

POLYTECH PARIS-SACLAY

PEIP2 / Semestre 4

Mathématiques

Notes de cours

Analyse, probabilités et statistiques

Arnaud Durand

Département de Mathématiques d'Orsay

arnaud.durand@universite-paris-saclay.fr

Avant-propos

Bienvenue dans ce cours de mathématiques du Semestre 4, conçu pour vous accompagner dans votre deuxième année du Parcours des Écoles d'Ingénieurs Polytech (PEIP2). Ces notes de cours ont pour objectif de vous fournir des bases solides en analyse et de vous initier aux concepts fondamentaux des probabilités et des statistiques, deux domaines essentiels pour votre formation d'ingénieur. Ce cours s'articule autour de deux grandes parties :

- (i). **L'analyse**, qui constitue l'essentiel du programme (environ 75 % du cours), vous permettra d'approfondir des notions clés telles que les limites, les développements limités, les suites, les intégrales généralisées, les séries numériques et les séries de fonctions. Ces outils mathématiques sont indispensables pour modéliser, analyser et résoudre des problèmes complexes dans de nombreux domaines scientifiques et techniques. Vous découvrirez également les séries de Fourier, un outil puissant pour l'étude des signaux et des fonctions périodiques, largement utilisé en physique et en ingénierie.
- (ii). **Les probabilités et les statistiques**, qui représentent environ 25 % du cours, vous introduiront aux concepts de base des variables aléatoires, des lois de probabilité usuelles, ainsi qu'aux méthodes d'estimation et de tests d'hypothèse. Ces notions sont fondamentales pour comprendre et interpréter des données, anticiper des phénomènes aléatoires et prendre des décisions éclairées dans un contexte incertain.

Ce cours vise à rester rigoureux tout en restant abordable, avec des exemples et des exercices pour ancrer les idées essentielles. Les mathématiques y sont présentées comme un langage et une façon de raisonner, plus qu'une suite de résultats à apprendre. Nous espérons qu'il vous aidera à développer vos compétences, votre curiosité et votre manière d'aborder les problèmes. Abordez-le avec constance : les difficultés font partie du chemin et vous prépareront efficacement à la suite de votre formation.

Table des matières

I	Analyse	1
1	Limites, équivalents et développements limités	2
1.1	Quelques rappels sur les limites	2
1.2	Notions d'équivalent et de négligeabilité	3
1.3	Développements limités	6
1.4	Quelques idées pratiques	11
2	Suites numériques	13
2.1	Généralités	13
2.1.1	Définition explicite ou définition par récurrence	13
2.1.2	Étude globale des suites réelles	14
2.2	Suites de référence	16
2.2.1	Suites arithmétiques	16
2.2.2	Suites géométriques	18
2.3	Limite d'une suite	19
2.3.1	Suites convergentes	19
2.3.2	Suites qui tendent vers l'infini	20
2.3.3	Critères de convergence	21
3	Intégrales	28
3.1	Intégrale d'une fonction continue sur un segment	28
3.1.1	Retour sur une définition	28
3.1.2	Quelques propriétés	29
3.1.3	Intégrale d'une fonction à valeurs complexes	33
3.1.4	Lien avec les primitives	34
3.1.5	Techniques de calcul	35
3.2	Intégrales généralisées	37
3.2.1	Exemples introductifs	38
3.2.2	Définitions	39
3.2.3	Intuitions trompeuses	41
3.2.4	Règles de calcul	42
3.2.5	Critères de convergence	43
4	Séries numériques	49
4.1	Convergence d'une série numérique	49
4.1.1	Définition et généralités	49
4.1.2	Premiers exemples généraux	50
4.2	Séries à termes positifs	51

4.2.1	Critères de comparaison	52
4.2.2	Critère intégral	53
4.2.3	Critères de Cauchy et de D'Alembert	54
4.3	D'autres séries réelles	56
4.3.1	Convergence absolue	56
4.3.2	Séries alternées	57
4.4	Séries complexes	59
5	Séries de fonctions et séries entières	61
5.1	Suites et séries de fonctions	61
5.1.1	La suite de fonctions $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$	61
5.1.2	Notions de convergence	61
5.1.3	Cas des séries de fonctions	65
5.1.4	Propriétés des sommes de séries de fonctions	67
5.2	Séries entières	69
5.2.1	Domaine de convergence	70
5.2.2	Calcul du rayon de convergence	71
5.2.3	Somme et produit de séries entières	72
5.2.4	Dérivée et primitive d'une série entière	72
5.2.5	Développement en série entière d'une fonction	75
5.2.6	Résolution d'équations différentielles	79
5.2.7	Un aperçu du cas complexe	81
6	Séries de Fourier	83
6.1	Rappels sur les fonctions périodiques	83
6.2	Séries trigonométriques	83
6.3	Séries de Fourier	87
6.3.1	Coefficients de Fourier	88
6.3.2	Séries de Fourier de fonctions régulières	92
6.3.3	Théorème de Dirichlet	95
6.3.4	Formule de Parseval	97
II	Probabilités et statistiques	98
7	Quelques notions de probabilités	99
7.1	Généralités	99
7.2	Probabilités conditionnelles et indépendance	100
7.3	Équiprobabilité et lien avec le dénombrement	101
7.4	Variables aléatoires	101
7.4.1	Variables discrètes	102
7.4.2	Variables à densité	102
7.4.3	Sommes de variables aléatoires	103
7.5	Lois usuelles	104
7.5.1	Variables discrètes	104

7.5.2	Variables à densité	106
7.5.3	Approximations	109
8	Quelques notions de statistiques	110
8.1	Statistique descriptive	110
8.1.1	Types de variables	110
8.1.2	Paramètres de tendance d'une variable quantitative	110
8.1.3	Estimation de la moyenne et la variance	111
8.2	Tests d'hypothèse	111
8.2.1	Généralités	111
8.2.2	Test de conformité à une proportion théorique de référence	112
8.2.3	Test d'homogénéité	113
8.2.4	Test du χ^2 (chi-deux) de conformité	113
8.3	Fluctuations d'échantillonnage	115
8.3.1	Cas d'une proportion	115
8.3.2	Cas d'une moyenne	116
III	Annexes	117
A	Formulaire de trigonométrie	118
A.1	Propriétés élémentaires	118
A.2	Formules d'addition	120
A.3	Transformations produits/sommes	121
A.4	Fonctions inverses	121
A.5	Trigonométrie hyperbolique	122
A.6	Changements de variables	124
B	Développements limités usuels en zéro	125
C	Dérivées usuelles	126
D	Primitives usuelles	127
E	Tables des lois normales et du χ^2	129

Table des figures

1.1	Croissances comparées des fonctions usuelles	6
2.1	Représentation graphique de la suite de terme général $u_n = \sqrt{n}$	14
2.2	Représentation graphique de la suite définie par $u_n = 1 + \frac{2}{u_{n-1}}$ et $u_0 = 1$	15
2.3	Représentation graphique de la convergence d'une suite	19
3.1	Somme de Riemann d'une fonction continue sur un segment	28
3.2	Domaine $D_{f,a,b}$ pour une fonction continue sur un segment	29
3.3	Relation de Chasles pour les intégrales	30
3.4	Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	31
3.5	Intégrales et inégalités	32
3.6	Encadrement de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment	32
3.7	Formule de la moyenne pour l'intégrale d'une fonction continue sur un segment	33
3.8	Dérivée de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment	35
3.9	Intégrale de 1 à X de la fonction f_s	38
3.10	Intégrale de X à 1 de la fonction f_s	39
3.11	Exemple d'une fonction non majorée dont l'intégrale converge	42
3.12	Intégrale de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$	47
3.13	Intégrale de la fonction $x \mapsto \frac{ \sin x }{x}$	48
4.1	Comparaison série-intégrale	54
4.2	Critère des séries alternées	58
5.1	Graphes des fonctions $f_n(x) = x^n$ et de la fonction limite f	62
5.2	Graphes des fonctions $f_n(x) = n^a x e^{-nx}$ et de la fonction limite $f = 0$	63
5.3	Graphes des fonctions $f_n(x) = \max\{0, \min\{x, 2n - x\}\}/n^2$ et de la fonction limite $f = 0$	65
5.4	Relations entre les différents modes de convergence d'une série de fonctions	67
5.5	Graphe de la fonction $f_1(x) = x e^{-x}$	68
5.6	Graphe de la fonction $S(x) = \frac{1}{1-x e^{-x}}$	68
5.7	Graphes de la fonction $ f_1 $	68
5.8	Lemme d'Abel	70
5.9	Rayon de convergence d'une série entière	71
5.10	La somme f de la série entière $\sum x^n$ et ses dérivées f' et $f''/2$	74
5.11	La somme f de la série entière $\sum x^n$ et sa primitive F nulle en 0	76
5.12	La fonction $f(x) = \exp(-1/x^2)$	78
5.13	La fonction $f(x) = (\arcsin x)^2$	80
6.1	Graphique de la fonction f en dents de scie.	86
6.2	Graphique de la fonction g carrée périodisée	89
6.3	Les polynômes trigonométriques P_N	92
6.4	La fonction $f(x) = x(\pi - x)$ périodisée	95

6.5	Fonction indicatrice de l'intervalle $]0, \pi]$	96
6.6	Régularisée de la fonction indicatrice de l'intervalle $]0, \pi]$	96
7.1	Loi binomiale $\text{Bin}(6, 1/3)$	105
7.2	Loi de Poisson $\text{Poi}(1)$	106
7.3	Loi exponentielle $\text{Exp}(1)$	107
7.4	Densité de la loi normale $N(0, 1)$	108
7.5	Diverses densités de lois normales	108
A.1	Cercle trigonométrique et fonctions trigonométriques circulaires	118
A.2	Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques circulaires	119
A.3	Symétries des fonctions trigonométriques circulaires	120
A.4	Représentations graphiques des fonctions $\cos$, $\sin$, $\arccos$ et $\arcsin$	122
A.5	Représentations graphiques des fonctions $\tan$ et $\arctan$	122
A.6	Hyperbole et fonctions trigonométriques hyperboliques	123
A.7	Représentations graphiques des fonctions trigonométriques hyperboliques et leurs réciproques	124

Liste des tableaux

1.1	Tableau de signe et de variations des fonctions ψ, ψ' et ψ''	3
2.1	Opérations sur les limites de suites	23
2.2	Tableau de signe de f'_α et tableau de variations de f_α	26
5.1	Tableau de variations de la fonction $f_1(x) = x e^{-x}$	68
8.1	Tableau de contingence pour le test du χ^2 de conformité.	114
E.1	Table de la loi $N(0, 1)$ normale centrée réduite	129
E.2	Table de la loi $\text{Chi}^2(n)$ du χ^2 à n degrés de liberté	130

Première partie

Analyse

Limites, équivalents et développements limités

En analyse en général, et dans ce cours en particulier, nous sommes souvent amenés à estimer le comportement asymptotique de certaines suites ou fonctions. Il est donc opportun de commencer par fournir rapidement, et sans souci d'exhaustivité, les rappels nécessaires sur l'étude des limites, équivalents et développements limités des suites et des fonctions. C'est l'objectif de ce chapitre.

1.1 Quelques rappels sur les limites

On traite en parallèle le cas des suites et celui des fonctions. Pour une fonction de la variable réelle x définie par exemple sur un intervalle, on s'intéresse à la limite quand x tend vers un point (fini ou infini) du bord de l'intervalle. Pour une suite indicée par $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse toujours à la limite quand n tend vers $+\infty$. Le chapitre 2 traite du cas des suites numériques et contient des détails et des preuves passés sous silence dans le présent chapitre.

Dans le cas d'une fonction, on peut noter alternativement

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$$

pour indiquer que la fonction f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 . On rappelle qu'une fonction peut ne pas admettre de limite en un point, et que si l'on emploie une quelconque des deux écritures précédentes, on sous-entend l'existence de la limite. Pour les suites, on peut noter

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

afin d'indiquer que la suite (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers l'infini.

On rappelle en outre que si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell_2$, avec ℓ_1 et ℓ_2 finis, alors on a $\lambda f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda \ell_1 + \ell_2$ pour tout scalaire λ , ainsi que $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell_1 \ell_2$. De plus, si φ désigne une fonction continue au point ℓ_1 , alors $\varphi(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \varphi(\ell_1)$. On dispose de propriétés similaires pour les suites numériques (voir le chapitre 2).

Les liens élémentaires entre limites et inégalités sont consignés dans les deux résultats suivants. On traite uniquement le cas des fonctions et on renvoie au chapitre 2 pour le cas des suites.

Proposition 1.1 (Passage à la limite dans une inégalité). Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que :

- (i). Au point x_0 , les fonctions f et g tendent respectivement vers ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$;
- (ii). Pour tout x assez proche de x_0 , on a l'inégalité $f(x) \leq g(x)$.

Alors, on a l'inégalité $\ell \leq \ell'$. (On étend l'ordre à $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ par $-\infty \leq y \leq +\infty$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.)

Proposition 1.2 (Théorème des gendarmes). Soient f , g et h trois fonctions définies au voisinage d'un point x_0 . Si on a l'encadrement $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout réel x assez proche de x_0 , et si les fonctions f et h tendent vers un même réel ℓ au point x_0 , alors la fonction g tend aussi vers ℓ au point x_0 .

Exercice 1.1. Étudier la limite de la fonction $x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Solution. On commence par écrire que

$$\ln \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \right) = x \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

D'une part, on observe que $\ln(1-y) \leq -y$ pour tout $y \in [0, 1[$. En effet, la fonction définie pour y dans cet intervalle par $\varphi(y) = \ln(1-y) + y$ est dérivable et sa dérivée vérifie

$$\varphi'(y) = \frac{-1}{1-y} + 1.$$

La fonction φ' est négative sur l'intervalle $[0, 1[$, donc φ y est décroissante. Cependant, φ est nulle au point 0, donc est aussi négative sur $[0, 1[$. D'autre part, la fonction définie pour $y \in [0, 1[$ par $\psi(y) = \ln(1-y) + y + y^2$ est deux fois dérivable, et ses dérivées successives vérifient $\psi'(y) = \frac{-1}{1-y} + 1 + 2y$ et $\psi''(y) = \frac{-1}{(1-y)^2} + 2$. En menant une étude rapide du signe de la dérivée seconde ψ'' , on en déduit le sens de variation puis le signe de la dérivée première ψ' , et ensuite de même le sens de variation puis le signe de la fonction ψ . Il en résulte que ψ est positive au moins sur l'intervalle $[0, 1/2]$, ce qui donne $\ln(1-y) \geq -y - y^2$. On peut consigner cette étude dans le tableau de signe et de variations de la table 1.1. Au final, on obtient pour tout $y \in [0, 1/2]$ l'encadrement

$$-y - y^2 \leq \ln(1-y) \leq -y.$$

Si $x \geq 2$, on peut appliquer les inégalités ainsi obtenues au point $y = 1/x$ et en déduire que

$$-1 - \frac{1}{x} \leq x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq -1.$$

On voit que les deux fonctions de x qui sont dans les bornes à gauche et à droite de l'encadrement tendent vers -1 quand x tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, l'expression au milieu tend donc aussi vers -1 quand $x \rightarrow +\infty$. En composant par la fonction exponentielle, qui est continue au point -1 , on en conclut que

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-1}.$$

□

y	0	$1 - 1/\sqrt{2}$	$1/2$	1
$\psi''(y)$		+	0	-
ψ'	0		0	$-\infty$
$\psi'(y)$		+	0	-
ψ	0			$-\infty$

TABLE 1.1 : Tableau de signe et de variations des fonctions ψ , ψ' et ψ''

1.2 Notions d'équivalent et de négligeabilité

Ces notions sont valables tant pour les suites que pour les fonctions. Le cas des suites est le plus simple à énoncer car on ne s'intéresse qu'au comportement au voisinage de l'infini.

Définition 1.1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques (réelles ou complexes). On suppose que v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que :

- u_n est *équivalent* à v_n quand $n \rightarrow +\infty$, et on note $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ ou simplement $u_n \sim v_n$, si on a $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$;

- u_n est *négligeable devant* v_n , ou encore est un “*petit o*” de v_n , quand $n \rightarrow +\infty$, et on note $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ ou simplement $u_n = o(v_n)$, si on a $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La situation est plus riche pour les fonctions car on peut s'intéresser au comportement en d'autres points que l'infini. On s'intéresse en particulier aux points qui sont *adhérents* au domaine de définition de la fonction, c'est-à-dire ceux qui s'obtiennent comme limite (finie ou infinie) de suites de points de l'ensemble. Par exemple, si les fonctions sont définies sur un intervalle, ou une union d'intervalles, les points adhérents correspondent aux intervalles considérés, en incluant les bornes (finies ou non).

Définition 1.2. Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur un domaine D inclus dans $\mathbb{R}$, et soit x_0 un point d'accumulation du domaine D (éventuellement infini). On considère aussi une fonction g définie sur D qui ne s'annule pas au voisinage de x_0 , sauf éventuellement en x_0 . Les limites sont prises dans D , avec $x \neq x_0$.

- On dit que $f(x)$ est *équivalent* à $g(x)$ quand $x \rightarrow x_0$, et on note $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$, si on a $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$.
- On dit que $f(x)$ est *négligeable devant* $g(x)$ quand $x \rightarrow x_0$, et on note $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x))$, si on a $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.
On peut aussi dire que $f(x)$ est un “*petit o*” de $g(x)$ quand $x \rightarrow x_0$.

Avoir $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ équivaut à la possibilité d'écrire $f(x) = \lambda(x) g(x)$ pour tout réel x au voisinage de x_0 , où λ est une fonction telle que $\lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$. De même, avoir $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(g(x))$ équivaut à la possibilité d'écrire $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$, avec ε une fonction vérifiant $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

Pour tout nombre réel ou complexe ℓ *non nul*, écrire $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ell$ revient à écrire $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$. De plus, si deux fonctions f et g sont équivalentes en un point x_0 , alors elles ont la même limite en ce point, si cette limite existe. Réciproquement, si f et g ont la même limite finie non nulle en un point x_0 , alors elles sont équivalentes en ce point.

Point de vigilance. Écrire $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 0$ n'a aucun sens ! Pour signifier convenablement que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$, on peut écrire $f(x) = o_{x \rightarrow x_0}(1)$. De même, écrire $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} +\infty$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} -\infty$ n'a pas de sens non plus, mais on peut bien sûr écrire $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$ pour exprimer la même idée.

Exemples 1.1. • On montre en considérant le quotient que $x^2 + 3x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x$, tandis que $x^2 + 3x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.

- On a $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, alors que $\sin x = o_{x \rightarrow +\infty}(x)$. Dans le premier cas, on voit le quotient comme le taux d'accroissement du sinus au voisinage de 0, qui converge vers $\sin' 0 = \cos 0 = 1$. Dans le second cas, le quotient est le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0, ce qui tend donc vers 0.

On peut se demander si la composée de deux fonctions équivalentes par une fonction usuelle (logarithme, exponentielle, puissance, etc.) conduit encore à deux fonctions équivalentes. Il faut être prudent dans ce genre de situation, et on suggère en général de revenir à la définition de l'équivalence pour conclure rigoureusement.

Proposition 1.3. Soient f et g deux fonctions à valeurs strictement positives, x_0 un point (fini ou infini), et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \implies (f(x))^\alpha \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (g(x))^\alpha.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire que $\frac{(f(x))^\alpha}{(g(x))^\alpha} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1^\alpha = 1$. En effet, le quotient f/g tend vers 1 en x_0 , donc élevé à la puissance α , il tend vers 1^α , par continuité de la fonction $y \mapsto y^\alpha = \exp(\alpha \ln y)$ en tout point de $]0, +\infty[$. $\square$

Proposition 1.4. Soient f et g deux fonctions à valeurs strictement positives, et x_0 un point (fini ou infini). On suppose que $f(x) \rightarrow \ell \in [0, 1[\cup]1, +\infty]$ quand $x \rightarrow x_0$. Alors,

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \implies \ln(f(x)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ln(g(x)).$$

Démonstration. On a $g(x) = \lambda(x) f(x)$ pour tout x proche de x_0 et pour une fonction λ telle que $\lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$.

Ainsi,

$$\frac{\ln(g(x))}{\ln(f(x))} = \frac{\ln(\lambda(x) f(x))}{\ln(f(x))} = \frac{\ln(\lambda(x)) + \ln(f(x))}{\ln(f(x))} = 1 + \frac{\ln(\lambda(x))}{\ln(f(x))}.$$

On a d'une part $\ln(\lambda(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ln 1 = 0$ par continuité en 1 du logarithme. De même, $\ln(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ln \ell \neq 0$, en remarquant que $\ell \in [0, 1[\cup]1, +\infty]$ et adoptant les conventions $\ln(0) = -\infty$ et $\ln(+\infty) = +\infty$. On en déduit que le quotient ci-dessus tend vers 1 quand $x \rightarrow x_0$, ce qui permet de conclure. $\square$

Point de vigilance. Le résultat précédent n'est plus vrai si la limite ℓ vaut 1. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{2x}$ quand $x \rightarrow 0$. On observe que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, de sorte que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} g(x)$. Cependant, $\ln(f(x)) = x \underset{x \rightarrow 0}{\not\sim} 2x = \ln(g(x))$.

Point de vigilance. Lorsque deux suites ou fonctions sont équivalentes en un point, leurs exponentielles respectives peuvent très bien ne pas l'être. Par exemple, si on considère $f(x) = x^2 - x + 3$ et $g(x) = x^2 + 2x - 4$, on observe que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors que $e^{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\neq} o(e^{g(x)})$.

Les propositions 1.3 et 1.4 se traduisent au cas des suites : si deux suites (u_n) et (v_n) de termes strictement positifs vérifient $u_n \sim v_n$, alors on a $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour toute puissance réelle α , et on a aussi $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$ quand la suite de terme général u_n admet une limite différente de 1. De plus, on utilise très souvent les relations suivantes, qui sont des conséquences directes de la définition des notions d'équivalence et de négligeabilité.

Proposition 1.5. Soient (u_n) , (v_n) , (u'_n) , (v'_n) et (w_n) des suites numériques.

- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda u_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\mu \in \mathbb{C}^*$, alors $u_n = o(\mu v_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ et (w_n) est non nulle, alors $w_n u_n \sim w_n v_n$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et (w_n) est non nulle, alors $w_n u_n = o(w_n v_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v'_n)$, alors $u_n + u'_n = o(v_n)$.

La preuve de toutes ces propriétés est laissée en exercice pour se familiariser avec les notions d'équivalent et de négligeabilité. De plus, la proposition 1.5 se traduit au cas des fonctions.

Point de vigilance. On ne peut pas en général ajouter deux équivalents. Par exemple, on considère les quatre suites définies par les termes $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $v_n = 1 + \frac{2}{n}$, $u'_n = -1 + \frac{1}{n^2}$ et $v'_n = -1 + \frac{2}{n^2}$. On observe alors que

$u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$. Cependant, on a $u_n + u'_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ et $v_n + v'_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}$, de sorte que $v_n + v'_n = 2(u_n + u'_n)$, soit en particulier $u_n + u'_n \not\sim v_n + v'_n$.

Enfin, il est utile d'avoir en tête les croissances respectives des fonctions usuelles près de 0 et $+\infty$, qu'on peut illustrer à l'aide de la figure 1.1. Celle-ci illustre en effet les propriétés de croissances comparées suivantes : pour toutes puissances réelles $\alpha < \beta$, on a

$$x^\beta = \underset{x \rightarrow 0^+}{o}(x^\alpha) \quad \text{et} \quad x^\alpha = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^\beta);$$

et pour toute puissance réelle $\alpha > 0$, on a

$$x^\alpha = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(e^x), \quad \ln x = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x^\alpha), \quad \ln \frac{1}{x} = \underset{x \rightarrow 0^+}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x^\alpha = \underset{x \rightarrow 0^+}{o}\left(\frac{1}{\ln(1/x)}\right).$$

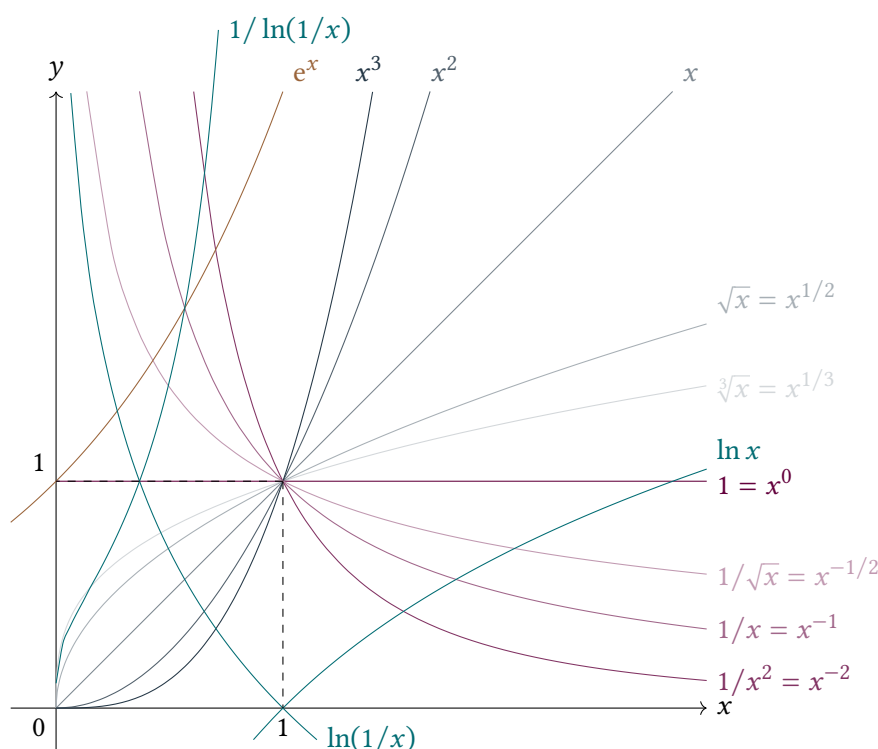


FIGURE 1.1 : Croissances comparées des fonctions usuelles

1.3 Développements limités

Un développement limité est une *approximation polynomiale* d'une fonction au voisinage d'un point, avec une erreur d'approximation négligeable devant le monôme de plus haut degré.

Définition 1.3 (Développement limité). Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle ouvert I contenant un point x_0 , continue en x_0 , et soit un entier $N \geq 0$. On dit que f admet un *développement limité (DL) d'ordre N au point x_0* s'il existe des coefficients $a_0, \dots, a_N$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tels que

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n + \underset{x \rightarrow x_0}{o}((x - x_0)^N).$$

La fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_N(x - x_0)^N$ est appelée la *partie régulière*, ou *principale*, du développement limité. La différence entre f et cette partie régulière est appelée le *reste* du développement limité. Comme l'indique la notation $\underset{x \rightarrow x_0}{o}((x - x_0)^N)$, ce reste est négligeable devant la

fonction monomiale $x \mapsto (x - x_0)^N$ quand $x \rightarrow x_0$.

Remarques 1.1. • Si une fonction f admet un développement limité d'ordre 0 au point x_0 , alors le coefficient initial vérifie $a_0 = f(x_0)$. Cela correspond au fait que la fonction f est continue en x_0 .

• Si une fonction f admet un développement limité d'ordre N au point x_0 , alors elle admet un développement limité d'ordre M au point x_0 , pour tout entier $M \in \{0, \dots, N\}$, avec les mêmes coefficients, puisque

$$\sum_{n=M+1}^N a_n (x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^N) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^M).$$

Une fonction f admet un développement limité d'ordre N au point x_0 si et seulement si on peut trouver une fonction polynomiale P avec

$$f(x) = P(x) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^N).$$

Dans ce cas, il existe une infinité de polynômes qui vérifient cette condition, mais la partie régulière du développement limité est l'unique polynôme de degré au plus N qui convient. Il s'agit du reste de la division euclidienne du polynôme P par le polynôme $(x - x_0)^{N+1}$. En effet, notons Q et R les polynômes quotient et reste de cette division euclidienne. On sait qu'il existe une fonction ε qui tend vers 0 au point x_0 telle que

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + (x - x_0)^N \varepsilon(x) = R(x) + (x - x_0)^{N+1} Q(x) + (x - x_0)^N \varepsilon(x) \\ &= R(x) + (x - x_0)^N ((x - x_0) Q(x) + \varepsilon(x)). \end{aligned}$$

Comme le terme en facteur de $(x - x_0)^N$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 , on a bien comme annoncé

$$f(x) = R(x) + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^N),$$

où le polynôme R est de degré au plus N . Pour prouver l'unicité de la partie régulière, considérons deux polynômes vérifiant les conditions ci-dessus, notés

$$R(x) = \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n \quad \text{et} \quad \tilde{R}(x) = \sum_{n=0}^N \tilde{a}_n (x - x_0)^n.$$

Il existe alors deux fonctions ε et $\tilde{\varepsilon}$ qui tendent vers 0 en x_0 et vérifient

$$f(x) = R(x) + (x - x_0)^N \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad f(x) = \tilde{R}(x) + (x - x_0)^N \tilde{\varepsilon}(x).$$

En faisant la différence de ces deux expressions de $f(x)$, et en divisant par $(x - x_0)^N$, on obtient

$$\sum_{n=0}^N \frac{\tilde{a}_n - a_n}{(x - x_0)^{N-n}} = \varepsilon(x) - \tilde{\varepsilon}(x)$$

pour tout $x \neq x_0$. Comme le membre de droite tend vers 0 quand $x \rightarrow x_0$, tous les coefficients de la fraction rationnelle de gauche doivent être nuls, c'est-à-dire que $\tilde{a}_n = a_n$ pour tout n . Les deux polynômes R et $\tilde{R}$ sont donc identiques.

