

Antoine Levitt

Analyse de Fourier et applications

Cours et exercices

2020-2021

Table des matières

Syllabus	1
1 Séries de Fourier	5
1.1 Bases hilbertiennes	5
1.2 Coefficients de Fourier	6
1.3 Séries de Fourier	8
1.3.1 Convergence L^2	8
1.3.2 Convergence ponctuelle	9
1.4 Applications des séries de Fourier	9
1.4.1 Applications aux équations aux dérivées partielles	10
1.4.2 Premières applications à l'analyse en fréquences	11
2 Transformée de Fourier dans L^1	15
2.1 Définition	15
2.2 Propriétés algébriques de la transformée de Fourier	16
2.3 Exemples	17
2.4 Transformée de Fourier inverse	18
2.5 Une application : le théorème central limite	19
3 Transformée de Fourier des distributions	21
3.1 Fonctions lisses à décroissance rapide	21
3.1.1 L'espace $\mathcal{S}$	21
3.1.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$	22
3.2 Distributions tempérées	23
3.2.1 Définition des distributions tempérées	23
3.2.2 Convergence et dérivation dans $\mathcal{S}'$	24
3.2.3 Injection de L^p dans $\mathcal{S}'$	24
3.2.4 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$	25
4 Espaces de Sobolev et équations aux dérivées partielles	27
4.1 Transformée de Fourier dans L^2	27
4.2 Espaces de Sobolev	28
4.3 Résolution d'équations aux dérivées partielles	29
5 Séries de Fourier des distributions périodiques	31
5.1 Distributions périodiques	31
5.2 Séries de Fourier des distributions périodiques	32
5.3 Transformée de Fourier des distributions périodiques	33

6	Échantillonnage et transformée de Fourier discrète	35
6.1	Échantillonnage	35
6.1.1	Échantillonnage d'un signal	35
6.1.2	Théorème de Shannon	37
6.2	Le recouvrement spectral (aliasing)	38
6.2.1	Exemple de repliement spectral	39
6.2.2	Suppression de l'aliasing	40
6.3	Transformée de Fourier discrète	40
6.4	Transformée de Fourier rapide	42
6.4.1	Présentation générale de la méthode	42
6.4.2	Calcul de complexité	43
7	Appendice : intégrales et sommes dépendant d'un paramètre	45
8	Appendice : distributions à support compact	47
	Bibliographie	49

Syllabus

Bref aperçu du contenu du cours

L'analyse en fréquences, en particulier la transformée de Fourier, est un outil qui permet de décomposer les signaux selon leurs modes fondamentaux. Cette théorie mathématique a de nombreuses applications pour l'ingénieur, parfois spectaculaires : étude des cours de la bourse, compréhension climatique de la température des océans, mise en résonance de structures de génie civil conduisant à leur ruine, compression de sons et d'image, etc. L'objectif de ce cours est de comprendre la transformation de Fourier pour analyser un problème physique ou un signal donné, et de connaître les limitations théoriques, pratiques et numériques de cet outil.

Le plan du cours est le suivant. On considère dans la section 1 des fonctions périodiques de période 2π . Les fonctions périodiques élémentaires sont les exponentielles complexes e^{inx} , pour $n \in \mathbb{Z}$. La théorie des séries de Fourier énonce que, sous certaines conditions de régularité, toute fonction u périodique peut s'écrire comme combinaison linéaire infinie de ces harmoniques :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{inx}.$$

La théorie des espaces de Hilbert donne un cadre géométrique à cette décomposition, les fonctions $\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ étant vues comme une base orthonormale de l'espace $L^2(-\pi, \pi)$ des fonctions de carré sommable. Cette géométrie permet notamment d'établir des formules simples pour les coefficients de Fourier $c_n(u)$. Les fonctions de base e^{inx} se comportent particulièrement agréablement pour la dérivation (qui agit comme une simple multiplication), ce qui permet la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires homogènes. La décomposition d'un signal en série de Fourier permet également son analyse et son traitement (de la compression d'images à la reconnaissance automatique de morceaux musicaux).

Une fonction f maintenant définie sur toute la droite réelle ne peut pas être décomposée en série de Fourier : à la différence des fonctions périodiques, elle contient un continuum de fréquences possibles. La décomposition adaptée est alors celle de la transformée de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Cette formule a *a priori* un sens ($f(x)$ est fini) quand $\hat{f}$ est intégrable (section 2), ce qui introduit une asymétrie désagréable entre la transformée de Fourier et son inverse. Pour retrouver un cadre géométrique similaire à celui des séries de Fourier, on voudrait avoir f et $\hat{f}$ dans l'espace de Hilbert L^2 des fonctions de carré sommable. Malheureusement, l'interprétation de la formule précédente n'est pas évidente dans ce cadre. Via un détour par la transformée de Fourier des distributions (section 3), on montre qu'on peut néanmoins lui donner un sens (section 4). On peut alors résoudre des équations aux dérivées partielles posées sur la droite réelle.

Une propriété fondamentale de la transformée de Fourier est qu'elle transforme la décroissance à l'infini en régularité, et vice-versa. Une fonction périodique de période T (vue comme une distribution), qui ne décroît pas à l'infini, a une transformée de Fourier très singulière, une somme de masses de Dirac placées aux fréquences $\{\frac{2\pi n}{T}, n \in \mathbb{Z}\}$. Cela permet de réinterpréter les séries de Fourier en termes de transformée de Fourier (au sens des distributions) de fonctions périodiques (section 5). Réciproquement, la transformée de Fourier d'une somme de masses de Dirac est périodique. On peut alors analyser l'effet d'un échantillonnage sur un signal, qui introduit des répliques périodiques dans la transformée de Fourier du signal échantillonné. Cette interprétation permet de montrer le puissant théorème de Shannon : si un signal contenant des fréquences uniquement jusqu'à $f_{\max}$ est échantillonné à une fréquence $f > 2f_{\max}$, alors on peut reconstruire le signal original à partir de ses échantillons (section 6).

Modalités générales

Ce cours, comme celui d'analyse et de calcul scientifique de première année, est enseigné en "pédagogie active" (aussi connu sous le nom de "classe inversée") : le cours est appris à la maison par les étudiants, et les séances de cours sont réservées à des discussions sur des points techniques (lancées à l'initiative des étudiants, s'ils ont préparé des questions), et à la résolution d'exercices en groupes librement composés de 3/4 personnes. Ce cours est valorisé à 1.5 ECTS, ce qui signifie que, selon les normes de la commission européenne, vous devriez travailler en moyenne 40h sur le semestre pour cet enseignement. Il faut donc compter environ 2h de travail personnel par semaine pour ce cours. L'idée est qu'un travail sérieux et continu vous permettra de limiter les révisions des examens, et vous permettra une meilleure assimilation du matériau présenté.

Concrètement, votre travail d'une semaine à l'autre consistera à :

- (1) lire les pages du poly qui seront demandées. Les sections à lire portent sur des notions qui seront mises en oeuvre la semaine suivante. Attention, "lire" veut dire bien apprendre toutes les définitions, comprendre le contenu des résultats (théorèmes, propositions, etc), et avoir un minimum réfléchi à l'articulation desdits résultats. Il vaut mieux prévoir plusieurs (re)lectures du matériau, espacées dans le temps, copieusement annoter le poly, mettre en évidence les résultats importants, refaire les petits calculs qui sont menés, et vous interroger sur les énoncés des théorèmes (penser à des exemples et contre-exemples) ;
- (2) faire, sur feuille à part, les exercices préparatoires (marqués EP sur le syllabus). Les exercices préparatoires sont souvent de simples applications des définitions, et ne devraient pas vous demander beaucoup de temps. Les exercices préparatoires seront systématiquement ramassés en début de séance ;
- (3) vérifier le corrigé des exercices de la semaine précédente, sur le poly à part. C'est en particulier l'occasion de comparer votre rédaction à celle que nous proposons. Il est essentiel que vous compreniez parfaitement la résolution des exercices.

Le poly de corrections est à consulter **après** les séances, et non pas pendant. Vous pouvez l'amener en séance, mais vous ne devrez pas le sortir sans autorisation de l'enseignant.

Nous ferons de temps en temps, en début de séance et sous forme de discussion, des temps de restructuration permettant de mieux organiser les concepts et idées nouvelles que vous aurez appréhendés lors des séances précédentes. Cette restructuration peut avoir lieu à votre initiative si vous le jugez pertinent, et il ne faut pas hésiter à solliciter l'enseignant pour ce faire.

Contacter l'enseignant

Le mode de contact hors des séances est le mail : antoine.levitt@inria.fr

Évaluation

La note finale sera obtenue de la manière suivante :

- examen : 2h, 14 points. Le poly de cours et les notes personnelles sont autorisés. Le programme exigible correspond, sauf mention explicite contraire, à tous les résultats du poly hors appendice, et aux exercices préparatoires et obligatoires ;
- contrôle continu : 6 points. La note du contrôle continu sera obtenue à partir des exercices préparatoires, ramassés en début de séance. Ce sont des exercices simples, prévus pour ne pas vous prendre trop de temps. La rédaction est à soigner particulièrement : il ne faut pas en écrire des tonnes (pas plus d'une page par séance), mais donner les arguments pertinents, avec des références numérotées aux théorèmes du cours.

La note de ramassage d'EP sera automatiquement zéro en cas d'absence non justifiée à l'avance.

Pré-requis

Nous partons du principe que la théorie des distributions, les espaces de Lebesgue et de Sobolev sont bien connus. Ceci correspond au contenu du polycopié d'analyse et calcul scientifique de 1ère année (sauf les Chapitres 4 et 9). Si vous ne maîtrisiez pas l'un de ces prérequis, nous vous enjoignons à rattraper dès maintenant les notions correspondantes en consultant le poly d'Analyse de 1ère année, disponible sur Educnet. Voici quelques questions pour tester ces prérequis...

- énoncer le théorème de convergence dominée ;
- si $f \in L^p(\mathbb{R})$ (avec $1 \leq p < +\infty$) et $f = g$ au sens des distributions, alors... ?
- quels espaces $L^p(\mathbb{R})$ sont complets ?
- pour quelles valeurs de p l'espace des fonctions C^∞ à support compact est-il dense dans L^p ?
- énoncer l'inégalité de Hölder ;
- définir l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$.

Poly

Ce polycopié est basé sur des notes de cours auxquelles ont contribué Eric Cancès, Virginie Ehrlacher, Alexandre Ern, Antoine Levitt et Gabriel Stoltz. La dernière version est disponible sur le site

<http://antoine.levitt.fr/fourier>

Plan et contenu des séances

La nomenclature est la suivante :

- **Lire...** : à faire *avant* la séance en question (et pas pendant) ;
- **EP** signifie “exercices préparatoires”, ceux à faire à la maison sur feuille à part et qui seront ramassés en début de séance ;
- **EO** signifie “exercices obligatoires”, ceux à traiter en séance. Si vous n’avez pas eu le temps de les résoudre en séance, vous devez absolument consulter le corrigé ;
- **EC** signifie “exercices complémentaires”, à traiter une fois que vous avez traité tous les exercices obligatoires, ou chez vous si ça vous intéresse.

Séance 1 (9 décembre) Séries de Fourier

Présentation du cours et de la pédagogie

EP : aucun (première séance)

EO : 1.1, 1.4, 1.6, 1.7, 1.9, 1.8

EC : 1.2, 1.5, 1.10

Séance 2 (16 décembre) Transformée de Fourier dans L^1

Relire le Chapitre 1, lire le Chapitre 2

EP : 1.3, 2.3, 2.5

EO : 2.1, 2.2, 2.4, 2.7, 2.12 (i), 2.8

EC : 2.6, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12 (ii)

Séance 3 (6 janvier) Distributions tempérées

Lire de 3.1 à 3.2.2 inclus

EP : 3.2, 3.7, 3.11, 3.12

EO : 3.5, 3.6, 3.9, 3.13, 3.15, 3.16

EC : 3.1, 3.3, 3.4, 3.8, 3.10, 3.14

Séance 4 (13 janvier) Distributions tempérées, espaces de Sobolev

Finir le Chapitre 3, lire le Chapitre 4

EP : 3.18, 3.19, 3.20

EO : 3.17, 3.21, 4.8, 4.1, 4.4, 4.6,

EC : 3.22, 4.2, 4.3, 4.5, 4.7, 4.9, 4.10

Séance 5 (20 janvier) Séries de Fourier des distributions et échantillonnage

Lire le Chapitre 5 et le Chapitre 6

EP : 5.1, 5.3, 5.7, 6.3

EO : 5.2, 5.4, 5.5, 5.8, 6.1, 6.2

EC : 5.6, 6.4, 6.5,

Séance 6 (27 janvier)

Examen

Séries de Fourier

1.1 Bases hilbertiennes	5
1.2 Coefficients de Fourier	6
1.3 Séries de Fourier	8
1.3.1 Convergence L^2	8
1.3.2 Convergence ponctuelle	9
1.4 Applications des séries de Fourier	9
1.4.1 Applications aux équations aux dérivées partielles	10
1.4.2 Premières applications à l'analyse en fréquences	11

On développe ici la théorie des séries de Fourier, qui permettent la représentation d'une fonction périodique en série de sinus et de cosinus. On rappelle le cadre des bases hilbertiennes, qui permettent une théorie géométrique des séries de Fourier, et on donne quelques applications au traitement du signal et à la résolution d'équations aux dérivées partielles. Pour plus de détails sur la théorie des séries de Fourier, on pourra se reporter à [4].

On se place dans toute cette section sur un espace de Hilbert sur le corps des complexes. Toute la théorie est bien sûr valable sur le corps des réels, mais la structure complexe permet une manipulation plus simple des séries de Fourier, en utilisant les exponentielles complexes plutôt que les fonctions sinus et cosinus.

1.1 Bases hilbertiennes

On rappelle la notion de base hilbertienne, qui est la “bonne” généralisation de la notion de base orthonormée en dimension infinie.

