

Problème à deux corps

Sylvain Arlot

Ecole d'été Observations Astronomiques pour la Formation des Maîtres

9 Août 2002

Table des matières

1	Introduction	3
2	Le référentiel barycentrique	4
3	Grandeurs cinétiques	5
4	Le mobile fictif	6
5	Application des théorèmes de la dynamique	8
5.1	Théorème du moment cinétique	8
5.2	Loi de conservation de l'énergie mécanique	9
5.3	Intégration du mouvement	9
5.4	Énergie potentielle efficace	9
5.5	Principe fondamental de la dynamique	11
6	Les lois de Képler	12
6.1	Première loi de Képler	12
6.2	Deuxième loi de Képler	13
6.3	Troisième loi de Képler	13
7	Rappels de mécanique	14
7.1	Grandeurs cinétiques	14
7.2	Principe fondamental de la dynamique	14
7.3	Théorème du moment cinétique	15
7.4	Énergie mécanique. Théorème de l'énergie cinétique.	15
7.5	Mouvement à force centrale : formules de Binet	16

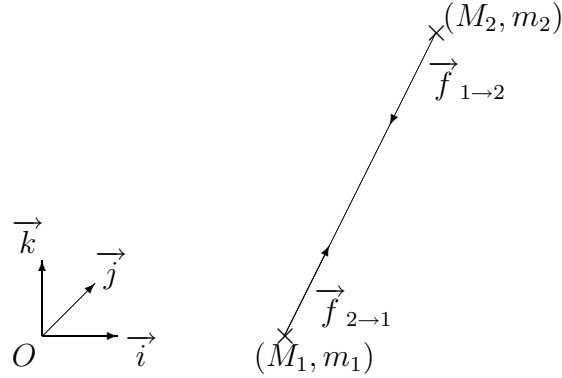


FIG. 1 – Les deux corps en interaction

1 Introduction

On considère deux masses ponctuelles (M_1, m_1) et (M_2, m_2) , dans un référentiel $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ galiléen. On cherche à déterminer le mouvement relatif de ces deux corps en interaction.

Ce modèle permet d'expliquer le mouvement d'un satellite naturel ou artificiel autour d'une planète, le mouvement des planètes, des astéroïdes et des comètes autour du Soleil, le mouvement relatif de deux étoiles qui forment une étoile double, etc.

Plusieurs hypothèses sont nécessaires pour appliquer le modèle à des cas réels :

1. On assimile les deux corps à des masses ponctuelles. D'après la proposition 1, on peut le faire lorsque la répartition de leur masse est à symétrie sphérique. C'est souvent assez proche de la réalité, par exemple pour le Soleil ou la Lune. Par contre, la Terre est un peu aplatie.
2. Le système $(\Sigma) = \{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$ est isolé.
3. L'interaction des deux corps est purement gravitationnelle.
4. Le référentiel \mathcal{R} est galiléen et on peut appliquer les lois de la mécanique classique.

Proposition 1. *Soit un corps de masse m et de centre de gravité G , dont la répartition de masse est à symétrie sphérique. Alors le champ gravitationnel engendré par ce corps est, à l'extérieur de celui-ci, égal au champ gravitationnel que produirait une masse m ponctuelle placée en G .*

Notons $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$ la force exercée par M_1 sur M_2 . Les hypothèses 2 et 3 se traduisent ainsi (Ω désignant l'univers tout entier) :

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \vec{f}_{\Omega \rightarrow 2} = -\vec{f}_{\Omega \rightarrow 1} \quad (\text{hyp. 2})$$

$$= \frac{-\mathcal{G}m_1m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}. \quad (\text{hyp. 3})$$

Les écarts entre les observations et le modèle sont en partie dûs aux hypothèses, souvent fausses. Cependant, le problème des deux corps nous donne une assez bonne approximation de la réalité. Dans un deuxième temps, pour une meilleure modélisation, il faut faire quelques "ajustements" pour tenir compte – par exemple – de l'aplatissement de la Terre (hyp. 1), et surtout des perturbations dues à la présence d'autres corps (hyp. 2).

2 Le référentiel barycentrique

Définition 1. Le barycentre G de $\Sigma = \{(M_1, m_1), (M_2, m_2)\}$ est défini par $m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$.

Le référentiel $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant donné, on définit le *référentiel barycentrique* $\mathcal{R}^* = (G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Il est en translation par rapport à \mathcal{R} , à la vitesse $\vec{v}(G)_{\mathcal{R}}$.