Proposition 1.6 (Linéarité des développements limités). Soient un entier $N \geq 0$ et un nombre réel x_0 . Si deux fonctions f et g admettent un développement limité d'ordre N au point x_0 , de parties régulières P et Q , alors pour tout nombre λ , la fonction $\lambda f + g$ admet un développement limité d'ordre N au point x_0 , de partie régulière $\lambda P + Q$.

Démonstration. Si les développements limités d'ordre N au point x_0 des fonctions f et g ont pour parties régulières respectives les fonctions polynomiales P et Q , alors il existe deux fonctions ε_f et ε_g qui tendent vers 0 en x_0 telles que

$$f(x) = P(x) + (x - x_0)^N \varepsilon_f(x) \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + (x - x_0)^N \varepsilon_g(x).$$

Par conséquent, pour tout nombre λ , on a

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + g(x) &= \lambda (P(x) + (x - x_0)^N \varepsilon_f(x)) + (Q(x) + (x - x_0)^N \varepsilon_g(x)) \\ &= (\lambda P(x) + Q(x)) + (x - x_0)^N (\lambda \varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(x)). \end{aligned}$$

Le terme en facteur de $(x - x_0)^N$ tend vers 0 quand $x \rightarrow x_0$, donc la fonction $\lambda f + g$ admet un développement limité d'ordre N au point x_0 , de partie régulière égale à $\lambda P + Q$. $\square$

Proposition 1.7 (Produit de développements limités). Soient un entier $N \geq 0$ et un nombre réel x_0 . Si deux fonctions f et g admettent un développement limité d'ordre N au point x_0 , de parties régulières respectives P et Q , alors la fonction $f g$ admet un développement limité d'ordre N au point x_0 , de partie régulière le reste de la division euclidienne du polynôme $P Q$ par le polynôme $(x - x_0)^{N+1}$.

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned} f(x) g(x) &= (P(x) + (x - x_0)^N \varepsilon_f(x)) (Q(x) + (x - x_0)^N \varepsilon_g(x)) \\ &= P(x) Q(x) + (x - x_0)^N (P(x) \varepsilon_g(x) + Q(x) \varepsilon_f(x)) + (x - x_0)^{2N} \varepsilon_f(x) \varepsilon_g(x). \end{aligned}$$

Après factorisation par $(x - x_0)^N$, le reste vaut $(x - x_0)^N (P(x) \varepsilon_g(x) + Q(x) \varepsilon_f(x) + (x - x_0)^N \varepsilon_f(x) \varepsilon_g(x))$. Le facteur entre parenthèses tend vers 0, donc la fonction $f g$ admet un développement limité d'ordre N au point x_0 , de partie régulière égale au reste de la division euclidienne du polynôme $P Q$ par le polynôme $(x - x_0)^{N+1}$. $\square$

Proposition 1.8 (Composition de développements limités). Soient un entier $N \geq 0$ et un nombre réel x_0 . Si une fonction f à valeurs réelles admet au point x_0 un développement limité d'ordre N , de partie régulière P , et si une fonction g , définie sur un intervalle ouvert contenant $f(x_0)$ et à valeurs réelles ou complexes, admet un développement limité d'ordre N au point $f(x_0)$, de partie régulière Q , alors la fonction $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ admet un développement limité d'ordre N au point x_0 , de partie régulière le reste de la division euclidienne du polynôme $Q(P(x))$ par le polynôme $(x - x_0)^{N+1}$.

Démonstration. Pour $N = 0$, le résultat est celui de la continuité d'une composée. Supposons désormais $N \geq 1$ et que f admette un développement limité d'ordre N au point x_0 . Sa partie régulière peut s'écrire $P(x) = f(x_0) + (x - x_0) \tilde{P}(x)$, où $\tilde{P}$ est un polynôme de degré au plus $N - 1$. La propriété concernant le développement limité d'un produit permet d'en déduire que pour tout entier $n \geq 0$, la fonction $x \mapsto (f(x) - f(x_0))^n$, admet un développement limité d'ordre N au point x_0 , de partie régulière égale au reste de la division euclidienne du polynôme $(x - x_0)^n \tilde{P}(x)^n$ par le polynôme $(x - x_0)^{N+1}$, reste que l'on note $R_n(x)$. Ainsi, il y a une fonction ε_n qui tend vers 0 en x_0 , avec

$$(f(x) - f(x_0))^n = R_n(x) + (x - x_0)^N \varepsilon_n(x).$$

On remarque en particulier que $R_0(x) = 1$. De plus, si $N \geq 1$ et $\tilde{P}$ est non nul, le polynôme $R_N(x)$ est divisible par $(x - x_0)^N$, puisque c'est le cas des polynômes $(x - x_0)^N \tilde{P}(x)^N$ et $(x - x_0)^{N+1}$. Comme R_N est de degré au plus N , il existe donc un nombre λ_N tel que $R_N(x) = \lambda_N (x - x_0)^N$. D'où

$$(f(x) - f(x_0))^N = (x - x_0)^N (\lambda_N + \varepsilon_N(x)).$$

On vérifie facilement que cette dernière formule reste vraie si le polynôme $\tilde{P}$ est nul, et dans ce cas, on a $\lambda_N = 0$. Supposons en outre que g admette un développement limité d'ordre N au point $f(x_0)$, de coefficients $b_0, \dots, b_N$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction ε_g qui tend vers 0 au point $f(x_0)$, que l'on prolonge par $\varepsilon_g(f(x_0)) = 0$, avec

$$g(y) = \sum_{n=0}^N b_n (y - f(x_0))^n + (y - f(x_0))^N \varepsilon_g(y).$$

En remplaçant y par $f(x)$, et en faisant usage des observations précédentes, on peut écrire

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \sum_{n=0}^N b_n (f(x) - f(x_0))^n + (f(x) - f(x_0))^N \varepsilon_g(f(x)) \\ &= \sum_{n=0}^N b_n R_n(x) + (x - x_0)^N \left(\sum_{n=0}^N b_n \varepsilon_n(x) + (\lambda_N + \varepsilon_N(x)) \varepsilon_g(f(x)) \right), \end{aligned}$$

pour $N \geq 1$. Les termes en facteur de $(x - x_0)^N$ tendent tous vers 0 quand x tend vers x_0 , donc la composée $g \circ f$ admet bien un développement limité d'ordre N au point x_0 , de partie régulière la somme $b_0 R_0(x) + \dots + b_N R_N(x)$, qui est égale au reste de la division euclidienne du polynôme $Q(P(x))$ par le polynôme $(x - x_0)^{N+1}$. Enfin, si $N = 0$, le résultat est trivial : l'hypothèse indique que f est continue en x_0 , et que g est continue en $f(x_0)$, et la conclusion est que $g \circ f$ est continue au point x_0 , donc le résultat provient de la propriété de composition des limites. $\square$

Proposition 1.9 (Inverse de développements limités). Soient un entier $N \geq 0$ et un nombre réel x_0 . Si une fonction f admet un développement limité d'ordre N au point x_0 , de partie régulière P , et vérifie $f(x_0) = 0$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-f(x)}$ admet un développement limité d'ordre N au point x_0 , de partie régulière le reste de la division euclidienne du polynôme $\sum_{n=0}^N P(x)^n$ par le polynôme $(x-x_0)^{N+1}$.

Démonstration. La formule de la somme géométrique finie donne, pour x suffisamment proche de x_0 ,

$$\frac{1}{1-f(x)} = \sum_{n=0}^N f(x)^n + \frac{f(x)^{N+1}}{1-f(x)}.$$

Cette identité est valable que f soit à valeurs réelles ou complexes. Pour $N = 0$, le dernier terme tend vers 0 par continuité de f en x_0 . Pour $N \geq 1$, le développement limité de f et l'égalité $f(x_0) = 0$ donnent $f(x) = \underset{x \rightarrow x_0}{O}(x-x_0)$, donc le dernier terme est un $\underset{x \rightarrow x_0}{o}((x-x_0)^N)$. Enfin, les règles de produit et de somme des développements limités donnent la partie régulière annoncée. $\square$

On peut déduire des propositions 1.7 et 1.9 une méthode pour déterminer le développement limité d'un quotient de deux fonctions. De plus, on peut étendre la proposition 1.9 au cas des fonctions f qui ne vérifient pas nécessairement la condition $f(x_0) = 0$. En effet, si $f(x_0) \neq 1$, on peut écrire

$$\frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-f(x_0)} \cdot \frac{1}{1-\tilde{f}(x)} \quad \text{avec} \quad \tilde{f}(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{1-f(x_0)}.$$

La fonction $\tilde{f}$ vérifie alors $\tilde{f}(x_0) = 0$ et admet en x_0 un développement limité de même ordre que f . On peut donc appliquer la proposition à $\tilde{f}$, et en déduire le résultat sur f . Si $f(x_0) = 1$, le dénominateur s'annule en x_0 : son inverse n'admet en général pas de développement limité ordinaire. Si le premier coefficient non nul de $f(x) - 1$ est a_k , avec $1 \leq k \leq N$, alors

$$f(x) - 1 = a_k(x-x_0)^k(1 + \underset{x \rightarrow x_0}{o}(1)), \quad \frac{1}{1-f(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} -\frac{1}{a_k(x-x_0)^k}.$$

On peut poursuivre le calcul après cette factorisation si l'on dispose d'un développement d'ordre suffisant. Si tous les coefficients connus sont nuls, ils ne permettent pas à eux seuls de conclure.

Proposition 1.10 (Primitives de développements limités). Soient un entier $N \geq 0$ et un nombre réel x_0 . Si une fonction f admet un développement limité d'ordre N au point x_0 , de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n (x-x_0)^n + \underset{x \rightarrow x_0}{o}((x-x_0)^N),$$

alors toute primitive F de f , c'est-à-dire toute fonction F dérivable de dérivée égale à la fonction f , admet au point x_0 un développement limité d'ordre $N+1$, de la forme

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} + \underset{x \rightarrow x_0}{o}((x-x_0)^{N+1}).$$

Démonstration. Posons

$$R(x) = F(x) - F(x_0) - \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}.$$

Alors $R(x_0) = 0$ et $R'(x) = \underset{x \rightarrow x_0}{o}((x-x_0)^N)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|R'(t)| \leq \varepsilon|t-x_0|^N$ lorsque $|t-x_0| \leq \delta$ (la valeur en x_0 vérifie aussi cette borne). L'inégalité des accroissements finis donne, pour $|x-x_0| \leq \delta$,

$$|R(x)| \leq \varepsilon|x-x_0|^{N+1}.$$

Pour une fonction complexe, on applique cette inégalité aux parties réelle et imaginaire, ce qui donne la même conclusion avec un facteur 2 sans conséquence. Ainsi $R(x) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{N+1})$. Cette preuve ne suppose pas que f soit continue sur tout un voisinage de x_0 . $\square$

Point de vigilance. Il n'y a pas de résultat général sur l'existence d'un développement limité pour les dérivées de fonctions qui en admettent un. Par exemple, la fonction définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 0$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0, à savoir $f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$. Cependant, sa dérivée vérifie $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = -x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + o_{x \rightarrow 0}(x)$. Le terme $-x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de développement limité d'ordre 1 en 0, puisque $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite quand $x \rightarrow 0$. Il s'ensuit que la dérivée f' ne peut pas admettre non plus de développement limité d'ordre 1 en 0.

Proposition 1.11 (Formule de Taylor-Young). Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur un intervalle ouvert I contenant un point x_0 . On suppose que f est N fois dérivable au point x_0 , avec $N \geq 1$: pour $N \geq 2$, ses dérivées jusqu'à l'ordre $N - 1$ sont définies sur un voisinage de x_0 , et $f^{(N-1)}$ est dérivable en x_0 . Alors, f admet un développement limité d'ordre N au point x_0 , et on a précisément

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^N),$$

où $f^{(n)}(x_0)$ désigne la dérivée d'ordre n de f en x_0 , et $n!$ désigne la factorielle de n , définie par $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ quand $n \in \mathbb{N}^*$, et par $0! = 1$.

Démonstration. On prouve le résultat par récurrence sur N en appliquant la proposition 1.10. Le résultat est vrai au rang $N = 1$. En effet, si f est une fonction dérivable en x_0 , alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0).$$

Ainsi, f admet le développement limité d'ordre 1 suivant en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0).$$

Considérons un entier $N \geq 1$ tel que toute fonction f qui est N fois dérivable au point x_0 vérifie

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^N),$$

Si f est une fonction $N + 1$ fois dérivable au point x_0 , alors sa dérivée f' est N fois dérivable. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence, et en déduire qu'elle admet le développement limité

$$f'(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^N).$$

Ici, on a utilisé le fait que la dérivée d'ordre n de f' est égale à la dérivée d'ordre $n + 1$ de f . La proposition 1.10 donne

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!(n+1)} (x - x_0)^{n+1} + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{N+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{N+1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^{N+1}). \end{aligned}$$

D'où le résultat au rang $N + 1$. On conclut avec le principe de récurrence. $\square$

Exemples 1.2. Grâce à la formule de Taylor, on peut exprimer les développements limités des fonctions les plus usuelles. Ceux-ci sont à mémoriser :

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2} \alpha(\alpha-1)x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$

Enfin, on peut aussi s'intéresser à des approximations de fonctions au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$ par des fractions rationnelles de la forme $P\left(\frac{1}{x}\right)$, où P est une fonction polynomiale. On peut également se poser la même question pour des suites. On parle alors de *développement asymptotique*.

1.4 Quelques idées pratiques

Pour déterminer les limites, équivalents ou développements limités d'une suite ou d'une fonction, il est utile de garder en tête les idées suivantes :

- Dans une somme, un produit ou un quotient, on commence par inspecter chacun des termes et des facteurs. En l'absence de *forme indéterminée* (voir partie 2.3.3), on peut conclure directement concernant l'existence et la valeur de la limite.
- Pour déterminer un équivalent d'une somme, on cherche rapidement les équivalents des différents termes, puis on factorise par le terme dont l'équivalent l'emporte sur les autres.
- Si on étudie le comportement d'une fonction f au voisinage d'un point x_0 , il peut être utile de considérer la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ et d'étudier son comportement pour h au voisinage de 0.
- Pour éviter les erreurs de calcul dans les développements limités, il est conseillé de respecter l'ordre de précision dans lequel on écrit les termes (chaque terme doit être négligeable devant celui qui le précède), et d'omettre les termes qui sont négligeables devant le reste.
- Pour étudier le comportement d'une différence de la forme $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} - \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$, avec des termes qui tendent vers l'infini ou vers 0, il est souvent utile de mettre l'expression au même dénominateur et donc de considérer

$$\frac{f_1(x)g_2(x) - f_2(x)g_1(x)}{g_1(x)g_2(x)}.$$

- Pour étudier le comportement d'une différence de la forme $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$, avec des termes $f(x)$ et $g(x)$ qui tendent vers l'infini, il est souvent utile de faire appel à la *quantité conjuguée* $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}$ en écrivant que

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}.$$

Cela permet de se débarrasser des racines carrées au numérateur, sans forme indéterminée au dénominateur.

- Pour déterminer un équivalent d'une fonction de la forme $e^{f(x)}$, on peut commencer par chercher un équivalent simple, noté g , de la fonction f . Cela permet d'écrire $f(x) = g(x) + \tilde{f}(x)$, avec une fonction $\tilde{f}$ négligeable devant f . On obtient alors $e^{f(x)} = e^{g(x)} e^{\tilde{f}(x)}$. On réitère cette procédure avec la fonction $e^{\tilde{f}(x)}$ au lieu de $e^{f(x)}$, jusqu'à obtenir si possible $\tilde{f}(x) \rightarrow 0$, et donc $e^{\tilde{f}(x)} \rightarrow 1$, ce qui permet de conclure.
- Pour étudier une expression de la forme $(f(x))^{g(x)}$ lorsque $f(x) > 0$, on privilégie l'écriture identique $e^{g(x) \ln(f(x))}$.

Suites numériques

Les suites de nombres réels ou complexes, également appelées *suites numériques*, apparaissent dès lors qu'on veut modéliser un problème à *temps discret*, c'est-à-dire un phénomène qui évolue de temps en temps et non pas continûment. Elles apparaissent aussi lorsqu'on discrétise des phénomènes continus.

2.1 Généralités

Une *suite numérique* est une application à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, ou sur une partie infinie $I \subset \mathbb{N}$, par exemple $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\} = \{n_0, n_0 + 1, \dots\}$ pour un $n_0 \in \mathbb{N}$, ou encore $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ pair}\}$, etc.

Si $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ est une suite numérique, on note plutôt u_n le nombre $u(n)$ image de l'entier n par l'application u . De même, on note souvent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \geq n_0}$, ou même plus simplement (u_n) , la suite u . Ainsi, u_n est un nombre, qui est appelé le *terme général* de la suite (u_n) .

Pour les propriétés des suites qui nous intéressent dans ce chapitre, notamment leur convergence, on peut en général se restreindre à l'étude du cas réel. En effet, pour étudier une suite à termes complexes (u_n) , on peut considérer séparément les suites à termes réels $(\Re(u_n))$ et $(\Im(u_n))$, respectivement des parties réelles et imaginaires de (u_n) .

2.1.1 Définition explicite ou définition par récurrence

Il y a deux façons principales de définir une suite numérique et, selon la méthode adoptée, l'étude de la suite se mène différemment.

- Une suite peut être définie de manière *explicite* : le terme général u_n de la suite est donné sous la forme $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie par exemple sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; la suite (u_n) est donc obtenue comme une *discrétisation* de f .
- Une suite peut être définie par *récurrence* : le terme général u_n est exprimé à partir d'un ou plusieurs termes qui précèdent, ainsi par exemple $u_n = g(u_{n-1}, \dots, u_{n-k})$ avec g une fonction de k variables réelles ou complexes et à valeurs réelles ou complexes, et on complète la définition par la donnée de k termes initiaux réels ou complexes, soit par exemple $u_0, \dots, u_{k-1}$.

On peut souvent passer d'un type de définition à l'autre. Par exemple, si la suite (u_n) est donnée explicitement sous la forme $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec une fonction f inversible, alors

$$u_{n+1} = f(n+1) = f(f^{-1}(u_n) + 1)$$

donne une relation de récurrence vérifiée par la suite. Réciproquement, certaines suites récurrentes possèdent une expression explicite que l'on peut conjecturer puis vérifier par récurrence ; une telle expression simple n'existe pas toujours.

Exemples 2.1 (Suites des entiers pairs et suite des entiers impairs). • L'expression $u_n = 2n$, pour $n \in \mathbb{N}$, est une définition explicite de la suite des entiers positifs pairs. L'expression $u_n = 2n + 1$, pour $n \in \mathbb{N}$, est une définition explicite de la suite des entiers positifs impairs.

- La relation $u_n = u_{n-1} + 2$ et le terme initial $u_0 = 0$ donnent une définition par récurrence de la suite des entiers positifs pairs. En choisissant pour terme initial $u_0 = 1$, on définit la suite des entiers positifs impairs.

Rappel 2.1 (Principe de récurrence). Le *principe de récurrence* indique que pour montrer qu'une assertion notée H_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, il suffit de montrer :

- *l'initialisation* : l'assertion initiale H_{n_0} est vraie ;
- *l'hérédité* : pour tout entier $n \geq n_0$, l'assertion H_n implique H_{n+1} .

Point de vigilance. Il ne faut pas confondre la donnée d'une suite $u = (u_n)$ et l'image dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de l'application u , c'est-à-dire l'ensemble $\{u(n), n \in \mathbb{N}\}$. Par exemple, pour le terme général $u_n = (-1)^n$, cette image est le sous-ensemble $\{-1, 1\}$ de $\mathbb{R}$, mais il y a plusieurs suites ayant cet ensemble comme image, par exemple celle de terme général $(-1)^{n+1}$.

2.1.2 Étude globale des suites réelles

Représentation graphique

Pour représenter graphiquement une suite définie sous la forme explicite $u_n = f(n)$, il suffit de tracer la courbe de la fonction f , et d'y indiquer les points ayant pour abscisse les entiers.

Exercice 2.1. Représenter graphiquement la suite de terme général $u_n = \sqrt{n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution. On trace la courbe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, puis on indique les points d'abscisse entière, voir la figure 2.1. $\square$

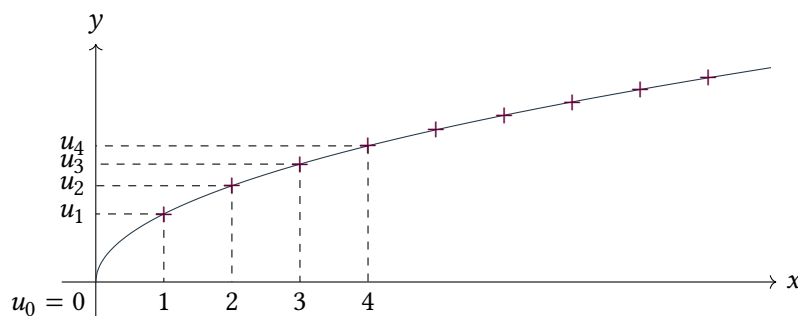


FIGURE 2.1 : Représentation graphique de la suite de terme général $u_n = \sqrt{n}$

Pour représenter les termes d'une suite définie par une relation de récurrence du type $u_n = g(u_{n-1})$, on peut commencer par tracer la courbe d'équation $y = g(x)$, ainsi que la première bissectrice d'équation $y = x$. On représente ensuite les termes de la suite sur l'axe des abscisses (et aussi sur l'axe des ordonnées), en s'appuyant alternativement sur la courbe pour passer d'un terme au suivant et sur la bissectrice pour ramener ce terme sur l'axe des abscisses.

Exercice 2.2. Représenter graphiquement la suite définie par la relation $u_n = 1 + \frac{2}{u_{n-1}}$ et le terme initial $u_0 = 1$.

Solution. On s'appuie sur la courbe d'équation $y = g(x) = 1 + \frac{2}{x}$ et la droite d'équation $y = x$, voir la figure 2.2. $\square$

Sens de variation

Étudier les variations d'une suite de nombres réels, c'est déterminer si elle est *croissante* ou *décroissante* (éventuellement à partir d'un certain rang n_0) au sens de la définition suivante.

Définition 2.1 (Suites croissantes et suites décroissantes). Une suite (u_n) de nombres réels est dite :

- *croissante* si on a $u_m \leq u_n$ pour tous entiers $m \leq n$;
- *décroissante* si on a $u_m \geq u_n$ pour tous entiers $m \leq n$.

Il est très simple d'établir le critère suivant, qui souvent plus pratique que la définition.

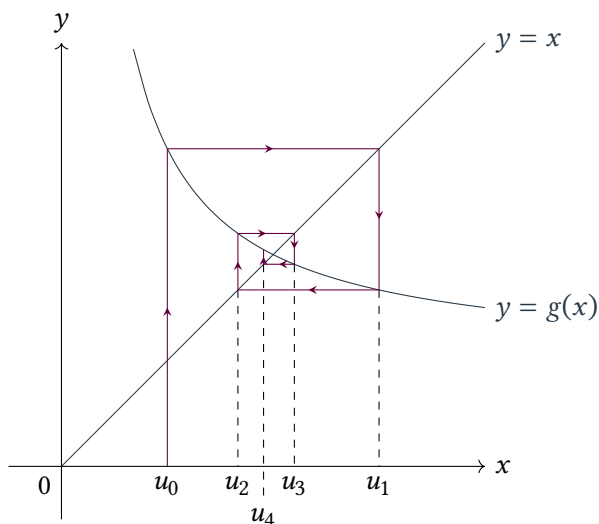


FIGURE 2.2 : Représentation graphique de la suite définie par $u_n = 1 + \frac{2}{u_{n-1}}$ et $u_0 = 1$

Proposition 2.1 (Critères de croissance et de décroissance). Une suite (u_n) de nombres réels est :

- croissante si et seulement si $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier n ;
- décroissante si et seulement si $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout entier n .

Démonstration. Le sens direct est élémentaire puisqu'il suffit d'appliquer la définition en remplaçant m par n , et n par $n+1$. Pour la réciproque, supposons par exemple que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier n . Alors, pour tous entiers $m \leq n$, en appliquant cette propriété aux rangs $m, m+1, \dots, n-1$, on peut écrire que $u_m \leq u_{m+1} \leq u_{m+2} \leq \dots \leq u_{n-1} \leq u_n$, ce qui montre que la suite est croissante. La preuve du critère de décroissance se mène exactement de la même manière. $\square$

Exemples 2.2. La suite de terme général n^2 est croissante, tandis que celle de terme général $1/n$ est décroissante.

Point de vigilance. Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes, même à partir d'un certain rang. C'est le cas par exemple de la suite de terme général $(-1)^n$.

L'étude des variations d'une suite se mène en général différemment selon qu'elle est définie explicitement ou par récurrence. Pour une suite définie explicitement sous la forme $u_n = f(n)$, avec f une fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et à valeurs réelles, une stratégie consiste à étudier le sens de variation de la fonction f , pour en déduire celui de la suite (u_n) . Si la fonction f est dérivable, on peut étudier ses variations en déterminant le signe de la dérivée f' .

On peut aussi s'intéresser au signe de la différence $u_{n+1} - u_n$, ce qui est particulièrement pertinent dans le cas où la suite est définie par une relation de récurrence telle que $u_n = g(u_{n-1})$, où g est une fonction réelle de la variable réelle. Dans ce cas, on a $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$. Le problème se ramène alors à l'étude du signe de $g(x) - x$ quand x parcourt l'ensemble des valeurs prises par la suite. Dans la même veine, si la suite est en outre à termes strictement positifs, on peut s'intéresser au quotient u_{n+1}/u_n et déterminer s'il est supérieur ou inférieur à 1.

Exercice 2.3. Étudier les variations de la suite de terme général $u_n = 2^n - n$.

Solution. On donne deux méthodes. Premièrement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire que

$$u_{n+1} - u_n = (2^{n+1} - (n+1)) - (2^n - n) = 2^n - 1 \geq 0,$$

ce qui prouve que la suite est croissante. Deuxièmement, on peut observer que la fonction définie par $f(x) = 2^x - x$ est croissante car sa dérivée vérifie $f'(x) = 2^x \ln 2 - 1 \geq 0$ pour tout réel $x \geq 1$. Cela implique la croissance de la suite à partir du rang 1. On complète l'étude en observant que $u_0 = u_1 = 1$. $\square$

Exercice 2.4. Étudier les variations de la suite définie par la relation $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$ et le terme initial $v_0 = 4$.

Solution. La suite définie par la relation de récurrence $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$ et le terme initial $v_0 = 4$ est décroissante. En effet, une récurrence immédiate montre que $v_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, on a $v_{n+1} \leq v_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ car

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{v_n}}{v_n} = \frac{1}{\sqrt{v_n}} \leq 1. \quad \square$$

Bornes

L'étude globale d'une suite passe aussi par la recherche de ses bornes, c'est-à-dire de ses majorants et minorants.

Définition 2.2 (Suites majorées, minorées et bornées). Soient $A, B, C \in \mathbb{R}$. Une suite (u_n) de nombres réels est dite :

- *minorée par A* si $u_n \geq A$ pour tout entier n ;
- *majorée par B* si $u_n \leq B$ pour tout entier n ;
- *bornée par C* si $|u_n| \leq C$ pour tout entier n .

Les réels A, B et C sont appelés un *minorant*, un *majorant* et une *borne* de la suite, et ne sont pas uniques.

On n'indique pas toujours A, B et C , et on dit alors simplement que la suite est *minorée*, *majorée* ou *bornée* si elle admet un minorant, un majorant ou une borne, respectivement. Si C est une borne d'une suite, alors $C \geq 0$.

Remarques 2.1. • Une suite est bornée si et seulement si elle est à la fois minorée et majorée. Cela découle des implications $|x| \leq C \implies -C \leq x \leq C$ et $A \leq x \leq B \implies |x| \leq \max\{|A|, |B|\}$.

- Une suite (u_n) n'est *pas* minorée si pour tout réel A , il existe un entier n tel que $u_n < A$. De même, elle n'est *pas* majorée si pour tout réel B , il existe un entier n tel que $u_n > B$. Enfin, elle n'est *pas* bornée si pour tout réel C , il existe un entier n tel que $|u_n| > C$.

Exemples 2.3. • La suite de terme général $(-1)^n$ est bornée par 1.

- La suite de terme général n^2 est minorée par 0, et n'est pas majorée.
- La suite de terme général $(-1)^n n$ n'est ni minorée ni majorée.

2.2 Suites de référence

Examinons rapidement deux types particuliers de suites définies par récurrence pour lesquelles il est simple d'obtenir une expression explicite : les suites *arithmétiques* et les suites *géométriques*.

2.2.1 Suites arithmétiques

Définition 2.3 (Suite arithmétique). Soit $r \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) de $\mathbb{C}$ est une *suite arithmétique de raison r* si on a $u_{n+1} = r + u_n$ pour tout entier n .

Exemple 2.4 (Suites des entiers pairs et suite des entiers impairs). La suite des entiers positifs pairs et la suite des entiers positifs impairs sont des suites arithmétiques de raison 2.

Lorsque la raison et au moins un terme d'une suite arithmétique sont réels, cette suite a tous ses termes réels. Dans ce cas, le signe de la raison r détermine le sens de variation de la suite. Si $r \geq 0$, alors toute suite arithmétique réelle de raison r est croissante. De même, si $r \leq 0$, toute suite arithmétique réelle de raison r est décroissante. Enfin, toute suite arithmétique de raison $r = 0$ est constante.