Définition 1.1 (Base hilbertienne). Soit V un espace de Hilbert. On appelle base hilbertienne de V une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de V tels que

- (i) (orthonormalité) $(e_n, e_m)_V = \delta_{nm}$ pour tous $n, m \geq 0$;
- (ii) (complétude) L'espace vectoriel formé des combinaisons linéaires finies d'éléments de $(e_n)_{n \geq 0}$ est dense dans V .

Exercice 1.1 (Base hilbertienne de ℓ^2) Montrer qu'une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est donnée par la famille des suites $(e_n)_{n \geq 0}$ telles que $(e_n)_m = \delta_{nm}$ pour tout $m \geq 0$. Donner un exemple de famille orthonormée qui n'est pas une base hilbertienne.

Remarque 1.2. Tous les espaces de Hilbert n'admettent pas de base hilbertienne. Ceux qui en possèdent sont appelés séparables. L'existence même d'espaces non séparables n'est pas triviale, et tous les espaces de Hilbert rencontrés en pratique (espaces de Lebesgue, de Sobolev...) sont séparables.

La notion de base hilbertienne généralise celle de base orthonormée, et permet la décomposition d'un élément $u \in V$ quelconque sur les $(e_n)_{n \geq 0}$. La décomposition a une infinité de termes et est à comprendre au sens des séries, dont la convergence est garantie par la complétude de V .

Théorème 1.3 (Parseval-Bessel). *Soit V un espace de Hilbert et $(e_n)_{n \geq 0}$ une famille orthonormée (c'est-à-dire telle que $(e_n, e_m) = \delta_{nm}$ pour tout $n, m \geq 0$). Soit $u \in V$. Alors, la série $\sum_{n \geq 0} (u, e_n) e_n$ converge vers un élément $v \in V$ et on a l'inégalité de Bessel*

$$\|v\|^2 = \sum_{n \geq 0} |(u, e_n)|^2 \leq \|u\|^2. \quad (1.1)$$

Si de plus $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne, alors $v = u$:

$$u = \sum_{n \geq 0} (u, e_n) e_n \quad \text{et} \quad \|u\|^2 = \sum_{n \geq 0} |(u, e_n)|^2, \quad (1.2)$$

la deuxième égalité portant le nom d'égalité de Parseval.

Bien noter que la série $u = \sum_{n \geq 0} (u, e_n) e_n$ converge dans V , mais ne converge pas normalement en général, comme le montre l'exemple de $u = (1, 1/2, 1/3, \dots)$ sur ℓ^2 .

Exercice 1.2 *Prouver le Théorème 1.3. On introduit, pour tout entier $n \geq 0$, l'espace vectoriel V_n engendré par $(e_0, \dots, e_n)$, et on note P_n la projection orthogonale sur V_n .*

- (i) *Montrer l'inégalité de Bessel, en décomposant u selon V_n et $V_n^\perp$.*
- (ii) *Montrer la convergence dans V de la suite $(P_n u)_{n \geq 0}$. On note v sa limite.*
- (iii) *Montrer que $w = v - u$ vérifie $(w, e_m) = 0$ pour tout $m \geq 0$. En déduire que $P_n w = 0$ pour tout $n \geq 0$.*
- (iv) *Montrer que, pour tout $w_n \in V_n$, on a $\|w - P_n w\| \leq \|w - w_n\|$. Conclure si $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne.*

Remarque 1.4. *Notons que l'égalité de Parseval implique que l'on peut calculer les produits scalaires composante par composante : pour tous $u, v \in V$,*

$$(u, v) = \sum_{n \geq 0} (u, e_n)(e_n, v).$$

Elle montre en particulier que tout espace de Hilbert séparable est isométrique à $\ell^2(\mathbb{N})$, au sens où l'application qui à un élément $u \in V$ associe la suite $(u, e_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$ est un isomorphisme qui préserve le produit scalaire.

Remarque 1.5. *Notons pour la suite que, si l'on a considéré uniquement des bases indicées par $\mathbb{N}$, la théorie s'applique bien évidemment à des bases indicées par un autre ensemble dénombrable, comme $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^d$.*

1.2 Coefficients de Fourier

Définition 1.6. *Soit $u \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. On définit son coefficient de Fourier d'ordre $n \in \mathbb{Z}$ par*

$$c_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-inx} dx \quad (1.3)$$

et sa série de Fourier (sans préjuger de sa convergence), par

$$S_u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{inx}. \quad (1.4)$$

Les coefficients de Fourier sont a priori définis pour une fonction $L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, ce qui permet de donner un sens aux $c_n(u)$. La convergence de la série S_u est cependant délicate : S_u ne converge pas en général vers u dans L^1 . Même si la convergence a lieu pour des fonctions régulières, le prouver n'est pas immédiat. On repousse pour l'instant ces problèmes de convergence à la Section 1.3 pour s'intéresser aux propriétés des coefficients de Fourier en eux-mêmes.

Remarque 1.7. On considère dans ce chapitre des fonctions de $[-\pi, \pi]$, qui sont implicitement considérées comme étendues par périodicité à $\mathbb{R}$. On considère par simplicité des fonctions 2π -périodiques, mais on peut traiter des fonctions u de périodicité L quelconque en considérant la fonction $\tilde{u}(x) = u(\frac{2\pi}{L}x)$. On peut également traiter des fonctions dans $L^1([-\pi, \pi]^d)$ de façon similaire au cas uni-dimensionnel en définissant, pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$,

$$c_\alpha(u) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{[-\pi, \pi]^d} u(x) e^{-i\alpha \cdot x} dx,$$

$$S_u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} c_\alpha(u) e^{i\alpha \cdot x}.$$

Dans cette section on considère des fonctions d'une seule variable, toujours par souci de simplicité.

Proposition 1.8 (Propriétés élémentaires des coefficients de Fourier). Les coefficients de Fourier sont des formes linéaires continues de $L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $u \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, on définit sa réflexion par rapport à l'origine $\tilde{u}$ par $\tilde{u}(x) = u(-x)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_{-n}(u) = \overline{c_n(\tilde{u})},$$

$$c_n(\tilde{u}) = c_{-n}(u).$$

En particulier,

- Si u est à valeurs réelle, alors $c_n(u) = \overline{c_{-n}(u)}$;
- Si u est paire, alors $c_{-n}(u) = c_n(u)$;
- Si u est impaire, alors $c_{-n}(u) = -c_n(u)$.

Exercice 1.3 Prouver la Proposition 1.8.

Un des grands intérêts des séries de Fourier est de faciliter le calcul d'un certain nombre de transformations des fonctions, dont les dérivées (mais aussi les intégrales et les convolutions). On a notamment le résultat suivant.

Proposition 1.9 (Coefficients de Fourier et dérivation). Si u est la restriction à $[-\pi, \pi]$ d'une fonction $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et 2π -périodique, alors

$$c_n(u') = in c_n(u).$$

Si u est la restriction d'une fonction C^p périodique, on a donc pour $n \neq 0$

$$|c_n(u)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}|n|^p} \|u^{(p)}\|_{L^1}.$$

Exercice 1.4 Prouver la Proposition 1.9.

Les coefficients de Fourier contiennent toute l'information d'une fonction L^1 , au sens suivant.

Théorème 1.10 (Unicité des coefficients de Fourier). Si $u, v \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ont les mêmes coefficients de Fourier, alors $u = v$.

Exercice 1.5 Prouver le Théorème 1.10. On rappelle que les polynômes trigonométriques sont toutes les combinaisons linéaires finies des fonctions e^{inx} , pour $n \in \mathbb{Z}$. On va utiliser le fait que u et v ont la même intégration contre les polynômes trigonométriques en construisant un polynôme trigonométrique qui approche la distribution de Dirac, ce qui montrera l'égalité de u et v .

- (i) Montrer qu'on peut se ramener au cas où $v = 0$ et u est à valeurs réelles. On supposera ces hypothèses additionnelles vérifiées dans la suite.
- (ii) Pour $x_0 \in]-\pi, \pi[$ et $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset]-\pi, \pi[$, montrer que la fonction $T_n(x) = (1 + \cos(x - x_0) - \cos \varepsilon)^n$ est un polynôme trigonométrique supérieur à 1 sur $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ et strictement inférieur à 1 en valeur absolue ailleurs. Montrer également que, si u a ses coefficients de Fourier nuls, alors

$$\int_{[-\pi, \pi]} T_n(x) u(x) dx = 0.$$

- (iii) Montrer que, quand u est une fonction continue à coefficients de Fourier nuls,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} T_n(x) u(x) dx = 0.$$

- (iv) En déduire par contradiction le théorème dans le cas où u est continue.
- (v) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $U(x) = \int_{-\pi}^x u(t) dt$ pour u une fonction continue, puis $u \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Conclure.

1.3 Séries de Fourier

On étudie dans cette section la convergence de la série S_u (voir Définition 1.6). On commence par montrer la convergence dans L^2 par la théorie générale des bases hilbertiennes, puis la convergence ponctuelle pour des fonctions régulières.

1.3.1 Convergence L^2

On rappelle que le produit scalaire dans $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ est défini par

$$(u, v)_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} u \bar{v}.$$

On reconnaît alors dans la formule définissant les séries de Fourier un développement sur une base hilbertienne : en définissant les polynômes trigonométriques élémentaires $e_n \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ par

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},$$

on a, pour tout $u \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$,

$$c_n(u) = (u, e_n)_{L^2}, \quad S_u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e_n.$$

On peut alors prouver

Théorème 1.11. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

Exercice 1.6 Prouver le Théorème 1.11.

- (i) Montrer que $(e_m, e_n)_{L^2} = \delta_{nm}$.
- (ii) Montrer que si $u \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ vérifie $(u, e_n)_{L^2} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $u = 0$.
- (iii) Montrer que, si $u \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (u, e_n) e_n$ converge vers une limite $v \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, puis que $u = v$. Conclure.

On a alors comme corollaire immédiat de la théorie générale des bases hilbertiennes le résultat suivant

Corollaire 1.12. Soit $u \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Alors la série de Fourier S_u converge vers u dans L^2 :

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e_n, \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(u)|^2.$$

1.3.2 Convergence ponctuelle

On sait désormais que la série de Fourier d'une fonction L^2 converge dans L^2 . Rappelons que la convergence dans L^2 est une convergence en moyenne quadratique, assez faible, qui n'implique par exemple pas la convergence presque partout, mais seulement la convergence presque partout à extraction près. Cette convergence presque partout a bien lieu, mais c'est un résultat hautement non trivial qui n'a été prouvé qu'en 1966. La continuité ne suffit pas à la convergence presque partout, et il existe des fonctions non continues qui ont quand même une série de Fourier qui converge presque partout. Il existe de nombreux théorèmes de convergence, dans divers sens et avec différentes hypothèses. L'un des plus simples est le suivant :

Théorème 1.13. *Soit u de classe C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. Alors la série de Fourier de u converge ponctuellement vers*

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow x^-} u(t) + \lim_{t \rightarrow x^+} u(t) \right).$$

Exercice 1.7 *Montrer le Théorème 1.13 dans le cas où u est la restriction à $[-\pi, \pi]$ d'une fonction $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et périodique. On utilisera la Proposition 1.9 pour montrer la convergence normale dans l'espace de Banach $C^0([-\pi, \pi])$ de la série de Fourier.*

Exercice 1.8 (Phénomène de Gibbs) *L'objectif de cet exercice est d'étudier l'effet d'une discontinuité sur les séries de Fourier, illustré en Figure 1.1. Soit la fonction u définie sur $[-\pi, \pi]$ par $u(x) = -1$ quand $x < 0$, et $u(x) = 1$ quand $x \geq 0$.*

- (i) *Calculer les coefficients de Fourier de u , et montrer que la série de Fourier partielle à l'ordre N*

$$S_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} c_n(u) e^{inx}$$

peut se réécrire, pour N pair (le calcul pour N impair étant similaire),

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \cdots + \frac{1}{N-1} \sin((N-1)x) \right).$$

- (ii) *Calculer $S_N(0)$, et $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\frac{\pi}{N})$. On pourra reconnaître une somme de Riemann impliquant la fonction $\text{sinc}(t) = \sin(t)/t$, et utiliser*

$$\int_0^\pi \text{sinc}(t) dt = \frac{\pi}{2} (1 + 2\alpha),$$

où $\alpha \approx 0.09$.

- (iii) *En déduire que la série de Fourier de u ne converge pas uniformément, et interpréter la Figure 1.1.*

1.4 Applications des séries de Fourier

On applique maintenant la théorie des séries de Fourier à la résolution d'équations aux dérivées partielles sur un domaine borné, et on donne un aperçu des applications en traitement du signal, qui seront développées plus avant au Chapitre 5.

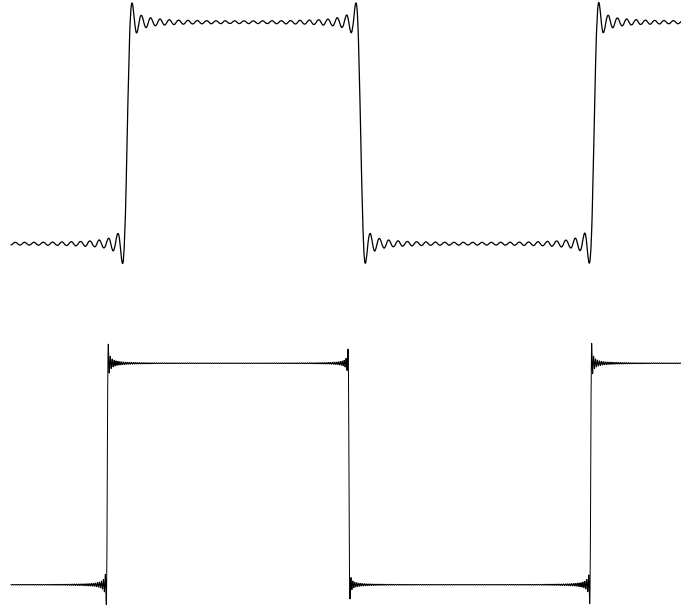


Fig. 1.1. Série de Fourier de la fonction créneau, avec 50 et 250 harmoniques représentées. Le phénomène de Gibbs est le dépassement de la série de Fourier à un point de discontinuité de $\alpha \approx 9\%$ de la valeur du saut, qui ne décroît pas en amplitude mais se rapproche du point de discontinuité. Il illustre la convergence simple mais pas uniforme de la série de Fourier d'une fonction avec un saut.