Notation 2. Souvent, le barycentre G est appelé centre de masse, centre de gravité ou centre d'inertie.

Proposition 2. Si Σ est isolé, \mathcal{R}^* est galiléen.

Démonstration. D'après le théorème du centre de masse,

$$(m_1 + m_2) \vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = \vec{f}_{ext} = \vec{0},$$

d'où $\vec{v}(G)_{\mathcal{R}} = \vec{cte}$. \mathcal{R}^* est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} galiléen. \square

Pour résoudre le problème des deux corps, on va se placer dans \mathcal{R}^* qui est galiléen. Le mouvement dans \mathcal{R} s'en déduit à une translation rectiligne uniforme près.

Remarque 1. Dans toute la suite, on n'utilisera que les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}^* , qui sont en translation l'un par rapport à l'autre. Pour la dérivation vectorielle, il ne sera donc pas nécessaire de préciser le référentiel utilisé.

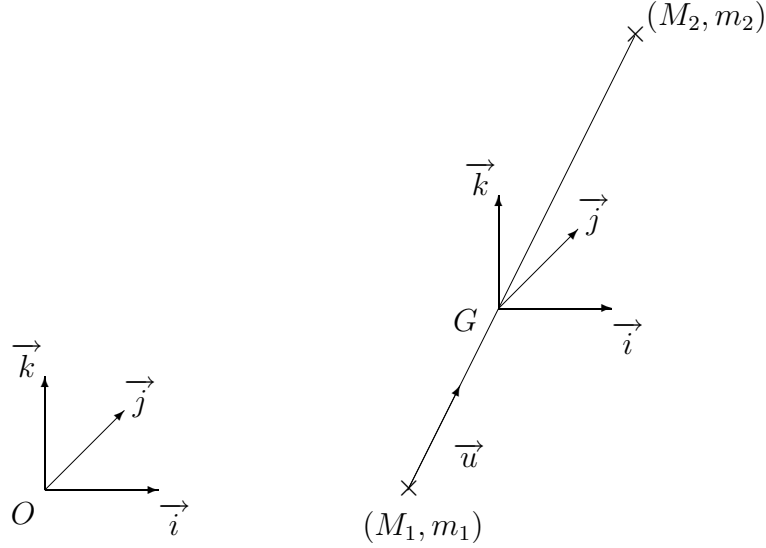


FIG. 2 – Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^*

3 Grandeurs cinétiques

Posons tout d'abord quelques notations :

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1} \quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2} \quad \vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (\text{vecteurs position})$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(M_1)_{\mathcal{R}} \quad \vec{v}_2 = \vec{v}(M_2)_{\mathcal{R}} \quad \vec{v} = \vec{v}(M_1 \setminus M_2) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

(vecteurs vitesse)

$$\vec{p}_1 = \vec{p}(M_1)_{\mathcal{R}} \quad \vec{p}_2 = \vec{p}(M_2)_{\mathcal{R}} \quad \vec{p} = \vec{p}(\Sigma)_{\mathcal{R}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

(quantités de mouvement)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{accélération relative})$$

$$\vec{\sigma}_A^* = \vec{\sigma}_A(M_1)_{\mathcal{R}^*} + \vec{\sigma}_A(M_2)_{\mathcal{R}^*} \quad (\text{moment cinétique en A de } \Sigma)$$

$$K^* = K_1^* + K_2^* \quad (\text{énergie cinétique barycentrique de } \Sigma)$$

De même, on définit \vec{v}_1^* , \vec{v}_2^* , \vec{p}_1^* , \vec{p}_2^* et \vec{p}^* (en remplaçant \mathcal{R} par \mathcal{R}^*).

On a alors

$$\vec{v}_1^* = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \quad (1)$$

$$\vec{p}_1^* = \frac{-m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} = -\mu \vec{v} \text{ et } \vec{p}^* = \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0} \quad (2)$$

$$\vec{\sigma}_A^* = \vec{\sigma}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v} \text{ pour un point } A \text{ quelconque} \quad (3)$$

$$K^* = K_1^* + K_2^* = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 \quad (4)$$

où l'on a posé $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (*masse réduite* du système).

Démonstration. (1) Par définition de G , $(m_1 + m_2) \overrightarrow{GM}_1 = -m_2 \overrightarrow{M_1 M_2}$, d'où le résultat en dérivant.