Proposition 2.2 (Expression explicite d'une suite arithmétique). Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors, pour tout entier n , on a $u_n = rn + u_0$. Plus généralement, on a $u_n = r(n - n_0) + u_{n_0}$ pour tous les entiers $n \geq n_0$.

Démonstration. Cela se prouve par récurrence sur n . Tout d'abord, le résultat est clair si $n = 0$. Ensuite, supposons le résultat vrai pour un entier $n \geq 0$ fixé. On a alors $u_{n+1} = r + u_n = r + (rn + u_0) = r(n + 1) + u_0$, ce qui prouve le résultat au rang $n + 1$. Le principe de récurrence permet de conclure. $\square$

Proposition 2.3 (Somme de premiers termes d'une suite arithmétique). Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors, pour tout entier naturel N , on a

$$\sum_{n=0}^N u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1} + u_N = (N + 1) \frac{u_0 + u_N}{2}.$$

Démonstration. Le résultat se prouve par récurrence sur N . Pour $N = 0$, le résultat est évident. Considérons un entier $N \geq 0$ et supposons que le résultat est vrai au rang N . On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N+1} u_n &= \left(\sum_{n=0}^N u_n \right) + u_{N+1} = (N + 1) \frac{u_0 + u_N}{2} + u_{N+1} \\ &= (N + 1) \frac{u_0 + rN + u_0}{2} + (r(N + 1) + u_0) \\ &= (N + 2)u_0 + (N + 2) \frac{N + 1}{2} r = (N + 2) \frac{u_0 + u_{N+1}}{2}. \end{aligned}$$

On voit ainsi que le résultat est vrai au rang $N + 1$. On conclut à l'aide du principe de récurrence. $\square$

Exercice 2.5 (Somme des premiers entiers positifs). Pour tout entier $n \geq 1$, donner une expression simple de la somme des entiers de 1 à n .

Solution. Pour tout entier $n \geq 1$, la somme des entiers de 1 à n vérifie

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Cela découle de la proposition 2.3 appliquée à la suite arithmétique de raison 1 et de terme initial 0. On peut aussi se convaincre de la formule en considérant le tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n - 1 & n \\ n & n - 1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sur chacune des deux lignes, la somme des coefficients s'identifie à la somme S_n ci-dessus, avec les termes écrits dans l'ordre croissant, ou dans l'ordre décroissant. De plus, la somme des deux termes figurant sur chacune des n colonnes est constante et égale à $n + 1$. Selon qu'on fait d'abord la somme selon les lignes puis selon les colonnes, ou le contraire, on trouve deux expressions pour la somme de tous les coefficients du tableau : $2S_n = n(n + 1)$. Cela redonne la formule précédente pour S_n . $\square$

Exercice 2.6 (Somme des premiers entiers positifs pairs). Pour tout entier $n \geq 1$, donner une expression simple de la somme des entiers pairs de 2 à $2n$.

Solution. Pour tout entier $n \geq 1$, la somme des entiers pairs de 2 à $2n$ vérifie

$$2 + 4 + \cdots + 2(n - 1) + 2n = n(n + 1).$$

On obtient cette formule en multipliant par 2 celle obtenue dans l'exercice 2.5. Une autre méthode consiste à appliquer la proposition 2.3 à la suite arithmétique de raison 2 et de terme initial 0. $\square$

2.2.2 Suites géométriques

Définition 2.4 (Suite géométrique). Soit $q \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) de $\mathbb{C}$ est une *suite géométrique de raison q* si on a $u_{n+1} = q u_n$ pour tout entier n .

Exemple 2.5 (Suite des puissances de 2, suites constantes). La suite des puissances de 2, soit 1, 2, 4, 8, 16, ... est une suite géométrique de raison 2 et de terme initial 1. Toute suite constante est une suite géométrique de raison 1.

Proposition 2.4 (Expression explicite d'une suite géométrique). Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . Alors, pour tout entier n , on a $u_n = q^n u_0$. Plus généralement, on a $u_n = q^{n-n_0} u_{n_0}$ pour tous les entiers $n \geq n_0$.

Démonstration. Cela se prouve par récurrence sur n . Tout d'abord, le résultat est clair si $n = 0$. Ensuite, supposons le résultat vrai pour un entier $n \geq 0$ fixé. On a alors $u_{n+1} = q u_n = q(q^n u_0) = q^{n+1} u_0$, ce qui prouve le résultat au rang $n + 1$. Le principe de récurrence permet de conclure. $\square$

Le sens de variation d'une suite géométrique réelle de raison $q \in \mathbb{R}$ et de terme initial $u_0 \in \mathbb{R}$ peut se déduire de la proposition précédente. On distingue les cas suivants :

- Trivialement, si $q = 1$ ou $u_0 = 0$, alors la suite est constante ; si $q = 0$, alors la suite est nulle à partir du rang 1.
- Si $q > 1$, alors la suite est croissante si $u_0 > 0$, et elle est décroissante si $u_0 < 0$.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite est croissante si $u_0 < 0$, et elle est décroissante si $u_0 > 0$.
- Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, la suite change de signe en passant d'un rang au suivant (ni croissante, ni décroissante).

Proposition 2.5 (Somme des premiers termes d'une suite géométrique). Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors, pour tout entier naturel N , on a

$$\sum_{n=0}^N u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1} + u_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} u_0.$$

Lorsque la raison vérifie $q = 1$, la suite est constante égale à u_0 , et donc la somme vaut $(N + 1)u_0$.

Démonstration. Pour $q = 1$, le résultat est trivial. Pour $q \neq 1$, il se prouve par récurrence sur N . Pour $N = 0$, le résultat est évident. Considérons un entier $N \geq 0$ et supposons que le résultat est vrai au rang N . On a alors

$$\sum_{n=0}^{N+1} u_n = \left(\sum_{n=0}^N u_n \right) + u_{N+1} = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} u_0 + q^{N+1} u_0 = \frac{1 - q^{N+2}}{1 - q} u_0.$$

On voit ainsi que le résultat est vrai au rang $N + 1$. On conclut à l'aide du principe de récurrence. $\square$

Exercice 2.7 (Somme des puissances de 2). Pour tout entier $n \geq 1$, donner une expression simple de la somme des puissances de 2 de 1 à 2^n .

Solution. La suite des puissances de 2 est une suite géométrique de raison 2. D'après la formule de la proposition 2.5, la somme des puissances de 2 de 1 à 2^n vérifie pour tout entier $n \geq 1$,

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1. \quad \square$$

Exercice 2.8 (Somme des puissances inverses de 2). Pour tout entier $n \geq 1$, donner une expression simple de la somme des puissances inverses de 2 de 1 à $1/2^n$.

Solution. La suite des puissances inverses de 2 est une suite géométrique de raison $1/2$. D'après la formule de la proposition 2.5, la somme des puissances inverses de 2 de 1 à $1/2^n$ vérifie pour tout entier $n \geq 1$,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)} = 2 - \frac{1}{2^n}. \quad (2.1)$$



2.3 Limite d'une suite

2.3.1 Suites convergentes

Définition 2.5 (Suite réelle admettant une limite finie). On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels *admet pour limite* un nombre réel ℓ donné, ou qu'elle *tend vers* ℓ , ou encore qu'elle *converge vers* ℓ , si l'assertion suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, ou plus simplement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, ou encore $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Cette définition signifie qu'en dehors de n'importe quel intervalle centré en ℓ , il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite. On l'illustre par la figure 2.3.

Remarques 2.2. • Modifier un nombre *fini* de termes d'une suite ne change rien sur l'existence ou la valeur de sa limite éventuelle. On dit qu'il s'agit d'une propriété *asymptotique*.

- Dans cette définition, on peut se contenter de vérifier si l'assertion est satisfaite pour ε le long d'une suite (ε_k) tendant vers 0, comme par exemple la suite de terme général $\varepsilon_k = 1/k$.

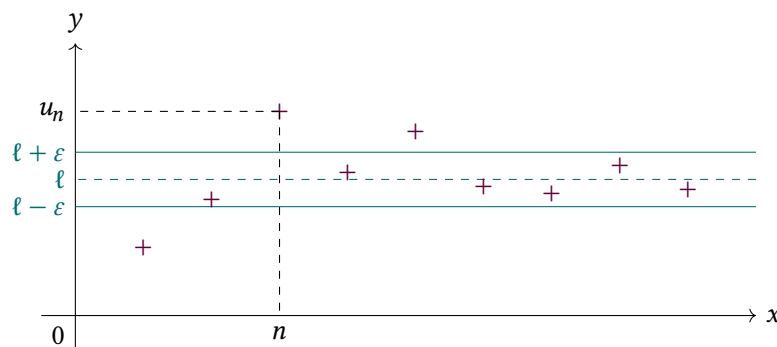


FIGURE 2.3 : Représentation graphique de la convergence d'une suite

Exercice 2.9 (Inverses des entiers). Montrer à l'aide de la définition que la suite de terme général $1/n$ converge vers 0.

Solution. Pour tout $\varepsilon > 0$, si n_0 désigne un entier tel que $n_0 \geq 1/\varepsilon$, on a $|1/n| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. □

Proposition 2.6 (Unicité de la limite). Une suite ne peut admettre deux limites distinctes.

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'une suite (u_n) admette deux limites distinctes ℓ et ℓ' . Pour $\varepsilon = |\ell - \ell'|/3$, on observe que les intervalles $I = [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ et $I' = [\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon]$ sont disjoints. Cependant, comme la suite tend vers ℓ , alors ses termes appartiennent à l'intervalle I à partir d'un certain rang n_0 . De même, comme la suite tend vers ℓ' , alors ses termes appartiennent à l'intervalle I' à partir d'un certain rang n'_0 . À partir du rang $\max\{n_0, n'_0\}$, les termes appartiennent donc tous à l'intersection $I \cap I'$. Mais cette intersection est l'ensemble vide, donc il ne peut exister de suite admettant deux limites distinctes. □

Définition 2.6 (Suite réelle convergente et suite réelle divergente). Soit (u_n) une suite de réels. S'il existe un nombre réel ℓ vers lequel tend la suite (u_n) , alors cette suite est dite *convergente*. Dans le cas contraire, elle est dite *divergente*.

Proposition 2.7 (Convergence implique bornitude). *Toute suite réelle convergente est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de nombres réels qui converge vers un nombre réel noté ℓ . Il existe alors un entier n_0 tel que $|u_n - \ell| \leq 1$ pour tout entier $n \geq n_0$. On a donc

$$\min\{u_0, \dots, u_{n_0-1}, \ell - 1\} \leq u_n \leq \max\{u_0, \dots, u_{n_0-1}, \ell + 1\},$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que la suite (u_n) est bornée. $\square$

Point de vigilance. *Bornitude n'implique pas convergence.* Il existe des suites bornées qui ne sont pas convergentes. C'est le cas par exemple de la suite de terme général $(-1)^n$.

Proposition 2.8 (Passage à la limite dans les inégalités larges). *Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels qui convergent respectivement vers un réel ℓ et un réel ℓ' . On suppose que $u_n \leq v_n$ pour tout entier n assez grand. Alors $\ell \leq \ell'$.*

Démonstration. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, on sait qu'il existe deux entiers n_0 et n'_0 tels que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$, et $|v_n - \ell'| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n'_0$. De plus, on note n_1 un entier tel que $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_1$. On a alors, pour $n \geq \max\{n_0, n'_0, n_1\}$, la série d'inégalités

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq \ell' + \varepsilon.$$

En particulier, $\ell - \ell' \leq 2\varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\ell - \ell' \leq 0$, donc $\ell \leq \ell'$. $\square$

Point de vigilance. *Cas des inégalités strictes.* La proposition précédente montre qu'on peut passer à la limite dans les inégalités larges. En revanche, les inégalités strictes ne sont pas préservées par passage à la limite. En effet, par exemple, les suites définies par les termes généraux $u_n = 0$ et $v_n = 1/n$ vérifient $u_n < v_n$ pour tout entier $n \geq 1$, mais elles tendent toutes les deux vers 0.

Proposition 2.9 (Théorème des gendarmes). *Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites de réels. On suppose que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout entier n assez grand, et que les deux suites (u_n) et (w_n) convergent vers un même réel ℓ . Alors, la suite (v_n) converge aussi vers ℓ .*

Démonstration. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe deux entiers n_0 et n'_0 tels que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$, et $|w_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n'_0$. De plus, on note n_1 un entier tel que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour $n \geq n_1$. On a alors, pour $n \geq \max\{n_0, n'_0, n_1\}$, les inégalités $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$, si bien que $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi, (v_n) converge vers ℓ . $\square$

La définition 2.5 se transpose au cas des suites à valeurs complexes, en remplaçant la valeur absolue par le module. La condition s'écrit donc toujours $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, lorsque (u_n) est une suite de nombres complexes et ℓ un nombre complexe donné, mais $|\cdot|$ désigne désormais ici le module. On peut de manière équivalente considérer la convergence des parties réelles et imaginaires. En effet, pour tout nombre complexe z , on sait que $|\Re z| \leq |z|$ et $|\Im z| \leq |z|$ d'une part, et que $|z| \leq |\Re z| + |\Im z|$ d'autre part. La condition $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ entraîne les deux bornes correspondantes sur les parties réelle et imaginaire. Réciproquement, des bornes $\varepsilon/2$ sur chacune de ces parties entraînent $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Cela conduit à la caractérisation suivante pour les suites complexes.

Proposition 2.10 (Suites complexes convergentes). *Une suite (u_n) de nombres complexes admet pour limite un nombre complexe ℓ donné, ou qu'elle tend vers ℓ , ou encore qu'elle converge vers ℓ , si les suites réelles $(\Re u_n)$ et $(\Im u_n)$ tendent respectivement vers $\Re \ell$ et $\Im \ell$.*

2.3.2 Suites qui tendent vers l'infini

Définition 2.7 (Suite réelle tendant vers plus l'infini). On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels *admet pour limite* $+\infty$, ou qu'elle *tend vers* $+\infty$, ou encore qu'elle *diverge vers* $+\infty$, si l'assertion suivante est vérifiée :

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies u_n \geq B.$$

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, ou simplement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, ou encore $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Autrement dit, une suite tend vers $+\infty$ si quel que soit le réel B fixé, il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite qui sont inférieurs à B . Une telle suite n'est clairement pas majorée. Sur le même modèle que la définition précédente, on peut définir la notion de suite réelle qui tend vers $-\infty$.

Définition 2.8 (Suite réelle tendant vers moins l'infini). On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels *admet pour limite* $-\infty$, ou qu'elle *tend vers* $-\infty$, ou encore qu'elle *diverge vers* $-\infty$, si l'assertion suivante est vérifiée :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies u_n \leq A.$$

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, ou simplement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, ou encore $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Exercice 2.10 (Carrés des entiers). Montrer à l'aide de la définition que la suite de terme général n^2 tend vers $+\infty$.

Solution. Pour tout réel $B \geq 0$, en notant n_0 un entier tel que $n_0 \geq \sqrt{B}$, on a clairement $n^2 \geq B$ pour $n \geq n_0$. (Si B est négatif, on a trivialement $n^2 \geq B$ pour tout n .) $\square$

2.3.3 Critères de convergence

On revient rarement aux définitions pour étudier les limites de suites. On utilise plutôt des critères qui permettent de déterminer la nature d'une suite (convergente ou divergente), et parfois de calculer la valeur de la limite.

Critères de comparaison

Pour montrer qu'une suite converge vers une limite dont on devine la valeur, on peut utiliser le résultat suivant.

Proposition 2.11 (Majoration de la distance à la limite). Soit (u_n) une suite réelle ou complexe, et ℓ un nombre réel ou complexe. S'il existe une suite (v_n) à valeurs positives qui tend vers 0 telle que

$$|u_n - \ell| \leq v_n$$

pour tout entier n assez grand, alors la suite (u_n) converge vers ℓ .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (v_n) est positive et tend vers 0, il existe un entier n_0 tel que $0 \leq v_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. De plus, on a $|u_n - \ell| \leq v_n$ pour n supérieur à un certain entier n_1 . On a alors pour tout entier $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, la majoration $|u_n - \ell| \leq v_n \leq \varepsilon$. D'où le résultat. $\square$

Ainsi, pour montrer qu'une suite converge vers ℓ , il suffit de majorer sa *distance* à ℓ par une suite positive qui tend vers 0. On majore souvent par une suite figurant parmi les *suites de référence* de la proposition suivante.

Proposition 2.12 (Suites de référence). Soient trois nombres réels $a, k, p \in \mathbb{R}$.

- La suite de terme général n^k tend vers 0 si $k < 0$, et $+\infty$ si $k > 0$.
- La suite de terme général a^n tend vers 0 si $|a| < 1$.
- La suite de terme général $n^k a^n$ tend vers 0 si $|a| < 1$, et ce quelle que soit la valeur de k .
- La suite de terme général $n^{-p} (\ln n)^k$ tend vers 0 si $p > 0$, et ce quelle que soit la valeur de k .

Les suites de référence ci-dessus permettent de décrire la vitesse de convergence d'une suite vers sa limite ℓ . Par exemple, si la distance à ℓ est majorée par la suite de terme général a^n , avec $|a| < 1$, la convergence est dite *exponentielle* ou *géométrique* et elle est plus rapide que si la distance à ℓ est majorée par la suite de terme général n^k , avec $k < 0$, auquel cas la convergence est dite *polynomiale*.

Exercice 2.11. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{3n^2 + n + 1}\right)$ tend vers 0 et que la suite $\left(\frac{n+5}{n+2}\right)$ tend vers 1.

Solution. Pour tout entier $n \geq 1$, on a les deux majorations

$$\left|\frac{1}{3n^2 + n + 1} - 0\right| \leq n^{-2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{n+5}{n+2} - 1\right| = \frac{3}{n+2} \leq 3n^{-1},$$

où les suites majorantes convergent bien vers 0. On conclut grâce à la proposition 2.11. $\square$

Pour montrer qu'une suite diverge, on peut utiliser le résultat ci-dessous.

Proposition 2.13 (Minoration et divergence vers l'infini). Soit (u_n) une suite réelle. S'il existe une suite réelle (v_n) qui diverge vers $+\infty$ et qui vérifie

$$u_n \geq v_n$$

pour tout entier n assez grand, alors la suite (u_n) diverge aussi vers $+\infty$.

Démonstration. Soit $B > 0$. Comme la suite (v_n) tend vers $+\infty$, il existe un entier n_0 tel que $v_n \geq B$ pour tout $n \geq n_0$. De plus, on a $u_n \geq v_n$ pour n supérieur à un certain entier n_1 . Ainsi, $u_n \geq v_n \geq B$ pour tout entier $n \geq \max\{n_0, n_1\}$. $\square$

Exercice 2.12. Montrer que la suite de terme général $n^2 - 10n$ tend vers $+\infty$.

Solution. Pour tout entier $n \geq 11$, on a la minoration $n^2 - 10n \geq n$, où la suite minorante diverge bien vers $+\infty$. On conclut grâce à la proposition 2.13. $\square$

Remarque 2.3. Il existe bien sûr un critère analogue pour montrer qu'une suite diverge vers $-\infty$. En effet, si on trouve une suite plus grande qui diverge vers $-\infty$, alors la suite de départ diverge aussi vers $-\infty$.

Opérations sur les limites

On peut souvent exprimer la limite de la somme, du produit ou du quotient de deux suites dont on connaît les limites. Les cas où on ne peut pas conclure directement sont appelés des *formes indéterminées*, et nécessitent une étude explicite plus approfondie. À titre d'exemple, on présente en détail le cas de la somme de deux suites convergentes.

Proposition 2.14 (Somme de deux suites convergentes). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes qui convergent respectivement vers des nombres réels ou complexes ℓ et ℓ' . Alors, leur somme $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

Démonstration. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Il existe deux entiers n_0 et n'_0 tels que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ et $|v_n - \ell'| \leq \varepsilon/2$ pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier $n \geq n'_0$, respectivement. (On écrit l'assertion définissant la limite avec $\varepsilon/2$ au lieu de ε .) Pour $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$, on a donc

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cela prouve bien que la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$. $\square$

On présente de manière condensée l'ensemble des résultats semblables au précédent dans la table 2.1. On note (u_n) et (v_n) deux suites réelles, ainsi que (s_n) , (p_n) et (q_n) leur somme, produit et quotient, soit

$$s_n = u_n + v_n \quad p_n = u_n v_n \quad q_n = \frac{u_n}{v_n},$$

le quotient étant défini quand le terme v_n ne s'annule pas. Les formes indéterminées sont repérées par l'abréviation f.i. dans le tableau. De plus, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels. Les symboles 0^+ et 0^- indiquent que la limite est nulle, et approchée par des valeurs positives et négatives, respectivement.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\ell + \ell'$	$\ell \ell'$	ℓ/ℓ'
$\ell > 0$	0^+	ℓ	0^+	$+\infty$
$\ell < 0$	0^+	ℓ	0^-	$-\infty$
$\ell > 0$	0^-	ℓ	0^-	$-\infty$
$\ell < 0$	0^-	ℓ	0^+	$+\infty$
0	0	0	0	f.i.
$\ell > 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0^+
$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0^-
$\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0^-
$\ell < 0$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0^+
0	$+\infty$	$+\infty$	f.i.	0
0	$-\infty$	$-\infty$	f.i.	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	f.i.
$-\infty$	$+\infty$	f.i.	$-\infty$	f.i.
$+\infty$	$-\infty$	f.i.	$-\infty$	f.i.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	f.i.

TABLE 2.1 : Opérations sur les limites de suites

Si l'on rencontre une forme indéterminée, on doit procéder à une étude plus approfondie des suites considérées, mais une manipulation calculatoire suffit parfois. Par exemple, écrire

$$n^3 - n^2 = n^2(n - 1)$$

permet de passer d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ " (avant-dernière ligne du tableau) au cas sans indétermination " $\infty \cdot \infty$ " (treizième ligne). Quand on parvient à calculer la valeur d'une limite alors qu'il y a initialement une forme indéterminée, on dit qu'on a *levé l'indétermination*. Les formes indéterminées recensées dans le tableau sont du type " $0/0$ ", " $0 \cdot \infty$ ", " $\infty - \infty$ " et " ∞/∞ ". On peut y ajouter les formes indéterminées " 0^0 ", " 1^∞ " et " ∞^0 " qui apparaissent dans le contexte des suites définies par des puissances, et se ramènent à " $0 \cdot \infty$ " en prenant le logarithme.

Le résultat suivant est particulièrement utile quand il s'agit de déterminer la limite d'une suite définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue.

Proposition 2.15 (Limite et continuité). Soit (u_n) une suite de nombres réels qui converge vers un nombre réel ℓ . Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, avec $\ell \in D$, et continue en ℓ . On suppose que $u_n \in D$ à partir d'un certain rang. Alors, la suite $(f(u_n))$, définie à partir de ce rang, converge vers $f(\ell)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en ℓ , il existe un réel $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(\ell)| < \varepsilon$ pour tout $x \in D$ vérifiant $|x - \ell| < \delta$. Comme (u_n) converge vers ℓ et appartient à D à partir d'un certain rang, il existe un entier n_0 tel que $u_n \in D$ et $|u_n - \ell| < \delta$ pour tout entier $n \geq n_0$. Ainsi, $|f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui prouve la convergence vers $f(\ell)$. $\square$

Remarque 2.4 (Cas complexe). La proposition 2.15 est aussi valable pour les suites à valeurs complexes, si f est une fonction de $\mathbb{C}$ dans lui-même. La condition de continuité s'exprime de la même façon que dans le cas réel. Ainsi, une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue en un point $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\lim_{z \rightarrow \ell} f(z) = f(\ell)$, et cette propriété est caractérisée par :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z - \ell| < \delta \implies |f(z) - f(\ell)| < \varepsilon.$$

Si le terme général d'une suite de nombres réels (ou complexes) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n , avec f une fonction continue en tout point de son ensemble de définition, si cette suite converge et si sa limite appartient au domaine de f , alors sa limite notée ℓ vérifie

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) = f(\ell).$$

On appelle *point fixe* d'une fonction g n'importe quelle valeur x telle que $g(x) = x$. Ainsi, la limite ℓ est un point fixe de la fonction f . Pour déterminer sa valeur, il suffit donc de résoudre une équation.

Point de vigilance. Le raisonnement ci-dessus ne s'applique que si on a vérifié au préalable que la suite est convergente. Pour s'en convaincre, on peut réfléchir aux exemples suivants :

- Si $f(x) = x + 1$, on obtient une suite arithmétique de raison 1, qui vérifie donc $u_n = u_0 + n$ pour tout n , et qui par conséquent diverge vers $+\infty$. De plus, cette fonction f n'admet aucun point fixe.
- Si $f(x) = -x$, on obtient une suite géométrique de raison -1 , qui vérifie donc $u_n = (-1)^n u_0$ pour tout n , et qui par conséquent n'admet pas de limite si $u_0 \neq 0$. De plus, f admet 0 pour unique point fixe.

Exemple 2.6. On appelle *suite homographique* toute suite (u_n) de nombres complexes vérifiant une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de la forme $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. On suppose que les termes évitent le pôle $-d/c$. Si (u_n) converge, sa limite ne peut être ce pôle, car $ad - bc \neq 0$ imposerait alors $|f(u_n)| \rightarrow +\infty$. Ainsi, sa limite $\ell \in \mathbb{C}$ est un point fixe de f . Les points fixes de f sont caractérisés par l'équation

$$\begin{aligned} f(z) = z &\iff cz^2 + dz = az + b \iff cz^2 + (d - a)z - b = 0 \\ &\iff \left(z + \frac{d - a}{2c}\right)^2 = \left(\frac{d - a}{2c}\right)^2 + \frac{b}{c}. \end{aligned}$$

Cette dernière équation admet une ou deux solutions, selon que le membre de droite est nul ou non, respectivement. La fonction f admet donc un ou deux points fixes. Si la fonction admet deux points fixes, il faut identifier ensuite lequel est effectivement la limite de (u_n) .

La méthode ci-dessus ne fonctionne pas toujours en pratique puisqu'une fonction peut avoir plusieurs points fixes, et en outre l'équation les définissant peut être compliquée, voire impossible, à résoudre. On peut s'aider d'encadrements sur la valeur de la limite pour identifier le "bon" point fixe parmi tous, et si besoin appliquer des méthodes numériques pour avoir une valeur approchée.

Suites croissantes majorées ou décroissantes minorées

Nous admettons la proposition suivante, utile dans l'étude des suites définies par une relation de récurrence.

Proposition 2.16 (Suite croissante majorée et suite décroissante minorée). *Toute suite de nombres réels croissante et majorée est convergente. De même, toute suite de nombres réels décroissante et minorée est convergente.*

Ce résultat permet de prouver l'existence de la limite, mais ne donne pas d'indication sur sa valeur exacte. Cependant, on sait trivialement que si la suite est majorée par B , ou minorée par A , alors la limite éventuelle ℓ vérifie $\ell \leq B$, ou $\ell \geq A$, respectivement. De plus, il suffit de vérifier la croissance ou la décroissance à partir d'un certain rang, puisque le comportement initial de la suite n'influe pas sur sa convergence. La démonstration de la proposition ci-dessus dépasse le cadre de ce cours. Elle repose sur le fait qu'un ensemble non vide et majoré de nombres réels admet une borne supérieure, et un ensemble non vide et minoré de nombres réels admet une borne inférieure.

Remarque 2.5 (Suite croissante non majorée et suite décroissante non minorée). D'après la proposition 2.16, une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$, et une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$. En effet, si une suite croissante (u_n) n'est pas majorée, alors pour tout réel B , il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > B$. Comme la suite est croissante, on a $u_n \geq u_{n_0} > B$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. De plus, une suite

croissante divergente est nécessairement non majorée, donc diverge vers $+\infty$. On traite de même les suites décroissantes non minorées, en particulier celles divergentes, qui donc divergent vers $-\infty$.

Exercice 2.13 (Somme des inverses des factorielles). Montrer que la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ est convergente.

Solution. On montre par récurrence sur n que $n! \geq 2^{n-1}$. En effet, cette inégalité est claire quand $n = 0$ et $n = 1$. De plus, soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n! \geq 2^{n-1}$. Alors, on a $(n+1)! = (n+1)n! \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. On peut donc conclure à l'aide du principe de récurrence. On en déduit

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 2^{1-1} + \dots + 2^{1-n} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} = 3 - 2^{1-n},$$

puisqu'on reconnaît la somme calculée dans (2.1). Au final, la suite (u_n) est majorée par 3. De plus, elle est croissante car pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0.$$

La suite (u_n) étant croissante et majorée, la proposition 2.16 permet de conclure qu'elle converge. De plus, la suite est majorée par 3, donc la valeur ℓ de la limite vérifie $\ell \leq 3$. (On peut montrer que $\ell = e = \exp(1) \approx 2.71828$.) $\square$

Exercice 2.14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{D}_n$ l'ensemble des nombres décimaux avec au plus n chiffres après la virgule, c'est-à-dire $\mathbb{D}_n = \{k \cdot 10^{-n}, k \in \mathbb{Z}\}$. On définit ensuite le nombre décimal u_n par $u_n = \max\{d \in \mathbb{D}_n \mid d^2 \leq 2\}$. C'est le plus grand nombre décimal avec au plus n chiffres après la virgule dont le carré est inférieur ou égal à 2. Par exemple $u_0 = 1$, $u_1 = 1.4$, $u_2 = 1.41$, etc. Montrer que (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

Solution. On remarque que $u_n \leq \sqrt{2}$ pour tout n . De plus, comme l'ensemble $\mathbb{D}_n$ est inclus dans $\mathbb{D}_{n+1}$, on a $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée. La proposition 2.16 montre qu'elle est convergente. Pour déterminer la valeur de sa limite, observons que, par maximalité de u_n , on a

$$u_n^2 \leq 2 \leq (u_n + 10^{-n})^2$$

pour tout n . On en déduit que u_n est compris entre $\sqrt{2} - 10^{-n}$ et $\sqrt{2}$. Le théorème des gendarmes (proposition 2.9) implique donc que la suite (u_n) admet pour limite $\sqrt{2}$. $\square$

Critère de Cauchy pour les suites

Ce dernier critère est très utile car il permet de déterminer la nature (convergente ou divergente) d'une suite sans nécessiter une quelconque information sur la valeur de la limite éventuelle.