1.4.1 Applications aux équations aux dérivées partielles

Du point de vue mathématique, les séries de Fourier permettent de quantifier le contenu en fréquence d'une fonction périodique. La décomposition en série de Fourier permet le calcul de la dérivée d'une fonction par une simple multiplication sur ses coefficients de Fourier, ce qui la rend précieuse pour la résolution de nombreuses équations aux dérivées partielles (EDP) : c'est d'ailleurs la motivation originelle de l'introduction de ces séries par Joseph Fourier (*Théorie analytique de la chaleur*, 1807).

Exercice 1.9 (Équation des ondes) On considère une corde vibrante, avec conditions aux limites périodiques. Le déplacement de la corde $u(x, t)$ satisfait l'équation des ondes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(-\pi, t) &= u(\pi, t), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

où la condition initiale $u_0(x)$ est la restriction à $[-\pi, \pi]$ d'une fonction C^∞ périodique.

- (i) En décomposant $u(\cdot, t)$ en série de Fourier, donner une solution formelle (sans se soucier de la validité des manipulations effectuées) de l'équation des ondes.
- (ii) Montrer que la série obtenue est bien convergente, et que la solution $u(x, t)$ obtenue par cette méthode est bien solution de l'équation (en utilisant les résultats de l'appendice 7).

Exercice 1.10 (Équation de la chaleur) On considère l'évolution du champ de température $u(x, t)$ dans un anneau, considéré comme un milieu unidimensionnel périodique. La température $u(x, t)$ satisfait l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t), \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

où la condition initiale $u_0(x)$ est la restriction à $[-\pi, \pi]$ d'une fonction C^∞ périodique.

- (i) Reprendre l'étude de l'exercice précédent.
- (ii) Montrer que, même si u_0 n'est que continue, la série de Fourier de $u(x, t)$ converge pour $t > 0$.
- (iii) Que se passe-t-il si on veut retrouver l'état du système à l'instant $t = 0$ connaissant l'état à $t = T > 0$?

1.4.2 Premières applications à l'analyse en fréquences

L'analyse en fréquences permet une compréhension fine de nombreux phénomènes physiques. Par exemple, l'Exercice 1.9 montre que les vibrations d'une corde idéalisée ne se fait que pour des fréquences discrètes, multiples d'une *fréquence fondamentale* liée à la longueur, la masse et la tension de la corde. Ces fréquences plus hautes sont appelées *harmoniques*. La même note de musique jouée par différents instruments aura la même fréquence fondamentale, mais l'amplitude des harmoniques leur donne le timbre qui les distingue à notre oreille (voir Figure 1.2).

L'analyse en fréquences permet la manipulation digitale des sons (égaliseurs, distortion d'une guitare électrique, *auto-tune*...) et leur compression. Ainsi, le format MP3 se fonde sur le fait que l'oreille humaine distingue plus ou moins bien certaines fréquences pour réduire la précision et donc la taille de stockage sans trop sacrifier en qualité auditive.

Le même principe est à l'oeuvre dans l'analyse d'images, qui peuvent être vues comme des signaux bidimensionnels et décomposées en séries de Fourier bidimensionnelles : une fonction de $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ peut être représentée sous la forme

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} c_{nm}(u) e^{i(nx+my)},$$

$$c_{nm}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x, y) e^{-i(nx+my)} dx dy.$$

avec la même théorie de convergence L^2 que dans le cas unidimensionnel. Le format JPEG par exemple découpe une image en blocs de 8×8 pixels, et applique une compression similaire au MP3.

Ces développements technologiques sont en grande partie rendus possible par le calcul efficace de transformées de Fourier. Si une implémentation naïve du calcul des coefficients de Fourier d'une fonction discrétisée en N points est de complexité $O(N^2)$, une implémentation récursive réduit cette complexité à $O(N \log N)$: c'est la transformée de Fourier rapide (FFT), que l'on étudiera au Chapitre 5.

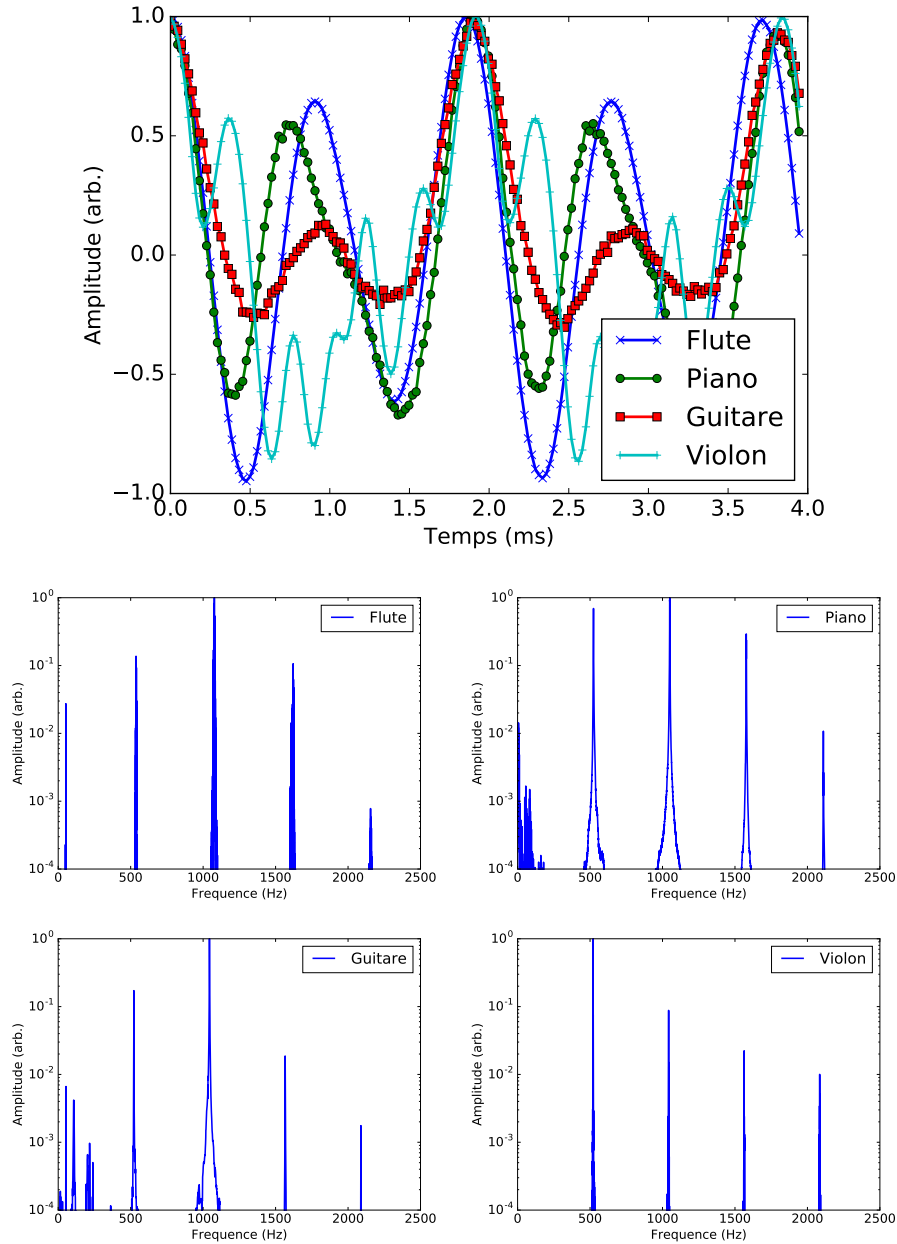


Fig. 1.2. Enregistrement par un microphone d'ordinateur de la même note (un do à 523 Hz) jouée par une flûte, un piano, une guitare et un violon, et spectres correspondants. Le signal (en haut) des instruments est à peu près périodique avec une période d'environ 2 ms, ce qui correspond à la fréquence de 523 Hz du do. On calcule les coefficients de Fourier sur une fenêtre de temps de largeur égale au temps d'acquisition, de l'ordre de la seconde. Ce temps étant bien supérieur à la période caractéristique d'oscillation du signal, les coefficients de Fourier forment un quasi-continuum (nous préciserons ceci lors de l'étude de la transformée de Fourier). L'amplitude $|c_n(u)|^2$ des coefficients de Fourier (en bas) font apparaître des pics aux fréquences multiples de 523 Hz. La forme du spectre est cependant différente pour les différents instruments. Diverses imperfections (anharmonicité des instruments, amortissement, qualité des micros, bruits ambiants, temps d'enregistrement fini, non-uniformité du volume...) font apparaître des défauts, notamment des bruits parasites à basse fréquence et des pics de largeur non-nulle.

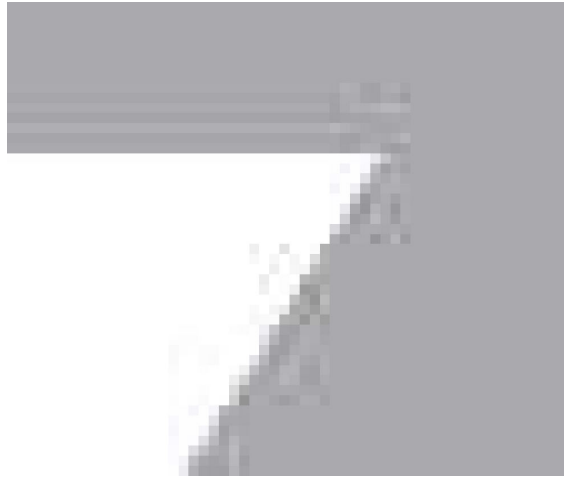


Fig. 1.3. Artefacts de compression JPEG montrant le phénomène de Gibbs : les transitions brutales de couleur produisent des oscillations parasites dans les blocs 8×8 .

Transformée de Fourier dans L^1

2.1	Définition	15
2.2	Propriétés algébriques de la transformée de Fourier	16
2.3	Exemples	17
2.4	Transformée de Fourier inverse	18
2.5	Une application : le théorème central limite	19

Dans ce chapitre, nous donnons la définition de la transformée de Fourier dans L^1 , ainsi que quelques unes de ses propriétés. L'espace L^1 n'est pas stable par transformée de Fourier, et en conséquence de nombreux problèmes techniques surviennent. Nous verrons aux chapitres suivants d'autres espaces fonctionnels, qui eux sont invariants par transformée de Fourier et fournissent un cadre fonctionnel plus agréable.

2.1 Définition

Commençons par définir la transformée de Fourier dans L^1 , et donner quelques unes de ses propriétés.

Définition 2.1 (Transformée de Fourier des fonctions intégrables). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction notée $\hat{f}$ définie en tout point $\xi \in \mathbb{R}^n$ par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx. \quad (2.1)$$

Remarque 2.2 (Conventions de normalisation). Il existe différentes conventions de normalisation : avec ou sans un facteur de normalisation, avec ou sans un facteur 2π dans l'exponentielle. La convention que nous utilisons, contrairement à celle utilisée pour les séries de Fourier au Chapitre 1, n'a pas de facteur normalisant dans la définition de $\hat{f}$: il faudra en tenir compte dans la définition de la transformée de Fourier inverse.

Proposition 2.3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\hat{f}$ est continue, bornée et $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$.

Exercice 2.1 Prouver la Proposition 2.3.

Corollaire 2.4. La transformée de Fourier $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R}^n)$ sur $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^n), L^\infty(\mathbb{R}^n))} = 1.$$

Exercice 2.2 Prouver le Corollaire 2.4. Pour le cas d'égalité, on pourra montrer que $\|f\|_{L^1} = \hat{f}(0)$ si $f \in L^1$ est une fonction positive.

2.2 Propriétés algébriques de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier se comporte de façon simple par rapport aux dilatations, translations ou produits tensoriels.

Théorème 2.5. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(i) pour $a \in \mathbb{R}^n$, on note τ_a la translation de vecteur a , i.e. $\tau_a \phi(x) = \phi(x - a)$. Alors,

$$\widehat{\tau_a f} = e^{-i\xi \cdot a} \hat{f},$$

et

$$\widehat{e^{ia \cdot x} f} = \tau_a \hat{f};$$

(ii) pour la conjugaison complexe,

$$\widehat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)};$$

(iii) pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la transformée de Fourier de $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ est la fonction

$$\hat{f}_\lambda : \xi \mapsto \frac{1}{|\lambda|^n} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right); \quad (2.2)$$

(iv) Si f est un produit tensoriel $f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2)$ avec $x = (x_1, x_2)$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $n = n_1 + n_2$, et $f_i \in L^1(\mathbb{R}^{n_i})$, alors

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \hat{f}_2(\xi_2). \quad (2.3)$$

Notons que le choix $\lambda = -1$ dans la troisième propriété permet de discuter la parité de la transformée de Fourier de fonctions paires ou impaires, la transformée de Fourier ayant la même parité que la fonction.

Exercice 2.3 Prouver le Théorème 2.5.

Un des intérêts majeurs de la transformée de Fourier est qu'elle transforme les dérivées en simples opérations algébriques, et ainsi de simplifier la résolution d'équations différentielles.

Théorème 2.6 (Transformée de Fourier et dérivation). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i \xi_j \hat{f}(\xi).$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $x \mapsto x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 \leq j \leq n$, alors $\mathcal{F}f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\widehat{(x_j f)}(\xi) = i \partial_{\xi_j} \hat{f}(\xi).$$

Exercice 2.4 Prouver le Théorème 2.6. Pour le premier point, on admettra que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans l'espace $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions $L^1(\mathbb{R}^n)$ à dérivée $L^1(\mathbb{R}^n)$, muni de la norme $\|\cdot\|_{W^{1,1}} = \|\cdot\|_{L^1} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i \cdot\|_{L^1}$ (voir par exemple [1, Section IX]).