(2) Clair d'après les définitions de \vec{p}_1^* et μ et l'équation (1). L'expression de \vec{p}_2^* se calcule exactement de la même façon, en dérivant $(m_1 + m_2) \overrightarrow{GM}_2 = m_1 \overrightarrow{M_1 M_2}$. Remarquons que $\vec{p}^* = \vec{0}$ peut se voir directement, en dérivant la définition de G : $m_1 \overrightarrow{GM}_1 + m_2 \overrightarrow{GM}_2 = \vec{0}$.

(3) Soit A un point quelconque. En utilisant (2), on a :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_A^* &= \vec{\sigma}_A(M_1)_{\mathcal{R}^*} + \vec{\sigma}_A(M_2)_{\mathcal{R}^*} \\ &= \overrightarrow{AM}_1 \wedge \vec{p}_1^* + \overrightarrow{AM}_2 \wedge \vec{p}_2^* \\ &= \overrightarrow{M_2 M_1} \wedge \vec{p}_1^* \\ &= \vec{r} \wedge \mu \vec{v} \end{aligned}$$

(4) Le dernier résultat découle de (1) :

$$\begin{aligned} K^* &= \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^{*2} \\ &= \frac{m_1 m_2^2}{2(m_1 + m_2)^2} \vec{v}^2 + \frac{m_1^2 m_2}{2(m_1 + m_2)^2} \vec{v}^2 \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \vec{v}^2 \end{aligned}$$

□

4 Le mobile fictif

L'objectif de ce paragraphe est de réduire le problème des deux corps à un problème ne comportant qu'un seul corps en mouvement autour d'un

deuxième corps fixe. Comme les référentiels $\mathcal{R}_1 = (M_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{R}_2 = (M_2, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ne sont pas galiléens, un changement de référentiel ne nous donnera pas les résultats voulus. On va introduire un mobile fictif M , tel que les mouvements de M_1 et M_2 dans \mathcal{R}^* se déduisent du mouvement de M dans \mathcal{R}^* .

Définition 3 (Mobile fictif). Le mobile fictif M est une masse ponctuelle μ dont la position est définie par $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Si l'on choisit μ égale à la masse réduite du système $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (comme le laissait entendre la notation), les calculs faits à la section 3 démontrent la proposition suivante :

- Proposition 3.**
1. $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}^*} = \vec{v}(M_1 \setminus M_2) = \vec{v}$
 2. $\vec{p}_2^* = \mu \vec{v} = \vec{p}$
 3. $\vec{\sigma}_G(M)_{\mathcal{R}^*} = \vec{\sigma}_G(\Sigma)_{\mathcal{R}^*} = \vec{\sigma}$
 4. $K(M)_{\mathcal{R}^*} = K(\Sigma)_{\mathcal{R}^*} = K$

Le mouvement de M dans \mathcal{R}^* est donc celui d'une particule ponctuelle de masse μ soumise à une unique force

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \frac{d(\mu \vec{v})}{dt} = \frac{d(\vec{p}_2^*)}{dt} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \\ &= \frac{-\mathcal{G}m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} = \frac{-\mathcal{G}\mu m}{r^2} \vec{u} \end{aligned}$$

avec $m = m_1 + m_2$ (masse totale du système), $r = M_1 M_2 = GM$ et $\vec{u} = \vec{u}_{1 \rightarrow 2} = \vec{u}_{G \rightarrow M}$, soit l'attraction qu'exercerait sur M une masse fixe m située en G . Il ne nous reste plus qu'à déterminer le mouvement d'une particule soumise à une telle force, en remarquant notamment qu'il s'agit d'une force *centrale*.

Pour revenir ensuite au problème initial, il suffira d'appliquer une homothétie. En effet, les définitions de G et M conduisent immédiatement aux deux relations

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GM}_1 &= \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{GM}_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM} \end{aligned}$$

Remarquons de plus que dans le cas où l'une des deux masses est négligeable par rapport à l'autre (par exemple $m_1 \gg m_2$, $M_1 = \text{Soleil}$, $M_2 = \text{Terre}$), le $G \approx M_1$, $m \approx m_1$ et $\mu \approx m_2$. L'introduction du mobile fictif permet de préciser à quoi correspond l'approximation d'un Soleil fixe autour duquel tournent les planètes, mais aussi de se ramener à un seul corps lorsque ce type d'hypothèse n'est pas justifié.