Définition 2.9 (Critère de Cauchy). On dit qu'une suite (u_n) vérifie le critère de Cauchy, ou que (u_n) est une suite de Cauchy, lorsque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} m \geq n_0 \\ n \geq n_0 \end{cases} \implies |u_n - u_m| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, le critère est vérifié si la distance entre deux termes quelconques peut être rendue aussi petite que souhaité, quitte à ne considérer que des termes de rang suffisamment élevé. On a alors le résultat suivant.

Proposition 2.17 (De Cauchy équivaut à convergente). Toute suite convergente vérifie le critère de Cauchy. Réciproquement, toute suite de Cauchy est convergente.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente, et soit $\varepsilon > 0$. Si ℓ désigne la limite de la suite, alors il existe un entier n_0 tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ pour tout entier $n \geq n_0$. Pour tous entiers $m, n \geq n_0$, on a donc, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - \ell| + |u_m - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Finalement, la suite (u_n) vérifie le critère de Cauchy. La réciproque tient à la façon dont on construit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (et donc l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes). Elle est trop compliquée pour ce cours. $\square$

Exercice 2.15. Soit un nombre réel $\alpha > 0$, et soit (u_n) la suite définie par un terme initial $u_0 > 0$ quelconque et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f_\alpha(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où f_α est la fonction définie par

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\alpha}{x} \right)$$

pour tout $x > 0$. Montrer que (u_n) est convergente, et déterminer sa limite ℓ . Montrer que si α et u_0 sont des nombres rationnels, alors tous les termes u_n sont rationnels. Montrer cependant que la limite ℓ peut être irrationnelle. Que peut-on en déduire concernant le critère de Cauchy ?

Solution. La fonction f_α est clairement dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{x^2} \right).$$

On dresse alors facilement le tableau de signe de la dérivée f'_α , et donc le tableau de variations de la fonction f_α , voir la table 2.2. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $f_\alpha(x) \geq \sqrt{\alpha}$. On en déduit par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geq \sqrt{\alpha}.$$

En effet, on a d'abord $u_1 = f_\alpha(u_0) \geq \sqrt{\alpha}$ puisque $u_0 > 0$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si on a $u_n \geq \sqrt{\alpha}$, alors la question précédente assure que $u_{n+1} = f_\alpha(u_n) \geq \sqrt{\alpha}$. Cela implique en particulier que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{\alpha}{u_n} \right) - u_n = \frac{\alpha - u_n^2}{2u_n} \leq 0.$$

La suite (u_n) est donc décroissante, et minorée par $\sqrt{\alpha}$, à partir du rang 1. D'après la proposition 2.16, cette suite est convergente et sa limite ℓ vérifie $\ell \geq \sqrt{\alpha}$. Comme la suite est définie par une relation de récurrence faisant appel à la fonction continue f_α , la limite ℓ est donc un point fixe de f_α , voir les remarques suivant la proposition 2.15. Ainsi,

$$\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{\alpha}{\ell} \right).$$

Cette équation a deux solutions : $\sqrt{\alpha}$ et $-\sqrt{\alpha}$. Comme $\ell \geq \sqrt{\alpha}$, on a nécessairement $\ell = \sqrt{\alpha}$.

Si α et u_0 sont des nombres rationnels, un raisonnement par récurrence montre que tous les termes u_n sont rationnels. La suite (u_n) fournit donc des approximations rationnelles successives de la limite $\sqrt{\alpha}$. Il se peut cependant que cette valeur limite $\sqrt{\alpha}$ soit irrationnelle, par exemple si α est un nombre premier. Par conséquent, si u_0 est un nombre rationnel et si α est un nombre premier, alors la suite (u_n) est une suite de rationnels qui vérifie le critère de Cauchy (puisqu'elle converge), et qui converge dans $\mathbb{R}$, mais ne converge pas dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Dans la proposition 2.17, la convergence a donc lieu dans $\mathbb{R}$ et pas mieux : même si les termes de la suite appartiennent à un sous-ensemble strict de $\mathbb{R}$, la limite de la suite peut sortir de ce sous-ensemble. $\square$

x	0	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	-	0	+
f_α	$+\infty$	$\sqrt{\alpha}$	$+\infty$

TABLE 2.2 : Tableau de signe de f'_α et tableau de variations de f_α

Exercice 2.16. Montrer que la suite (u_n) est divergente quand, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a posé

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}. \quad (2.2)$$

Solution. Pour tout entier $n \geq 1$, on observe que

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termes}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

de sorte que le critère de Cauchy n'est pas vérifié. Plus précisément, la suite (u_n) tend vers $+\infty$, comme toute suite croissante (ici, chaque u_{n+1} se déduit de u_n par ajout d'un terme positif) et divergente, d'après la remarque 2.5. $\square$

Les termes (2.2) constituent les sommes partielles de la *série harmonique* (voir chapitre 4).

Intégrales

3.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

On commence par des rappels concernant l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, c'est-à-dire un intervalle fermé et borné de la droite réelle de la forme $[a, b]$ avec $a < b$. Une fonction f est *continue en un point* $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Elle est *continue sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ si elle est continue en tout point $x_0 \in I$. Quand le point considéré correspond à une borne de l'intervalle, il convient de prendre la limite à gauche ou à droite. Sauf mention explicite du contraire, toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont à valeurs réelles.

3.1.1 Retour sur une définition

Dans le cas d'une fonction continue sur un segment, l'intégrale (de Riemann) est définie comme limite d'une suite de sommes appelées *sommes de Riemann*. On admet que cette limite existe.

Définition 3.1 (Intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un segment). Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la n -ième somme de Riemann entre a et b de la fonction f est donnée par la formule

$$S_n^{f,a,b} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

La suite $(S_n^{f,a,b})$ est convergente. Sa limite est appelée *intégrale de a à b de f* et notée $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{f,a,b}$.

Les $n+1$ points $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, sont équirépartis et définissent une subdivision de $[a, b]$. Géométriquement, les termes $\frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ de la somme de Riemann correspondent à l'aire des rectangles qui s'appuient sur cette partition et la courbe représentative de la fonction f —aire comptée positivement ou négativement selon le signe de la fonction f . La n -ième somme de Riemann donne l'aire totale de tous ces rectangles. Voir la figure 3.1.

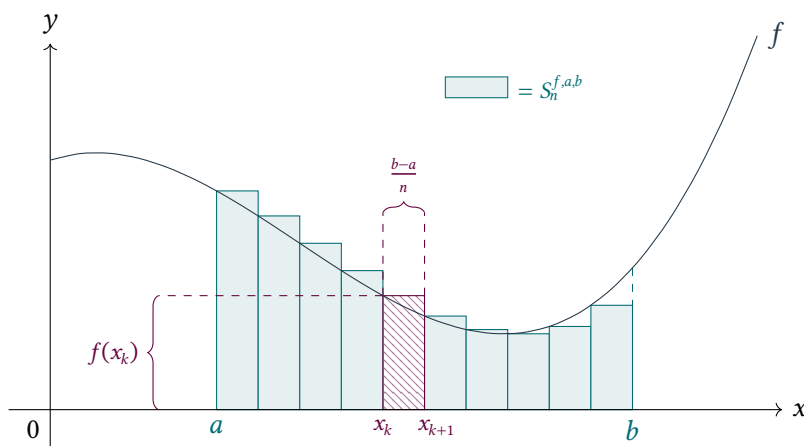


FIGURE 3.1 : Somme de Riemann d'une fonction continue sur un segment

Quand $n \rightarrow +\infty$, la partition est de plus en plus fine et l'union des rectangles approche de plus en plus le domaine

$$D_{f,a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Si la fonction f est positive sur un segment $[a, b]$, alors l'intégrale de a à b de f donne l'aire de ce domaine. Si la fonction f est négative, alors on remplace la condition portant sur y par l'encadrement $f(x) \leq y \leq 0$ et l'intégrale donne l'opposé de l'aire du domaine ainsi obtenu. Voir la figure 3.2.

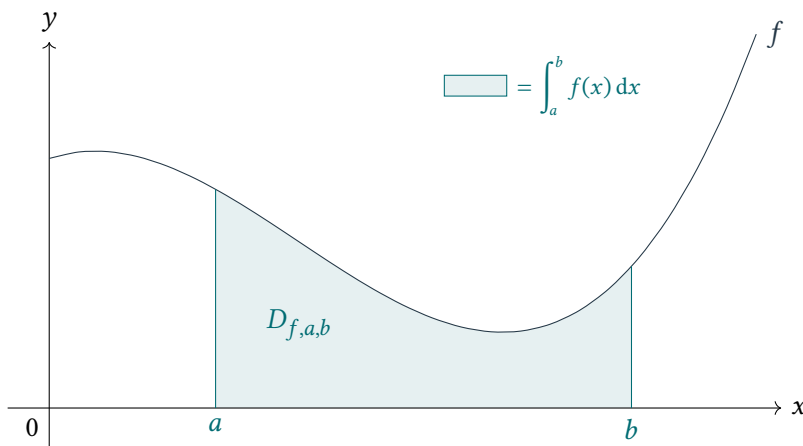


FIGURE 3.2 : Domaine $D_{f,a,b}$ pour une fonction continue sur un segment

Exercice 3.1 (Intégrale de $x \mapsto x^2$ entre 0 et 1). Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^2 dx$ à partir de la définition.

Solution. La n -ième somme de Riemann de la fonction $x \mapsto x^2$ entre 0 et 1 est donnée par

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2.$$

Pour calculer cette dernière somme, on peut sommer pour k entier compris entre 0 et $n-1$ les deux membres de l'égalité $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. La somme sur le membre de gauche est une *somme télescopique* (dont les termes se simplifient deux à deux sauf les deux termes extrêmes), soit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} ((k+1)^3 - k^3) = n^3 - 0^3 = n^3.$$

La somme sur le membre de droite s'exprime par linéarité comme suit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (3k^2 + 3k + 1) = 3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + 3 \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + 3 \frac{(n-1)n}{2} + n = 3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{2}.$$

En combinant les deux expressions ainsi obtenues, on en déduit que

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{3n^3} \left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}.$$

Finalement, l'intégrale de 0 à 1 de la fonction $x \mapsto x^2$ est égale à cette valeur limite $1/3$. □

3.1.2 Quelques propriétés

Les propriétés ci-dessous découlent de la définition de l'intégrale et ont toutes une interprétation en termes d'aire.

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, c]$, contenant un point b . Alors, on a les relations

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

La seconde égalité porte le nom de *relation de Chasles* pour les intégrales. Voir la figure 3.3.

Cette relation permet de définir l'intégrale de b à a d'une fonction f , toujours pour $a < b$, soit quand les bornes "ne sont pas dans le bon ordre". Ainsi, si on veut que les relations précédentes restent valables dans ce contexte étendu, on doit avoir en particulier

$$0 = \int_a^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx,$$

ce qui impose de définir l'intégrale de b à a comme l'opposée de l'intégrale de a à b , c'est-à-dire par

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

La relation de Chasles reste vraie quand les bornes a , b et c sont dans n'importe quel ordre.

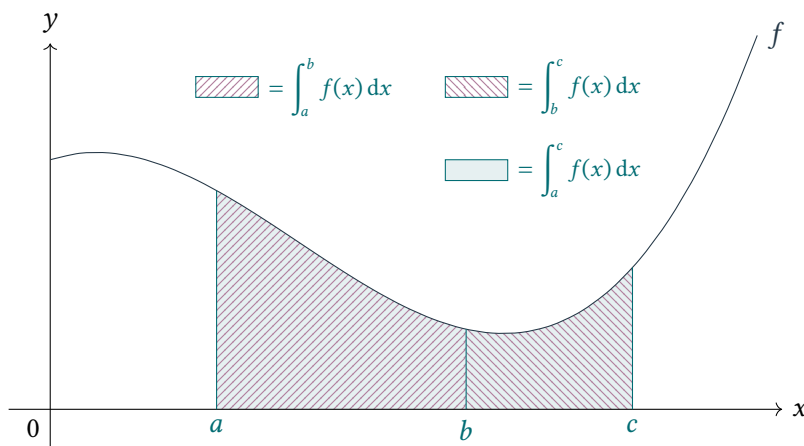


FIGURE 3.3 : Relation de Chasles pour les intégrales

La relation de Chasles permet d'étendre la définition de l'intégrale aux fonctions *continues par morceaux*.

Définition 3.2 (Fonction continue par morceaux). Une fonction f est *continue par morceaux* sur un segment $[a, b]$ s'il existe un nombre fini de points $a = y_0 < \dots < y_n = b$ tels que pour tout $p \in \{0, \dots, n-1\}$, la fonction f est continue sur chaque intervalle $]y_p, y_{p+1}[$ et admet des limites finies à droite en chaque y_p et à gauche en chaque y_{p+1} .

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. On note $y_0, \dots, y_n$ les points de la définition. Alors, pour tout entier $p \in \{0, \dots, n-1\}$, on peut étendre la restriction de f à l'intervalle $]y_p, y_{p+1}[$ en une fonction f_p continue sur le segment $[y_p, y_{p+1}]$ en posant

$$f_p(y_p) = \lim_{x \rightarrow y_p^+} f(x) \quad \text{et} \quad f_p(y_{p+1}) = \lim_{x \rightarrow y_{p+1}^-} f(x),$$

soit respectivement la limite à droite en y_p et la limite à gauche en y_{p+1} , et en convenant que f_p est égale à f sur l'intervalle $]y_p, y_{p+1}[$. La fonction f_p étant continue sur le segment $[y_p, y_{p+1}]$, son intégrale entre y_p et y_{p+1} est correctement définie. On pose alors

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{p=0}^{n-1} \int_{y_p}^{y_{p+1}} f_p(x) dx.$$

Voir la figure 3.4. On peut alors vérifier que la relation de Chasles s'étend à l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment, de même que la plupart des propriétés énoncées ci-après. Pour simplifier le propos, on considère la plupart du temps dans ce chapitre des fonctions continues, mais toute extension aux fonctions continues par morceaux doit respecter les hypothèses du résultat : la formule de la moyenne et l'existence d'une primitive partout dérivable demandent notamment davantage de régularité.

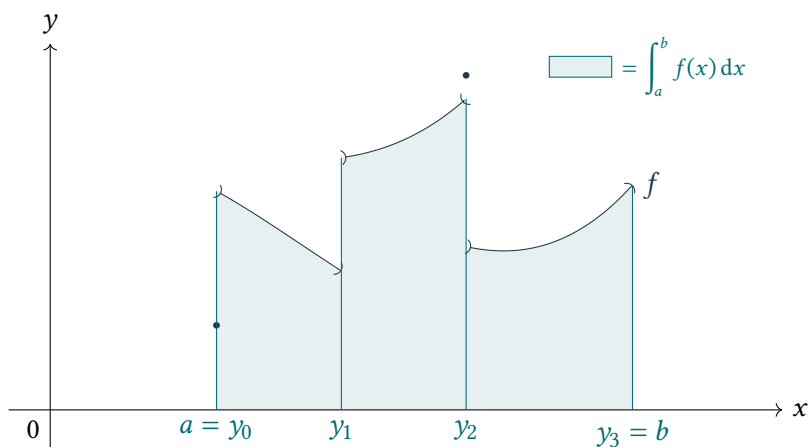


FIGURE 3.4 : Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Linéarité de l'intégrale

Proposition 3.1 (Linéarité de l'intégrale). Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$, et soit λ un nombre réel. On a

$$\int_a^b (\lambda f + g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Autrement dit, l'application qui à une fonction f associe son intégrale entre a et b est une forme linéaire du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur le segment $[a, b]$.

Intégrales et inégalités

Proposition 3.2 (Intégrales et inégalités). Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$. On suppose que $f(x) \leq g(x)$ pour tout réel $x \in [a, b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Point de vigilance. Dans l'énoncé de la proposition 3.2, il est fondamental d'avoir $a \leq b$. Si les bornes ne sont pas dans le "bon ordre", on a l'inégalité inverse. Plus précisément, si $f(x) \leq g(x)$ pour $a \leq x \leq b$, alors

$$\int_b^a f(x) dx \geq \int_b^a g(x) dx.$$

Il faut donc bien faire attention à l'ordre dans lequel on considère les bornes.

On illustre la proposition 3.2 par la figure 3.5. Une conséquence de cette proposition est que l'intégrale d'une fonction positive est positive. De plus, si une fonction f est continue sur un segment $[a, b]$, et bornée par deux constantes A et B , c'est-à-dire si on a $A \leq f(x) \leq B$ pour tout réel $x \in [a, b]$, alors comme l'illustre la figure 3.6, on a l'encadrement

$$A(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq B(b - a). \quad (3.1)$$

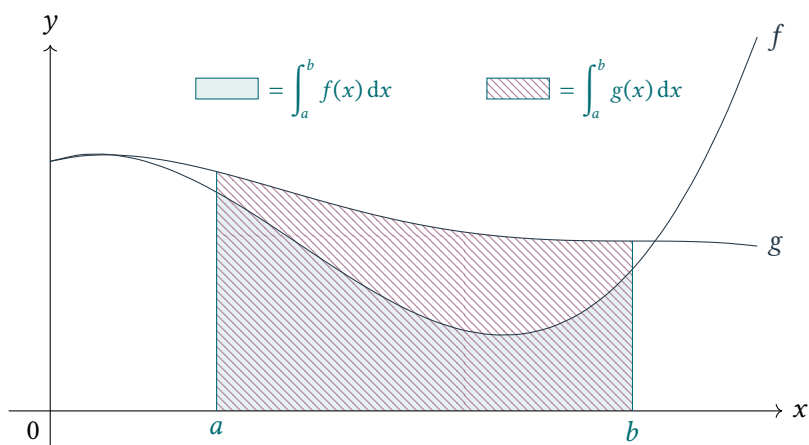


FIGURE 3.5 : Intégrales et inégalités

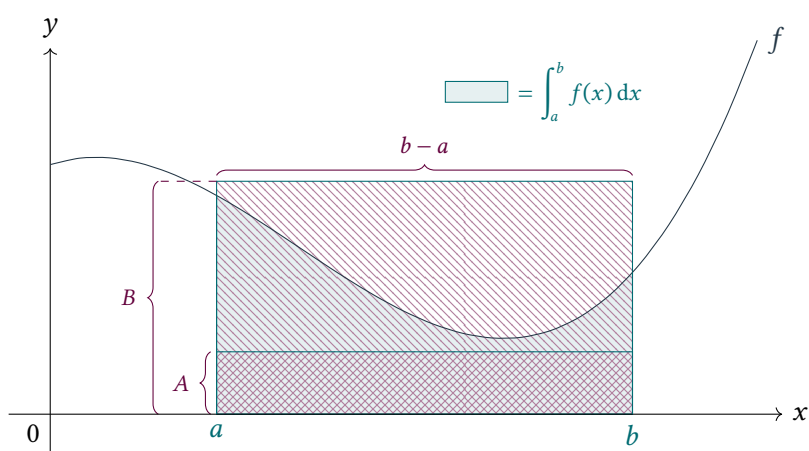


FIGURE 3.6 : Encadrement de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

De plus, on a trivialement l'encadrement $-|f| \leq f \leq |f|$ pour toute fonction f , ce qui permet d'encadrer l'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ par l'intégrale de sa valeur absolue $|f|$ entre a et b , et par son opposé. Cela donne l'*inégalité triangulaire pour les intégrales* : pour toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$, on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (3.2)$$

On en déduit que si la fonction f est bornée par une constante C sur le segment $[a, b]$, c'est-à-dire si on a $|f(x)| \leq C$ pour tout réel $x \in [a, b]$, alors on a la majoration

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq C(b-a). \quad (3.3)$$

Cette dernière majoration découle aussi de la *formule de la moyenne* suivante, illustrée par la figure 3.7.

Proposition 3.3 (Formule de la moyenne). Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et à valeurs réelles. Il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c).$$

Démonstration. On peut supposer que le segment $[a, b]$ n'est pas réduit à un point, c'est-à-dire que $a < b$. La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes. En notant respectivement A

et B le minimum et le maximum de la fonction f sur le segment $[a, b]$, on déduit de l'encadrement (3.1) que

$$A \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq B.$$

Comme la fonction continue f atteint les valeurs A et B sur le segment $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'elle atteint aussi toute valeur comprise entre A et B . D'où l'existence de c tel que $f(c)$ soit égal à la valeur centrale de l'encadrement précédent. $\square$

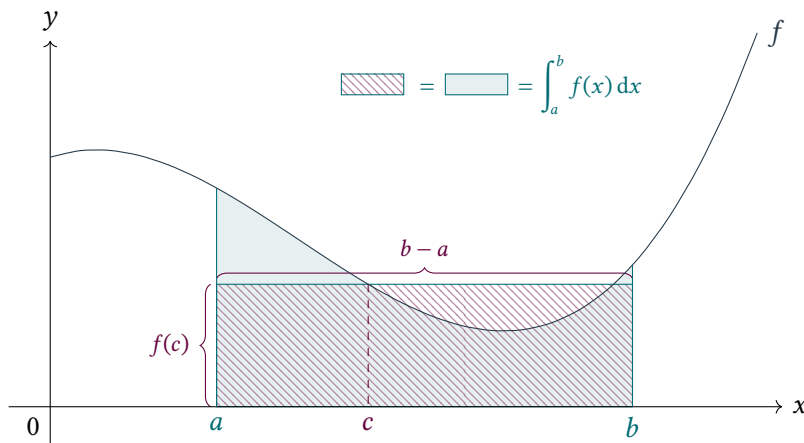


FIGURE 3.7 : Formule de la moyenne pour l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ non réduit à un point, c'est-à-dire tel que $a < b$, la quantité

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

s'appelle la *valeur moyenne* de la fonction f entre a et b . Le résultat précédent garantit que cette valeur moyenne est atteinte en un point du segment.

3.1.3 Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Si f désigne une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et à valeurs complexes, alors on peut écrire $f(x) = u(x) + iv(x)$ pour tout réel x de ce segment. Ainsi, les fonctions u et v sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction f , notées $u = \Re f$ et $v = \Im f$. Ce sont deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles. La continuité vient par exemple des formules

$$\Re f = \frac{1}{2} (f + \bar{f}) \quad \text{et} \quad \Im f = \frac{1}{2i} (f - \bar{f}),$$

où $\bar{f}$ désigne la *conjuguée* de la fonction f , définie par $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ pour tout réel x du segment $[a, b]$. Les sommes de Riemann entre a et b de la fonction f et celles de ses parties réelle u et imaginaire v sont liées par les relations

$$S_n^{f,a,b} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + i \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = S_n^{u,a,b} + i S_n^{v,a,b}.$$

D'après la définition 3.1, les suites de sommes de Riemann $S_n^{u,a,b}$ et $S_n^{v,a,b}$ convergent respectivement vers les intégrales de u et de v entre a et b . Par conséquent, la suite de sommes de Riemann $S_n^{f,a,b}$ converge vers ce qu'on définit comme l'intégrale de f entre a et b , et on a la relation suivante.

Définition 3.3 (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes continue sur un segment). Soit f une fonction

continue sur un segment $[a, b]$ et à valeurs complexes. L'intégrale de a à b de la fonction f est donnée par

$$\int_a^b f(x) dx = \left(\int_a^b \Re f(x) dx \right) + i \left(\int_a^b \Im f(x) dx \right).$$

Cette relation s'étend au cas des fonctions continues par morceaux sur un segment et à valeurs complexes. Parmi les propriétés évoquées ci-dessus, la relation de Chasles et la linéarité subsistent, de même que l'inégalité triangulaire, à condition de remplacer la valeur absolue par le module. Les autres inégalités ne sont plus valables, puisqu'on ne peut même pas comparer deux nombres complexes entre eux. La formule de la moyenne ne subsiste pas non plus.

3.1.4 Lien avec les primitives

Rappelons les liens remarquables entre les *primitives* d'une fonction continue et ses intégrales.

Définition 3.4 (Primitive d'une fonction continue). Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction F est une *primitive* de f sur I si la fonction F est dérivable sur I et si sa dérivée vérifie $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Si l'intervalle I est fermé, par exemple de la forme $[a, b]$, alors il importe de considérer la dérivée à gauche ou à droite aux bornes a et b . La notion de primitive ne définit pas un objet unique. Cependant, deux primitives d'une même fonction continue diffèrent seulement d'une constante.

Proposition 3.4 (Différence de deux primitives d'une fonction continue). Soient F et G deux primitives d'une même fonction continue f sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. Alors, il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que $F(x) = G(x) + C$ pour tout $x \in I$. Si les primitives F et G sont à valeurs réelles, alors $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour tout $x \in I$, on a $F'(x) = f(x) = G'(x)$, de sorte que $(F - G)'(x) = 0$. En appliquant le théorème des accroissements finis aux parties réelle et imaginaire de $F - G$, on en déduit que la fonction $F - G$ est constante sur I . $\square$

Exemple 3.1. La fonction $x \mapsto \ln x$ est primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto 1/x$, de même que la fonction $x \mapsto \ln(3x)$, puisque $\ln(3x) = \ln x + \ln 3$. Par contre, $x \mapsto \ln x$ est l'unique primitive de $x \mapsto 1/x$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

La question de l'existence de primitives d'une fonction continue est résolue par le résultat suivant.

Théorème 3.5 (Existence de primitives d'une fonction continue). Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, et soit F la fonction définie sur ce même segment par

$$\forall X \in [a, b] \quad F(X) = \int_a^X f(x) dx.$$

Alors, F est une primitive de f sur $[a, b]$, et c'est l'unique primitive qui s'annule au point a .

Démonstration. Prouvons d'abord l'unicité. Si G désigne un autre primitive de f sur $[a, b]$, alors la proposition 3.4 montre qu'il existe une constante C telle que $F(X) = G(X) + C$ pour tout $X \in [a, b]$. Si de plus la primitive G s'annule au point a , alors $0 = F(a) = G(a) + C = C$. La constante C est donc nulle, ce qui implique que $F = G$.

Montrons maintenant que F est une primitive de f sur le segment $[a, b]$. Soient deux nombres réels X et h tels que les points X et $X + h$ appartiennent tous deux à $[a, b]$. D'après la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale,

$$F(X + h) - F(X) = \int_X^{X+h} f(x) dx = h f(X) + \int_X^{X+h} (f(x) - f(X)) dx.$$

D'après la majoration (3.3), la dernière intégrale (dont les bornes peuvent ne pas être dans le "bon ordre") vérifie

$$\left| \int_X^{X+h} (f(x) - f(X)) dx \right| \leq |h| \max_{\substack{x \in [a,b] \\ |x-X| \leq |h|}} |f(x) - f(X)|.$$

Le maximum considéré tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$, en vertu de la continuité de la fonction f . Ainsi, quand $h \rightarrow 0$ (éventuellement seulement par la gauche ou par la droite si on est à la borne a ou b),

$$F(X+h) - F(X) = h f(X) + o(h).$$

Voir la figure 3.8. Cela signifie que F est dérivable au point X , de dérivée égale à $f(X)$. □

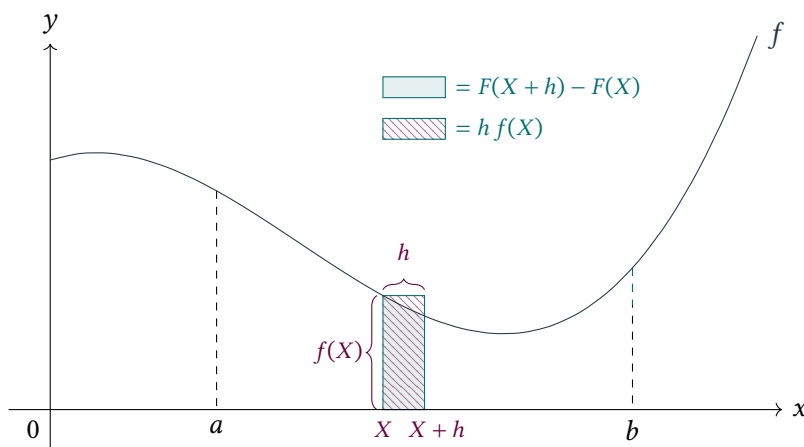


FIGURE 3.8 : Dérivée de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Le théorème précédent permet de calculer l'intégrale d'une fonction dont on connaît les primitives. Il est donc utile et important de connaître les primitives des fonctions usuelles (voir annexe D).