Un corollaire immédiat de ces propriétés est que plus la fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier décroît vite, et vice-versa. Cette dualité est fondamentale pour la théorie de Fourier, et il est utile de l'avoir à l'esprit pour interpréter les résultats de ce cours. Pour rendre cet énoncé précis, on rappelle qu'un multi-indice est un élément $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Pour des multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, et les notations x^α et ∂^β signifient respectivement $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ et $\partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}$. Par ailleurs, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ et $\alpha \leq \beta$ si et seulement si $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Corollaire 2.7. Si f est de classe C^p et que $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout multi-indice $|\alpha| \leq p$, alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-p}.$$

Réciproquement, si $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout multi-indice $|\alpha| \leq p$, alors $\hat{f}$ est de classe C^p .

Exercice 2.5 Prouver le Corollaire 2.7 en dimension 1.

Exercice 2.6 Montrer que, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini. On pourra procéder par densité.

La transformée de Fourier transforme les convolutions en produit et vice-versa, ce qui la rend particulièrement utile en automatique par exemple. On rappelle que la convolution de deux fonctions f et g est définie par

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy.$$

Théorème 2.8 (Transformée de Fourier et convolution). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \hat{g}.$$

Exercice 2.7 Prouver le Théorème 2.8.

2.3 Exemples

Commençons par un résultat très utile pour la suite.

Proposition 2.9. Soit $\alpha > 0$. On a la relation

$$\widehat{e^{-\alpha|x|^2}}(\xi) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2} e^{-|\xi|^2/4\alpha}.$$

Exercice 2.8 Prouver la Proposition 2.9. On commencera par le cas uni-dimensionnel, en établissant une équation différentielle du premier ordre sur $\hat{f}(\xi)$.

On déduit de la proposition précédente que la transformée de Fourier de la gaussienne

$$g(x) = C \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right)$$

de variance σ^2 est la gaussienne

$$\hat{g}(\xi) = (2\pi\sigma^2)^{n/2} C \exp\left(-\frac{\sigma^2|\xi|^2}{2}\right)$$

de variance σ^{-2} . La transformée de Fourier d'une gaussienne très piquée sera donc très plate, et réciproquement.

A titre d'entraînement, nous vous recommandons de calculer quelques transformées de Fourier ci-dessous. On s'attachera sur chacune de ces fonctions à observer le rapport entre régularité et décroissance des coefficients de Fourier montré dans le Corollaire 2.7.

Exercice 2.9 (Fonction caractéristique) Soit $R > 0$. Montrer que la transformée de Fourier de l'application

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq R, \\ 0 & \text{si } |x| \geq R, \end{cases}$$

est la fonction $\xi \mapsto \frac{2 \sin(R\xi)}{\xi}$.

Exercice 2.10 (Fonction chapeau) Soit $R > 0$. Montrer que la transformée de Fourier de l'application

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{R} & \text{si } |x| \leq R, \\ 0 & \text{si } |x| \geq R, \end{cases}$$

est la fonction $\xi \mapsto R \left(\frac{\sin(R\xi/2)}{R\xi/2} \right)^2$.

Exercice 2.11 Soit $\alpha > 0$. Montrer que la transformée de Fourier de l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\alpha|x|}$ est la fonction $\xi \mapsto \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$.

2.4 Transformée de Fourier inverse

Définition 2.10 (Transformée de Fourier inverse). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note $\check{f}$ la fonction définie en tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi. \quad (2.4)$$

Notons que la transformation $\mathcal{F}^{-1} : f \mapsto \check{f}$ est très similaire à la transformation $\mathcal{F}$ définie par (2.1), à deux changements près : le signe dans l'exponentielle, et le facteur de normalisation $(2\pi)^{-n}$.

Nous pouvons énoncer maintenant le théorème d'inversion de Fourier dans L^1 .

Théorème 2.11 (Transformée de Fourier inverse). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{f}$ soit aussi dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$f = \check{\hat{f}}, \quad \hat{f} = \check{\check{f}} \quad (2.5)$$

ces égalités étant entendues en tant que fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

L'espace des fonctions L^1 dont la transformée de Fourier est aussi dans L^1 est donc stable par transformation de Fourier et la transformation $\mathcal{F}^{-1}$ est l'inverse de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ sur cet espace. Cet espace n'est pas vide car il contient par exemple les gaussiennes. Notons que la formule (2.5) s'écrit aussi

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

Exercice 2.12 Prouver le théorème 2.11.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Si $\phi \in \mathcal{D}$, on définit la transformée de Fourier inverse régularisée

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\varepsilon\xi) \hat{\phi}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi$$

où la fonction $\chi(x) = e^{-|x|^2/2}$ est une gaussienne de variance 1.

(a) Montrer que ϕ_ε et $\check{\phi}$ sont continues, et que ϕ_ε converge simplement vers $\check{\phi}$.

- (b) Montrer que ϕ_ε converge simplement vers ϕ et conclure.
(ii) Montrer la propriété dans le cas général en introduisant f_ε comme précédemment, et en montrant que $f_\varepsilon \rightarrow f$ dans L^1 . On pourra approcher f par une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2.12. La difficulté pour prouver ce théorème, même pour des fonctions régulières, est que l'égalité formelle

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{i\xi \cdot (x-y)} dy \right) d\xi$$

ne permet pas un calcul direct par le théorème de Fubini, parce que la fonction $(y, \xi) \rightarrow f(y) e^{i\xi \cdot (x-y)}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^{2n}$. Le schéma de preuve ci-dessus consiste à tronquer l'intégration en ξ à une région de taille $1/\varepsilon$ en multipliant l'intégrande par $\chi(\varepsilon\xi)$, ce qui permet l'utilisation du théorème de Fubini. Il ne reste plus qu'à montrer que, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la fonction $y \mapsto \int e^{i\xi \cdot (x-y)} \chi(\varepsilon\xi) d\xi$ tend vers $(2\pi)^n \delta_x$ au sens des distributions.

2.5 Une application : le théorème central limite

Comme application directe des concepts vus à ce chapitre, on prouve une version simple du théorème central limite en probabilités pour des variables aléatoires à densité continue. Cela illustre l'utilisation de la transformée de Fourier en probabilités, où elle est connue sous le nom de "fonction caractéristique".

On rappelle qu'en probabilités, si deux variables aléatoires indépendantes X et Y sur $\mathbb{R}$ ont des densités continues f_X et f_Y respectivement, alors la densité de la variable aléatoire $X + Y$ est donnée par la convolution

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x-y) g_Y(y) dy = (f_X * f_Y)(x)$$

et la variable aléatoire αX pour $\alpha \in \mathbb{R}$ a la densité $f_{\alpha X}(x) = f(x/\alpha)/\alpha$. Supposons que les variables $X_1, \dots, X_N$ sont indépendantes et identiquement distribuées, avec la densité f . La moyenne empirique est définie par la variable aléatoire

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n.$$

Par ce qui précède, la densité de cette variable aléatoire est

$$f_{S_N}(x) = N(f * f * \dots * f)(Nx)$$

La fonction f étant dans $L^1(\mathbb{R})$ (car positive et d'intégrale 1), la fonction f_{S_N} est dans L^1 . Sa transformée de Fourier est continue, et par application des Théorèmes 2.8 et 2.5, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f_{S_N}}(\xi) = \widehat{f}\left(\frac{\xi}{N}\right)^N$$

Supposons maintenant que $|x|^3 f$ soit intégrable, et que f ait pour moyenne x_0 et pour variance σ^2 . Alors, par le Théorème 2.6, $\widehat{f}$ est C^2 , et

$$\begin{aligned} \widehat{f}(0) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1 \\ \widehat{f}'(0) &= -i \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = -ix_0 \\ \widehat{f}''(0) &= - \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = -\sigma^2 \end{aligned}$$

et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}_{S_N}(\xi) = \exp \left(N \log \left(1 - ix_0 \frac{\xi}{N} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma \xi}{N} \right)^2 + O \left(\left(\frac{\xi}{N} \right)^3 \right) \right) \right)$$

On voit que cette fonction tend ponctuellement vers $e^{-ix_0\xi}$, ce qui traduit le fait que S_N se concentre vers la valeur x_0 (comme attendu). Supposons maintenant que $x_0 = 0$ (ce qui revient simplement à considérer la densité de $S_N - x_0$). Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}_{S_N}(\xi) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\xi^2}{N} \right) + O \left(\frac{1}{N^2} \right)$$

Notons que ce développement limité, effectué à ξ fixe, ne permet pas directement de calculer un développement limité de $f_{S_N}(x)$ à x fixe : il faut pour ce faire montrer que le développement limité est valide en norme L^1 (et non pas ponctuellement comme fait ici). En ignorant le terme de reste (son traitement rigoureux est laissé en exercice), on peut prendre la transformée de Fourier inverse des deux membres (Théorème 2.11) pour obtenir par la Proposition 2.9

$$f_{S_N}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/N}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2/N} \right),$$

une gaussienne centrée en 0 de variance $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. En particulier, la loi de $\frac{\sqrt{N}S_N}{\sigma}$ approche une gaussienne centrée de variance 1 (le théorème central limite).

Transformée de Fourier des distributions

3.1 Fonctions lisses à décroissance rapide	21
3.1.1 L'espace $\mathcal{S}$	21
3.1.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$	22
3.2 Distributions tempérées	23
3.2.1 Définition des distributions tempérées	23
3.2.2 Convergence et dérivation dans $\mathcal{S}'$	24
3.2.3 Injection de L^p dans $\mathcal{S}'$	24
3.2.4 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$	25

On développe la théorie de la transformée de Fourier de distributions, qu'on cherche à définir par dualité. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas stable par la transformée de Fourier, on ne peut pas définir la transformée de Fourier d'une distribution générale. On définit donc l'espace de Schwartz, constitué des fonctions régulières qui décroissent à l'infini plus vite que tout polynôme. Cet espace est plus grand que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et stable par la transformée de Fourier, ce qui nous permettra de définir la transformée de Fourier d'un sous-ensemble des distributions, les distributions tempérées.

Exercice 3.1 *Le théorème de Paley-Wiener (voir par exemple [4]) montre que la transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R})$ à support compact est en fait analytique sur $\mathbb{R}$ (on rappelle que f est analytique sur $\mathbb{R}$ si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage de x_0 dans lequel f est égale à son développement en série entière en x_0). En supposant ce théorème connu, montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ n'est pas stable par la transformée de Fourier. On pourra montrer qu'une fonction analytique à support compact est nécessairement nulle.*

3.1 Fonctions lisses à décroissance rapide

3.1.1 L'espace $\mathcal{S}$

Définition 3.1 (Espace de Schwartz). *On dit qu'une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ est à décroissance rapide si pour tout $p \geq 0$,*

$$\mathcal{N}_p(\phi) = \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{|\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_{L^\infty} < +\infty.$$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions C^∞ à décroissance rapide.

Une conséquence immédiate de cette définition est que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par multiplication par des polynômes et par dérivation. L'utilité de cet espace par rapport à $\mathcal{D}$ est qu'il traite sur un pied d'égalité les propriétés de régularité et de décroissance à l'infini, qui sont duales par le Théorème 2.6. Il a ainsi plus de chance d'être stable par la transformée de Fourier.

Exercice 3.2 Les fonctions $e^{-|x|^2}$, $e^{-|x|}$ et $(1 + |x|^2)^{-2}$ sont-elles dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$?

On définit la convergence dans $\mathcal{S}$ dans un sens fort, similaire à la définition de la convergence dans $\mathcal{D}$.

Définition 3.2 (Convergence dans $\mathcal{S}$). On dit qu'une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vers $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{N}_p(\phi_n - \phi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a évidemment $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mais on a en fait un résultat plus fort.

Proposition 3.3. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (pour la topologie associée à $\mathcal{S}$).

Exercice 3.3 Prouver la Proposition 3.3 dans le cas $n = 1$. On cherchera à tronquer une fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de sorte qu'elle ait un support compact mais reste régulière.

Les fonctions de $\mathcal{S}$ sont, par définition, dans L^∞ . Elles sont même dans L^1 et, par interpolation, dans tous les L^p , pour $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 3.4. Il existe une constante C_n telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \sup_{|\alpha| \leq p} \sup_{|\beta| \leq p} \left\| x^\alpha \partial^\beta \phi \right\|_{L^1} \leq C_n \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi). \quad (3.1)$$

Par l'inégalité d'interpolation

$$\|\phi\|_{L^p}^p \leq \|\phi\|_{L^\infty}^{p-1} \|\phi\|_{L^1}, \quad (3.2)$$

on a que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Exercice 3.4 Prouver le Théorème 3.4 pour $n = 1$.

3.1.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$

Toute fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ étant intégrable, on peut définir la transformation de Fourier sur le sous-espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, dense dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, en restreignant la Définition 2.1 à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Le point remarquable est que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est elle aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 3.5 (Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$). L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est stable par transformée de Fourier, et pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C_{n,p}$ telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{N}_p(\hat{\phi}) \leq C_{n,p} \mathcal{N}_{p+n+1}(\phi).$$

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ définit un isomorphisme séquentiellement bicontinu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, d'inverse $\mathcal{F}^{-1}$ défini par (2.4).

On rappelle qu'un isomorphisme est une application d'un espace vers un autre qui préserve la structure algébrique, dont l'inverse est bien défini et préserve lui aussi la structure algébrique. Ici, la préservation de la structure algébrique revient simplement à dire que l'application est linéaire.

On rappelle également qu'une application $T : E \rightarrow F$ est séquentiellement continue si Tu_n converge dans F vers Tu lorsque u_n converge vers u dans E . La convergence dans les espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ n'étant, dans la Définition 3.2, liée à aucune norme ou même distance, seule la convergence séquentielle a un sens.

La bicontinuité séquentielle signifie que T et son inverse sont toutes deux des applications séquentiellement continues.

Exercice 3.5 Montrer le Théorème 3.5.