5 Application des théorèmes de la dynamique

Avant tout, rappelons quelques notations pour décrire le mouvement de M : le vecteur position (ou rayon vecteur) $\vec{r} = \overrightarrow{GM} = r\vec{u}$ avec $r > 0$, le vecteur vitesse \vec{v} , la quantité de mouvement \vec{p} , l'accélération \vec{a} , le moment cinétique en G $\overrightarrow{\sigma}_G = \vec{\sigma}$, l'énergie cinétique K .

5.1 Théorème du moment cinétique. Mouvement à force centrale. Loi des aires

M est soumis à une force centrale (c'est-à-dire dirigée vers un point G immobile). Sous cette seule hypothèse ($\vec{f}_{ext \rightarrow M}$ est parallèle à \overrightarrow{GM}), le théorème du moment cinétique (appliqué en G) s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(G)_{\vec{f}_{ext \rightarrow M}} = \overrightarrow{GM} \wedge \vec{f}_{ext \rightarrow M} = \vec{0} \quad (5)$$

Par conséquent, le moment cinétique de M (en G) $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge \mu\vec{v}$ est constant au cours du mouvement. Si $\vec{\sigma} = \vec{0}$, le mouvement est rectiligne. Sinon, il est plan (M reste dans un plan orthogonal à $\vec{\sigma}$). On peut donc utiliser les coordonnées polaires (r, θ) (centrées en G) et la base locale associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ (cf. figure 4 pour sa définition) pour décrire le mouvement de M (en fixant la direction $\theta = 0$ arbitrairement). On a alors :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{u}_r \\ \vec{v} &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{\sigma} &= \mu r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \end{aligned} \quad (6)$$

On a donc une intégrale première du mouvement, la constante des aires c :

$$c = r^2 \dot{\theta}. \quad (7)$$

Notation 4. Souvent, on écrit \dot{X} au lieu de $\frac{dX}{dt}$, pour une grandeur X scalaire ou vectorielle dépendant du temps.

Remarque 2. On a utilisé uniquement que M est soumis à une force centrale, indépendamment de son expression. La loi des aires (2^{ème} loi de Képler) est donc valable sous cette seule hypothèse.

On appelle cette propriété la loi des aires car, en notant $A(t)$ l'aire (algébrique) balayée par le rayon vecteur entre l'instant initial et l'instant t , on a (en général) :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} \quad (\text{vitesse aréolaire})$$

Le mouvement de M possède désormais seulement deux degrés de liberté (r et θ), et on a obtenu une intégrale première. Il nous suffit d'une deuxième pour le décrire complètement.

5.2 Loi de conservation de l'énergie mécanique

La conservation de l'énergie mécanique va nous donner la deuxième intégrale première recherchée.

En effet, M est soumis à une unique force qui dérive d'une énergie potentielle U :

$$\vec{f}_{G \rightarrow M} = \frac{-\mathcal{G}\mu m}{r^2} \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}_M U \quad (8)$$

$$\text{avec } U = \frac{-\mathcal{G}\mu m}{r} \quad (9)$$

Par conséquent, l'énergie mécanique se conserve :

$$\begin{aligned} E = K + U &= \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{\mathcal{G}\mu m}{r} \quad (10) \\ &= \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu \frac{c^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}\mu m}{r} \quad (\text{d'après la loi des aires}) \end{aligned}$$

5.3 Intégration du mouvement

Réécrivons (d'après la loi des aires) sous la forme $\dot{r} = f(r)$. Si l'on note φ une primitive de $1/f$ nulle en $r_0 = r(t_0)$, on a alors $r = \varphi^{-1}(t - t_0)$. Avec l'équation (7), on obtient $\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \frac{c}{r^2}$. Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle ne peut être que numérique.

