ est une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il reste à s'assurer que $\mathcal{F}T$ vérifie la propriété de continuité (3.3). Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\left| \langle \mathcal{F}T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \right| = \left| \langle T, \hat{\phi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \right| \leq C \mathcal{N}_p(\hat{\phi}) \leq C' \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi).$$

On a donc bien $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Soit maintenant $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On a pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \mathcal{F}u, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle u, \hat{\phi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} u \hat{\phi} = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) e^{-ix \cdot y} dy \right) dx.$$

Comme $(x, y) \mapsto u(x) \phi(y) e^{-ix \cdot y}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, une application du théorème de Fubini montre que

$$\langle \mathcal{F}u, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix \cdot y} dx \right) \phi(y) dy = \langle v, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}},$$

avec

$$v(y) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix \cdot y} dx = \hat{u}(y).$$

On retrouve donc bien la définition usuelle de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3.21

On sait par l'Exercice 3.15 que

$$S_N = \sum_{-N \leq n \leq N} \delta_n$$

converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vers la série

$$S_\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n.$$

Par continuité séquentielle de la transformée de Fourier (Théorème 3.18), on a

$$\mathcal{F}S_N \rightarrow \mathcal{F}S_\infty.$$

Un calcul immédiat montre que

$$\mathcal{F}S_N = \sum_{-N \leq n \leq N} e^{-inx}$$

On vérifie ailleurs que, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$|\langle e^{-inx}, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| = |\hat{\phi}(n)| \leq \frac{2}{1 + |n|^2} \mathcal{N}_2(\hat{\phi}) \leq \frac{C}{1 + |n|^2} \mathcal{N}_4(\phi)$$

et donc, par le même raisonnement qu'à l'Exercice 3.15, la suite

$$T_N = \sum_{-N \leq n \leq N} e^{-inx}$$

converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers la distribution tempérée

$$T_\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inx}.$$

On en déduit, par unicité de la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, que

$$\mathcal{F} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-inx}.$$

On verra au Chapitre 5 que cette expression est également égale à un autre peigne de Dirac (c'est la formule de Poisson, Théorème 5.9).

Exercice 3.22

On vérifie aisément que $u_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$, et que

$$\hat{u}_\alpha(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (\xi - \omega)^2} \quad (8.7)$$

Un argument de convergence dominée montre que la suite de fonctions u_α tend au sens des distributions tempérées vers $e^{i\omega t}$ quand α tend vers 0, ce qui montre que $\hat{u}_\alpha \rightarrow 2\pi\delta_\omega$, ce qu'on aurait également pu démontrer directement.

La fonction u_α représente pour $t \geq 0$ une oscillation de fréquence ω , amortie avec un coefficient α . Sa transformée de Fourier (8.7) montre un pic à la fréquence ω , avec une largeur proportionnelle à α . On voit que, contrairement à une oscillation non-amortie ($\alpha = 0$), dont la transformée de Fourier est un pic de Dirac, la transformée de Fourier d'une oscillation amortie est un pic de largeur finie, proportionnelle à l'amortissement. Cela conduit à supposer que les effets d'élargissement de pics sont dûs à l'amortissement du son.

4 Espaces de Sobolev et équations aux dérivées partielles

4.1 Transformée de Fourier dans L^2

Exercice 4.1

L'idée de la preuve est de montrer l'isométrie des transformations sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et d'en déduire l'isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ (qui montre que la transformée de Fourier s'étend de manière unique, et coïncide avec sa définition au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$).

Soit $(\phi, \psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^2$. Comme la fonction $(x, \xi) \mapsto e^{-ix \cdot \xi} \phi(x) \overline{\psi(\xi)}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, une application du théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} (\hat{\phi}, \psi)_{L^2} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi) \overline{\psi(\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \right) \overline{\psi(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \overline{\left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \right)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \overline{\check{\psi}(x)} dx \\ &= (\phi, \check{\psi})_{L^2}. \end{aligned}$$

Appliquant cette formule avec $\psi = \hat{\phi}$, on a

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \|\hat{\phi}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} (\hat{\phi}, \hat{\phi})_{L^2} = (\phi, \check{\check{\phi}})_{L^2} = (\phi, \phi)_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}^2.$$

L'identité ci-dessus, connue sous le nom de *formule de Plancherel*, montre que $(2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}$ est une isométrie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

La fin de la démonstration repose sur un argument de densité classique qu'il est bon de connaître. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, qui contient $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Considérons donc une suite $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. La suite $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, donc est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. La suite des transformées de Fourier $(\hat{\phi}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est alors elle-aussi une suite de Cauchy puisque

$$\forall 0 \leq k \leq l, \quad \|\hat{\phi}_k - \hat{\phi}_l\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2} \|\phi_k - \phi_l\|_{L^2}.$$