Corollaire 3.6 (Calcul de l'intégrale à partir d'une primitive). Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, et soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. D'après le théorème 3.5, la fonction définie par $G(X) = \int_a^X f(x) dx$ pour $X \in [a, b]$ est une primitive de la fonction f sur $[a, b]$. D'après la proposition 3.4, il existe donc une constante C telle que $F(X) = G(X) + C$ pour tout $X \in [a, b]$. En particulier, pour $X = a$ et $X = b$, on en déduit que $C = F(a)$ et $G(b) = F(b) - C$. Comme l'intégrale de l'énoncé vaut $G(b)$, le résultat s'ensuit. □

Si F désigne une fonction définie au moins en deux points a et b , on note $[F(x)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$. Ainsi, la formule énoncée dans le corollaire 3.6 devient

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b. \quad (3.4)$$

3.1.5 Techniques de calcul

Intégration par parties

Cette technique intervient quand on doit intégrer un produit de fonctions. On part de la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables : $(uv)' = u'v + uv'$. Si les deux dérivées u' et v' sont continues (les

fonctions u et v sont dites *continûment dérivables*, ou encore *de classe C^1* , alors la dérivée du produit $(uv)'$ l'est aussi. On peut alors intégrer l'identité précédente entre deux bornes a et b , ce qui fournit la formule *d'intégration par parties*.

Proposition 3.7 (Intégration par parties). Soient u et v deux fonctions continûment dérivables sur un segment $[a, b]$. On a

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx.$$

Ici, le terme entre crochets désigne $u(b)v(b) - u(a)v(a)$. La proposition 3.7 reste vraie si u et v sont *continues sur tout le segment* et de classe C^1 par morceaux (voir la définition 6.6). On applique alors la formule sur chaque morceau et les termes aux points de raccord se simplifient. En présence de sauts, des termes de bord supplémentaires sont nécessaires.

Pour $u(x) = x$, l'intégration par parties implique que pour toute fonction v de classe C^1 sur un segment $[a, b]$,

$$\int_a^b v(x) dx = [x v(x)]_a^b - \int_a^b x v'(x) dx.$$

On peut donc toujours voir l'intégrale d'une fonction continue v comme celle d'un produit, en écrivant simplement que $v = 1 \cdot v$, soit le produit de v par la fonction constante égale à 1.

Il est opportun d'utiliser la formule d'intégration par parties quand on calcule l'intégrale du produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction exponentielle ou trigonométrique. En effet, si P désigne une fonction polynomiale de degré $n \geq 1$ et si r désigne un nombre *complexe* non nul, alors pour tous réels a et b , on a

$$\int_a^b P(x) e^{rx} dx = \left[P(x) \frac{e^{rx}}{r} \right]_a^b - \int_a^b \frac{P'(x)}{r} e^{rx} dx.$$

On obtient l'intégrale du produit d'une fonction polynomiale de degré $n - 1$ et de la même fonction exponentielle. Ainsi, en intégrant par parties n fois successivement, on finit par obtenir l'intégrale du produit d'une fonction polynomiale constante et de la fonction exponentielle, intégrale que l'on sait calculer. Si P est à valeurs réelles, et si $r = s + it$ avec $s, t \in \mathbb{R}$, alors en prenant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'intégrale de départ, on obtient une méthode de calcul d'intégrales de la forme

$$\int_a^b P(x) e^{sx} \cos(tx) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b P(x) e^{sx} \sin(tx) dx.$$

Il n'est toutefois pas nécessaire de passer par les exponentielles complexes quand on souhaite calculer l'intégrale du produit d'une fonction polynomiale et d'une fonction trigonométrique. L'essentiel est toujours de dériver la fonction polynomiale afin d'abaisser son degré petit à petit.

Exercice 3.2 (Calcul d'une intégrale trigonométrique). Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$.

Solution. On peut utiliser la formule d'intégration par parties avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos x$. On a alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sin x$ (ou n'importe quelle primitive de $\cos$, ce qui ne change pas le résultat). On a

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1. \quad \square$$

Changement de variable

La proposition qui suit porte le nom de formule de *changement de variable*. Cette formule peut être utilisée “dans les deux sens”, et sert autant dans l'un que dans l'autre.

Proposition 3.8 (Changement de variable). Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$. Soit φ une fonction continûment dérivable à valeurs dans $[a, b]$ et définie sur un segment $[\alpha, \beta]$, telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. On a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Démonstration. La fonction continue f admet une primitive, notée F , sur le segment $[a, b]$. Alors, la fonction définie par $G(t) = F(\varphi(t))$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$ est dérivable, et la formule de dérivation des fonctions composées implique que sa dérivée vérifie $G'(t) = \varphi'(t) F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. D'où, avec l'aide du corollaire 3.6,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad \square$$

Pour rédiger un changement de variable via une fonction φ , on pose $x = \varphi(t)$, ce qui permet d'écrire formellement que $dx = \varphi'(t) dt$, puis de remplacer x et dx respectivement par $\varphi(t)$ et $\varphi'(t) dt$ dans l'expression de l'intégrale, sans oublier d'ajuster aussi les valeurs des bornes.

Exercice 3.3 (Utilisation de la formule de changement de variable de la gauche vers la droite). Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Solution. On voit cette intégrale comme le membre de gauche de la formule de changement de variable. On considère alors la fonction φ de $[0, \pi/4]$ dans $[0, \sqrt{2}/2]$ définie par $\varphi(t) = \sin t$ pour tout $t \in [0, \pi/4]$. La fonction φ est bien continûment dérivable et sa dérivée est donnée par $\varphi'(t) = \cos t$ pour tout $t \in [0, \pi/4]$. La proposition 3.8 donne alors

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} dt.$$

On observe que, sur l'intervalle d'intégration considéré, le numérateur et le dénominateur de l'intégrande (l'expression qu'on intègre) sont identiques, donc on a finalement $I = \pi/4$.

Le choix de l'intervalle $[0, \pi/4]$ garantit que $\sin t$ reste dans $[0, \sqrt{2}/2]$ et que $\cos t > 0$. L'intervalle $[0, 3\pi/4]$ ne convient pas à la proposition : son image dépasse $\sqrt{2}/2$ et atteint la singularité $x = 1$ de l'intégrande. Enfin, dans les calculs concrets, on omet souvent d'introduire rigoureusement la fonction de changement de variable. Dans l'exemple considéré ici, il est admis de poser simplement "à la physicienne" $x = \sin t$, puis d'écrire $dx = \cos t dt$, et de remplacer x et dx par ces expressions dans l'intégrale, en prenant soin de changer les bornes d'intégration. $\square$

Exercice 3.4 (Utilisation de la formule de changement de variable de la droite vers la gauche). Calculer l'intégrale

$$J = \int_1^e \frac{(\ln t)^2}{t} dt.$$

Solution. On reconnaît dans l'expression de J la fonction inverse, qui est la dérivée du logarithme. Plus précisément, on reconnaît $\varphi(t) = \ln t$ et $\varphi'(t) = 1/t$. Si on considère la fonction φ de $[1, e]$ dans $[0, 1]$, alors J constitue le membre de droite de la formule de changement de variable de la proposition 3.8, avec en outre $f(x) = x^2$. On obtient

$$J = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

On peut ici aussi adopter une rédaction "à la physicienne" en posant $x = \ln t$, puis en calculant $dx = dt/t$, et enfin en passant de t à x dans l'intégrale, en prenant encore soin de changer les bornes. $\square$

3.2 Intégrales généralisées

La section précédente traite du cas des fonctions continues sur un segment. On souhaite maintenant définir l'intégrale de fonctions continues (ou continues par morceaux) sur un intervalle qui n'est pas un segment. Les

intervalles considérés sont donc non fermés ou non bornés, c'est-à-dire de la forme $]a, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b[$ avec des bornes a et b finies ou infinies. En plus de la question du calcul de l'intégrale, une nouvelle problématique apparaît : *l'intégrale peut ne pas exister*. Avant de mener tout calcul, il convient donc de déterminer si l'intégrale existe.

3.2.1 Exemples introductifs

Pour comprendre quand l'intégrale sur un intervalle non fermé ou non borné peut exister, commençons par étudier quelques exemples, d'abord sur l'intervalle fermé et non borné $[1, +\infty[$.

Pour tout paramètre réel s , on considère la fonction f_s définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par $f_s(x) = \frac{1}{x^s}$. Cette fonction est continue et admet pour primitive sur $[1, +\infty[$ la fonction F_s définie par $F_s(x) = \frac{x^{1-s}}{1-s}$ si $s \neq 1$, et par $F_1(x) = \ln x$ si $s = 1$. Pour tout $X \geq 1$, la fonction f_s est continue sur $[1, X]$, et on peut y exprimer son intégrale :

$$\int_1^X \frac{dx}{x^s} = \int_1^X f_s(x) dx = [F_s(x)]_1^X = \begin{cases} \frac{X^{1-s} - 1}{1-s} & \text{si } s \neq 1 \\ \ln X & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Pour donner un sens à l'intégrale sur tout l'intervalle $[1, +\infty[$, il est alors naturel de faire tendre la borne X vers l'infini. Voir la figure 3.9 On observe alors que

$$\int_1^X \frac{dx}{x^s} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{s-1} & \text{si } s > 1 \\ +\infty & \text{si } s \leq 1. \end{cases}$$

Ainsi, le paramètre s , qui gouverne le taux de décroissance de la fonction f_s au voisinage de l'infini, détermine si la limite prend une valeur finie ou infinie. Si la limite existe et est finie, on dit que l'intégrale de 1 à $+\infty$ est *convergente*. Sinon, l'intégrale est dite *divergente*.

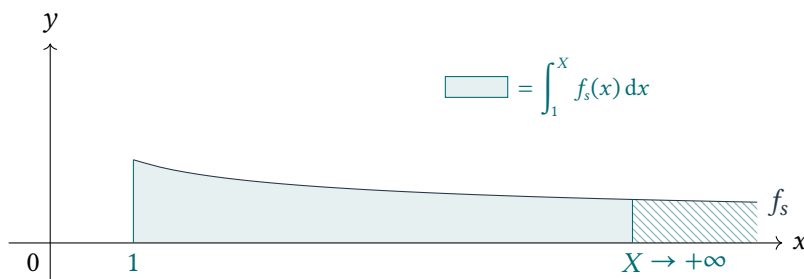


FIGURE 3.9 : Intégrale de 1 à X de la fonction f_s

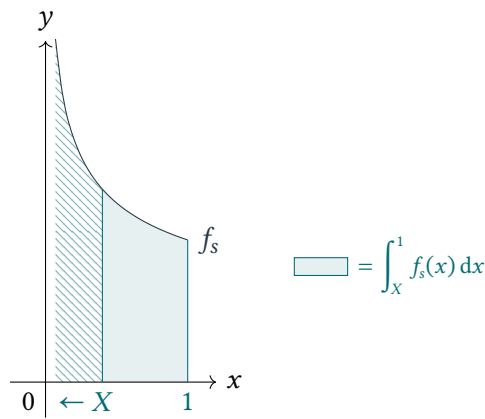
Considérons maintenant le cas de l'intervalle borné semi-ouvert $]0, 1]$, et reprenons l'exemple des fonctions f_s ci-dessus, en supposant qu'elles sont définies sur cet intervalle. Les fonctions f_s restent continues sur ce nouvel intervalle, et admettent toujours pour primitive les fonctions F_s précédentes. Pour tout réel $X \in]0, 1]$, on a désormais

$$\int_X^1 \frac{dx}{x^s} = \int_X^1 f_s(x) dx = [F_s(x)]_X^1 = \begin{cases} \frac{1 - X^{1-s}}{1-s} & \text{si } s \neq 1 \\ -\ln X & \text{si } s = 1. \end{cases}$$

Pour donner un sens à l'intégrale sur tout l'intervalle $]0, 1]$, on fait tendre la borne X vers 0. Voir la figure 3.10. On a

$$\int_X^1 \frac{dx}{x^s} \xrightarrow{X \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{1-s} & \text{si } s < 1 \\ +\infty & \text{si } s \geq 1. \end{cases}$$

Le paramètre s , qui gouverne le comportement de f_s près de 0, indique si la limite prend une valeur finie ou infinie. À nouveau, si la limite existe et est finie, on dit que l'intégrale de 0 à 1 est *convergente*. Sinon, elle est dite *divergente*.

FIGURE 3.10 : Intégrale de X à 1 de la fonction f_s

Les *intégrales généralisées* ci-dessus sont notées $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ et $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$. Ce sont les *intégrales de Riemann*.

3.2.2 Définitions

Les exemples vus précédemment permettent de dégager la notion de *convergence* pour l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle non fermé ou non borné. Le problème de convergence de l'intégrale peut se poser à une seule borne, si l'intervalle est de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$, avec a et b finis ou infinis, ou aux deux bornes, si l'intervalle est de la forme $]a, b[$. Commençons par le cas $[a, b[$.

Définition 3.5 (Intégrale généralisée sur un intervalle $[a, b[$). On considère $-\infty < a < b \leq +\infty$ et une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ est *convergente* si la fonction

$F(X) = \int_a^X f(x) dx$ définie pour tout réel $X \in [a, b[$ admet une limite finie ℓ quand $X \rightarrow b$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(x) dx = \ell.$$

Si la limite n'existe pas ou n'est pas finie, l'intégrale généralisée est qualifiée de *divergente*.

La condition $-\infty < a < b \leq +\infty$ indique que a est un nombre réel, et que b est soit un nombre réel, soit l'infini. Pour $b = +\infty$, on rappelle que $F(X)$ admet une limite finie ℓ quand $X \rightarrow +\infty$ si la condition suivante est réalisée : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $X_0 \geq a$ tel que $|F(X) - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout réel $X \geq X_0$. (Voir la définition 2.5 pour la condition analogue sur les suites.) Si $b \in \mathbb{R}$, la limite évoquée dans la définition est la limite à gauche, puisque la fonction F n'est définie que pour les valeurs strictement inférieures à b . On rappelle alors que $F(X)$ admet une limite à gauche finie ℓ quand $X \rightarrow b^-$ si la condition suivante est réalisée : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $X_0 \in [a, b[$ tel que $|F(X) - \ell| \leq \varepsilon$ pour tout réel $X \in [X_0, b[$.

D'après la définition, une intégrale généralisée est divergente si la limite n'est pas finie, ou si elle n'existe pas. Les intégrales de Riemann ci-dessus fournissent des exemples d'intégrales qui, quand elles sont divergentes, le sont parce que la limite est infinie. On peut aussi rencontrer des intégrales divergentes pour lesquelles la limite n'existe pas, par exemple si la fonction f est oscillante au voisinage de la borne de l'intervalle. C'est le cas de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos x dx$, qui est divergente puisque $\int_0^X \cos x dx = [\sin x]_0^X = \sin X$ n'admet pas de limite quand $X \rightarrow +\infty$.

Pour les intervalles $]a, b]$, avec a fini ou infini, la définition est semblable à la précédente.

Définition 3.6 (Intégrale généralisée sur un intervalle $]a, b]$). On considère $-\infty \leq a < b < +\infty$ et une fonction

f continue sur l'intervalle $]a, b]$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ est *convergente* si la fonction $F(X) = \int_X^b f(x) dx$ définie pour tout réel $X \in]a, b]$ admet une limite finie ℓ quand $X \rightarrow a$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(x) dx = \ell.$$

Si la limite n'existe pas ou n'est pas finie, l'intégrale généralisée est qualifiée de *divergente*.

Ici, dans le cas où a est un nombre réel, la limite évoquée dans la définition est la limite à droite, puisque la fonction F n'est définie que pour les valeurs strictement supérieures à a .

Enfin, pour les intervalles de la forme $]a, b[$, l'idée de considérer un point arbitraire $c \in]a, b[$, et de se ramener aux cas précédents en convenant que l'intégrale sur tout l'intervalle $]a, b[$ converge si les intégrales sur l'intervalle $]a, c]$ et sur l'intervalle $[c, b[$ convergent toutes les deux.

Définition 3.7 (Intégrale généralisée sur un intervalle $]a, b[$). On considère $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et une fonction f continue sur $]a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ est *convergente* si les deux intégrales généralisées $\int_a^c f(x) dx$ et $\int_c^b f(x) dx$ sont convergentes pour au moins un nombre réel $c \in]a, b[$, ou de manière équivalente pour tous les nombres réels $c \in]a, b[$. On pose

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Si l'une au moins des deux dernières intégrales généralisées est divergente, l'intégrale généralisée de départ est qualifiée de *divergente*.

Exercice 3.5 (Convergence et calcul d'une intégrale généralisée). Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge et calculer sa valeur.

Solution. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$, il suffit de montrer que les deux intégrales $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ sont convergentes. On commence par calculer pour tout réel X ,

$$\int_0^X \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^X = \arctan X.$$

Cette quantité tend vers $\pi/2$ quand $X \rightarrow +\infty$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale entre 0 et $+\infty$, et plus précisément que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$. On en déduit aussi que

$$\int_X^0 \frac{dx}{1+x^2} = - \int_0^X \frac{dx}{1+x^2} = -\arctan X \xrightarrow{X \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, l'intégrale entre $-\infty$ et 0 converge aussi et vaut $\pi/2$. Donc l'intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \quad \square$$

Point de vigilance. Lorsqu'on cherche à intégrer une fonction f continue sur un intervalle de la forme $] -a, a[$, avec a un nombre réel strictement positif, ou bien a infini, on peut être tenté de convenir que l'intégrale généralisée de $-a$ à a est convergente si l'intégrale $\int_{-X}^X f(x) dx$ admet une limite finie quand $X \rightarrow a$. Ce procédé ne correspond pas à la définition de la convergence adoptée ci-dessus.

Exercice 3.6. Montrer que $\int_{-X}^X x dx \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$. L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ est-elle convergente ?

Solution. Pour tout réel $X > 0$, on calcule

$$\int_{-X}^X x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-X}^X = \frac{X^2}{2} - \frac{(-X)^2}{2} = 0,$$

de sorte que cette intégrale admet une limite nulle quand $X \rightarrow +\infty$. Cependant, on observe que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ ne converge pas. En effet, les deux intégrales $\int_0^{+\infty} x dx$ et $\int_{-\infty}^0 x dx$ ne convergent pas. Cela vient du fait que

$$\int_0^X x dx = - \int_{-X}^0 x dx = \frac{X^2}{2} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi, il faut étudier séparément la convergence de l'intégrale autour de chacune des deux bornes problématiques. $\square$

3.2.3 Intuitions trompeuses

Il faut se méfier des intuitions trompeuses entre limites d'une fonction aux bornes d'un intervalle, monotonie de cette fonction au voisinage des bornes, et convergence de son intégrale sur cet intervalle. Ce qui est vrai :

- Si une fonction continue $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$, avec $-\infty < a < b < +\infty$, admet une limite finie au point b , alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est convergente, car f se prolonge par continuité au segment $[a, b]$. C'est le cas en particulier si f est une fonction réelle croissante et majorée, ou décroissante et minorée, au voisinage de b .
- Si une fonction continue $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, avec $a \in \mathbb{R}$, admet en $+\infty$ une limite $\ell \neq 0$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est divergente. Si par exemple $\ell > 0$, il existe $x_0 \geq a$ tel que $f(x) \geq \ell/2$ pour tout $x \geq x_0$, donc

$$\int_a^X f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^X f(x) dx \geq \int_a^{x_0} f(x) dx + \frac{\ell}{2}(X - x_0) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty.$$

- Si une fonction continue $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ a une intégrale convergente sur $[a, +\infty[$, et si au voisinage de $+\infty$, la fonction f est décroissante et minorée, ou croissante et majorée, alors f tend vers 0 en $+\infty$. En effet, f admet alors une limite finie en $+\infty$, et le point ci-dessus implique que cette limite est nulle.

On méditera en revanche sur les exemples suivants :

- Si une fonction continue $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite nulle en $+\infty$, éventuellement en étant monotone, son intégrale sur $[a, +\infty[$ peut converger ou diverger. Par exemple, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge.
- Si une fonction continue $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite infinie en a , éventuellement en étant monotone, son intégrale sur $]a, b]$ peut converger ou diverger. Par exemple, $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverge et $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge.
- Si une fonction continue $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ a une intégrale convergente sur $[a, +\infty[$, la limite de f en $+\infty$ n'est pas forcément nulle, et peut même ne pas exister. On peut même construire un exemple de fonction non majorée dont l'intégrale converge. En effet, pour tout entier $n \geq 1$, considérons un réel $a_n \in]0, 1/2]$ et un réel $b_n > 0$.

On note f la fonction affine par morceaux définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ qui est nulle en dehors des intervalles de la forme $]n - a_n, n + a_n[$ et qui vérifie $f(n) = b_n$ pour tout entier $n \geq 1$. La fonction f est continue et positive. Si on choisit une suite $(b_n)_{n \geq 1}$ qui diverge vers $+\infty$, alors la fonction f n'est pas majorée, et n'admet pas de limite en $+\infty$, puisque $f(n) = b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(n + a_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Enfin, pour tout réel $X \geq 0$, en notant N un entier tel que $X \leq N + a_N$, on a

$$\int_0^X f(x) dx \leq \int_0^{N+a_N} f(x) dx = \sum_{n=1}^N \frac{2a_n b_n}{2} = \sum_{n=1}^N a_n b_n.$$

Si on choisit les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ telles que la suite dans le membre de droite soit majorée, la fonction $X \mapsto \int_0^X f(x) dx$ est croissante et majorée, ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge. Concrètement, on peut choisir $a_n = 3^{-n}$ et $b_n = 2^n$ pour se retrouver dans cette situation. Voir la figure 3.11.

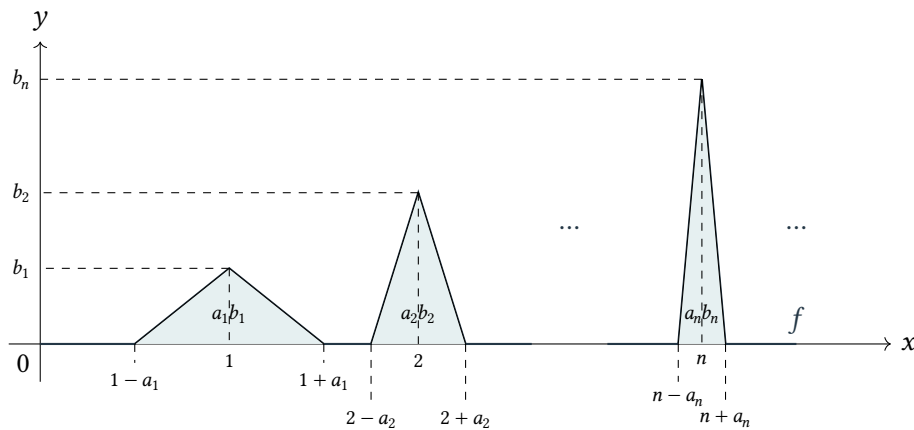


FIGURE 3.11 : Exemple d'une fonction non majorée dont l'intégrale converge

3.2.4 Règles de calcul

La relation de Chasles, la linéarité, les liens entre inégalités et intégrales, ainsi que les formules d'intégration par parties et de changement de variable, s'étendent au cas des intégrales généralisées, si toutefois les intégrales considérées sont convergentes. Cela s'explique par le fait que ces propriétés, vraies quand on intègre sur des segments, sont stables par passage à la limite quand on fait tendre les bornes des segments vers les extrémités d'intervalles d'intégration plus généraux. Pour fixer les idées, nous détaillons ces propriétés dans le cas d'intégrales sur des intervalles de la forme $[a, b[$, avec b fini ou infini, mais elles sont également valables pour des intégrales sur des intervalles de la forme $]a, b]$ ou $]a, b[$ comme définies ci-dessus.

Proposition 3.9 (Linéarité). On considère $-\infty < a < b \leq +\infty$, deux fonctions f et g continues sur l'intervalle $[a, b[$, et un nombre réel $\lambda \neq 0$. Si deux des trois intégrales généralisées ci-dessous convergent, alors la troisième converge aussi, et on a l'égalité

$$\int_a^b (\lambda f + g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Démonstration. Pour tout réel $X \in [a, b[$, les fonctions f et g sont continues sur le segment $[a, X]$, donc la linéarité pour les intégrales usuelles s'écrit

$$\int_a^X (\lambda f + g)(x) dx = \lambda \int_a^X f(x) dx + \int_a^X g(x) dx.$$

Quand $X \rightarrow b$, l'hypothèse indique que deux parmi ces trois intégrales admettent une limite finie. La troisième admet donc aussi une limite finie, et on conclut en passant à la limite ci-dessus. $\square$

Dans la formule d'intégration par parties suivante, on étend la notation crochet $[\cdot]_a^b$ utilisée dans (3.4) en posant, pour toute fonction F définie sur l'intervalle $[a, b[$,

$$[F(x)]_a^b = \left(\lim_{x \rightarrow b} F(x) \right) - F(a).$$

Si la limite dans le membre de droite existe et est finie, on dit que *le crochet est convergent*. La formule (3.4) reste valable pour l'intégrale généralisée, à condition que celle-ci, ou le crochet, converge. Dans ce cas, l'intégrale converge si et seulement si le crochet converge. On étend de même la notation crochet et (3.4) aux fonctions définies sur les intervalles de la forme $]a, b]$ et $]a, b[$.

Proposition 3.10 (Intégration par parties). *On considère $-\infty < a < b \leq +\infty$ et deux fonctions u et v continûment dérivables sur l'intervalle $[a, b[$. Si deux parmi les trois termes ci-dessous (intégrales généralisées ou crochet) convergent, alors le troisième converge aussi, et on a l'égalité*

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx.$$

La formule de changement de variable pour les intégrales généralisées nécessite, par rapport au cas vu précédemment des intégrales sur des segments, une hypothèse supplémentaire de stricte monotonie de la fonction de changement de variable. L'énoncé ci-dessous traite le cas strictement croissant. Dans le cas strictement décroissant, les extrémités sont échangées et il faut inverser les bornes de l'intégrale transformée (ou changer son signe).

Proposition 3.11 (Changement de variable). *On considère $-\infty < a < b \leq +\infty$, une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[a, b[$, et une fonction φ continûment dérivable et strictement croissante, à valeurs dans $[a, b[$ et définie sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = b$. Si une des deux intégrales généralisées ci-dessous converge, alors l'autre converge aussi, et on a l'égalité*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

On remarque que les deux intégrales généralisées ci-dessus sont de même nature, c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes. En effet, si l'une converge, l'autre converge aussi, donc si l'une diverge, l'autre ne peut pas converger.

3.2.5 Critères de convergence

Comparaison pour les fonctions de signe constant

Avant d'attaquer tout calcul, il est souvent utile de déterminer rapidement si une intégrale généralisée est convergente. Dans ce but, quand les fonctions sont de signe constant, on peut faire appel à des critères de comparaison. À nouveau pour fixer les idées, nous nous focalisons sur le cas d'intégrales de fonctions positives sur des intervalles de la forme $[a, b[$, avec b fini ou infini, mais les critères énoncés sont également valables pour des intégrales sur des intervalles de la forme $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b[$, alors la fonction $X \mapsto \int_a^X f(x) dx$ est croissante sur cet intervalle, puisque f en est la dérivée d'après le théorème 3.5. Elle admet donc une limite finie en b si et seulement si elle est majorée. Cela conduit à un critère de comparaison.

Proposition 3.12 (Critère de comparaison). *On considère $-\infty < a < b \leq +\infty$ et deux fonctions f et g continues et positives sur l'intervalle $[a, b[$. On suppose qu'il existe un réel $c \in [a, b[$ tel que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [c, b[$. Alors,*

- la convergence de $\int_a^b g(x) dx$ implique celle de $\int_a^b f(x) dx$;
- la divergence de $\int_a^b f(x) dx$ implique celle de $\int_a^b g(x) dx$.

Démonstration. Il suffit de prouver le premier point, car le second s'en déduit par passage à la contraposée (si l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors non $Q \Rightarrow$ non P l'est aussi). Ainsi, supposons que l'intégrale de g de a à b est convergente. Soit un réel $X \in [c, b]$. La relation de Chasles implique que

$$\int_a^X f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^X f(x) dx,$$

et de même pour la fonction g . La convergence des intégrales de a à b est donc équivalente à celle des intégrales de c à b . Comme de plus $0 \leq f \leq g$ sur l'intervalle $[c, b]$, on peut écrire que

$$\int_c^X f(x) dx \leq \int_c^X g(x) dx \leq \int_c^b g(x) dx.$$

La fonction qui à X associe l'intégrale de gauche est donc majorée, en plus d'être croissante. On en déduit qu'elle admet une limite finie quand X tend vers b . Ainsi, l'intégrale de f de a à b converge. $\square$

Pour $c = a$, la preuve ci-dessus montre que, dans le premier cas de la proposition, si l'encadrement $0 \leq f(x) \leq g(x)$ est vrai pour tout $x \in [a, b]$, alors on a $0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. On utilise souvent la proposition 3.12 pour comparer avec des intégrales de références, à commencer par les *intégrales de Riemann* étudiées dans la section 3.2.1. Rappelons les résultats obtenus à leur sujet.

Proposition 3.13 (Convergence ou divergence des intégrales de Riemann). Soit s un nombre réel. Alors,

- l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ converge si et seulement si $s < 1$;
- l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ converge si et seulement si $s > 1$.