5.4 Énergie potentielle efficace

Une autre façon d'utiliser la conservation de l'énergie est d'introduire l'énergie potentielle efficace, ce qui donne des renseignements sur la trajectoire de M . On pose

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U_{eff}(r) \quad (11)$$

$$\text{avec } U_{eff}(r) = \frac{1}{2}\mu \frac{c^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}\mu m}{r}. \quad (12)$$

On trace alors la courbe donnant U_{eff} en fonction de r . Comme l'énergie E reste constante et supérieure à $U_{eff}(r)$, cela nous donne une indication sur les valeurs possibles de r au cours du mouvement en fonction de E :

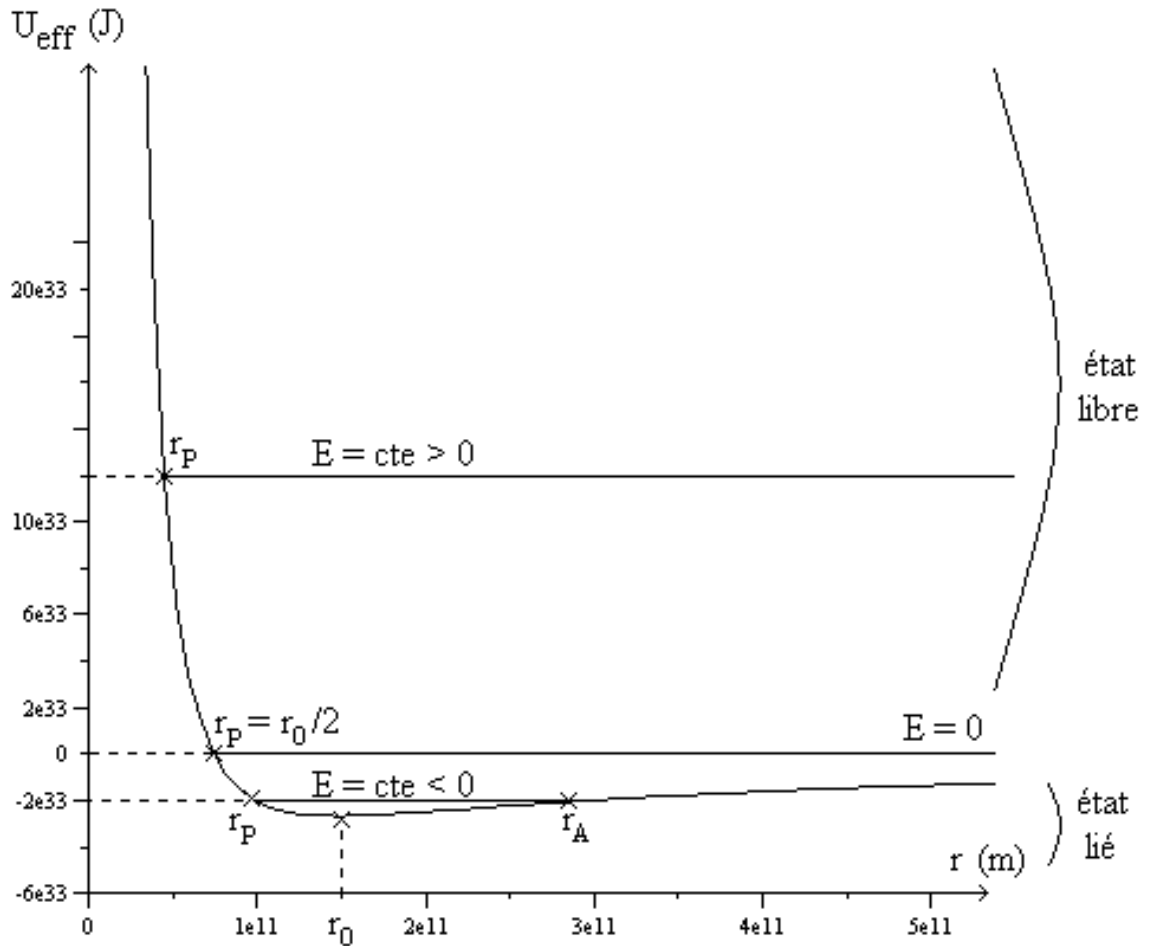


FIG. 3 – L'énergie potentielle efficace. Les valeurs numériques sont celles de la Terre et du Soleil, pour lesquels on a $E \approx U_{\text{eff}}(r_0)$ (trajectoire quasi-circulaire). Les trois droites horizontales $E = \text{cte}$ tracées correspondent aux trois cas possibles ($E > 0$, $E = 0$, $E < 0$).