3.2 Distributions tempérées

3.2.1 Définition des distributions tempérées

Comme l'espace des fonctions test $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas stable par transformée de Fourier, on a dû introduire un espace de fonctions test plus grand, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Suivant la philosophie générale de la théorie des distributions, on introduit le dual topologique de l'espace des fonctions test (l'ensemble des formes linéaires sur l'espace des fonctions test), qui est par conséquent un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions.

Définition 3.6 (Distributions tempérées). On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient la propriété de continuité suivante : il existe un entier p et une constante C tels que

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad |\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| \leq C \mathcal{N}_p(\phi). \quad (3.3)$$

Les éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sont appelés les distributions tempérées, ou parfois les distributions à croissance lente.

Théorème 3.7. Tout élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ définit une distribution.

Remarque 3.8 (Abus de notation). Par abus de notation, on notera par la même lettre une distribution tempérée et sa restriction à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Cela permet notamment d'écrire

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Exercice 3.6 Prouver le Théorème 3.7.

Exercice 3.7 (Distribution de Dirac) Montrer que δ_a (pour $a \in \mathbb{R}^n$ donné) est une distribution tempérée d'ordre 0.

Exercice 3.8 (Valeur principale) Montrer que la valeur principale, définie pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \phi \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x} dx,$$

définit une distribution tempérée. Montrer qu'elle est d'ordre 1 (exactement, i.e. elle ne peut pas être d'ordre 0).

L'épithète “tempérées” provient de la limitation de croissance à l'infini de ces distributions.

Définition-Théorème 3.9 (Fonctions à croissance lente). On dit qu'une fonction continue f est à croissance lente s'il existe $p \geq 0$ et $C > 0$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^p.$$

Les fonctions à croissance lente définissent des distributions tempérées.

Exercice 3.9 Montrer le Théorème 3.9.

Exercice 3.10 Donner un exemple de

- (i) fonction continue qui ne définit pas une distribution tempérée
- (ii) distribution tempérée qui est induite par une fonction continue mais pas à croissance lente.

Ainsi, les distributions tempérées sont des distributions particulières, pour lesquelles on a un contrôle de la croissance à l'infini. C'est le cas des distributions qui proviennent de fonctions à croissance lente, et on verra au Théorème 3.14 qu'il en est de même pour celles qui proviennent de fonctions L^p .

3.2.2 Convergence et dérivation dans $\mathcal{S}'$

On définit la convergence dans $\mathcal{S}'$ de la même façon que pour les distributions usuelles.

Définition 3.10 (Convergence dans $\mathcal{S}'$). On dit que la suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vers T si on a

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle T_k, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \longrightarrow \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

Théorème 3.11. Toute suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de distributions tempérées qui converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ vers la distribution tempérée T converge aussi dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vers la distribution T .

Exercice 3.11 Prouver le Théorème 3.11.

Théorème 3.12 (Dérivation dans $\mathcal{S}'$). Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La dérivée de T par rapport à la variable x_j (au sens des distributions) est une distribution tempérée, définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = - \left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

Exercice 3.12 Montrer le Théorème 3.12.

Théorème 3.13. La dérivation est séquentiellement continue dans $\mathcal{S}'$: si $T_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, alors $\partial^\alpha T_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \partial^\alpha T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3.13 Prouver le Théorème 3.13

Finissons par quelques exemples qui montrent qu'en effet $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est strictement inclus dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3.14 (Distribution exponentielle) Montrer que la suite des sommes partielles

$$f_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!}$$

est une suite d'éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ qui converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, mais pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 3.15 (Peigne à croissance lente) Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que la série

$$T_N = \sum_{|k| \leq N} a_k \delta_k$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et donner sa limite. Montrer que si la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est à croissance lente, c'est-à-dire telle qu'il existe $C > 0, p > 0$ tels que $|a_k| \leq C(1 + |k|)^p$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors la convergence a aussi lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Fournir un exemple de série qui converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

3.2.3 Injection de L^p dans $\mathcal{S}'$

Théorème 3.14 (Injection de L^p dans $\mathcal{S}'$). On a l'injection séquentiellement continue $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Exercice 3.16 Prouver le Théorème 3.14. On pourra montrer qu'une fonction $f \in L^p$ peut se décomposer en somme de fonctions L^1 et L^∞ .

Remarque 3.15 (Injection continue). On peut donc écrire

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

où la notation $A \hookrightarrow B$ signifie que A s'injecte dans B et que l'injection de A dans B est séquentiellement continue.

3.2.4 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$

Comme il est d'usage en théorie des distributions, les opérations ou actions effectuées sur les distributions sont définies en effectuant ladite opération sur la fonction test. Il en va de même pour la transformée de Fourier.

Définition-Théorème 3.16 (Transformée de Fourier d'une distribution tempérée). Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier de T est la distribution tempérée notée $\mathcal{F}T$ définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \mathcal{F}T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \hat{\phi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \quad \left(= \langle T, \mathcal{F}\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \right). \quad (3.4)$$

La transformée de Fourier ainsi définie est une extension de la définition classique de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$: si on note T_u la distribution associée à la fonction u , alors, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $T_{\hat{f}} = \mathcal{F}T_f$.

Au risque de nous répéter : comme la transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (mais seulement dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), on ne peut pas définir la transformée de Fourier d'une distribution quelconque par une relation analogue à (3.4), et il faut donc se limiter aux distributions tempérées.

Exercice 3.17 Montrer le Théorème 3.16.

Remarque 3.17 (Notations). La transformée de Fourier de la distribution T est noté $\mathcal{F}T$ et pas $\hat{T}$. On réserve en effet la notation $\hat{\cdot}$ aux fonctions L^1 pour lesquelles la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est définie sous la forme intégrale de l'équation (2.1). Lorsque $f \in L^1$, les deux notations sont possibles mais on privilégie la notation $\hat{f}$.

Théorème 3.18 (Transformée de Fourier inverse des distributions tempérées). La transformée de Fourier est un isomorphisme séquentiellement bicontinu de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même, d'inverse $\mathcal{F}^{-1}$ défini par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \mathcal{F}^{-1}T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \check{\phi} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \quad \left(= \langle T, \mathcal{F}^{-1}\phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \right).$$

Exercice 3.18 Montrer le Théorème 3.18

Théorème 3.19 (Dérivation et transformée de Fourier). Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors $\frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = i \xi_j \mathcal{F}T. \quad (3.5)$$

Exercice 3.19 Montrer le Théorème 3.19.

Exercice 3.20 Montrer que $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathcal{F}\delta_a(\xi) = e^{-ia \cdot \xi}$. De même, montrer que $x \mapsto e^{ia \cdot x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathcal{F}(e^{ia \cdot x}) = (2\pi)^n \delta_a$.

Exercice 3.21 Calculer $\mathcal{F} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n \right)$.

Remarque 3.20 (Transformée de Fourier et convolution). Comme dans le cas L^1 , la transformée de Fourier agit sur les convolutions en les transformant en produit. La situation est cependant plus complexe car l'existence de la convolution de deux distributions tempérées (que nous n'avons pas définie, d'ailleurs) n'est pas plus assurée en général que le produit de deux distributions. Cependant, si tous les termes sont bien définis, on retrouve la propriété

$$\mathcal{F}(T_1 \star T_2) = \mathcal{F}(T_1) \cdot \mathcal{F}(T_2).$$

Exercice 3.22 (Élargissement de pics) En reprenant les calculs de l'Exercice 2.11, donner la transformée de Fourier de la fonction $u_\alpha(t) = e^{-\alpha|t| + i\omega t}$, pour $\alpha > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Étudier la limite de u_α et de sa transformée de Fourier quand $\alpha \rightarrow 0$. En négligeant les effets dus aux temps négatifs, proposer une origine physique possible des pics de largeur finie de la Figure 1.2.

Espaces de Sobolev et équations aux dérivées partielles

4.1	Transformée de Fourier dans L^2	27
4.2	Espaces de Sobolev	28
4.3	Résolution d'équations aux dérivées partielles	29

La transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$ se spécialise à plusieurs espaces fonctionnels importants (dont L^2 et les espaces de Sobolev). Elle permet de montrer aisément que L^2 est stable par transformée de Fourier, de caractériser les espaces de Sobolev, et de donner des formules explicites de résolution d'équations aux dérivées partielles.

4.1 Transformée de Fourier dans L^2

Nous avons défini la transformée de Fourier sur l'espace $\mathcal{S}'$ qui contient (largement!) L^2 . Pourquoi donc consacrer maintenant une section à la transformée de Fourier dans L^2 ? La réponse est fournie par le théorème suivant :

Théorème 4.1 (Isométrie de la transformée de Fourier). *Les transformations $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathcal{F}$ et $(2\pi)^{n/2} \mathcal{F}^{-1}$ sont des isométries de $L^2(\mathbb{R}^n)$ inverses l'une de l'autre :*

$$\begin{aligned} \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\mathcal{F}f\|_{L^2} &= \|f\|_{L^2}, \\ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F}^{-1}f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad (2\pi)^{n/2} \|\mathcal{F}^{-1}f\|_{L^2} &= \|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Exercice 4.1 *Prouver le Théorème 4.1. On commencera par établir l'isométrie sur $\mathcal{S}$ en prouvant que, pour tous $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^2$,*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} (\hat{\phi}, \psi)_{L^2} = (\phi, \check{\psi})_{L^2},$$

et on raisonnera par densité.

Remarque 4.2 (Interprétation physique). *Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a la formule de Plancherel*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx. \quad (4.1)$$

Il arrive souvent en physique ou en mécanique que l'énergie d'un champ sur $\mathbb{R}^n$ s'exprime précisément sous la forme d'une intégrale sur l'espace du carré du champ (penser à l'énergie cinétique d'un écoulement, à l'énergie d'un champ électromagnétique, à l'énergie de déformation élastique linéaire d'un matériau homogène isotrope). L'égalité (4.1) signifie que l'énergie du champ peut alors être calculée indifféremment dans l'espace réel ou dans l'espace réciproque.

Exercice 4.2 (Formule de Parseval) Montrer, en reprenant la démonstration précédente ou en utilisant une formule de polarisation, que si f et g sont dans $L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$(2\pi)^n(f, g) = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g).$$

Remarque 4.3. Attention à ne pas confondre : le produit de dualité des distributions ne conjugue pas, alors que le produit scalaire L^2 si (c'est une forme sesquilinéaire). On a ainsi, par exemple pour $f, g \in L^2$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}f, g \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \langle f, \mathcal{F}g \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \\ (\mathcal{F}f, g)_{L^2} &= (2\pi)^n(f, \mathcal{F}^{-1}g)_{L^2}, \end{aligned}$$

par la définition de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$ et par la formule de Plancherel, respectivement, et ces deux quantités ne sont pas égales.

Remarque 4.4. On a vu que la transformée de Fourier envoyait continûment L^1 dans L^∞ , et L^2 dans L^2 (mais pas L^∞ dans L^1). Dans l'esprit général de la dualité Hölderienne, on peut montrer, avec un théorème d'interpolation, que pour $1 \leq p \leq 2$, la transformée de Fourier envoie continûment L^p dans L^q , avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Notons que ceci n'est pas vrai pour $p > 2$.

4.2 Espaces de Sobolev

La transformée de Fourier permet de caractériser la régularité des fonctions : plus une fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier décroît rapidement à l'infini. Ceci est lié en effet à la décroissance de l'amplitude des modes rapides, *i.e.* qui varient sur des échelles spatiales courtes, les irrégularités locales provenant précisément des ces modes-là. Afin d'étudier des fonctions de régularité arbitraire, on définit les espaces de Sobolev d'exposant réel.

Définition-Théorème 4.5 (Espaces de Sobolev d'exposants réels). Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on pose

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \hat{u} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}. \quad (4.2)$$

Muni du produit scalaire noté $(\cdot, \cdot)_{H^s}$ et défini par

$$\forall (u, v) \in H^s(\mathbb{R}^n)^2, \quad (u, v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi, \quad (4.3)$$

l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert.

Remarque 4.6 (Injections continues). Si $s_1 \leq s_2$, on a $(1 + |\xi|^2)^{s_1} \leq (1 + |\xi|^2)^{s_2}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, et on a donc l'injection continue $H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 4.3 Prouver le Théorème 4.5. On commencera par utiliser la transformation $A : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$(Au)(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi)$$

pour montrer que $H^s(\mathbb{R}^n)$ est isométrique à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

La définition (4.2) des espaces de Sobolev sur $H^s(\mathbb{R}^n)$ coïncide, lorsque s est entier, avec la définition plus usuelle suivante.

Proposition 4.7 (Espaces de Sobolev d'exposants entiers). Soit $s \in \mathbb{N}$. Alors

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq s \right\}, \quad (4.4)$$

et la norme définie sur $H^s(\mathbb{R}^n)$ par le produit scalaire (4.3) est équivalente à celle définie par le produit scalaire

$$(u, v) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} dx.$$

Exercice 4.4 Montrer la Proposition 4.7 dans le cas $s = 1$.

La transformée de Fourier permet de montrer très facilement le résultat suivant qui relie la décroissance, ou plus exactement l'intégrabilité, de la transformée de Fourier à l'infini avec la régularité locale de la fonction d'origine.

Théorème 4.8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ vérifiant $s > k + n/2$. Si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k tendent vers zéro à l'infini.

Exercice 4.5 Montrer le Théorème 4.8. On commencera par le cas $k = 0$ et on montrera que $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 4.6 (Un résultat de régularité elliptique) Résoudre l'équation

$$-\Delta u + u = f$$

pour $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Montrer que l'unique solution u est continue et bornée.

Exercice 4.7 Faire de même pour

$$-\Delta u + b \cdot \nabla u + \alpha u = f$$

avec $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $b \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha > 0$.

4.3 Résolution d'équations aux dérivées partielles

Nous concluons ce chapitre en montrant comment l'utilisation de la transformée de Fourier permet de résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles rencontrés en physique.