Exercice 3.7. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

Solution. Si $\lambda > 0$, on sait par croissance comparée que la quantité positive $x^2 e^{-\lambda x}$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini. On a donc $0 \leq e^{-\lambda x} \leq \frac{1}{x^2}$ pour x suffisamment grand. Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (d'après la proposition 3.13), on en déduit par comparaison (proposition 3.12) la convergence de $\int_1^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$. Il n'y a de plus pas de problème de convergence de l'intégrale de 0 à 1, puisque la fonction est continue entre ces deux valeurs. On en déduit par la relation de Chasles que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ converge. Réciproquement, si $\lambda \leq 0$, on a $e^{-\lambda x} \geq 1$ pour tout réel $x \geq 0$. Comme l'intégrale de 0 à $+\infty$ de la fonction constante égale à 1 est évidemment divergente, la proposition 3.12 montre que $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ diverge. Une autre méthode consiste à calculer, pour $\lambda \neq 0$,

$$\int_0^X e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^X = \frac{1 - e^{-\lambda X}}{\lambda},$$

ce qui tend vers une limite finie, à savoir $1/\lambda$, quand $X \rightarrow +\infty$ uniquement si $\lambda > 0$. Dans le cas où $\lambda = 0$, l'intégrale ci-dessus vaut X et ne tend donc pas vers une limite finie quand $X \rightarrow +\infty$. D'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

si $\lambda > 0$, et cette intégrale généralisée diverge sinon. $\square$

Exercice 3.8. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente.

Solution. Il suffit de montrer que les deux intégrales $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ sont convergentes. Grâce au changement de variable $x \mapsto -x$, les deux intégrales sont de même nature : la convergence de l'une est équivalente à la convergence de l'autre. Il suffit donc d'étudier la convergence de l'intégrale de 0 à $+\infty$. À cet effet, on observe que $x \leq x^2$ pour $x \geq 1$, et donc que $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$. La proposition 3.12 et l'exemple précédent montrent que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge. Il en va alors de même de l'intégrale de $-\infty$ à 0, donc de celle de $-\infty$ à $+\infty$. $\square$

Exercice 3.9. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2-x)} dx$ est convergente.

Solution. Il est suffisant de prouver la convergence de l'intégrale de $-\infty$ à 0, et de celle de 0 à $+\infty$. Pour tout réel $x \leq 0$, on a $0 \leq e^{-(x^2-x)} \leq e^{-x^2}$. On a vu précédemment que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$ est convergente, donc la proposition 3.12 montre que l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^{-(x^2-x)} dx$ converge aussi. Pour l'intégrale entre 0 et $+\infty$, on observe que $0 \leq e^{-(x^2-x)} \leq e^{-x^2/2}$ pour tout $x \geq 2$, et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$ est convergente puisqu'elle se déduit de l'intégrale mentionnée précédemment via le changement de variable $x \mapsto -x\sqrt{2}$, et enfin on conclut à nouveau grâce à la proposition 3.12. $\square$

Dans la même veine, on dispose aussi du critère de comparaison suivant.

Proposition 3.14 (Critère de comparaison asymptotique). On considère $-\infty < a < b \leq +\infty$ et deux fonctions f et g continues et positives sur l'intervalle $[a, b[$. On suppose qu'il existe un réel $\ell \in]0, +\infty[$ tel que $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. Alors, les intégrales généralisées $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$ sont de même nature : la convergence de l'une est équivalente à la convergence de l'autre.

Démonstration. La convergence du quotient f/g vers ℓ quand x tend vers b implique l'existence d'un réel $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \in [c, b[$, on a $0 \leq \frac{\ell}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3\ell}{2} g(x)$. On conclut avec la proposition 3.12. $\square$

L'hypothèse du résultat précédent peut également se présenter sous la forme $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} \ell g(x)$. Ainsi, pour $\ell = 1$, on voit que si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$, alors les intégrales de f et g sur $[a, b[$ sont de même nature.

Exercice 3.10. Montrer à l'aide de la proposition 3.14 que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge.

Solution. La fonction que l'on intègre est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. De plus, $\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. Comme l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, la proposition 3.14 implique que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge aussi. Il n'y a de plus pas de problème de convergence de l'intégrale de 0 à 1, puisque la fonction est continue entre ces deux valeurs. On en déduit par la relation de Chasles que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge. (Cela a été vu dans l'exercice 3.5, et on a même montré que l'intégrale vaut $\pi/2$.) $\square$

Point de vigilance. La proposition 3.14 ne permet en rien de comparer les valeurs des intégrales des fonctions f et g , même quand la limite ℓ de leur rapport vaut 1. En effet, dans l'exemple précédent, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1.$$

Les deux intégrales prennent donc des valeurs distinctes.

Le cas des fonctions négatives se déduit du précédent simplement en prenant l'opposé. Le cas des fonctions qui changent de signe au sein de l'intervalle d'intégration n'est pas nécessairement plus délicat. En effet, considérons par exemple une fonction continue f sur un intervalle de la forme $[a, b[$, et supposons que la fonction est de signe constant sur le sous-intervalle $[c, b[$, pour un certain réel $c \in [a, b[$. La relation de Chasles implique que

$$\int_a^X f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^X f(x) dx$$

pour tout réel $X \in [a, b[$, et donc l'intégrale généralisée de a à b de f converge si et seulement si celle de c à b converge, ce qui permet de se ramener au cas d'une fonction de signe constant.

Convergence absolue

Un cas problématique est celui d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b[$ qui change de signe infiniment souvent au voisinage de b . On peut se ramener aux fonctions positives à l'aide de la notion de *convergence absolue*.

Définition 3.8 (Convergence absolue). On considère $-\infty < a < b \leq +\infty$ et une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ est *absolument convergente* si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(x)| dx$ est convergente.

L'intérêt de cette définition réside dans la proposition suivante.

Proposition 3.15 (Convergence absolue implique convergence). On considère $-\infty < a < b \leq +\infty$ et une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b[$. Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration. Dans le cas réel, posons $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$. Ces fonctions sont continues, positives et majorées par $|f|$. Le critère de comparaison montre donc que leurs intégrales convergent. Puisque $f = f_+ - f_-$, la linéarité entraîne la convergence de l'intégrale de f . Dans le cas complexe, les inégalités $|\Re f| \leq |f|$ et $|\Im f| \leq |f|$ permettent d'appliquer le cas réel à chaque composante. $\square$

Exercice 3.11. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ est absolument convergente.

Solution. On a $0 \leq \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \geq 1$, puisque la fonction sinus est bornée par 1. Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, la proposition 3.12 implique que $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$ aussi. $\square$

Il existe des intégrales généralisées convergentes mais pas absolument convergentes, appelées *semi-convergentes*.

Exercice 3.12. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

Solution. Montrons d'abord la convergence de cette intégrale. À cet effet, on observe que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$. De plus, comme elle tend vers 1 en 0, et comme l'intégrale $\int_0^1 1 \, dx$ est évidemment convergente, la proposition 3.14 implique que $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx$ converge. Par ailleurs, une intégration par parties donne

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} \, dx,$$

où le terme entre crochets est bien défini (la limite en $+\infty$ est finie) et l'intégrale dans le membre de droite est convergente. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, elle est en fait absolument convergente :

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \, dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

On en déduit que l'intégrale dans le membre de gauche est aussi convergente. Au final, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ est bien convergente. Voir la figure 3.12.

Pour montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ n'est pas absolument convergente, on écrit que

$$\int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx,$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, d'après la relation de Chasles. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant successivement les liens entre inégalités et intégrales, et un simple changement de variable, on a

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| \, dx = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi |\sin(x+n\pi)| \, dx = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin x \, dx.$$

On en déduit directement la minoration

$$\int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx \geq \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \right).$$

On reconnaît dans le membre de droite les sommes partielles de la série harmonique, voir (2.2), dont on sait qu'elles tendent vers $+\infty$ quand $N \rightarrow +\infty$. Finalement, l'intégrale dans le membre de gauche tend vers l'infini également. Pour conclure, on observe que pour tout réel $X \geq \pi$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N\pi \leq X < (N+1)\pi$. Donc

$$\int_0^X \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx \geq \int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx.$$

Le membre de droite dépasse n'importe quel réel A fixé, dès que N est assez grand, c'est-à-dire dès que X est assez grand. On en conclut que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \, dx$ est divergente, et donc que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ n'est pas absolument convergente. Voir la figure 3.13. $\square$

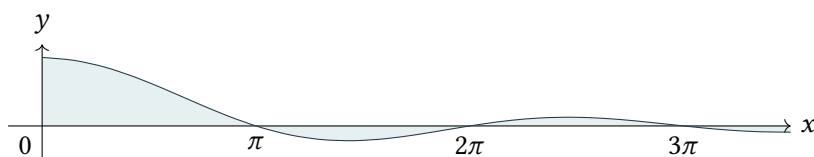


FIGURE 3.12 : Intégrale de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

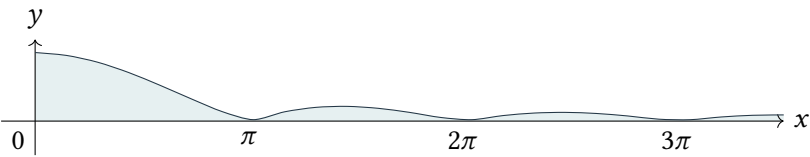


FIGURE 3.13 : Intégrale de la fonction $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$

Séries numériques

Nous nous intéressons ici à certaines suites numériques particulières, que l'on obtient en considérant les sommes des premiers termes d'une suite donnée jusqu'à un rang destiné à tendre vers l'infini. Les outils permettant l'étude de ce type de suites serviront dans les chapitres suivants.

4.1 Convergence d'une série numérique

4.1.1 Définition et généralités

Définition 4.1 (Série numérique). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique réelle ou complexe. On appelle *série numérique de terme général* u_n , et on note $\sum u_n$, la suite numérique de terme général

$$S_N = u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{n=0}^N u_n. \quad (4.1)$$

À N fixé, le terme S_N est appelé *N-ième somme partielle* de la série. Lorsque la suite (S_N) est convergente, on dit que la série $\sum u_n$ est *convergente*. La limite de la suite (S_N) est appelée la *somme (totale)* de la série, notée

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N.$$

Dans le cas contraire, la série $\sum u_n$ est dite *divergente*.

Il peut arriver que la suite (u_n) soit définie à partir d'un certain rang n_0 , et dans ce cas on démarre la somme définissant la série associée à partir de ce rang : $S_N = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_N$, pour $N \geq n_0$. Dans ce cas, on peut désigner la série par $\sum_{n \geq n_0} u_n$ pour préciser son rang de départ.

Exercice 4.1. Étudier la convergence ou la divergence de $\sum 2^{-n}$ et $\sum 2^n$. Calculer leur somme si elles sont convergentes.

Solution. Les sommes partielles de la série $\sum 2^{-n}$, sont données par

$$S_N = \sum_{n=0}^N 2^{-n} = \frac{1 - 2^{-(N+1)}}{1 - 2^{-1}} = 2 - 2^{-N}.$$

Comme cette dernière quantité tend vers 2 quand $N \rightarrow +\infty$, on en déduit que la série $\sum 2^{-n}$ converge et que sa somme vaut 2. En revanche, la série $\sum 2^n$ admet pour sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=0}^N 2^n = \frac{2^{N+1} - 1}{2 - 1} = 2^{N+1} - 1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc la série $\sum 2^n$ est divergente. □

Exercice 4.2 (Série harmonique et série exponentielle). Montrer que la *série harmonique* $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, tandis que la *série exponentielle* $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente.

Solution. La série harmonique est divergente car ses sommes partielles, données par (2.2), c'est-à-dire $S_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$, ne vérifient pas le critère de Cauchy. En revanche, la série exponentielle est convergente, car ses sommes partielles, données par $S_N = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{N!}$ et étudiées dans l'exercice 2.13, forment une suite convergente. □

À une série $\sum u_n$ supposée convergente, on associe la suite de ses *restes* dont le terme général est

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n, \quad (4.2)$$

de sorte que $S_N + R_N$ donne la somme totale de la série, quel que soit l'entier N choisi. Comme la suite (S_N) des sommes partielles converge vers la somme totale, on en déduit que la suite (R_N) des restes converge vers 0. Cette observation conduit au résultat élémentaire et utile ci-dessous.

Proposition 4.1. *Soit (u_n) une suite numérique. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite (u_n) converge vers 0.*

Démonstration. On note (R_N) la suite des restes de la série $\sum u_n$. Alors, pour tout entier N , on a $R_{N-1} = u_N + R_N$. Quand $N \rightarrow +\infty$, les deux restes R_{N-1} et R_N tendent vers 0, donc u_N aussi. $\square$

En prenant la contraposée, le résultat précédent fournit un critère simple pour établir la divergence d'une série numérique. En effet, si une suite (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série associée $\sum u_n$ est nécessairement divergente. Une série dont le terme général ne converge pas vers 0 est alors qualifiée de *grossièrement divergente*.

Exemples 4.1. Les séries $\sum 2^n$, $\sum 1$, $\sum (-1)^n$, ou encore $\sum \sin n$, divergent grossièrement. La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, mais pas grossièrement.

4.1.2 Premiers exemples généraux

Un cas simple est celui des séries dites *télescopiques*, dont le terme général se présente sous la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$, où (v_n) est une suite dont on est capable de déterminer la limite.

Proposition 4.2 (Série télescopique). *Soit (v_n) une suite numérique. Les sommes partielles de la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ sont données par*

$$\sum_{n=0}^N (v_{n+1} - v_n) = v_{N+1} - v_0.$$

Ainsi, la série est convergente si et seulement si la suite (v_n) est convergente. Dans ce cas, la somme vérifie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (v_{n+1} - v_n) = \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} v_N \right) - v_0.$$

Cette série est appelée série télescopique associée à la suite (v_n) .

Démonstration. Pour l'expression des sommes partielles, il suffit soit d'observer que les termes se "télescopent", c'est-à-dire se simplifient deux à deux, sauf les deux termes extrêmes :

$$\sum_{n=0}^N (v_{n+1} - v_n) = (\cancel{v_1} - v_0) + (v_2 - \cancel{v_1}) + \cdots + (v_{N+1} - \cancel{v_N}),$$

soit d'utiliser la linéarité de la somme et procéder à un changement d'indice :

$$\sum_{n=0}^N (v_{n+1} - v_n) = \sum_{n=0}^N v_{n+1} - \sum_{n=0}^N v_n = \sum_{n=1}^{N+1} v_n - \sum_{n=0}^N v_n = v_{N+1} - v_0.$$

Pour conclure, il suffit de faire tendre N vers l'infini dans la formule ainsi obtenue. $\square$

En appliquant la proposition précédente à la suite opposée, on peut traiter de même les séries $\sum (v_n - v_{n+1})$. On peut également adapter facilement le raisonnement aux séries définies à partir d'un rang strictement positif. La proposition précédente est l'analogue pour les suites de la formule $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ pour les fonctions donnée par le corollaire 3.6. En effet, l'accroissement d'une suite entre deux rangs consécutifs est analogue à la dérivée d'une fonction, et la somme d'une série télescopique est analogue à l'intégrale d'une fonction dérivée.

Exercice 4.3. Étudier la convergence et la somme éventuelle de la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Solution. La série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, pour $n \geq 1$, est une série télescopique. En effet, on peut écrire $u_n = v_{n+1} - v_n$, avec $v_n = \ln n$. La proposition 4.2 implique que les sommes partielles sont

$$\sum_{n=1}^N \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(N+1) - \ln 1 = \ln(N+1).$$

Ces sommes tendent vers $+\infty$ quand N tend vers l'infini. On en déduit que la série est divergente. $\square$

Exercice 4.4. Étudier la convergence et la somme éventuelle de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Solution. La série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, pour $n \geq 1$, est une série télescopique. En effet, on a $u_n = v_n - v_{n+1}$, avec pour suite auxiliaire $v_n = 1/n$, de sorte que les sommes partielles sont

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Cette quantité tend vers 1 quand N tend vers l'infini, donc la série converge et sa somme vaut 1. $\square$

Un deuxième cas particulier fondamental de séries numériques est lié aux suites géométriques abordées dans la partie 2.2.2 ; il s'agit des séries *géométriques*.

Proposition 4.3 (Série géométrique). Soit un nombre complexe $q \in \mathbb{C}$. Les sommes partielles de la série numérique $\sum q^n$ sont

$$\sum_{n=0}^N q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ N+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

De plus, la série est convergente si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas, la somme totale vérifie

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Cette série est appelée la série géométrique de raison q .

Démonstration. La proposition 2.5 donne directement la formule pour l'expression des sommes partielles. De plus, si le module de la raison q vérifie $|q| \geq 1$, alors on a $|q^n| = |q|^n \geq 1$ pour tout entier n , de sorte que la suite (q^n) ne peut pas converger vers 0. On en déduit que la série géométrique $\sum q^n$ diverge grossièrement. En revanche, si la raison vérifie $|q| < 1$, alors on obtient aisément la convergence de la série et l'expression de la somme totale en observant que $q^{N+1} \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$. $\square$

Si l'on considère q comme une variable, on peut voir la somme de la série $\sum q^n$ comme une fonction de q . Ce point de vue est celui des *séries de fonctions* développé dans le chapitre 5.

4.2 Séries à termes positifs

Le cas des séries dont le terme général est toujours positif est le plus simple à étudier, en raison de l'observation suivante : la suite des sommes partielles est croissante, et donc elle converge si et seulement si elle est majorée, voir la proposition 2.16. On peut donc aisément établir des critères de comparaison pour les séries à termes positifs, de façon similaire à ce qui a été fait pour les intégrales généralisées de fonctions positives, voir les propositions 3.12 et 3.14.

4.2.1 Critères de comparaison

Pour les séries, le critère de comparaison de la proposition 3.12 prend la forme suivante.

Proposition 4.4 (Critère de comparaison). Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. Si on a $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout entier n assez grand, alors :

- la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$;
- la divergence de $\sum u_n$ implique celle de $\sum v_n$.

Démonstration. Il suffit de prouver le premier point, car le second s'en déduit par contraposition. Supposons que $\sum v_n$ converge. On note $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Pour $N \geq n_0$, on a

$$\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^N u_n, \quad (4.3)$$

et de même pour la série de terme général v_n . La convergence des séries partant du rang 0 est donc équivalente à celle des séries partant du rang n_0 . Comme $0 \leq u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$, on peut écrire que

$$\sum_{n=n_0}^N u_n \leq \sum_{n=n_0}^N v_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n.$$

Les sommes du membre de gauche constituent une suite (indiquée par N) croissante et majorée, et donc convergente d'après la proposition 2.16. Finalement, la série $\sum u_n$ est convergente. $\square$

Exercice 4.5. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{4+\sin n}{5^{n+1}}$.

Solution. Comme le sinus est borné par 1, on a $0 \leq \frac{4+\sin n}{5^{n+1}} \leq 5^{-n}$ pour tout n . La série $\sum 5^{-n}$ est une série convergente, puisque c'est une série géométrique de raison 5^{-1} , dont le module est strictement inférieur à 1. Finalement, la proposition 4.4 implique la convergence de la série $\sum \frac{4+\sin n}{5^{n+1}}$. $\square$

Exercice 4.6 (Série de Riemann). Étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^s}$, pour $s \leq 1$ et $s \geq 2$.

Solution. Pour tous nombres réels s et s' vérifiant $s \leq s'$, on a $1/n^s \geq 1/n^{s'}$ pour tout entier $n \geq 1$. On sait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, d'après l'exercice 4.2. La proposition 4.4 implique donc que la série $\sum \frac{1}{n^s}$ diverge pour $s \leq 1$.

De plus, pour tout entier $n \geq 2$, on observe que $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. La série de terme général le membre de droite est une série télescopique convergente, puisque

$$\sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

La proposition 4.4 permet de conclure que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, et ensuite que la série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge pour $s \geq 2$. Il y a en fait convergence pour tout $s > 1$, voir la proposition 4.7. $\square$

La proposition 4.4 est d'autant plus utile que l'on dispose de séries de référence simples avec lesquelles comparer les séries à étudier. Parmi ces séries de référence, on distingue les séries géométriques, ainsi que les séries de Riemann. On peut aussi comparer avec des séries télescopiques dont on maîtrise le comportement. On peut déduire de la proposition 4.4 un critère de comparaison asymptotique pour les séries à termes positifs, analogue au critère de comparaison pour les intégrales généralisées donné par la proposition 3.14.

Proposition 4.5 (Critère de comparaison asymptotique). Soient deux suites (u_n) et (v_n) de réels positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in]0, +\infty[$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell$. Alors, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature : la

convergence de l'une est équivalente à la convergence de l'autre.

Démonstration. Comme $u_n/v_n \rightarrow \ell$ quand $n \rightarrow +\infty$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq \frac{\ell}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3\ell}{2} v_n.$$

On peut alors conclure en faisant appel à la proposition 4.4. $\square$

L'hypothèse du résultat précédent peut également se présenter sous la forme $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell v_n$. Ainsi, pour $\ell = 1$, on voit que si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 4.7. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{e^n + 2^n}{\pi^n + 3^n}$.

Solution. La série de terme général $u_n = \frac{e^n + 2^n}{\pi^n + 3^n}$ est convergente. En effet, le numérateur et le dénominateur sont respectivement équivalents à e^n et π^n quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi, $u_n \sim (e/\pi)^n$. Cependant, la série de terme général $(e/\pi)^n$ est une série convergente, puisque c'est une série géométrique de raison e/π , dont le module est strictement inférieur à 1. On conclut en faisant appel à la proposition 4.5. $\square$

4.2.2 Critère intégral

Lorsque le terme général d'une série numérique est donné explicitement par une fonction f , on peut relier la convergence de la série avec celle de l'intégrale généralisée au voisinage de l'infini de la fonction f . On peut alors tirer parti des méthodes présentées au chapitre 3 au sujet des intégrales.

Proposition 4.6 (Comparaison série-intégrale). Soit un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, et soit une fonction f continue, décroissante et positive sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$. Alors, la série numérique $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature, c'est-à-dire que la convergence de l'une est équivalente à la convergence de l'autre. S'il y a convergence, on a de plus

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n).$$

Démonstration. Pour tout entier $n \geq n_0$, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[n, n+1]$, de sorte que $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ pour tout x de cet intervalle. L'encadrement (3.1) donne donc

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n).$$

On somme alors les encadrements ainsi obtenus en faisant prendre à n les valeurs entières de n_0 jusqu'à un entier N fixé, voir la figure 4.1. Ce faisant, puis utilisant la relation de Chasles dans le membre central et un décalage d'indice de sommation dans le membre de gauche, on obtient

$$\sum_{n=n_0+1}^{N+1} f(n) \leq \int_{n_0}^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^N f(n). \quad (4.4)$$

Si la série converge, l'encadrement ci-dessus et la positivité de f impliquent que pour tout $X \geq n_0$,

$$\int_{n_0}^X f(x) dx \leq \int_{n_0}^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=n_0}^N f(n) \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n),$$

où N désigne un entier supérieur à X . La fonction qui à X associe le membre de gauche est donc majorée par la somme totale de droite. Cette fonction est en outre croissante, puisque sa dérivée f est positive. On en déduit que la fonction admet une limite finie quand $X \rightarrow +\infty$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale généralisée.

Réciproquement, si l'intégrale généralisée converge, les sommes partielles $\sum_{n=n_0}^N f(n)$ sont majorées par $f(n_0) + \int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx$, et comme elles constituent une suite croissante, par positivité de f , elles admettent une limite finie quand $N \rightarrow +\infty$, ce qui prouve la convergence de la série.

L'encadrement final entre la somme de la série et l'intégrale généralisée s'obtient pour $N \rightarrow +\infty$ dans (4.4). $\square$

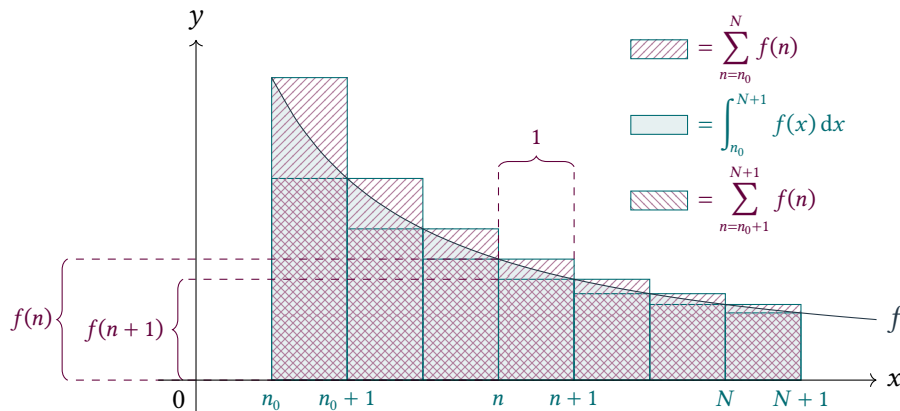


FIGURE 4.1 : Comparaison série-intégrale

La proposition 4.6 permet de déduire la condition de convergence des séries de Riemann de celle des intégrales de Riemann. À l'aide de la proposition 3.13, on a donc le résultat suivant.

Proposition 4.7 (Série de Riemann). Soit $s \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge si et seulement si $s > 1$. S'il y a convergence, on a

$$\frac{1}{s-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq \frac{s}{s-1}.$$

Cette série est appelée série de Riemann de paramètre s .

Démonstration. On sait que la série diverge grossièrement quand $s \leq 0$. Supposons donc $s > 0$. Dans ce cas, la fonction définie par $f_s(x) = 1/x^s$ est continue, décroissante et positive sur l'intervalle $[1, +\infty[$. La proposition 4.6 montre alors que la série de Riemann de paramètre s , à savoir la série $\sum f_s(n)$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} f_s(x) dx$, qui converge si et seulement si $s > 1$, d'après la proposition 3.13. Enfin, l'encadrement sur la somme de la série découle du calcul

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1},$$

combiné à l'encadrement (4.4). $\square$

La fonction définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ pour tout réel $s > 1$ est la fonction zêta de Riemann. La proposition 4.7 donne

$$\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}.$$

On sait donc à quelle allure $\zeta(s)$ tend vers l'infini quand s tend vers 1. Le cas limite $s = 1$ correspond à la divergence de la série harmonique déjà présentée en (2.2). La fonction ζ est un exemple qui s'inscrit dans la théorie des séries de fonctions, abordée dans le chapitre 5.

4.2.3 Critères de Cauchy et de D'Alembert

Ces critères de convergence résultent de la comparaison du terme général d'une série à termes positifs avec une série géométrique dont elle est proche. Ils reposent sur l'observation que, pour une suite géométrique de terme

général $u_n = q^n$, avec $q > 0$, les quantités $(u_n)^{1/n}$ et u_{n+1}/u_n sont constantes et égales à q . Il est donc envisageable de discuter de la convergence de la série $\sum u_n$ si ces quantités, sans forcément être égales à q , sont proches de q , puisque dans ce cas, la série $\sum u_n$ peut se comparer avec la série géométrique $\sum q^n$.

Proposition 4.8 (Critère de Cauchy). Soit une suite (u_n) de réels positifs. On suppose que cette suite vérifie

$$(u_n)^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell,$$

avec une limite ℓ finie ou infinie. Alors, la série $\sum u_n$ converge si $\ell < 1$, et diverge si $\ell > 1$. On ne peut pas conclure en général quand $\ell = 1$.

Démonstration. Remarquons que, comme $(u_n)^{1/n} \geq 0$ pour tout n , si la limite ℓ est finie, elle est forcément positive. De plus, le cas où la limite ℓ est infinie s'inscrit dans la situation où $\ell > 1$.

Supposons $\ell < 1$, et considérons un réel $q \in]\ell, 1[$. Comme le terme $(u_n)^{1/n}$ converge vers ℓ , on a $(u_n)^{1/n} \leq q$ pour n assez grand. Ainsi, on a $0 \leq u_n \leq q^n$. Comme la série $\sum q^n$ est une série géométrique convergente, la proposition 4.4 implique que la série $\sum u_n$ converge également.

Supposons $\ell > 1$, ce qui inclut le cas où $\ell = +\infty$, et considérons un nombre réel $q \in]1, \ell[$. Comme le terme $(u_n)^{1/n}$ tend vers ℓ , on a $(u_n)^{1/n} \geq q$ pour n assez grand. Ainsi, on a $u_n \geq q^n$. Comme $\sum q^n$ est une série géométrique divergente, la proposition 4.4 implique que $\sum u_n$ diverge aussi.

Enfin, en posant $u_n = 1/n^2$ et $v_n = 1/n$, on observe que les termes $(u_n)^{1/n}$ et $(v_n)^{1/n}$ tendent tous deux vers 1 quand n tend vers l'infini. Cependant, la proposition 4.7 sur la convergence des séries de Riemann montre que la série $\sum u_n$ converge, tandis que la série $\sum v_n$ diverge. Le critère ne permet donc pas de conclure quand $\ell = 1$. $\square$

Exercice 4.8. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$, pour un réel $a \geq 0$.

Solution. On pose $u_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$. On observe que $(u_n)^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ converge vers a . La proposition 4.8 montre donc que la série $\sum u_n$ converge quand $a < 1$, et diverge quand $a > 1$. Pour traiter le cas $a = 1$, laissé ouvert par la proposition 4.8, on écrit qu'alors

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n \left(\frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right),$$

ce qui montre que la suite $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$. La série $\sum u_n$ diverge donc grossièrement quand $a = 1$. $\square$

Proposition 4.9 (Critère de D'Alembert). Soit une suite (u_n) de réels positifs. On suppose que cette suite est non nulle à partir d'un certain rang et vérifie

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell,$$

avec une limite ℓ finie ou infinie. Alors, la série $\sum u_n$ converge si $\ell < 1$, et diverge si $\ell > 1$. On ne peut pas conclure en général quand $\ell = 1$.

Démonstration. Observons que, comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 0$ pour tout n , si la limite ℓ est finie, elle est forcément positive. De plus, le cas où $\ell = +\infty$ relève de la situation où $\ell > 1$.