- Dans tous les cas, il existe une valeur minimale de r , r_P (distance au périastre).
- Lorsque l'énergie mécanique est positive ou nulle, r n'est pas majoré : les deux corps sont à l'état libre.
- A l'inverse, si $E \leq 0$, il existe une deuxième valeur particulière de r , r_A (distance à l'apoastre). Au cours du mouvement, r reste borné, entre r_P et r_A : les deux corps sont à l'état lié.
- Enfin, pour $r = r_0$, U_{eff} atteint son minimum E_0 . Si $E = E_0$, la trajectoire est circulaire, parcourue à vitesse angulaire constante $\frac{c}{r_0^2}$ (puisque l'on a la loi des aires). Un calcul rapide donne $r_0 = c^2/(\mathcal{G}m)$.

On peut rapprocher cette étude graphique de la relation (17) (lien entre le signe de E et l'état libre/lié des deux corps)

Notons également que l'énergie potentielle efficace ne s'interprète de cette façon que si la loi des aires est bien vérifiée (les valeurs de r_0 , $U_{eff}(r_0)$, etc. dépendent de c , m et μ). Il faut que le mouvement reste donc à force *centrale*. Par exemple, pour un satellite artificiel, seule une poussée radiale ne change pas c .

5.5 Principe fondamental de la dynamique

Ce n'est pas une loi de conservation, mais il permet de donner l'équation de la trajectoire (c'est-à-dire $r(\theta)$). On a

$$\mu \vec{a} = \vec{f}_{ext \rightarrow M} = \frac{-\mathcal{G}\mu m}{r^2} \vec{u}_r. \quad (13)$$

Comme le mouvement est à force centrale, on peut utiliser les formules de Binet (cf section 7.5). Posons $u = 1/r$, alors l'équation (13) s'écrit

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}m}{c^2} \quad (14)$$

On obtient en intégrant :

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{\mathcal{G}m}{c^2} \quad (15)$$

$$\text{d'où } r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}. \quad (16)$$

C'est l'équation d'une conique d'excentricité $e = Ap$, de paramètre $p = c^2/(\mathcal{G}m)$, avec origine au foyer. M décrit donc une conique de foyer G et d'axe focal faisant un angle θ_0 avec l'axe polaire, dont les caractéristiques p et e dépendent des conditions initiales (c et E par exemple).

De plus, son excentricité est reliée aux conditions initiales par la relation suivante :

$$e^2 - 1 = \frac{2c^2}{\mathcal{G}^2 m^2 \mu} E \quad (17)$$

Démonstration. On a $E = U_{eff}(r_P)$, et $r_P = r(\theta_0) = \frac{p}{1+e}$. De l'expression de $p = \frac{c^2}{\mathcal{G}m}$ et de celle de $U_{eff}(r)$ on tire la relation précédente :

$$E = \frac{\mu c^2 (1+e)^2}{p^2} - \frac{\mathcal{G}m\mu(1+e)}{p} \quad (18)$$

$$= \frac{\mathcal{G}^2 m^2 \mu c^2 (1+e)^2}{2c^4} - \frac{\mathcal{G}m\mu \mathcal{G}m(1+e)}{c^2} \quad (19)$$

$$\text{d'où } \frac{2c^2}{\mathcal{G}^2 m^2 \mu} E = (1+e)^2 - 2(1+e) = e^2 - 1 \quad (20)$$

□

6 Les lois de Képler

Il s'agit d'appliquer les résultats du problème des deux corps au Système Solaire. Dans la suite, on prendra $M_1 = S$, centre de masse du Soleil et $M_2 = P$, centre de masse d'une planète (ou bien d'une comète ou d'un astéroïde). Le référentiel \mathcal{R} sera le référentiel héliocentrique.

On fera toujours une hypothèse fondamentale : seule l'interaction entre la planète et le Soleil est significative. Autrement dit, on décrit le mouvement d'un corps du système solaire soumis à l'attraction du Soleil mais pas à celles des autres corps du système solaire.

6.1 Première loi de Képler

Première loi de Képler.

Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Démonstration. Tout d'abord, il faut faire une approximation : la masse du Soleil étant bien supérieure à celle des différentes planètes ($m_S \gg m_P$), $G \approx S$, $M \approx P$, $m \approx m_S$ et $\mu \approx m_P$. Les planètes décrivent donc une conique dont le Soleil occupe l'un des foyers. L'observation a montré que cette conique est bornée (état lié). Il s'agit donc d'une ellipse. □

Remarque 3. La même propriété est vraie pour tous les corps du système solaire, qui décrivent une conique dont le Soleil occupe l'un des foyers. La nature de la conique dépend des conditions initiales. Ainsi, de nombreuses comètes ont une trajectoire parabolique.