Equation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur, qui est le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f - \Delta f = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n, \\ f(0, \cdot) = f_0 & \text{sur } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.5)$$

On peut montrer l'existence et l'unicité d'une solution $f(t, \cdot) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t \geq 0$ si $f_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (voir [3, Section XIV.2.2]; nous ne présentons pas les détails ici car cela demanderait d'introduire la convolution de deux distributions). Il existe d'autres théories qui permettent de caractériser l'évolution pour des conditions initiales $L^2(\mathbb{R}^n)$ (théorie de Hille-Yosida).

Exercice 4.8 Montrer, en utilisant une transformée de Fourier sur la variable spatiale, que la solution est, formellement,

$$f(t, x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f_0(y) e^{-|x-y|^2/4t} dy.$$

Montrer que la fonction f ainsi définie est solution de l'équation de la chaleur pour $t > 0$ et vérifie la condition initiale si $f_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (en utilisant les résultats de l'appendice 7).

Exercice 4.9 (Problème de Cauchy inhomogène) *Donner la forme de la solution pour le problème de Cauchy inhomogène $\partial_t f - \Delta f = g$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$, avec $(t, x) \mapsto g(t, x)$ donnée.*

Exercice 4.10 (Équation des ondes) *Donner la forme de la solution pour l'équation des ondes $\partial_{tt} f = \Delta f$.*

Séries de Fourier des distributions périodiques

5.1 Distributions périodiques	31
5.2 Séries de Fourier des distributions périodiques	32
5.3 Transformée de Fourier des distributions périodiques	33

Dans ce chapitre, on montre que toute distribution périodique peut se développer en série de Fourier. Comme les distributions périodiques sont tempérées, on peut également calculer leur transformée de Fourier, ce qui établit un lien entre ces deux concepts jusqu'à présent séparés. Ce lien a des conséquences extrêmement utiles en théorie du signal (notamment la formule de Poisson), qui seront exploitées au chapitre suivant.

Par souci de simplification, comme dans la théorie des séries de Fourier, nous ne considérerons que des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, les résultats s'étendant cependant aux cas multidimensionnels. Nous considérons cependant une période T arbitraire, en vue d'utiliser ces résultats en théorie du signal.

5.1 Distributions périodiques

Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On appelle T -translatée de u la distribution $\tau_T u$ définie, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, par

$$\langle \tau_T u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle u, \tau_{-T} \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle u, \phi(\cdot + T) \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Cette définition est bien sûr motivée par le cas où u est continue, car on a alors $(\tau_T u)(t) = u(t - T)$.

Exercice 5.1 *Montrer que τ_T est un isomorphisme séquentiellement bicontinu sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d'inverse τ_{-T} .*

Définition 5.1 (Distribution T -périodique). *Une distribution u est T -périodique si $\tau_T u = u$. L'ensemble des distributions T -périodiques est noté $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R})$.*

Bien sûr, une distribution provenant d'une fonction L^1_{loc} périodique est une distribution périodique. Le résultat technique suivant sera très utile dans de nombreuses preuves.

Lemme 5.2 (Partition de l'unité T -périodique). *Il existe $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(t - nT) = 1. \quad (5.1)$$

Si $\phi \in L^1_{\text{loc}}$ est périodique de période T , alors

$$\int_0^T \phi = \int_{\mathbb{R}} \phi \chi. \quad (5.2)$$

Exercice 5.2 Montrer le Lemme 5.2. On pourra considérer une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ positive et strictement positive sur l'intervalle $[0, T]$, et chercher à la normaliser pour satisfaire (5.1).

L'utilité des partitions de l'unité est de permettre le calcul de coefficients de Fourier de distributions périodiques.

Définition-Théorème 5.3 (Coefficients de Fourier). Soit u une distribution périodique, et χ une partition de l'unité. On définit ses coefficients de Fourier par

$$c_n(u) = \frac{1}{T} \left\langle u, \chi(t) e^{-2i\pi n t/T} \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \quad (5.3)$$

Ces coefficients sont des formes linéaires séquentiellement continues sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Cette définition étend la définition usuelle dans le sens où, si $u \in L^1_{\text{loc}}$,

$$c_n(u) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-2i\pi n t/T} dt. \quad (5.4)$$

Remarque 5.4. Cette définition est celle des coefficients de Fourier (1.3), à la différence près que la période est T au lieu de 2π , et que la convention de normalisation est différente (on met un facteur $1/T$ dans les coefficients, au lieu de $1/\sqrt{T}$ en (1.3)).

Exercice 5.3 Montrer le Théorème 5.3.

5.2 Séries de Fourier des distributions périodiques

Avant de démontrer qu'une distribution périodique peut se représenter comme une série de Fourier, commençons par montrer le résultat, plus élémentaire, que les séries de Fourier dont les coefficients forment une suite à croissance lente sont des distributions périodiques.

Théorème 5.5. Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite à croissance lente, i.e. telle que

$$\exists p \in \mathbb{N}, C > 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n| \leq C(1 + |n|)^p.$$

Alors la série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi n t/T}$$

converge au sens des distributions tempérées et définit une distribution T -périodique.

Exercice 5.4 Montrer le Théorème 5.5.

Le Théorème 5.5 permet donc de construire des distributions périodiques comme sommes de séries de Fourier. De plus, la proposition ci-dessous montre que les coefficients c_n d'une telle série sont définis de manière unique.

Proposition 5.6 (Unicité des coefficients de Fourier). Si $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\gamma'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont deux suites à croissance lente telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{2i\pi n t/T} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma'_n e^{2i\pi n t/T}$$

au sens des distributions, alors $\gamma_n = \gamma'_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5.5 Prouver la Proposition 5.6.

On peut maintenant montrer que toute distribution périodique est égale à sa série de Fourier.

Théorème 5.7 (Série de Fourier d'une distribution périodique). *Soit u une distribution T -périodique. Alors $(c_n(u))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite à croissance lente, ne dépend pas du choix de la partition de l'unité χ dans (5.3), et on a l'égalité suivante au sens des distributions tempérées :*

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{2i\pi nt/T}. \quad (5.5)$$

Exercice 5.6 *Prouver le Théorème 5.7.*

- (i) *Montrer que les $c_n(u)$ forment une suite à croissance lente en utilisant les résultats de l'Appendice 8. En déduire que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{2i\pi nt/T}$ converge vers v dans $\mathcal{S}'$.*
- (ii) *Soit $w = u - v \in \mathcal{S}'$. Montrer que $c_n(w) = 0$.*
- (iii) *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\tau_{nT}(\chi w) = (\tau_{nT}\chi)w$ et en déduire que $w = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{nT}(\chi w)$.*
- (iv) *Montrer que $\langle w, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}$ en développant $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{nT}\phi$ en série de Fourier, et conclure que $w = 0$.*
- (v) *Montrer que le choix des $c_n(u)$ est indépendant du choix de χ .*

En conclusion, toute distribution T -périodique u est la somme d'une série de Fourier dont les coefficients $c_n(u)$ sont à croissance lente :

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{2i\pi nt/T},$$

et réciproquement, toute série de Fourier dont les coefficients sont à croissance lente définit une distribution T -périodique.

5.3 Transformée de Fourier des distributions périodiques

Le Théorème 5.7 montre en particulier que les distributions périodiques sont des distributions tempérées. On peut donc légitimement en considérer la transformée de Fourier. La transformée de Fourier $\mathcal{F}u$ d'une distribution périodique u est un peigne de Dirac, dont les poids sont les coefficients de Fourier $c_n(u)$.

Théorème 5.8 (Transformée de Fourier des distributions périodiques). *Pour toute distribution T -périodique u ,*

$$\mathcal{F}u = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) \delta_{2n\pi/T}.$$

Exercice 5.7 *Montrer le Théorème 5.8.*

Une application immédiate de cette théorie est la formule de Poisson, qui sera très utile par la suite.

Théorème 5.9 (Formule de Poisson). *La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est aussi un peigne de Dirac :*

$$\mathcal{F} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT} \right) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2n\pi/T}. \quad (5.6)$$

En particulier, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f} \left(\frac{2n\pi}{T} \right). \quad (5.7)$$

Exercice 5.8 *Prouver le Théorème 5.9.*

Échantillonnage et transformée de Fourier discrète

6.1 Échantillonnage	35
6.1.1 Échantillonnage d'un signal	35
6.1.2 Théorème de Shannon	37
6.2 Le recouvrement spectral (aliasing)	38
6.2.1 Exemple de repliement spectral	39
6.2.2 Suppression de l'aliasing	40
6.3 Transformée de Fourier discrète	40
6.4 Transformée de Fourier rapide	42
6.4.1 Présentation générale de la méthode	42
6.4.2 Calcul de complexité	43

L'objet principal de ce chapitre est d'étudier la transformée de Fourier de fonctions échantillonnées. Par souci de simplification, nous ne considérerons que des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, les résultats s'étendant cependant aux cas multidimensionnels. Nous limitons de plus notre étude à l'échantillonnage *uniforme*, où les échantillons sont espacés régulièrement, bien que l'échantillonnage non-uniforme soit aussi utilisé dans la pratique. Nous verrons que l'échantillonnage uniforme d'une fonction continue f à un pas T peut être vu comme le peigne de Dirac :

$$f_T = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \delta_{nT}.$$

Pour mesurer la perte d'information subie en remplaçant f par f_T , on fera le lien entre leurs transformées de Fourier $\hat{f}$ et $\hat{f}_T$. Grâce à la théorie de Fourier des distributions tempérées vue au chapitre précédent, nous pouvons donner un sens à la transformée de Fourier de f_T , et montrer le théorème de Shannon, qui donne les conditions de reconstruction parfaite d'un signal à partir de son échantillonnage.

6.1 Échantillonnage

6.1.1 Échantillonnage d'un signal

On considère des fonctions continues à croissance lente. La bonne représentation mathématique d'une fonction f échantillonnée avec un pas $T > 0$ est le peigne de Dirac

$$f_T = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \delta_{nT}. \quad (6.1)$$

Comme f est à croissance lente, cette série converge dans $\mathcal{S}'$.

Lorsque le pas d'échantillonnage T tend vers 0, f_T tend vers f dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. En effet, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\langle f_T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} T f(nT) \phi(nT) \xrightarrow{T \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi(t) dt = \langle f, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle f, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}},$$

car on reconnaît dans le membre de gauche une somme de Riemann d'une fonction à décroissance rapide.

L'effet de l'échantillonnage sur la fonction f est particulièrement facile à étudier en domaine fréquentiel : échantillonner f revient simplement à ajouter des répliques translatées en fréquence à $\hat{f}$.

Théorème 6.1 (Transformée de Fourier de f_T). *Si $f \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{F}f_T$ est C^∞ et*

$$\widehat{f_T}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\xi + \frac{2n\pi}{T}\right), \quad (6.2)$$

Exercice 6.1 *Prouver le Théorème 6.1. On pourra exprimer $\widehat{f_T}(\xi)$ sous la forme d'une somme, et utiliser la formule de Poisson.*

Remarque 6.2. *De même que la transformée de Fourier d'une distribution périodique est discrète, nous venons de voir que la transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée est périodique. Une façon élégante d'exprimer ces manipulations est de faire appel au formalisme des convolutions de distributions, en utilisant le fait que $g \star \delta_a = \tau_a g$. Ainsi, on peut réécrire formellement la définition de f_T en*

$$f_T = f \cdot \left(T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{nT} \right)$$

et donc, en utilisant le fait que $\mathcal{F}(u \cdot v) = \mathcal{F}(u) \star \mathcal{F}(v)$,

$$\mathcal{F}f_T = \mathcal{F}f \star \mathcal{F}\left(T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{nT}\right) = \mathcal{F}f \star \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi n/T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_{2\pi n/T} \mathcal{F}f.$$

De façon duale, si u est une distribution périodique, alors, si χ est une partition de l'unité, on a

$$u = (\chi u) \star \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{nT} \right),$$

et donc

$$\mathcal{F}u = \frac{1}{T} \mathcal{F}(\chi u) \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi n/T} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \mathcal{F}(\chi u)(2\pi n/T) \delta_{2\pi n/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(u) \delta_{2\pi n/T}.$$

Ces manipulations, utilisant la dualité convolution-multiplication et la formule de Poisson, expriment la dualité des opérations d'échantillonnage (multiplication par un peigne) et de périodisation (convolution par un peigne). On retrouve ainsi dans un cadre unifié le résultat des théorèmes de parties précédentes. Donner un sens à ces manipulations, et notamment à la formule $\mathcal{F}(u \cdot v) = \mathcal{F}(u) \star \mathcal{F}(v)$ sort du cadre de la théorie que nous avons développée, et nécessite d'introduire les espaces par lesquels on peut multiplier et convoluer des distributions tempérées (respectivement, les fonctions C^∞ à croissance lente et les distributions à décroissance rapide). On pourra se rapporter à [5] pour plus de détails.

6.1.2 Théorème de Shannon

Nous établissons dans ce paragraphe un résultat d'interpolation, qui montre que, sous certaines conditions, on peut reconstruire une fonction f à partir de ses échantillons. Ce résultat, appelé théorème d'échantillonnage ou théorème de Shannon, est remarquable car il montre que l'échantillonnage n'induit pas de perte d'information. La condition essentielle de ce théorème est que le support de $\mathcal{F}f$ soit dans l'intervalle borné $[-\pi/T, \pi/T]$, ce qui garantit que f n'a pas de variation plus rapide que la moitié de la fréquence d'échantillonnage $f = 2\pi/T$. La Figure 6.1 illustre les différentes étapes d'un échantillonnage puis d'une reconstruction à partir des échantillons, dans le domaine temporel et le domaine fréquentiel.