La complétude de $L^2(\mathbb{R}^n)$ montre que la suite $(\hat{\phi}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ vers une certaine fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Or, on sait par le Théorème 3.14 que la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ entraîne la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Donc $(\hat{\phi}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vers la distribution tempérée g . Mais d'autre part, $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Il résulte du Théorème 3.18 que $(\hat{\phi}_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\mathcal{F}\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{F}f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. L'unicité de la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (conséquence de l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) implique $\mathcal{F}f = g$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et donc $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $(\hat{\phi}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{F}f$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. En passant à la limite dans la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(2\pi)^n} \|\hat{\phi}_k\|_{L^2}^2 = \|\phi_k\|_{L^2}^2,$$

on obtient l'égalité

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \|\mathcal{F}f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2.$$

L'application $(2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}$ est donc une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. En remplaçant ϕ par $\mathcal{F}^{-1}\phi$, on montre qu'il en est de même de $(2\pi)^{n/2} \mathcal{F}^{-1}$.

4.2 Espaces de Sobolev

Exercice 4.3

Il est clair que $(\cdot, \cdot)_{H^s}$ est un produit scalaire. Pour montrer la complétude, il suffit de remarquer que pour toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $H^s(\mathbb{R}^n)$, la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$v_k(\xi) = (Au_k)(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}_k(\xi),$$

est une suite de $L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\forall 0 \leq k \leq l, \quad \|u_k - u_l\|_{H^s} = \|v_k - v_l\|_{L^2}.$$

Si la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^s(\mathbb{R}^n)$, la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et converge donc dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ vers $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Posons

$$u = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\hat{v}}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} \right),$$

alors $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|u_k - u\|_{H^s} = \|v_k - v\|_{L^2},$$

ce qui montre que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers u dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 4.4

Montrons le résultat pour $H^1(\mathbb{R}^n)$. Soit u appartenant à l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ défini par (4.4). On a alors $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 \leq j \leq n$. Ainsi,

- (i) $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (puisque $L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$),
- (ii) $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (puisque $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$),
- (iii) $\xi_j \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 \leq j \leq n$ puisque $\xi_j \hat{u} = -i \mathcal{F} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$.

Il en résulte que u appartient à l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ défini par (4.2). La réciproque se démontre en utilisant les mêmes arguments.

Par ailleurs, pour $s \geq 1$, il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que

$$c(1 + |\xi|^2)^s \leq \sum_{|\alpha| \leq s} |\xi^\alpha|^2 \leq C(1 + |\xi|^2)^s.$$

Ceci montre que la norme

$$\|u\|_{H^s, \text{usuel}}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq s} |\xi^\alpha| |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

est équivalente à la norme $H^s(\mathbb{R}^n)$ définie par (4.3) pour $s \geq 1$.

Exercice 4.5

Commençons par le cas $k = 0$. Soit donc $s > n/2$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\hat{u}(\xi) = \left((1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \right) \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}.$$

Comme $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, on a par hypothèse

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

et d'autre part

$$\frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

puisque $s > n/2$. On en déduit $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La Proposition 2.3 peut aussi être utilisée avec $\mathcal{F}^{-1}$ au lieu de $\mathcal{F}$, ce qui montre que $u = \mathcal{F}^{-1} \hat{u}$ est continue et tend vers zéro à l'infini.

Pour le cas $k \geq 1$, on montre que $\xi^\alpha u \in L^1$ pour $|\alpha| \leq k$, et on utilise le Corollaire 2.7.

Exercice 4.6

On procède par analyse/synthèse. Supposons pour commencer que la solution existe avec $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. En appliquant la transformée de Fourier, on voit que

$$(1 + |\xi|^2) \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

et donc que $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ (par (4.2)) avec

$$u = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\hat{f}}{1 + |\xi|^2} \right).$$

Ceci donne également l'unicité de la solution, et montre que l'égalité $-\Delta u + u = f$ a lieu au sens $L^2(\mathbb{R}^3)$. On vérifie ensuite facilement que la solution u convient.