6.2 Deuxième loi de Képler

Deuxième loi de Képler (Loi des aires).

La vitesse aréolaire est constante. Autrement dit, l'aire balayée par le rayon vecteur \overrightarrow{SP} (S désignant le Soleil et P une planète) est proportionnelle au temps écoulé.

Démonstration. Notons $A(t)$ l'aire (algébrique) balayée par le rayon vecteur entre l'instant initial et l'instant t . On a la relation suivante :

$$\left| \frac{dA}{dt} \right| = \frac{|c|}{2} \quad (21)$$

La loi des aires (qui provient de la conservation du moment cinétique) permet de conclure. \square

6.3 Troisième loi de Képler

Troisième loi de Képler.

$T^2 a^{-3}$ est une quantité constante pour tous les corps du système solaire (planètes, astéroïdes, comètes), où T désigne la période de révolution autour du Soleil et a le demi grand axe de la trajectoire.

Démonstration. Cela provient de la relation suivante :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)} \quad (22)$$

et de l'approximation $m \approx m_S$ vue précédemment. \square

Démonstration de la relation (22). On utilise la 2^{ème} loi de Képler

$$\frac{dA}{dt} = \frac{c}{2} = \frac{A_{\text{ellipse}}}{T} \quad (23)$$

les propriétés de l'ellipse

$$A_{\text{ellipse}} = \pi ab \quad (24)$$

$$p = \frac{b^2}{a} \quad (25)$$

et l'expression de p en fonction de c

$$p = \frac{c^2}{\mathcal{G}m} \quad (26)$$

d'où l'on tire

$$c^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \quad (27)$$

$$= \frac{\mathcal{G}mb^2}{a} \quad (28)$$

ce qui achève la démonstration. \square

7 Rappels de mécanique

7.1 Grandeurs cinétiques

Soit une particule ponctuelle M de masse m , dans un référentiel $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition 5 (Grandeurs cinétiques). – $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ est le *vecteur position* de M .

- $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$ est le *vecteur vitesse* de M dans \mathcal{R} .
- $\left(\frac{d\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$ est le *vecteur accélération* de M dans \mathcal{R} .
- $m\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{p}(M)_{\mathcal{R}}$ est la *quantité de mouvement* du point M dans \mathcal{R} .
- $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{\sigma}_A(M)_{\mathcal{R}}$ est le *moment cinétique* en A du point M dans \mathcal{R} .
- $\frac{1}{2}m\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}^2 = K(M)_{\mathcal{R}}$ est l'*énergie cinétique* du point M dans \mathcal{R} .

Soit un système matériel $\Sigma = (M_i, m_i)_{i \in I}$. On définit sa résultante cinétique $\vec{P} = \sum (\vec{p}(M_i)_{\mathcal{R}})$; son moment cinétique en A , $\vec{\sigma}(A) = \sum (\vec{\sigma}_A(M_i)_{\mathcal{R}})$; son énergie cinétique $K = \sum (\frac{1}{2}m\vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}^2)$; sa résultante dynamique $\vec{D} = \sum (\vec{a}(M_i)_{\mathcal{R}})$ (les sommes étant prises sur tous les éléments du système). Dans toute la suite, on supposera Σ fermé (pas d'échanges de matière avec l'extérieur).

7.2 Principe fondamental de la dynamique

Principe fondamental de la dynamique.

Soit M une particule de masse m , en mouvement dans un référentiel \mathcal{R} galiléen. Son accélération est liée aux forces qui s'exercent sur elle de la façon suivante :

$$\vec{f}_{ext \rightarrow M} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \quad (29)$$

On en déduit l'analogie, pour un système matériel :

Théorème du centre de masse.

Soit Σ un système fermé de particules en mouvement dans un référentiel \mathcal{R} galiléen, G son centre de masse, M sa masse totale. On a alors :

$$\vec{f}_{ext \rightarrow \Sigma} = M \vec{a}(G)_{\mathcal{R}} \quad (30)$$

7.3 Théorème du moment cinétique

Définition 6 (Moment). Soit A un point de l'espace et \vec{f} une force appliquée au point M . Le moment en A de la force \vec{f} est $\vec{\mathcal{M}}(A)_{\vec{f}} = \vec{AM} \wedge \vec{f}$.

Théorème du moment cinétique.