Supposons $\ell < 1$, et considérons un réel $q \in]\ell, 1[$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q.$$

On en déduit à l'aide d'une récurrence élémentaire que

$$\forall n \geq n_0 \quad 0 \leq u_n \leq \frac{u_{n_0}}{q^{n-n_0}} q^n.$$

Comme la série $\sum q^n$ est une série géométrique convergente, la série dont le terme général est le membre de droite est aussi convergente, et la proposition 4.4 implique que $\sum u_n$ converge également.

Supposons $\ell > 1$, ce qui inclut le cas $\ell = +\infty$, et prenons $q \in]1, \ell[$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq q.$$

On en déduit à l'aide d'une récurrence élémentaire que

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq \frac{u_{n_0}}{q^{n-n_0}} q^n.$$

Comme la série $\sum q^n$ est une série géométrique divergente, la série dont le terme général est le membre de droite est aussi divergente, et la proposition 4.4 implique que la série $\sum u_n$ diverge aussi.

Enfin, en posant $u_n = 1/n^2$ et $v_n = 1/n$, on observe que les quotients $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tendent tous deux vers 1 quand n tend vers l'infini. Cependant, la proposition 4.7 sur la convergence des séries de Riemann montre que la série $\sum u_n$ converge, tandis que la série $\sum v_n$ diverge. Le critère ne permet donc pas de conclure quand $\ell = 1$. $\square$

Exercice 4.9 (Série exponentielle). Montrer que la série $\sum \frac{r^n}{n!}$ converge pour tout réel $r > 0$, où $n!$ désigne la factorielle de l'entier $n \geq 0$, voir la proposition 1.11 pour un rappel de la définition. Cette série s'appelle la *série exponentielle*, et on peut montrer que sa somme coïncide avec la fonction exponentielle :

$$\exp(r) = e^r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!}.$$

Solution. Pour tout réel $r > 0$, on observe que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{r^n} = \frac{r}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La proposition 4.9 implique donc que la série $\sum u_n$ converge, quelle que soit la valeur du paramètre $r > 0$. Vue comme une fonction de la variable r , il s'agit d'un exemple de série entière. Pour plus de détails, on renvoie au chapitre 5, et en particulier aux exemples illustrant la proposition 5.19. $\square$

4.3 D'autres séries réelles

L'étude de la convergence des séries à termes positifs recouvre en fait celle des séries dont le terme général change de signe un nombre fini de fois. En effet, pour une telle série, il existe un entier n_0 tel que les termes à partir du rang n_0 sont soit tous positifs, soit tous négatifs. D'après (4.3), la convergence ou la divergence de la série ne dépend pas de la valeur des termes avant le rang n_0 . On peut donc supposer que tous les termes avant le rang n_0 sont nuls sans changer la convergence ou la divergence de la série. Ainsi, on se ramène à une série dont tous les termes sont positifs, ou dont tous les termes sont négatifs. Le premier cas a été étudié précédemment, et le second s'en déduit en considérant les termes opposés.

Il reste à considérer, parmi le cas réel, les séries dont le terme général change de signe infiniment souvent. Cette situation peut être compliquée, et nous nous contenterons de situations particulières où la question de la convergence peut être résolue : le cas des séries *absolument convergentes*, qui permet de se ramener à des séries à termes positifs, et le cas des séries *alternées*, dont les termes changent de signe d'un rang au suivant.

4.3.1 Convergence absolue

Définition 4.2 (Convergence absolue). Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}$. On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Exercice 4.10 (Convergence absolue de la série de Riemann alternée). Soit $s \in \mathbb{R}$. Montrer que la *série de Riemann alternée* $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ converge absolument si et seulement si $s > 1$.

Solution. La série de terme général $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \right| = \frac{1}{n^s}$ est une série de Riemann, qui converge si et seulement si $s > 1$, comme indiqué par la proposition 4.7. $\square$

La convergence absolue des séries numériques implique leur convergence, comme pour les intégrales généralisées, voir la proposition 3.15. L'intérêt de la notion est que l'on se ramène en prenant la valeur absolue à l'étude d'une série à termes positifs, pour laquelle on dispose des critères de comparaison, de Cauchy et de D'Alembert vus précédemment.

Proposition 4.10 (Convergence absolue implique convergence). *Toute série de nombres réels absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de nombres réels. On suppose que $\sum u_n$ est absolument convergente. Les sommes partielles, définies par (4.1) vérifient pour tous entiers M et N tels que $0 \leq M < N$,

$$|S_N - S_M| = \left| \sum_{n=M+1}^N u_n \right| \leq \sum_{n=M+1}^N |u_n| \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |u_n|.$$

Comme la série $\sum |u_n|$ est convergente, le membre de droite peut être rendu inférieur à tout réel $\varepsilon > 0$, quitte à supposer M suffisamment grand. Cela signifie que la suite (S_N) vérifie le critère de Cauchy. Ainsi, d'après la proposition 2.17, la suite (S_N) converge, donc la série $\sum u_n$ converge. $\square$

Certaines séries convergentes ne sont pas absolument convergentes. On les appelle *semi-convergentes*. C'est le cas de la *série harmonique alternée* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Elle ne converge pas absolument car la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Le fait qu'elle converge est une conséquence des résultats de la proposition 4.11 ci-dessous.

4.3.2 Séries alternées

Une série alternée est une série dont le terme général change de signe d'un rang au suivant.

Définition 4.3 (Série alternée). Soit (u_n) une suite de réels. On dit que la série $\sum u_n$ est une série *alternée* s'il existe un signe $\sigma \in \{-1, 1\}$ et une suite (a_n) de réels positifs tels que $u_n = \sigma(-1)^n a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette définition autorise des termes nuls; la seule condition $u_n u_{n+1} \leq 0$ ne suffit pas lorsque de tels termes sont présents.

Une série $\sum u_n$ est alternée si et seulement s'il existe une suite (a_n) de réels *positifs* telle que soit $u_n = (-1)^n a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans les deux cas, on a $a_n = |u_n|$. Il suffit d'étudier les séries alternées dont le terme général est de la forme $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n \geq 0$. L'autre cas s'en déduit en prenant l'opposé.

On forme bien sûr un exemple de série alternée en considérant n'importe quelle suite (a_n) de réels positifs, puis en posant $u_n = (-1)^n a_n$. Cependant, le fait qu'une série soit alternée peut parfois ne pas sauter aux yeux, comme le montre l'exemple de la série $\sum \cos(n\pi)/n^2$.

Pour qu'une série alternée de la forme $\sum (-1)^n a_n$ soit convergente, il est nécessaire que la suite (a_n) converge vers 0. Sinon, la série divergerait grossièrement, comme le montre la proposition 4.1. Le résultat suivant, dû à Leibniz, montre que cette condition est aussi suffisante, à condition que la suite (a_n) soit décroissante. S'il y a convergence de la série, on dispose aussi d'une majoration de son reste.

Proposition 4.11 (Critère des séries alternées de Leibniz). *Soit (a_n) une suite de réels positifs. On suppose que cette suite est décroissante et converge vers 0. Alors :*

- (i). *la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ est convergente;*
- (ii). *pour tout $N \in \mathbb{N}$, le N -ième reste de cette série, défini par (4.2), vérifie $|R_N| \leq a_{N+1}$.*

Démonstration. Notons (S_N) la suite des sommes partielles de la série de terme général $(-1)^n a_n$. La suite (a_n) est décroissante et positive, donc

$$S_{2N} = S_{2N-2} + \underbrace{a_{2N} - a_{2N-1}}_{\leq 0} \quad \text{et} \quad S_{2N+1} = \overbrace{S_{2N-1} + a_{2N}}^{=S_{2N}} - \underbrace{a_{2N+1}}_{\geq 0}$$

pour tout entier $N \geq 1$, ce qui conduit aux inégalités

$$S_{2N-1} \leq S_{2N+1} \leq S_{2N} \leq S_{2N-2}.$$

En particulier, la suite (S_{2N}) est décroissante et minorée par S_1 , et la suite (S_{2N+1}) est croissante et majorée par S_0 . En vertu de la proposition 2.16, ces deux suites convergent. Cependant, leur différence $S_{2N+1} - S_{2N}$ vaut $-a_{2N+1}$, et converge donc vers 0. On en déduit que les deux suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) , qui correspondent respectivement aux termes d'indices pairs, et aux termes d'indices impairs de la suite (S_N) , convergent toutes les deux vers la même limite. Ainsi, la suite (S_N) est convergente, c'est-à-dire que la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

Notons S la somme de la série. On vient donc de montrer que la suite (S_{2N}) décroît vers S , et la suite (S_{2N+1}) croît vers S . Cela implique que $S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N}$ pour tout entier $N \geq 0$, et donc que

$$|R_{2N}| = \underbrace{|S - S_{2N}|}_{\leq 0} = S_{2N} - S = a_{2N+1} + \underbrace{S_{2N+1} - S}_{\leq 0} \leq a_{2N+1}.$$

Voir la figure 4.2. De même, on a aussi $S_{2N+1} \leq S \leq S_{2N+2}$, et donc

$$|R_{2N+1}| = \underbrace{|S - S_{2N+1}|}_{\geq 0} = S - S_{2N+1} = \underbrace{S - S_{2N+2}}_{\leq 0} + a_{2N+2} \leq a_{2N+2}.$$

En regroupant ces deux cas, on en déduit la majoration du reste. □

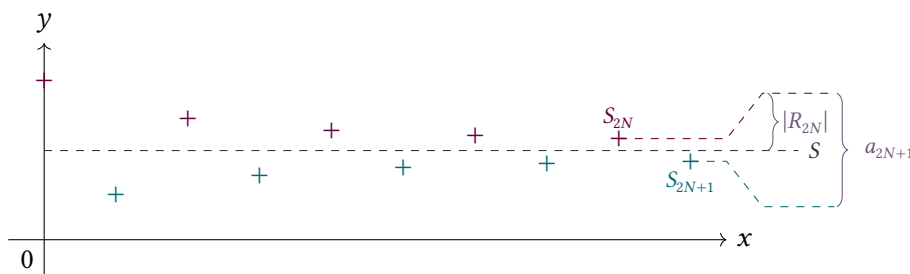


FIGURE 4.2 : Critère des séries alternées

Le critère des séries alternées peut s'appliquer aux séries définies pour $n \geq n_0$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. En effet, si une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante et converge vers 0, il en va de même de la suite $(a_{n_0+n})_{n \geq 0}$. Le critère des séries alternées montre alors que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_{n_0+n}$ converge, ce qui par un simple changement d'indice équivaut au fait que la série $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n a_n$ converge.

Exercice 4.11 (Convergence de la série de Riemann alternée). Étudier la convergence et la convergence absolue de la série de Riemann alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$, pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Solution. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a vu à l'exercice 4.10 que la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ est absolument convergente si et seulement si $s > 1$. Elle est donc convergente dès que $s > 1$, d'après la proposition 4.10. De plus, elle diverge grossièrement quand $s \leq 0$, car on a alors $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \right| \geq 1$ pour $n \geq 1$. Enfin, quand $s > 0$, en prenant l'opposé de chaque terme, on obtient la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^s}$, qui vérifie les hypothèses de la proposition 4.11, et qui donc est convergente. La série de départ converge donc également. Au final, on a prouvé que la série de Riemann alternée, de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$, est convergente si et seulement si $s > 0$, et absolument convergente si et seulement si $s > 1$. □

Exercice 4.12. Montrer que $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est une série alternée convergente qui n'entre pas dans le cadre de la proposition 4.11.

Solution. Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ pour $n \geq 2$. La série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est bien une série alternée, puisque $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n = \frac{1}{n+(-1)^n} \geq 0$. On observe que la suite (a_n) n'est pas décroissante, car $a_{2n} < a_{2n+1}$ pour tout entier $n \geq 1$. La série $\sum_{n \geq 2} u_n$ ne vérifie donc pas les hypothèses de la proposition 4.11.

Montrons que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est convergente. D'une part, les sommes partielles jusqu'à un rang impair vérifient

$$\sum_{n=2}^{2N+1} u_n = \sum_{n=1}^N (u_{2n} + u_{2n+1}) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \right) = - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

Cette dernière somme converge quand N tend vers l'infini, d'après les propositions 4.4 et 4.7, car le terme général vérifie $0 \leq \frac{1}{2n(2n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$. D'où

$$\sum_{n=2}^{2N+1} u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ell = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

D'autre part, les sommes partielles jusqu'à un rang pair vérifient aussi

$$\sum_{n=2}^{2N} u_n = -u_{2N+1} + \sum_{n=2}^{2N+1} u_n = \frac{1}{2N} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n(2n+1)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ell.$$

On en déduit bien que la série $\sum u_n$ converge et a pour somme la valeur ℓ . □

On remarque, suite à cet exercice, que si une série alternée $\sum u_n$ convergente ne vérifie pas les hypothèses de la proposition 4.11, c'est nécessairement parce que la suite $(|u_n|)$ n'est pas décroissante. En effet, la convergence de la série implique que $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'après la proposition 4.1.

4.4 Séries complexes

Les chapitres 5 et 6 conduisent à considérer de nombreuses séries dont le terme général est à valeurs complexes. Il est donc utile de mentionner certains résultats à leur sujet.

Considérons une suite (c_n) de nombres complexes. Il existe deux suites (a_n) et (b_n) de nombres réels tels que $c_n = a_n + ib_n$ pour tout entier n . On a évidemment $a_n = \Re c_n$ et $b_n = \Im c_n$, respectivement les parties réelle et imaginaire. Les sommes partielles des séries associées vérifient

$$\sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N a_n + i \sum_{n=0}^N b_n.$$

Ainsi, la série complexe $\sum c_n$ converge si et seulement si les deux séries réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent. Dans ce cas, les sommes des séries vérifient

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

De plus, la série complexe $\sum c_n$ est dite *absolument convergente* si la série (à termes positifs) des modules $\sum |c_n|$ est convergente. On a alors l'analogie suivant de la proposition 4.10.

Proposition 4.12 (Convergence absolue implique convergence). *Toute série de nombres complexes absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Sachant qu'un nombre complexe s'écrivant $c = a + ib$, avec a et b réels, vérifie $|c| \leq |a| + |b|$ ainsi que $|a| \leq |c|$ et $|b| \leq |c|$, la série des modules $\sum |c_n|$ est convergente si et seulement si les deux séries des valeurs absolues $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ sont convergentes. Finalement, la série complexe $\sum c_n$ est absolument convergente si et seulement si les deux séries réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes aussi. Dans ce cas, la proposition 4.10 implique que les deux séries réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes, et on en conclut que la série complexe $\sum c_n$ est convergente. □

La réciproque n'étant déjà pas vraie dans le cas des séries réelles (puisqu'il existe des séries semi-convergentes), elle n'est *a fortiori* pas vraie dans le cas des séries complexes.

Exercice 4.13 (Séries exponentielle, cosinus et sinus). Montrer que, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. Comme vu précédemment dans le cas réel, on l'appelle la *série exponentielle* et sa somme est notée

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

La série exponentielle est abordée plus en détails dans le chapitre 5. En déduire une expression en somme de série pour chacune des quantités définies par

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

Solution. On a clairement $\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!}$. Pour $z = 0$, le résultat est trivial car tous les termes de la série sont nuls, sauf le premier qui vaut 1. Sinon, on a $r = |z| > 0$ et on a vu par une application directe du critère de D'Alembert que la série de terme général $r^n/n!$ converge. La série de terme général complexe $z^n/n!$ est donc bien absolument convergente, et ainsi en particulier convergente. De plus,

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (i^n + (-i)^n) \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

La dernière égalité vient du fait que $i^{2k} + (-i)^{2k} = 2(-1)^k$ et $i^{2k+1} + (-i)^{2k+1} = 0$. De même,

$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (i^n - (-i)^n) \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

où la dernière égalité vient du fait que $i^{2k+1} - (-i)^{2k+1} = 2i(-1)^k$ et $i^{2k} - (-i)^{2k} = 0$. $\square$

On peut aussi noter e^z au lieu de $\exp(z)$ pour la somme de la série exponentielle au point $z \in \mathbb{C}$. Cependant, cette notation suggère que la fonction exponentielle vérifie la règle de calcul $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Cette propriété est vérifiée, mais sa démonstration nécessite le produit de Cauchy des séries, qui sera abordé dans la proposition 5.12. Ce point sera détaillé dans la section 5.2.7.

Exercice 4.14 (Série géométrique). Montrer que, pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum z^n$ est absolument convergente si et seulement si $|z| < 1$.

Solution. Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ est absolument convergente si et seulement si $|z| < 1$, car c'est la série géométrique de raison z . De plus, cette série diverge grossièrement quand $|z| \geq 1$. Tout cela sera détaillé dans le chapitre 5. $\square$

Séries de fonctions et séries entières

5.1 Suites et séries de fonctions

Nous nous intéressons désormais à des suites et des séries dont le terme général n'est plus un simple nombre u_n mais une fonction numérique f_n d'une variable réelle ou même complexe. Un point de vue naïf, déjà adopté dans les chapitres précédents, consiste à fixer x dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et considérer la suite ou la série de terme général $f_n(x)$ comme une suite ou une série numérique dépendant d'un paramètre x . On peut donc alors étudier les propriétés de convergence de la suite ou de la série obtenue en fonction du paramètre réel ou complexe x .

Cependant, si les fonctions f_n vérifient des propriétés particulières telles que la continuité ou la dérivabilité, il est naturel de s'intéresser à la persistance de ces propriétés par passage à la limite dans une suite de fonctions, ou par passage à la somme totale dans une série de fonctions. On s'intéresse donc aux diverses propriétés fonctionnelles des suites et séries de fonctions. Pour cela, le point de vue naïf évoqué ci-dessus n'est souvent pas satisfaisant, et il est nécessaire d'introduire des notions de convergence pour les suites ou séries de fonctions qui sont plus délicates que dans le cas des suites et séries numériques. Pour illustrer cette subtilité, nous commençons par étudier un exemple simple de suite de fonctions.

5.1.1 La suite de fonctions $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^n. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une *suite de fonctions* (f_n) , dont on étudie principalement les propriétés de convergence, c'est-à-dire l'existence et la détermination d'une *fonction limite* associée. L'idée naïve consiste à regarder la limite de chacune des suites $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, avec $x \in \mathbb{R}$ fixé. On dit qu'on s'intéresse à la limite *simple* de la suite de fonctions. Il s'agit alors d'étudier la limite d'une suite numérique, à savoir ici la suite géométrique de raison x et de terme initial 1. On sait que cette suite est divergente si $|x| > 1$ ou $x = -1$, qu'elle converge vers 0 si $|x| < 1$, et qu'elle est constante égale à 1 si $x = 1$. On considère alors la fonction

$$\begin{aligned} f :]-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0 \quad \text{si } |x| < 1 \\ 1 &\longmapsto 1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

On a donc montré que la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la valeur $f(x)$ pour tout x dans $] -1, 1]$, et diverge pour x en dehors de cet intervalle.

La fonction limite f n'est pas définie pour toutes les valeurs de l'ensemble de départ $\mathbb{R}$. En outre, f n'est pas continue sur $] -1, 1]$, alors que toutes les fonctions f_n le sont. On observe donc ici une perte de continuité en passant à la limite. Ce phénomène pointe un des inconvénients de la notion de limite simple. Voir la figure 5.1.

5.1.2 Notions de convergence

Formalisons la notion de limite simple vue dans l'exemple.

Définition 5.1 (Convergence simple). On considère une suite (f_n) de fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$.

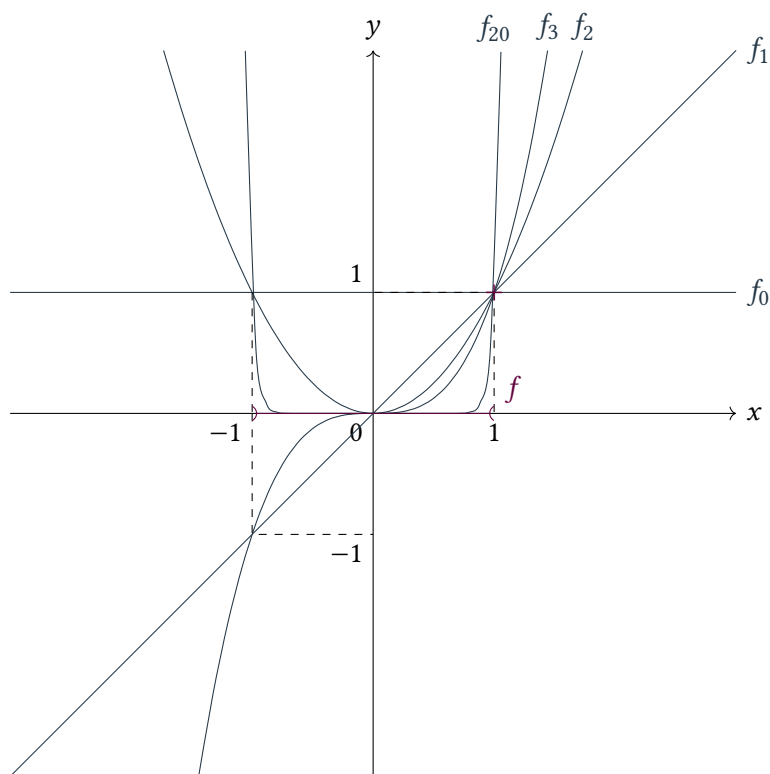


FIGURE 5.1 : Graphes des fonctions $f_n(x) = x^n$ et de la fonction limite f

- Soit $x_0 \in I$. On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge simplement* au point x_0 si la suite numérique $(f_n(x_0))$ est convergente.
- On dit que la suite de fonctions (f_n) *converge simplement* sur I si elle converge simplement en tout point de I . La *limite simple* de la suite (f_n) est alors la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Comme observé dans l'exemple, la notion de convergence simple ne garantit pas que la continuité est préservée en passant à la limite. On considère alors une autre notion de convergence, plus contraignante à vérifier, mais qui dispose de meilleures propriétés vis-à-vis de la régularité des fonctions.

Définition 5.2 (Convergence uniforme). On considère une suite (f_n) de fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, ainsi qu'une fonction f définie sur I . On dit que la suite (f_n) *converge uniformément* sur I vers f s'il existe une suite réelle (u_n) telle que :

- (i). pour tout entier n assez grand et tout réel $x \in I$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq u_n$;
- (ii). la suite numérique (u_n) converge vers 0.

La fonction f est alors appelée *limite uniforme* de la suite de fonctions (f_n) .

Il ressort de la définition que la convergence uniforme sur un intervalle implique la convergence simple sur ce même intervalle. Cependant, il existe des suites de fonctions qui convergent simplement sur un intervalle sans que la convergence soit uniforme sur tout l'intervalle.

Exercice 5.1. Montrer que la suite de fonctions donnée par $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur l'intervalle $]-1, 1]$ vers la fonction f donnée par (5.1). Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[-a, a]$, avec $0 < a < 1$. Montrer qu'il ne peut y avoir convergence uniforme sur un intervalle de la forme $]a, 1[$ ou de la forme $]-1, -a[$, avec $0 < a < 1$, donc il n'y a pas convergence uniforme sur tout l'intervalle $]-1, 1]$.

Solution. Voir la section 5.1.1 pour la convergence simple. Pour $0 < a < 1$ et $x \in [-a, a]$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = |x - 0|^n \leq a^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur l'intervalle $[-a, a]$. Cependant, le point $1 - 1/n$ appartient à n'importe quel intervalle de la forme $]a, 1[$, avec $0 < a < 1$, dès que n est assez grand, de sorte que

$$\left| f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} > 0.$$

Il n'y a pas convergence uniforme sur l'intervalle $]a, 1[$, puisque cette limite est non nulle. De même, pour n assez grand, le point $-1 + 1/n$ appartient à n'importe quel intervalle de la forme $] -1, -a[$, de sorte que

$$\left| f_n\left(-1 + \frac{1}{n}\right) - f\left(-1 + \frac{1}{n}\right) \right| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} > 0.$$

Il n'y a donc pas convergence uniforme non plus sur $] -1, -a[$. Enfin, il n'y a pas convergence uniforme sur $] -1, 1[$, puisque la convergence uniforme sur un intervalle implique la convergence uniforme sur tout sous-intervalle. $\square$

Exercice 5.2. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions définie par $f_n(x) = n^a x e^{-nx}$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, en fonction du réel $a \geq 0$.

Solution. Pour étudier la convergence simple, fixons un réel $x \in \mathbb{R}$. Alors, la suite numérique $(f_n(x))$ diverge vers $-\infty$ quand $x < 0$, est constante égale à 0 quand $x = 0$, et converge vers 0 quand $x > 0$, par croissance comparée entre les fonctions puissances et exponentielles. On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$, et diverge ailleurs.

Pour étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$, on observe que la fonction définie par $g(y) = y e^{-y}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^+$ et tend vers zéro à l'infini, donc elle est majorée par une constante M . Ainsi, pour tout $x \geq 0$,

$$|f_n(x) - 0| = n^a x e^{-nx} = n^{a-1} g(nx) \leq M n^{a-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui prouve que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ quand $a < 1$. En revanche, quand $a \geq 1$, on observe que $|f_n(1/n) - 0| = e^{-1} n^{a-1}$ ne tend pas vers zéro quand $n \rightarrow +\infty$, et il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Cependant, on peut montrer qu'il y a convergence uniforme sur tous les intervalles $[x_0, +\infty[$, pour $x_0 > 0$. Voir la figure 5.2. $\square$

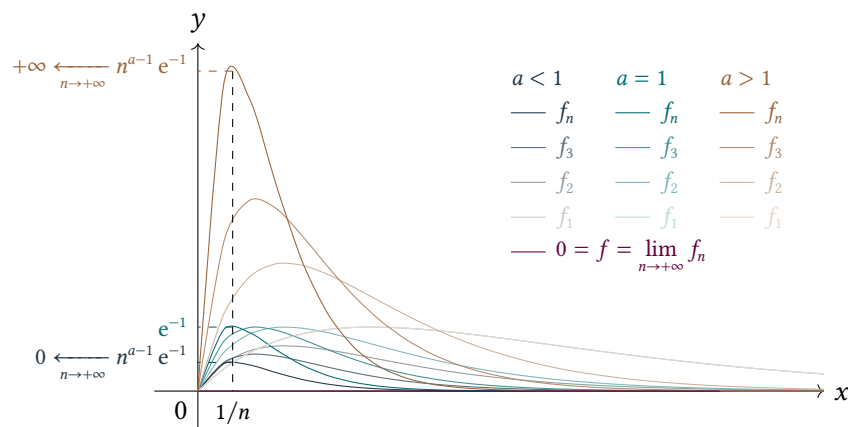


FIGURE 5.2 : Graphes des fonctions $f_n(x) = n^a x e^{-nx}$ et de la fonction limite $f = 0$

Intéressons-nous maintenant aux propriétés de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité de la fonction limite d'une suite de fonctions. La convergence simple ne suffit pas en général à préserver ces propriétés par passage à la limite. La bonne notion pour cela est la convergence uniforme.

Proposition 5.1 (Continuité de la limite uniforme). Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I . On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction notée f . Alors, la fonction f est continue sur I .

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout entier n et tout réel $x \in I$, l'inégalité triangulaire donne

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Comme la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f , il existe un entier n_0 tel que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$ pour tout réel $x \in I$ et tout entier $n \geq n_0$. On en déduit que pour tout $x \in I$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \frac{2}{3} \varepsilon.$$

De plus, comme la fonction f_{n_0} est continue sur I , il existe un réel $\delta > 0$ tel que $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \varepsilon/3$ pour tout réel $x \in I$ vérifiant $|x - x_0| \leq \delta$. Pour un tel réel x , on a finalement $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Cela implique que la fonction f est continue en tout point x_0 de l'intervalle I . $\square$

La proposition suivante concerne les intégrales de limites uniformes de suites de fonctions. Sa preuve est omise.

Proposition 5.2 (Intégrale de la limite uniforme). Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction notée f . Alors, f est continue sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Point de vigilance. La proposition 5.2 n'est plus valable en général si on remplace le segment d'intégration par un intervalle quelconque. Par exemple, pour tout entier $n \geq 1$, considérons la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \max\{0, \min\{x, 2n - x\}\} = \begin{cases} \frac{x}{n^2} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ \frac{2n-x}{n^2} & \text{si } n < x \leq 2n \\ 0 & \text{si } x > 2n. \end{cases}$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$, puisque pour tout $x \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq 1/n$. Cependant, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^n \frac{x}{n^2} dx + \int_n^{2n} \frac{2n-x}{n^2} dx = \int_0^n \frac{x}{n^2} dx + \int_0^n \frac{y}{n^2} dy = 2 \left[\frac{x^2}{2n^2} \right]_0^n = 1,$$

alors que l'intégrale de la fonction f est égale à zéro. Il n'y a donc pas convergence de l'intégrale des fonctions f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$ vers l'intégrale de la fonction limite, malgré la convergence uniforme de la suite de fonctions. Quelques graphes des fonctions f_n sont donnés à la figure 5.3.

Enfin, le résultat suivant concerne la dérivabilité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continûment dérivables. Son hypothèse principale porte sur la convergence uniforme des dérivées. Sa preuve est aussi omise.

Proposition 5.3 (Dérivée de la limite uniforme). Soit (f_n) une suite de fonctions continûment dérivables sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. On suppose que :

- (i). il existe un point $x_0 \in [a, b]$ pour lequel la suite numérique $(f_n(x_0))$ est convergente;
- (ii). la suite (f'_n) des dérivées converge uniformément sur l'intervalle $[a, b]$ vers une fonction g .