4.3 Résolution d'équations aux dérivées partielles

Exercice 4.8

On introduit la transformée de Fourier partielle (*i.e.* seulement sur la variable d'espace) de la fonction $(t, x) \mapsto f(t, x)$:

$$\hat{f}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Alors, (4.5) devient

$$\begin{cases} \partial_t \hat{f} + |\xi|^2 \hat{f} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n, \\ \hat{f}(0, \cdot) = \hat{f}_0 & \text{sur } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (8.8)$$

On en déduit que $\hat{f}(t, \xi) = \hat{f}_0(\xi) e^{-t|\xi|^2}$. Par transformée de Fourier inverse, on voit que $f(t, \cdot) = f_0 \star G_t$, avec

$$G_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}. \quad (8.9)$$

On a donc

$$f(t, x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f_0(y) e^{-|x-y|^2/4t} dy. \quad (8.10)$$

Cette intégrale est définie ponctuellement pour $t > 0$ si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. On montre de même facilement que, pour tout $t > 0$, f est C^2 par rapport à t et x et qu'elle satisfait l'équation de la chaleur. La condition initiale est assurée par le fait que $G_t \rightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ lorsque $t \rightarrow 0$.

5 Séries de Fourier des distributions périodiques

5.1 Distributions périodiques

Exercice 5.2

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ positive, et strictement positive sur l'intervalle $[0, T]$. La fonction

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(t - nT)$$

est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$, T -périodique et strictement positive sur $\mathbb{R}$. On vérifie facilement que la fonction

$$\chi(t) = \frac{\phi(t)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(t - nT)}$$

convient.

Pour montrer (5.2), on écrit

$$\int_0^T \phi = \int_0^T \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(t + nT) \right) \phi(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^T \chi(t + nT) \phi(t + nT) dt = \int_{\mathbb{R}} \chi \phi.$$

5.2 Séries de Fourier des distributions périodiques

Exercice 5.4

On procède comme à l'Exercice 3.15 : pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| a_n \langle e^{2i\pi n t/T}, \phi(n) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \right| \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|)^p |\hat{\phi}(-n)| \leq C' \mathcal{N}_{p+2}(\hat{\phi}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|)^{-2}.$$

Comme $\mathcal{N}_{p+2}(\hat{\phi}) \leq C'' \mathcal{N}_{p+n+3}$ par le Théorème 3.5, u définie par

$$\langle u, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \langle e^{2i\pi n t/T}, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$$

est bien une distribution tempérée. Si $u_N = \sum_{|n| \leq N} a_n e^{2i\pi n t/T}$, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\langle u - u_N, \phi \rangle$ est le reste d'une série convergente et tend donc vers 0, ce qui montre que $u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2i\pi n t/T}$ au sens des distributions tempérées. De plus, $\tau_T u_N = u_N$, et, par continuité séquentielle de τ_T , $\tau_T u = u$.

Exercice 5.5

On a, par (5.4), pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$,

$$c_{n_0}(e^{2i\pi n t/T}) = T\delta_{n,n_0}$$

et on en déduit par continuité séquentielle de c_{n_0} que

$$c_{n_0}\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{2i\pi n t/T}\right) = T\gamma_{n_0}$$

et donc $\gamma_{n_0} = \gamma'_{n_0}$ pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$, d'où le résultat.

Exercice 5.6

- (i) Par les résultats de l'Appendice 8, χu est une distribution à support compact, qui définit une forme linéaire sur les fonctions C^∞ . On peut alors calculer les $c_n(u)$ comme

$$c_n(u) = \frac{1}{T} \left\langle u, \chi e^{-2i\pi n t/T} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \frac{1}{T} \langle \chi u, e^{-2i\pi n t/T} \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}.$$

Comme χu est à support compact, elle est d'ordre fini, et il existe donc p et C tels que

$$|c_n(u)| \leq C \sup_{0 \leq k \leq p} \sup_{t \in K} \left| \frac{d^k}{dt^k} (e^{-2i\pi n t/T}) \right| \leq C' (1 + |n|)^p,$$

ce qui montre que les $c_n(u)$ sont à croissance lente. La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{-2i\pi n t/T}$ converge donc vers une distribution tempérée v périodique, d'après le théorème 5.5.

- (ii) Posons $w = u - v \in \mathcal{S}'$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(w) = c_n(u) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(e^{-2i\pi n t/T}) = 0$, en procédant comme pour la preuve de la Proposition 5.6.
- (iii) Pour tout $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \langle \tau_{nT}(\chi \cdot w), \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \langle \chi \cdot w, \tau_{-nT} \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle w, \chi \tau_{-nT} \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ &= \left\langle w, \tau_{-nT} \left((\tau_{nT} \chi) \phi \right) \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle \tau_{nT} w, (\tau_{nT} \chi) \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle (\tau_{nT} \chi) w, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$w = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tau_{nT} \chi) w = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{nT}(\chi w).$$

- (iv) Soit $\phi \in \mathcal{D}$. Alors,

$$\langle w, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \tau_{nT}(\chi w), \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \left\langle \chi w, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{-nT} \phi \right\rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}$$

Comme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{-nT} \phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{nT} \phi$ est une fonction C^∞ périodique, on peut la décomposer en série de Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{nT} \phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\phi) e^{-2i\pi n t/T},$$

avec convergence uniforme de la fonction et de toutes ses dérivées sur $\mathbb{R}$. On peut enfin écrire

$$\langle w, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\phi) \langle \chi w, e^{-2i\pi n t/T} \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\phi) c_n(w) = 0,$$

ce qui montre que $w = 0$ dans $\mathcal{D}'$ donc dans $\mathcal{S}'$, et finalement

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{-2i\pi n t/T}$$

dans $\mathcal{S}'$.