Soit Σ un système fermé de particules, \mathcal{R} un référentiel galiléen, A un point fixe dans \mathcal{R} . On a la relation suivante :

$$\frac{d(\vec{\sigma}_A(\Sigma)_{\mathcal{R}})}{dt} = \vec{\mathcal{M}}(A)_{\vec{f}_{ext \rightarrow \Sigma}} \quad (31)$$

Remarque 4. L'analogie de ce théorème en mécanique du point est identique, et se démontre à partir du Principe fondamental de la dynamique.

7.4 Énergie mécanique. Théorème de l'énergie cinétique.

On se place dans cette section (pour simplifier) dans le cas d'une particule ponctuelle soumise à une (ou plusieurs) forces gravitationnelles. En général (système de particules Σ déformable, les forces intérieures et extérieures étant quelconques), on a le théorème de l'énergie cinétique. Dans de nombreux cas particuliers (système *conservatif*), on introduit l'énergie mécanique, qui se conserve. C'est le cas ici.

Théorème-Définition 7 (Énergie potentielle de gravitation). Soit (M, μ) une particule ponctuelle, soumise à l'attraction d'une masse ponctuelle (G, m) . Son énergie potentielle de gravitation U , caractérisée par $\vec{f}_{G \rightarrow M} = -\vec{grad}_M U$ (on dit que $\vec{f}_{G \rightarrow M}$ dérive de l'énergie potentielle U), vaut :

$$U = \frac{-\mathcal{G}m\mu}{r^2} \quad (32)$$

où l'on a posé $r = GM$.

Définition 8. L'énergie mécanique E du point M est la somme $K + U$ de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

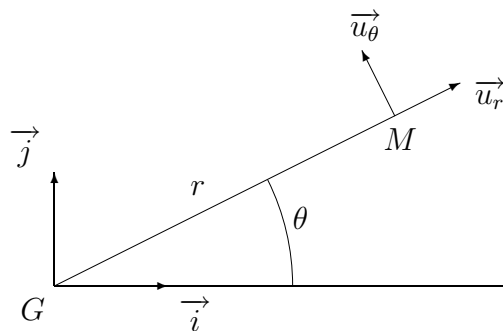


FIG. 4 – Rappel : coordonnées polaires dans le plan.

Loi de conservation de l'énergie mécanique.

Si la particule M est soumise uniquement à une force dérivant d'une énergie potentielle U , alors son énergie mécanique se conserve.

7.5 Mouvement à force centrale : formules de Binet

Soit M une particule soumise à une force centrale (c'est-à-dire constamment dirigée vers un point G fixe). On a vu au paragraphe 5.1 qu'on a alors la loi des aires : $c = r^2\dot{\theta}$ est constante (en repérant la position de M avec des coordonnées polaires). La proposition suivante exprime la vitesse et l'accélération de M à l'aide de c et de $u = 1/r$, prise comme une fonction de θ .

Proposition 4 (Formules de Binet). *Si le mouvement de M vérifie la loi*

des aires, en posant $u = 1/r$, on a :

$$\vec{v} = c \left[-\frac{du}{d\theta} \vec{u}_r + u \vec{u}_\theta \right] \quad (33)$$

$$v^2 = c^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] \quad (34)$$

$$\vec{a} = -c^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] \vec{u}_r \quad (35)$$

Démonstration. Rappelons tout d'abord les dérivées par rapport à θ des vecteurs de la base polaire locale :

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \quad (36)$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r \quad (37)$$

et la loi des aires $c = r^2 \dot{\theta}$. On pose $u = 1/r$.

(33)

$$\vec{v} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d(r\vec{u}_r)}{d\theta} \quad (38)$$

$$= cu^2 \left[\frac{dr}{d\theta} \vec{u}_r + r \vec{u}_\theta \right] \quad (39)$$

$$= c \left[-\frac{du}{d\theta} \vec{u}_r + u \vec{u}_\theta \right] \quad (40)$$

(34) La base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ étant orthonormale, cela découle immédiatement de (33).

(35)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{v}}{d\theta} \quad (41)$$

$$= \dot{\theta} \left[-\frac{d^2 u}{d\theta^2} \vec{u}_r - \frac{du}{d\theta} \vec{u}_\theta + \frac{du}{d\theta} \vec{u}_\theta - u \vec{u}_r \right] \quad (42)$$

$$= -cu^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} \vec{u}_r + u \vec{u}_r \right] \quad (43)$$

□