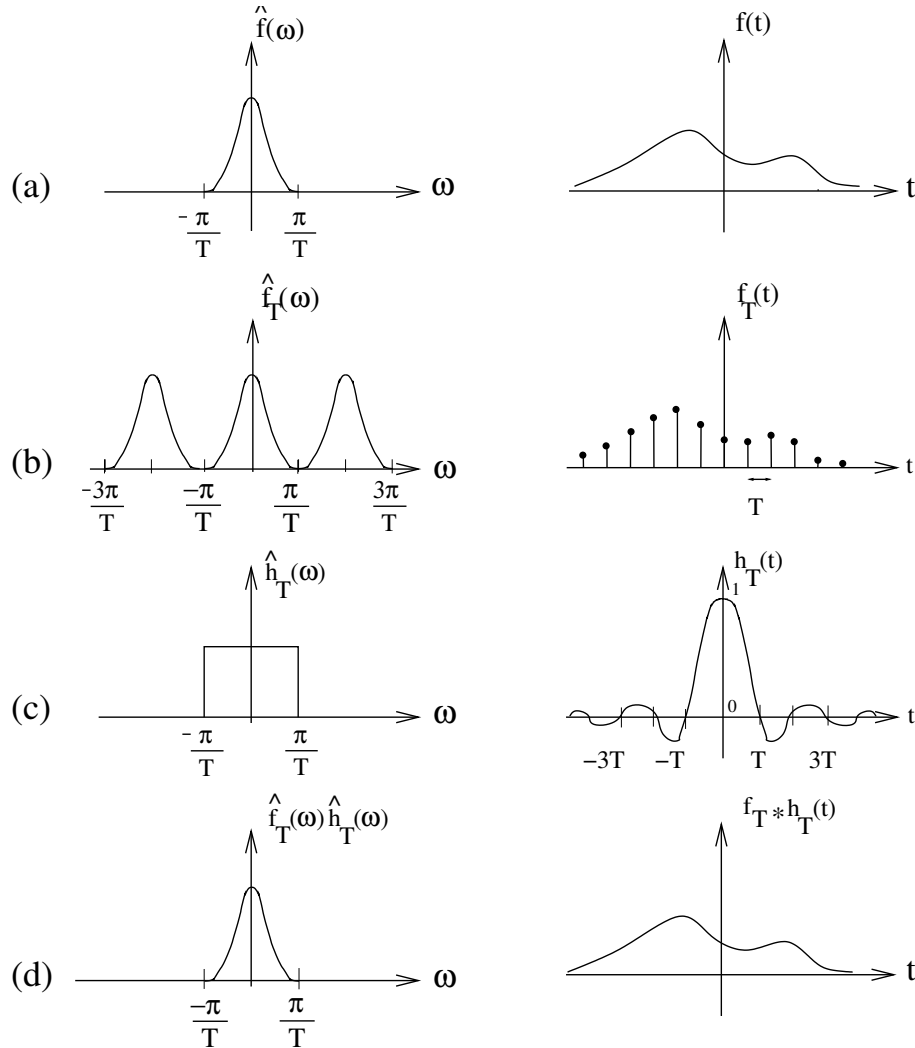


Fig. 6.1. (a) : Signal f et sa transformée de Fourier $\mathcal{F}f$. (b) : Un échantillonnage uniforme de f rend sa transformée de Fourier périodique. (c) : Passe-bas idéal. (d) : Le filtrage de (b) par (c) reconstitue f .

Théorème 6.3 (Shannon). Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et si le support de $\hat{f}$ est inclus dans $[-\pi/T, \pi/T]$, alors

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi(t - nT)}{T}\right), \quad (6.3)$$

où on rappelle que $\text{sinc } x = \sin x/x$.

Exercice 6.2 Montrer le Théorème 6.3, en s'inspirant de la Figure 6.1.

Remarque 6.4 (Théorème de Shannon pour les séries trigonométriques). *Un résultat similaire au théorème précédent s'obtient pour les séries trigonométriques dont les exponentielles complexes ont des pulsations strictement inférieures en valeur absolue à π/T . La preuve est très différente et se base sur la décomposition en série de Fourier de la restriction des fonctions $\xi \mapsto e^{i\xi t}$ à $[-\pi/T, \pi/T]$.*

La fonction $h_T(t) = \text{sinc}(\pi t/T)$ dont la transformée de Fourier est $\mathbb{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}(\xi)$ s'appelle *filtre passe-bas idéal*. La reconstitution (6.3) de f s'appelle le filtrage de f_T par h_T , et permet de ne conserver que les composantes fréquentielles de $\mathcal{F}f_T(\xi)$ telles que $|\xi| \leq \pi/T$.

Remarque 6.5 (Approximation numérique). *Si $f(t)$ est un signal à bande limitée dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$, le théorème de Shannon montre que la fréquence d'échantillonnage minimale pour laquelle le signal peut être reconstruit exactement est $2\xi_{\max}$. C'est par exemple ce qui explique qu'un CD audio soit échantillonné à une fréquence de 44100 Hz (l'oreille humaine entendant les sons jusqu'à environ 20000 Hz).*

La fonction h_T a une décroissance très lente à l'infini, donc le second membre de (6.3) converge très lentement. Ceci peut poser des problèmes pour des calculs pratiques (la durée d'échantillonnage d'un signal n'étant pas infinie). C'est pourquoi il est intéressant de remplacer h_T par une fonction qui a une décroissance plus rapide à l'infini. Supposons qu'on suréchantillonne f , c'est-à-dire qu'on l'échantillonne à une fréquence $2\pi/T > 2\xi_{\max}$. Les calculs conduisant à (6.3) restent valables si l'on remplace le filtre passe-bas idéal h_T par un filtre h vérifiant

$$\hat{h}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| < \xi_{\max}, \\ 0 & \text{si } |\xi| > \pi/T, \end{cases}$$

mais dont la transformée de Fourier $\hat{h}$ est plus régulière. Ainsi, le filtre h a une décroissance à l'infini plus rapide qu'un sinus cardinal, et la série

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) h(t - nT)$$

a de meilleures propriétés numériques de convergence.

Remarque 6.6. *On peut généraliser le théorème à des fonctions dont la décroissance à l'infini est moins rapide que celle des fonctions de $\mathcal{S}$, par exemple des fonctions L^2 .*

6.2 Le recouvrement spectral (aliasing)

Que se passe-t-il si les conditions du théorème de Shannon ne sont pas vérifiées? La réponse est contenue dans l'équation (6.2) que nous rappelons pour mémoire pour $f \in \mathcal{S}$:

$$\mathcal{F}f_T(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f\left(\xi + \frac{2k\pi}{T}\right).$$

Supposons que le support de $\mathcal{F}f$ déborde de $[-\pi/T, \pi/T]$. Le support de $\mathcal{F}f(\xi + 2k\pi/T)$ intersecte alors $[-\pi/T, \pi/T]$ pour plusieurs $k \neq 0$ en général, comme le montre la Figure 6.2. Ce repliement des composantes de haute fréquence sur un intervalle de basse fréquence s'appelle *recouvrement spectral*, *repliement spectral* ou encore *aliasing*.

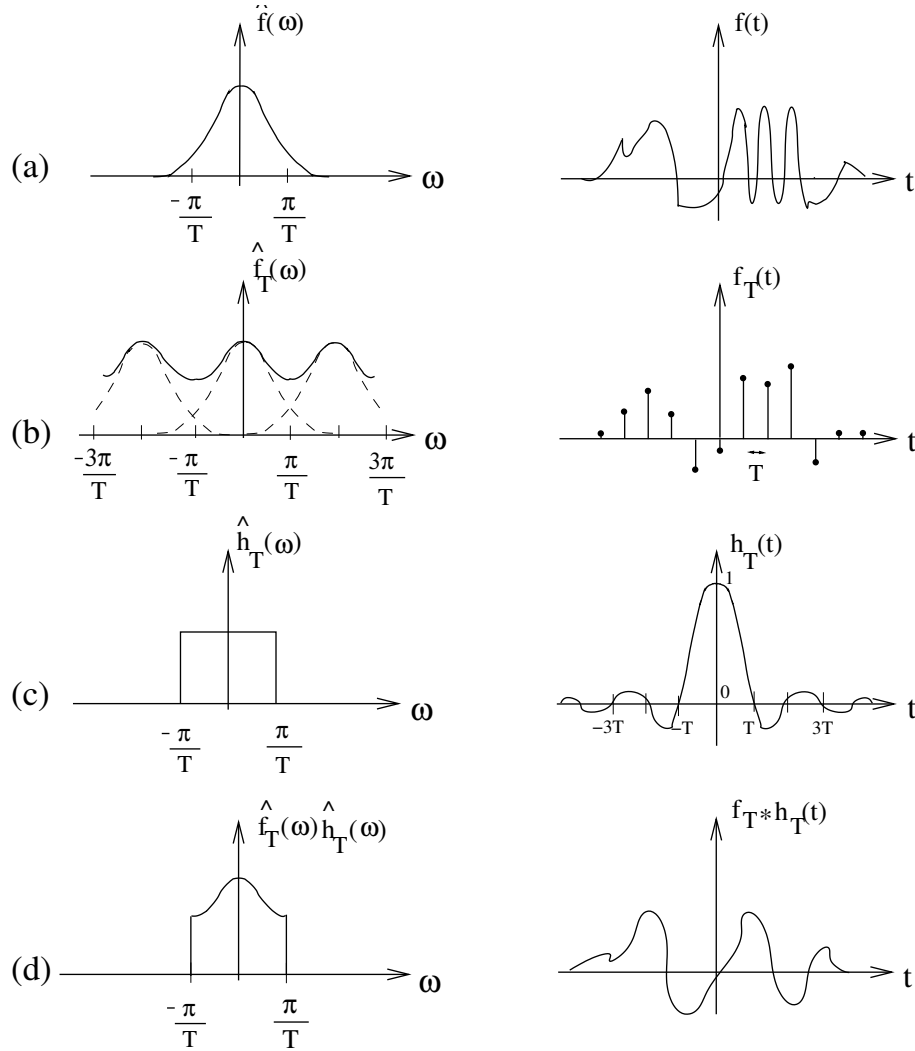


Fig. 6.2. (a) Signal à échantillonner et sa transformée de Fourier. (b) Échantillonnage et repliement spectral. (c) Filtre passe-bas idéal pour filtrage initial du signal. (d) Reconstruction du signal échantillonné.

6.2.1 Exemple de repliement spectral

Considérons une oscillation de haute fréquence

$$f(t) = \cos(\xi_0 t) = \frac{e^{i\xi_0 t} + e^{-i\xi_0 t}}{2}.$$

Sa transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}f = \pi(\delta_{-\xi_0} + \delta_{\xi_0}).$$

Si $2\pi/T > \xi_0 > \pi/T$, on a alors¹

1. Le lecteur attentif notera qu'en toute rigueur, le produit d'une distribution tempérée par une fonction non régulière (en l'occurrence $\mathbb{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}$) n'est pas défini a priori. En (??), on pouvait interpréter le produit au membre de gauche comme le produit d'une fonction $\mathcal{S}$ par une fonction L^∞ . Dans le cas particulier considéré ici, on peut cependant donner un sens au produit en écrivant, pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donnée,

$$\langle \hat{f}_T \hat{h}_T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \hat{f}_T, \mathbb{1}_{[-\pi/T, \pi/T]} \phi \rangle$$

$$\mathcal{F} f_T \hat{h}_T = \pi \mathbb{1}_{[-\pi/T, \pi/T]}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\delta_{-\xi_0 - 2k\pi/T} + \delta_{\xi_0 - 2k\pi/T} \right) = \pi \left(\delta_{\xi_0 - 2\pi/T} + \delta_{2\pi/T - \xi_0} \right),$$

car $-\pi/T < \xi_0 - 2\pi/T < 0$ et $0 < 2\pi/T - \xi_0 < \pi/T$. Par transformée de Fourier inverse,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kT) h_T(t - kT) = \cos \left[\left(\frac{2\pi}{T} - \xi_0 \right) t \right].$$

L'aliasing ramène la haute fréquence ξ_0 à une fréquence plus basse $(2\pi/T - \xi_0) \in [-\pi/T, \pi/T]$. Le même repliement de fréquence s'observe sur un film qui échantillonne dans le temps le mouvement rapide d'un objet, avec un nombre insuffisant d'images par seconde. Une roue qui tourne vite semble dans le film tourner beaucoup plus lentement, parfois dans le sens inverse. Un cas très simple est celui où $\xi_0 = 2\pi/T$, auquel cas $f(kT) = 1$, et le signal apparaît stationnaire.

Exercice 6.3 *A quelle vitesse une roue de voiture à cinq barreaux de 40cm de diamètre apparaîtra-t-elle comme stationnaire sur un film tourné à 30 images par secondes ?*

6.2.2 Suppression de l'aliasing

Pour éviter le recouvrement spectral, il faut que le support spectral de la fonction qu'on échantillonne à un pas T soit inclus dans $[-\pi/T, \pi/T]$. Ceci n'est malheureusement pas toujours possible, car la fréquence d'échantillonnage est imposée par le dispositif d'acquisition. Il est préférable dans ce cas de faire subir un prétraitement à f pour ramener son support spectral dans $[-\pi/T, \pi/T]$.

Exercice 6.4 *Montrer que la fonction g telle que $\text{Supp}(\mathcal{F}g) \subset [-\pi/T, \pi/T]$ et qui soit la plus proche possible de f en norme L^2 est donnée par*

$$\mathcal{F}g(\xi) = \frac{1}{T} \hat{h}_T(\xi) \mathcal{F}f(\xi). \quad (6.4)$$

Cette opération, appelée *filtrage* de f par $\frac{1}{T} h_T$, évite le recouvrement spectral en supprimant toutes les fréquences au-delà de π/T . Comme $\mathcal{F}g$ est à support dans $[-\pi/T, \pi/T]$, le théorème d'échantillonnage montre que $g(t)$ peut être reconstitué à partir des échantillons $g(nT)$.

Un convertisseur analogique/digital est composé d'un filtre qui limite le support fréquentiel à $[-\pi/T, \pi/T]$, suivi d'un échantillonnage uniforme au pas T .