- (v) La non-dépendance en χ est une conséquence immédiate de la proposition 5.6.

5.3 Transformée de Fourier des distributions périodiques

Exercice 5.8

Le peigne de Dirac $u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT}$ est bien une distribution T -périodique. On développe u en série de Fourier :

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(u) e^{2i\pi nt/T},$$

avec

$$c_n(u) = \frac{1}{T} \langle u, \chi e^{-2i\pi nt/T} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi(kT) e^{-2i\pi nk} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \chi(kT) = \frac{1}{T},$$

χ étant une partition de l'unité. On vient donc de prouver l'égalité suivante au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi nt/T}. \quad (8.11)$$

La formule (5.6) de la transformée de Fourier de u suit par le Théorème 5.8. La formule de Poisson (5.7) est obtenue en appliquant (5.6) à $\mathcal{F}^{-1}f$ (ou (8.11) à f directement).

6 Échantillonnage et transformée de Fourier discrète

6.1 Échantillonnage

Exercice 6.1

On calcule

$$(\mathcal{F}f_T)(\xi) = T \mathcal{F} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \delta_{nT} \right) (\xi) = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) e^{-inT\xi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_\xi(n),$$

avec

$$h_\xi(x) = T f(xT) e^{-ixT\xi}.$$

Comme f est à décroissance rapide, les coefficients de Fourier $Tf(nT)$ de la série de Fourier qui définit $\mathcal{F}f_T$ sont également à décroissance rapide, ce qui montre que $\mathcal{F}f_T$ est C^∞ .

En utilisant la formule de Poisson (5.7) pour $h_\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il vient

$$\hat{f}_T(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{h}_\xi(2n\pi).$$

Un calcul direct de $\hat{h}_\xi$ utilisant les formules de translation et d'homothétie du Théorème 2.5 montre que

$$\hat{h}_\xi(2n\pi) = \hat{f} \left(\xi + \frac{2n\pi}{T} \right),$$

d'où (6.2).

Exercice 6.2

Par le Théorème 6.1,

$$\hat{f}_T(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2n\pi/T),$$

donc

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_T(\xi) \cdot \mathbb{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}(\xi) = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) e^{-i\xi nT} \mathbb{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}(\xi)$$

On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned} f(t) &= T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\xi nT} \mathbb{1}_{[-\pi/T, \pi/T]} \right) (t) \\ &= T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \mathcal{F}^{-1} \left(\mathbb{1}_{[-\pi/T, \pi/T]} \right) (t - nT). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Notons que cette formule peut être interprétée comme la convolution de f_T par $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-\pi/T, \pi/T]})$, dans l'esprit de la Remarque 6.2.

Par un calcul direct (voir Exercice 2.9), on montre que la transformée de Fourier inverse de $\mathbb{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}$ est

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{it\xi} d\xi = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} = \frac{1}{T} \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi t}{T} \right),$$

On en déduit le résultat (8.12).

6.2 Le recouvrement spectral (aliasing)**Exercice 6.4**

La formule de Plancherel (4.1) montre que

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}f(\xi) - \mathcal{F}g(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \pi/T} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \pi/T} |\mathcal{F}f(\xi) - \mathcal{F}g(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

La distance est minimale lorsque la seconde intégrale est nulle, soit

$$\mathcal{F}g(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) \mathbb{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}(\xi) = \frac{1}{T} \hat{h}_T(\xi) \mathcal{F}f(\xi). \quad (8.13)$$

6.3 Transformée de Fourier discrète**Exercice 6.5**

On vérifie par un calcul direct que cette famille est orthonormale : pour $k, l \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} e_k[n] e_l[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi(k-l)n/N} = \delta_{k,l},$$

en utilisant la formule de la somme des premiers termes d'une série géométrique de raison $e^{2i\pi(k-l)/N}$. Comme cette famille est de taille N , qui est aussi la dimension des signaux discrets de période N , c'est une base.

6.4 Transformée de Fourier rapide