6.3 Transformée de Fourier discrète

Numériquement, on ne connaît les valeurs d'une fonction continue f qu'en ses points d'échantillonnage, et par ailleurs, on n'a accès qu'à un nombre fini N de ces échantillons : typiquement, on connaît $f[n]$ pour $0 \leq n < N$ (nous avons considéré une période d'échantillonnage $T = 1$ pour simplifier). Nous allons voir maintenant comment la transformée de Fourier discrète permet de donner un sens à la transformée de Fourier des valeurs $\{f[n]\}_{n=0, \dots, N-1}$.

Pour cela, considérons un peigne de Dirac dont les poids sont les $f[n]$, étendus à $\mathbb{Z}$ tout entier par périodisation :

$$\tilde{f} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \delta_{n+kN}. \quad (6.5)$$

Puisque $\tilde{f}$ est une distribution N -périodique, elle peut s'écrire comme une série de Fourier :

et en évaluant la fonction de droite (continue presque partout) aux points donnés par les masses de Dirac du membre de gauche, qui sont bien placées en des points de continuité de la fonction du membre de droite.

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(\tilde{f}) e^{2i\pi kt/N}, \quad (6.6)$$

avec

$$c_k(\tilde{f}) = \frac{1}{N} \langle \tilde{f}, \chi e^{-2i\pi kt/N} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}},$$

où χ est une partition N -périodique de l'unité. On voit ensuite que

$$c_k(\tilde{f}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \chi(n + lN) \right) e^{-2i\pi k(n+lN)/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-2i\pi kn/N}, \quad (6.7)$$

où on a utilisé le Lemme 5.2. Finalement, la transformée de Fourier discrète est définie par $N c_k(\tilde{f})$:

Définition 6.7 (Transformée de Fourier discrète). *On définit la transformée de Fourier discrète $\{\hat{f}[k]\}_{k=0, \dots, N-1}$ de $\{f[n]\}_{n=0, \dots, N-1}$ par*

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-2i\pi kn/N}. \quad (6.8)$$

On obtient une formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète grâce à la représentation de la distribution périodique $\tilde{f}$ comme une série de Fourier, selon (6.6) :

$$\tilde{f} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \delta_{n+kN} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m(\tilde{f}) e^{2i\pi mt/N} = \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}[m] e^{2i\pi mt/N},$$

où on a utilisé la définition (6.7) pour la seconde égalité. On utilise ensuite la périodicité de $k \mapsto \hat{f}[k]$, à savoir

$$\forall k = 0, \dots, N-1, \quad \hat{f}[k+N] = \hat{f}[k],$$

pour regrouper les termes du membre de droite dans l'expression de $\tilde{f}$ ci-dessus, en décomposant $m \in \mathbb{Z}$ sous la forme $m = k + lN$:

$$\tilde{f} = \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{2i\pi kt/N} e^{2i\pi lt}.$$

On peut en fait réécrire $\tilde{f}$ sous la forme

$$\tilde{f} = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{2i\pi kt/N} \right) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi lt},$$

car la fonction $g : t \mapsto \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{2i\pi kt/N}$ est telle que si $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $gh \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et ainsi on peut définir le produit de la distribution tempérée $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi lt}$ par la fonction g , en faisant porter la multiplication sur la fonction test. Avec (5.6), on a ensuite

$$\tilde{f} = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{2i\pi kt/N} \right) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta_l = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{2i\pi kl/N} \right) \delta_l.$$

La comparaison avec la définition (6.5) montre que, par identification des termes devant les masses de Dirac δ_l ($0 \leq l \leq N-1$),

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{2i\pi kn/N}.$$

On a ainsi montré la formule d'inversion de la transformée de Fourier discrète :

Proposition 6.8 (Formule d'inversion discrète). *Etant données N valeurs $\{f[n]\}_{n=0,\dots,N-1}$ d'une fonction continue régulièrement échantillonnée,*

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{2i\pi kn/N}, \quad (6.9)$$

où la transformée de Fourier discrète est définie en (6.8).

Exercice 6.5 *Prouver la Proposition 6.8 de façon plus élémentaire en montrant que la famille $\{e_k\}_{0 \leq k < N}$ où*

$$e_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2i\pi kn/N}$$

est une base orthonormale de l'espace des signaux discrets de période N .

Remarque 6.9 (Discontinuités). *Même si la définition de la transformée de Fourier discrète ne fait intervenir que les valeurs de f échantillonnées aux points $0, \dots, N-1$, il faut toujours garder à l'esprit qu'elle se définit comme la série de Fourier de la fonction $\tilde{f}$ périodisée à partir des $f[n], n = 0, \dots, N-1$. Ceci a une importance considérable lorsqu'on s'intéresse à des propriétés de régularité de la fonction f , car, comme le montre la Figure 6.3, la périodisation peut introduire artificiellement des discontinuités.*

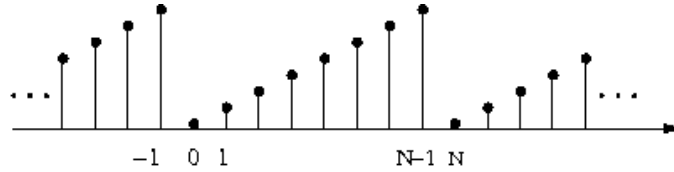


Fig. 6.3. Apparition de discontinuités lors de la périodisation de l'échantillonnage (voir Remarque 6.9).

6.4 Transformée de Fourier rapide

6.4.1 Présentation générale de la méthode

Le calcul direct de la transformée de Fourier discrète par la formule (6.8) nécessite *a priori*, si les exponentielles complexes sont stockées à l'avance, N^2 multiplications complexes, et $N(N-1)$ additions complexes, soit une complexité en $O(N^2)$.

Il existe cependant des techniques pour réduire ce coût de calcul, et calculer la transformée de Fourier discrète en $O(N \log_2 N)$ opérations, par une simple réorganisation des calculs. On parle ainsi d'algorithmes de transformée de Fourier rapide (FFT, pour "Fast Fourier Transform"). Il en existe plusieurs, le plus connu étant celui de Cooley et Tuckey [2], qui s'applique lorsque le nombre de points échantillonnés est une puissance de 2 (voir [3, Section III.B] pour d'autres références). La puissance de cet algorithme en fait un outil numérique incontournable (voir par exemple [3, Section III.B.7] pour une liste d'applications, en traitement du signal et résolution des équations aux dérivées partielles).

Le principe de la méthode est de réaliser le calcul du coefficient $\hat{f}[k]$ défini en (6.8) en regroupant les termes n et $n + N/2$. On obtient deux formules distinctes, selon que k soit un entier pair ou impair :

$$\hat{f}[2k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(f[n] + f[n + N/2] \right) \exp \left(-\frac{2i\pi kn}{N/2} \right), \quad (6.10)$$

$$\hat{f}[2k + 1] = \sum_{n=0}^{N/2-1} \exp \left(-\frac{2i\pi n}{N} \right) \left(f[n] - f[n + N/2] \right) \exp \left(-\frac{2i\pi kn}{N/2} \right). \quad (6.11)$$

Comme le montrent les expressions (6.10) et (6.11), les fréquences paires et impaires s'obtiennent respectivement par transformée de Fourier discrète des signaux $N/2$ -périodiques

$$f[n] + f[n + N/2]$$

et

$$\left(f[n] - f[n + N/2] \right) \exp \left(-\frac{2i\pi n}{N} \right).$$

Une transformée de Fourier discrète de taille N peut donc se calculer à partir de deux transformées de Fourier discrètes de taille $N/2$.

6.4.2 Calcul de complexité

Montrons que la complexité globale de l'algorithme est $O(N \log N)$. Soit $M(N)$ le nombre d'opérations élémentaires (addition, multiplication...) nécessaires pour calculer la transformée de Fourier d'un signal de longueur N . Le calcul fait intervenir deux transformées de Fourier de taille $N/2$, ainsi que CN opérations élémentaires, où C est une constante. On a donc les formules de récurrences suivantes :

$$M(N) = 2 M(N/2) + CN.$$

En posant $\widetilde{M}(N) = M(N)/N$, et avec le changement de variables $p = \log_2 N$, on obtient

$$\widetilde{M}(p) = \widetilde{M}(p-1) + C.$$

La transformée de Fourier d'un signal ne comportant qu'une seule valeur est l'identité, donc $\widetilde{M}(0) = 0$. On en déduit que

$$\widetilde{M}(p) = Cp$$

soit finalement,

$$M(N) = CN \log_2 N.$$

La complexité globale de l'algorithme est donc de $CN \log_2 N = \mathcal{O}(N \log N)$, bien inférieure au $\mathcal{O}(N^2)$ qu'on obtiendrait si on calculait directement les coefficients de Fourier par leur définition. En pratique, le facteur $\log N$ croît tellement lentement que la complexité est quasi-linéaire.

La méthode de calcul a été ici expliquée pour des données de taille 2^p . Elle peut être généralisée à des données de taille arbitraire, toujours avec une complexité $\mathcal{O}(N \log N)$, mais avec un préfacteur souvent plus important. Par exemple, sur un ordinateur de bureau standard sous MATLAB, une FFT de taille $8,388,608 = 2^{23}$ prend 0.1 secondes, une FFT de taille $8,388,449$ (un nombre premier) prend 1.6 secondes.

Appendice : intégrales et sommes dépendant d'un paramètre

On considère un espace mesuré $(Y, \mathcal{T}, \mu)$, X un ouvert de $\mathbb{R}$, et $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à la variable y pour tout $x \in X$. On peut alors définir sur X la fonction

$$F(x) = \int_Y f(x, y) d\mu(y).$$

Les résultats suivants sont des conséquences directes du théorème de convergence dominée. Ils s'appliquent au cas d'intégrales paramétriques mais aussi aux sommes de fonctions (en choisissant pour Y les entiers naturels).

Théorème 7.1 (Continuité). *Soit $x_0 \in X$. Si pour presque tout $y \in Y$, f est continue en x au voisinage de x_0 , et si il existe une fonction $g \in L^1(Y)$ vérifiant $|f(x, y)| \leq g(y)$ pour tout $x \in X$ et presque tout $y \in Y$, alors F est continue en x_0*

Théorème 7.2 (Dérivabilité). *Si pour presque tout $y \in Y$, f est de classe C^1 en x sur X et qu'il existe une fonction $g \in L^1(Y)$ vérifiant*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq g(y)$$

pour tout $x \in X$ et presque tout $y \in Y$, alors F est de classe C^1 sur X et

$$F'(x) = \int_Y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) d\mu(y)$$

Appendice : distributions à support compact

Définition 8.1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

- (1) Soit ω ouvert inclus dans Ω . On dit que T est nulle sur ω si pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\text{Supp}(\phi) \subset \omega$, on a $\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0$.
- (2) Le support de T est le complémentaire dans Ω de la réunion des ouverts de Ω sur lesquels T est nulle.

Définition 8.2. On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω à support compact.

On a le résultat suivant.

Théorème 8.3. Si une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact, elle est d'ordre fini.

Preuve. Soit K le support de T et $\alpha = d(K, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$ (dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$, on prendra $\alpha = +\infty$). Posons $\beta = \inf(1, \alpha)$ et considérons les ensembles

$$K' = \left\{ x \in \mathbb{R}^d, \quad d(x, K) \leq \frac{\beta}{3} \right\},$$

et

$$\Omega' = \left\{ x \in \mathbb{R}^d, \quad d(x, K) < \frac{2\beta}{3} \right\}.$$

Il est clair que K' est compact et que Ω' est un ouvert de fermeture compacte. De plus, on a

$$K \subset K' \subset \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega.$$

Soit p un entier et C une constante réelle tels que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega'}}(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq C \sup_{x \in \overline{\Omega'}, |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Soit maintenant $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$ égale à 1 sur K' et à support dans Ω' . On a pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \rho\phi \rangle + \langle T, (1 - \rho)\phi \rangle$$

et $\langle T, (1 - \rho)\phi \rangle = 0$ puisque les supports de T et de $(1 - \rho)\phi$ sont disjoints. De plus, comme $\text{Supp}(\rho\phi) \subset \Omega'$, on a

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq C \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha (\rho\phi)(x)|.$$

D'après la formule de Leibniz,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq C' \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

avec

$$C' = C \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leq p, \beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} |\partial^\beta \rho(x)|.$$

Donc T est d'ordre fini inférieur ou égal à p .

Remarque 8.4. Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ une distribution à support compact, p son ordre, K un voisinage compact de $\text{Supp } T$ et $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ valant 1 sur K . Posons pour tout $\phi \in C^\infty(\Omega)$,

$$\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty} = \langle T, \chi \phi \rangle.$$

Cette définition est indépendante de χ : soit en effet χ_1 et χ_2 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ valant 1 sur K ; on a

$$\langle T, \chi_1 \phi \rangle - \langle T, \chi_2 \phi \rangle = \langle T, (\chi_1 - \chi_2) \phi \rangle.$$

La fonction $\tilde{\phi} = (\chi_1 - \chi_2) \phi$ étant nulle sur K voisinage de $\text{Supp } u$, on a

$$\langle T, (\chi_1 - \chi_2) \phi \rangle = 0.$$

On a ainsi associé à une distribution à support compact une forme linéaire sur $C^\infty(\Omega)$.

Théorème 8.5. Les distributions à support compact sont des distributions tempérées.

Preuve. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Par la construction de la Remarque 8.4, on peut définir

$$\langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{E}', C^\infty}.$$

Finalement,

$$\left| \langle T, \phi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \right| = \left| \langle T, \chi \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \right| \leq C_{K'} \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha(\chi \phi)\|_{L^\infty} \leq C \sup_{|\alpha| \leq p} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty} \leq C \mathcal{N}_p(\phi),$$

ce qui est bien la propriété de continuité (3.3).

Bibliographie

- [1] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications* (Dunod, 1999).
- [2] J. W. COOLEY ET J. W. TUKEY, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. Comput.* **19** (1965) 297–301.
- [3] R. DAUTRAY ET J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume I-III (Masson, 1987).
- [4] M. PINSKY, *Introduction to Fourier analysis and wavelets* (American Mathematical Soc., 2002).
- [5] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions* (Hermann, 1998).