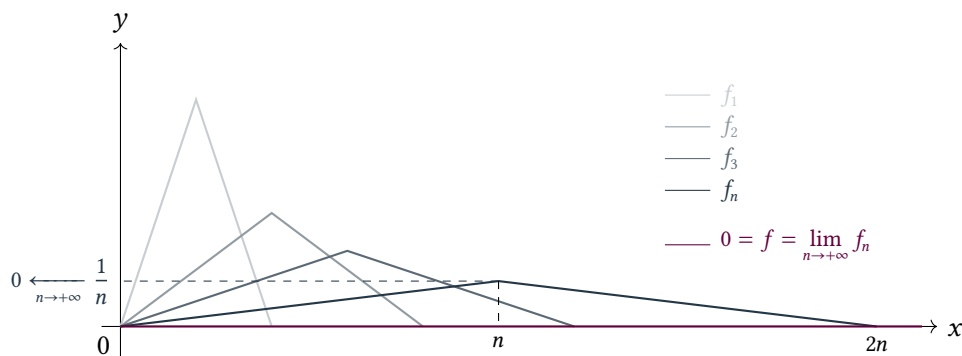


FIGURE 5.3 : Graphes des fonctions $f_n(x) = \max\{0, \min\{x, 2n - x\}\}/n^2$ et de la fonction limite $f = 0$

Alors, la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f , qui est continûment dérivable sur $[a, b]$ et dont la dérivée vérifie $f' = g$.

5.1.3 Cas des séries de fonctions

On s'intéresse à des objets de la forme $\sum f_n(x)$, où chaque f_n est une fonction à valeurs réelles ou complexes d'une variable réelle x . (On étudie parfois aussi des séries de fonctions d'une variable complexe z , voir la section 5.2.7.) Il s'agit de la somme des termes d'une suite de fonctions. On parle donc de *série de fonctions*. Comme pour les séries numériques, on leur associe la suite des *sommes partielles*, qui est la suite de fonctions (S_N) définie par

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_N(x), \quad (5.2)$$

et dont on étudie la limite. Si les fonctions f_n sont définies à partir d'un indice n_0 , on fait démarrer cette somme à l'indice $n = n_0$. Pour simplifier les énoncés, on prend comme indice initial $n_0 = 0$. On peut alors transcrire au cas des séries de fonctions les notions et propriétés de convergences simple et uniforme vues ci-dessus pour les suites.

Définition 5.3 (Convergence simple et uniforme d'une série de fonctions). Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I . On appelle *série de fonctions de terme général f_n* , et on note $\sum f_n$ (ou parfois $\sum f_n(x)$ quand il est commode de faire apparaître la variable x , ou $\sum_{n \geq n_0} f_n$ quand on veut préciser l'indice initial n_0), la suite (S_N) de fonctions définies sur I comme en (5.2). À N fixé, la fonction S_N est appelée *N-ième somme partielle* de la série.

- On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I si la suite (S_N) converge simplement sur I . La limite de la suite (S_N) est alors appelée la *somme* de la série, et on pose pour tout $x \in I$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x).$$

- On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I si (S_N) converge uniformément sur I .

Exercice 5.3 (Convergence simple et uniforme de la série géométrique). Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} x^n$, pour $x \in \mathbb{R}$, converge simplement vers $S(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $] -1, 1[$, et diverge en dehors de cet intervalle. Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[-a, a]$, avec $0 < a < 1$, mais pas sur l'intervalle $] -1, 1[$.

Solution. La convergence simple vient du fait que, pour x fixé, $\sum x^n$ est la série géométrique de raison x , voir la proposition 4.3. Pour étudier la convergence uniforme, on rappelle que l'expression des sommes partielles est, toujours d'après la proposition 4.3, donnée par $S_N(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$. D'où

$$|S_N(x) - S(x)| = \frac{|x|^{N+1}}{1-x}$$

pour $x \in]-1, 1[$. On voit que cette quantité tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 1^-$, et vers $1/2$ quand $x \rightarrow -1^+$. Il ne peut donc pas y avoir convergence uniforme sur $]-1, 1[$ tout entier. Pour s'écarter des bornes de l'intervalle, on se place sur un intervalle de la forme $[-a, a]$, avec $0 < a < 1$. On a alors, pour $|x| \leq a$,

$$|S_N(x) - S(x)| = \frac{|x|^{N+1}}{1-x} \leq \frac{a^{N+1}}{1-a} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui montre bien qu'il y a convergence uniforme sur $[-a, a]$. $\square$

En remplaçant la fonction f_n par sa valeur absolue ou son module $|f_n|$ dans la définition précédente, on obtient la notion de *convergence simple absolue* pour les séries de fonctions. On voit facilement que la convergence simple absolue entraîne la convergence simple. En effet, en fixant un réel x , on se ramène à une série numérique, et on sait pour de telles séries que la convergence absolue entraîne la convergence, d'après la proposition 4.10.

Il est souvent délicat d'établir qu'une série de fonctions qui converge simplement sur un intervalle I converge en fait uniformément. En effet, notons (S_N) la suite des sommes partielles d'une série de fonctions $\sum f_n$ qui converge simplement sur un intervalle I , et notons S la somme de cette série. En revenant à la définition 5.2, on observe que pour déterminer si la série de fonctions converge uniformément, il convient de considérer le *reste* $S - S_N$. Cependant, il arrive souvent en pratique qu'on ne puisse pas déterminer d'expression simple de la somme S de la série de fonctions, ni même d'expression plus explicite des sommes partielles S_N , ce qui rend difficile l'estimation du reste. Pour établir la convergence uniforme, il est donc plus commode de faire appel à une notion de convergence plus forte pour les séries de fonctions : la *convergence normale*. Celle-ci implique la convergence uniforme, et se démontre sans avoir besoin de connaître l'expression de la somme S . Il s'agit d'une notion de convergence propre aux séries, et qui n'a pas d'analogue pour les suites de fonctions.

Définition 5.4 (Convergence normale d'une série de fonctions). Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I . On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I s'il existe une suite réelle (u_n) telle que :

- (i). pour tout entier n et tout réel $x \in I$, on a $|f_n(x)| \leq u_n$;
- (ii). la série numérique $\sum u_n$ est convergente.

Le lien entre convergence normale et convergence uniforme repose sur une application de l'inégalité triangulaire au reste de la série de fonctions. Il est formalisé par le résultat suivant.

Proposition 5.4 (Convergence normale implique convergence uniforme). Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I . Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , alors elle converge uniformément sur I .

Démonstration. On note (u_n) une suite réelle telle que $|f_n(x)| \leq u_n$ pour tout entier n et tout réel $x \in I$, et telle que la série numérique $\sum u_n$ est convergente. On observe qu'il y a convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$. En effet, pour tout $x \in I$, on a $|f_n(x)| \leq u_n$. Comme la série $\sum u_n$ converge, on en déduit par comparaison que la série $\sum |f_n(x)|$ converge absolument, donc converge. Pour montrer la convergence uniforme, notons respectivement (S_N) et S la suite des sommes partielles et la somme totale de la série de fonctions $\sum f_n$. On a pour tout $x \in I$,

$$|S_N(x) - S(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

On a utilisé l'inégalité triangulaire, vraie pour les sommes finies, mais encore vraie par passage à la limite dans le reste de la série. Cela implique la convergence uniforme de (S_N) vers S sur I . $\square$

On résume sur la figure 5.4 les liens entre les modes de convergence d'une série de fonctions.

Exercice 5.4. Étudier les divers modes de convergence de la série de fonctions dont le terme général est défini par $f_n(x) = x^n e^{-nx}$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

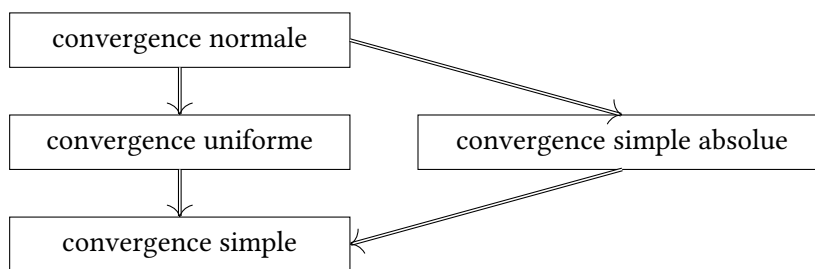


FIGURE 5.4 : Relations entre les différents modes de convergence d'une série de fonctions

Solution. Quand la variable x est fixée, on remarque que $\sum f_n(x)$ est la série géométrique de raison $f_1(x) = x e^{-x}$. La série de fonctions converge donc simplement en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que $|f_1(x)| < 1$. Cependant, la fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée donnée par $f_1'(x) = (1-x)e^{-x}$, ce qui permet de consigner ses variations dans le tableau 5.1. L'ensemble des nombres réels x tels que $|f_1(x)| < 1$ est donc l'intervalle $]a, +\infty[$, où a est l'unique solution de l'équation $f_1(a) = -1$. On peut montrer que $a \approx -0.567$. Voir la figure 5.5 pour le graphe de la fonction f_1 . La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement sur l'intervalle $]a, +\infty[$ et, d'après la proposition 4.3, sa somme vaut

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x e^{-x})^n = \frac{1}{1 - x e^{-x}}.$$

On remarque que le membre de droite est défini pour tout réel x , bien que la convergence de la série n'ait lieu que sur l'intervalle $]a, +\infty[$. En effet, le dénominateur du membre de droite n'est autre que $1 - f_1(x)$, et ne s'annule donc jamais puisque $f_1(x) \leq e^{-1} < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Voir la figure 5.6 pour le graphe de la fonction S .

Il y a en fait convergence simple absolue sur l'intervalle $]a, +\infty[$, puisque pour tout x de cet intervalle, la série de terme général $|f_n(x)|$ est une série géométrique de raison $|f_1(x)| < 1$.

Pour étudier la convergence uniforme, on note (S_N) la suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$, et on considère

$$|S_N(x) - S(x)| = \left| \sum_{n=0}^N f_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (x e^{-x})^n \right| = \left| \frac{(f_1(x))^{N+1}}{1 - f_1(x)} \right|,$$

pour x dans l'intervalle de convergence, d'après la proposition 4.3. Le tableau de variations 5.1 de la fonction f_1 montre qu'elle est majorée sur $\mathbb{R}$ par e^{-1} , donc le dénominateur ci-dessus est minoré par $1 - e^{-1} > 0$. De plus, la fonction $|f_1|$ est bornée par e^{-1} sur $\mathbb{R}^+$, et elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et vérifie $|f_1(a)| = 1$. Ainsi, pour tout $b > a$, la fonction $|f_1|$ est majorée sur l'intervalle $[b, +\infty[$ par une valeur $C_b < 1$, et donc pour tout $x \geq b$,

$$|S_N(x) - S(x)| \leq \frac{C_b^{N+1}}{1 - e^{-1}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

On en conclut que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[b, +\infty[$, avec $b > a$. Voir la figure 5.7 pour le graphe de la fonction $|f_1|$.

Il y a même convergence normale de la série de fonctions sur $[b, +\infty[$. En effet, on a $|f_n(x)| = |f_1(x)|^n \leq C_b^n$ pour tout entier n et tout réel $x \in [b, +\infty[$, et de plus la série $\sum C_b^n$ est convergente. On aurait ainsi pu commencer par établir la convergence normale sur ces intervalles, puis en déduire la convergence uniforme. En revanche, sur l'intervalle entier $]a, +\infty[$, pour chaque N fixé, on a $\lim_{x \rightarrow a^+} |S_N(x) - S(x)| = 1/2$, puisque $f_1(x) \rightarrow -1$. Ainsi $\sup_{x > a} |S_N(x) - S(x)| \geq 1/2$ pour tout N : la convergence n'est pas uniforme sur cet intervalle, et ne peut donc pas y être normale. $\square$

5.1.4 Propriétés des sommes de séries de fonctions

Les propositions 5.1 et 5.2 peuvent s'appliquer aux sommes partielles d'une série de fonctions normalement convergente. D'une part, chaque somme partielle est une somme finie de fonctions, donc hérite des propriétés de continuité ou de dérivabilité de chacune des fonctions qui la constituent. D'autre part, il y a convergence uniforme de la suite des sommes partielles, puisqu'on suppose la convergence normale. Grâce aux deux propositions susmentionnées, on obtient les résultats suivants.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	$-$
f_1	$-\infty$	e^{-1}	0

TABLE 5.1 : Tableau de variations de la fonction $f_1(x) = x e^{-x}$

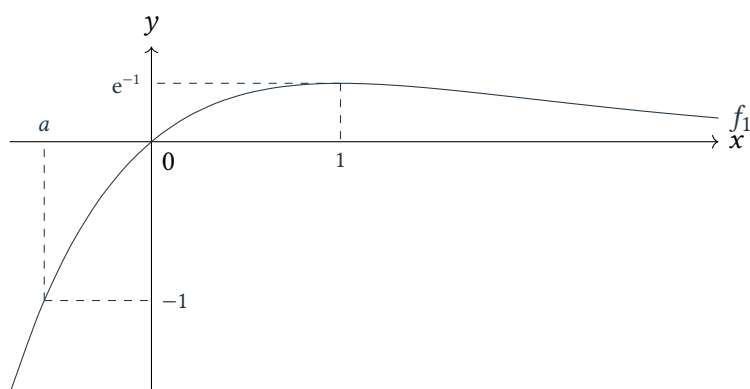


FIGURE 5.5 : Graphe de la fonction $f_1(x) = x e^{-x}$

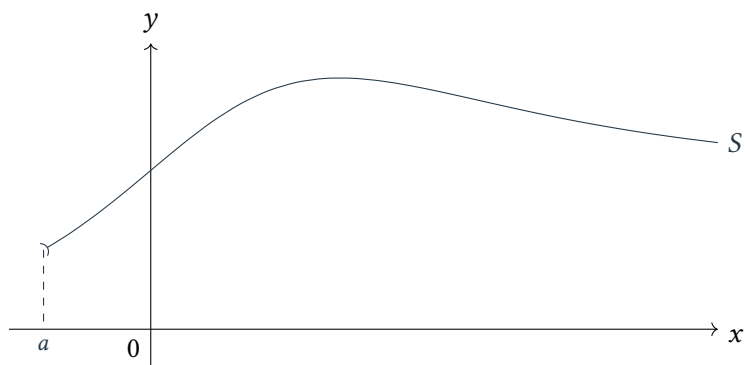


FIGURE 5.6 : Graphe de la fonction $S(x) = \frac{1}{1 - x e^{-x}}$

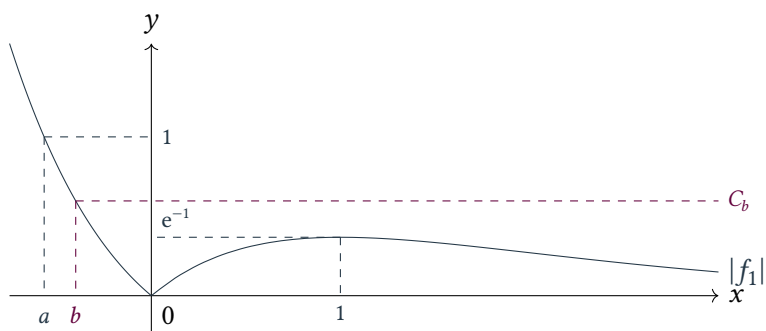


FIGURE 5.7 : Graphes de la fonction $|f_1|$

Proposition 5.5 (Continuité de la somme d’une série de fonctions). Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I . On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I . Alors, sa somme S est continue sur I .

Proposition 5.6 (Intégration terme à terme d’une série de fonctions). Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$. Alors, sa somme S est continue sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

En particulier, il y a convergence de la série numérique de terme général $\int_a^b f_n(x) dx$.

Autrement dit, la série des intégrales de a à b des fonctions f_n est convergente, et on peut intervertir le symbole $\sum$ de sommation des séries et le symbole $\int$ d’intégration, c’est-à-dire que

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

On dispose également du résultat ci-dessous, qui est l’analogue de la proposition 5.3 dans le cas des séries de fonctions. On énonce le résultat ici pour la convergence normale, mais il est également vrai pour la convergence uniforme (cas couvert par la proposition 5.3).

Proposition 5.7 (Dérivation terme à terme d’une série de fonctions). Soit (f_n) une suite de fonctions continûment dérivables sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. On suppose que :

- (i). il existe un point $x_0 \in [a, b]$ pour lequel la série numérique $\sum f_n(x_0)$ est convergente ;
- (ii). la série des dérivées $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a, b]$, et sa somme est notée T .

Alors, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, et sa somme S est continûment dérivable, avec $S' = T$. Si la série $\sum f_n(x_0)$ converge absolument, on obtient en outre la convergence normale sur le segment.

Ainsi, on peut intervertir le symbole $\sum$ de sommation et l’opérateur de dérivation. En adoptant des notations “à la physicienne”, on peut écrire que

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

On remarque en outre que la proposition précédente conduit à l’identité

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0) + \int_{x_0}^x T(y) dy.$$

5.2 Séries entières

Les séries entières constituent un cas particulier important de séries de fonctions. On peut les concevoir comme des polynômes “de degré infini”, puisqu’elles s’obtiennent en faisant la somme d’une infinité de monômes $a_n x^n$.

Définition 5.5 (Série entière). On appelle série entière toute série de fonctions $\sum a_n x^n$, où (a_n) est une suite de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $x \in \mathbb{R}$.

On peut aussi considérer des séries entières d’une variable complexe z , voir la section 5.2.7.

5.2.1 Domaine de convergence

La première question qui se pose quand on étudie une série entière est déterminer son *domaine de convergence*, sur lequel elle est bien définie.

Définition 5.6 (Domaine de convergence d'une série entière). Le *domaine de convergence* d'une série entière $\sum a_n x^n$ est l'ensemble des réels x en lesquels la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge simplement, c'est-à-dire en lesquels la série numérique $\sum a_n x^n$ converge.

Il est clair que 0 appartient toujours au domaine de convergence d'une série entière d'une variable réelle. Montrons maintenant que ce domaine de convergence est d'une forme particulière : c'est un intervalle centré en 0. Cela repose sur le résultat suivant, connu sous le nom de *lemme d'Abel*.

Lemme 5.8 (Abel). On considère une série entière $\sum a_n x^n$ et on suppose qu'il existe un réel $x_0 \neq 0$ tel que la suite numérique $(a_n x_0^n)$ est bornée. Alors, la série entière $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur tout intervalle fermé $[-r, r]$ inclus dans l'intervalle ouvert $]-|x_0|, |x_0|$.

Démonstration. L'hypothèse du lemme indique qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $|a_n x_0^n| \leq C$ pour tout entier n . Soit r un nombre réel vérifiant $0 \leq r < |x_0|$. Pour tout entier n et tout réel $x \in [-r, r]$, on a

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left(\frac{|x|}{|x_0|} \right)^n \leq C \left(\frac{r}{|x_0|} \right)^n.$$

Le membre de droite est le terme général d'une série géométrique de raison vérifiant $|r|/|x_0| < 1$, donc convergente d'après la proposition 4.3. La série entière $\sum a_n x^n$ converge donc normalement sur $[-r, r]$. Voir la figure 5.8. $\square$

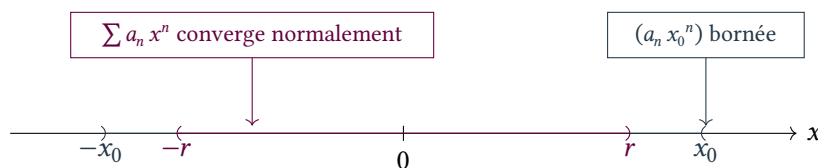


FIGURE 5.8 : Lemme d'Abel

Le lemme d'Abel s'applique en particulier quand il existe un réel $x_0 \neq 0$ pour lequel la série $\sum a_n x_0^n$ est convergente. Le terme général est alors borné, puisqu'il converge vers 0 d'après la proposition 4.1. Grâce au lemme d'Abel, on peut désormais décrire la forme du domaine de convergence d'une série entière d'une variable réelle.

Proposition 5.9 (Rayon de convergence d'une série entière). Le *domaine de convergence* d'une série entière $\sum a_n x^n$ est un intervalle centré en 0. Son rayon R est appelé le *rayon de convergence* de la série entière, et appartient à $[0, +\infty]$, donc est positif, fini ou infini. De plus, quand $0 < R < +\infty$, l'intervalle peut être fermé ou ouvert en chacune de ses deux bornes, selon les cas. Voir la figure 5.9.

Démonstration. L'ensemble des réels $x_0 \geq 0$ pour lesquels la suite numérique $(a_n x_0^n)$ est bornée est un intervalle qui contient 0. En effet, la suite est bornée pour $x_0 = 0$, puisqu'elle est nulle à partir du rang 1. Par ailleurs, pour $0 \leq x_1 \leq x_0$, si la suite $(a_n x_0^n)$ est bornée, alors la suite $(a_n x_1^n)$ l'est aussi, puisque $|a_n x_1^n| \leq |a_n x_0^n|$. On en déduit que l'ensemble des réels $x_0 \geq 0$ pour lesquels la suite $(a_n x_0^n)$ est bornée est un intervalle de la forme $[0, R]$, avec $R \in [0, +\infty[$, ou de la forme $[0, R[$, avec $R \in]0, +\infty]$.

Considérons un réel $x \in]-R, R[$. Par définition de la borne supérieure, il existe un réel $x_0 \in]|x|, R[$ pour lequel la suite $(a_n x_0^n)$ est bornée. Le lemme d'Abel implique alors que la série $\sum a_n x^n$ converge, ce qui signifie que x appartient au domaine de convergence.

Réciproquement, si R est fini, considérons un réel x tel que $|x| > R$. Alors, à nouveau par définition de la borne supérieure, la suite $(a_n x^n)$ n'est pas bornée. La série $\sum a_n x^n$ diverge donc grossièrement, ce qui montre que x n'appartient pas au domaine de convergence.

On en conclut que le domaine de convergence contient l'intervalle ouvert $] -R, R[$, mais ne contient aucun élément en dehors de l'intervalle fermé correspondant $[-R, R]$. Pour montrer qu'on ne peut pas savoir en général si les bornes appartiennent à l'intervalle de convergence quand R est fini et non nul, il suffit de considérer les exemples suivants :

- la série entière géométrique $\sum x^n$ admet l'intervalle $] -1, 1[$ pour domaine de convergence (série géométrique de raison x)
- la série entière $\sum x^n/n$ admet l'intervalle $[-1, 1[$ pour domaine de convergence (série harmonique divergente en $x = 1$ et série harmonique alternée convergente en $x = -1$), et par symétrie la série entière $\sum (-1)^n x^n/n$ admet l'intervalle $] -1, 1]$ pour domaine de convergence
- la série entière $\sum x^n/n^2$ admet l'intervalle $[-1, 1]$ pour domaine de convergence (série de Riemann convergente en $x = 1$ et série alternée convergente en $x = -1$).

Dans tous ces exemples, le rayon de convergence R vaut 1, mais on peut aisément obtenir des exemples avec un rayon de convergence R arbitraire (fini et non nul) en remplaçant x par x/R ci-dessus. $\square$

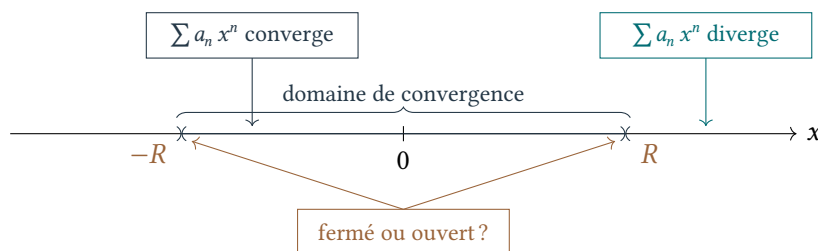


FIGURE 5.9 : Rayon de convergence d'une série entière

5.2.2 Calcul du rayon de convergence

Les critères de Cauchy et de D'Alembert vus pour les séries numériques, c'est-à-dire les propositions 4.8 et 4.9, conduisent à des formules simples pour l'expression du rayon de convergence d'une série entière. Dans les énoncés ci-dessous, on adopte les conventions " $1/0 = +\infty$ " et " $1/+\infty = 0$ ".

Proposition 5.10 (Règle de Cauchy). On considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence noté R , et on suppose que $|a_n|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, avec une limite ℓ finie ou infinie. Alors, $R = 1/\ell$.

Démonstration. Pour tout $x \neq 0$, on a $|a_n x^n|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell |x|$. D'après le critère de Cauchy pour les séries numériques (proposition 4.8), on en déduit que $\sum |a_n x^n|$ converge si $\ell |x| < 1$, et diverge si $\ell |x| > 1$.

Par conséquent, d'une part, tout réel x vérifiant $|x| < 1/\ell$ appartient au domaine de convergence, ce qui donne $R \geq 1/\ell$. D'autre part, si on suppose $R > 1/\ell$, alors il existe deux réels x_0 et x_1 tels que $1/\ell < x_1 < x_0 < R$. La série numérique $\sum a_n x_0^n$ est donc convergente, ce qui implique que la suite $(a_n x_0^n)$ est bornée. D'après le lemme d'Abel, il y a convergence normale de la série entière $\sum a_n x^n$ sur l'intervalle $[-x_1, x_1]$, donc en particulier convergence simple absolue en tout point $x \in]1/\ell, x_1[$. Cela contredit le fait que la série $\sum |a_n x^n|$ diverge si $|x| > 1/\ell$. D'où $R = 1/\ell$. $\square$

Proposition 5.11 (Règle de D'Alembert). On considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence noté R , avec $a_n \neq 0$ pour n assez grand, et on suppose que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, avec une limite ℓ finie ou infinie. Alors, $R = 1/\ell$.

Démonstration. Pour tout réel $x \neq 0$, on observe que $\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell |x|$. D'après le critère de D'Alembert pour les séries numériques (proposition 4.9), on en déduit que $\sum |a_n x^n|$ converge si $\ell |x| < 1$, et diverge si $\ell |x| > 1$. On conclut en reprenant le raisonnement prouvant la proposition 5.10. $\square$

5.2.3 Somme et produit de séries entières

Le résultat suivant indique que la somme et le produit de deux séries entières sont deux séries entières. Il donne en outre une minoration du rayon de convergence de la somme et du produit, en fonction des rayons de convergence des séries entières de départ.

Proposition 5.12 (Somme et produit de séries entières). Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b , respectivement. La somme de ces deux séries entières est la série entière $\sum (a_n + b_n) x^n$. Leur produit est la série entière $\sum c_n x^n$, appelée produit de Cauchy des deux séries, dont les coefficients sont donnés pour tout entier n par

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

On note R_s et R_p le rayon de convergence de leur somme et de leur produit, respectivement. Alors,

$$\min\{R_s, R_p\} \geq \min\{R_a, R_b\}.$$

Démonstration. On considère un réel x appartenant à l'intersection des domaines de convergence des deux séries entières de départ. Pour tout entier N , on a évidemment

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n + \sum_{n=0}^N b_n x^n = \sum_{n=0}^N (a_n + b_n) x^n.$$

Quand N tend vers l'infini, les deux sommes dans le membre de gauche convergent. La somme dans le membre de droite converge donc également. On en déduit l'expression au point x de la somme des deux séries entières, et le fait que x appartient au domaine de convergence de la série entière somme, ce qui implique que $|x| \leq R_s$.

En ce qui concerne le produit, on peut écrire au moins formellement

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_k b_l x^{k+l} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}_{c_n} x^n.$$

Ces identités sont valables quand les deux séries qui figurent dans le membre de gauche convergent absolument (d'après le théorème de Fubini), donc en particulier quand x appartient à l'intersection des intervalles ouverts de convergence des deux séries entières de départ. La somme dans le membre de droite est alors également absolument convergente. On en déduit l'expression au point x du produit des deux séries entières, le fait que x est membre du domaine de convergence de la série entière produit, et que $|x| \leq R_p$.

Enfin, supposons $\min\{R_a, R_b\} > 0$, et considérons un nombre réel $x > 0$ strictement inférieur à ce minimum. Alors, x appartient à l'intersection des domaines de convergence des deux séries entières de départ. Ce qui précède implique que $x \leq R_s$ et $x \leq R_p$. On a donc $x \leq \min\{R_s, R_p\}$. Pour conclure, il suffit de faire tendre x vers $\min\{R_a, R_b\}$. $\square$

5.2.4 Dérivée et primitive d'une série entière

On peut appliquer les propositions 5.6 et 5.7 concernant respectivement les intégrales et dérivées de séries de fonctions normalement convergentes au cas des séries entières. Il suffit de remarquer qu'une série entière, ainsi que sa série dérivée, converge normalement sur tout segment contenu dans l'intervalle ouvert de convergence.

Lemme 5.13 (Convergence normale à l'intérieur du domaine de convergence). Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R supposé non nul. Alors, la série entière converge normalement sur tout intervalle fermé $[-r, r]$ inclus dans l'intervalle ouvert $] -R, R[$.

Démonstration. On considère un réel $x_0 \in]0, R[$. La série entière converge au point x_0 , donc la suite numérique $(a_n x_0^n)$ est bornée, en vertu de la proposition 4.1. Le lemme 5.8 implique alors qu'il y a convergence normale sur tout intervalle fermé $[-r, r]$ inclus dans l'intervalle ouvert $] -x_0, x_0[$. Cependant, tout intervalle fermé $[-r, r]$ fixé

a priori dans l'intervalle ouvert $] -R, R[$ peut être inclus dans un intervalle ouvert $] -x_0, x_0[$, avec x_0 assez proche de R . $\square$

Dans ce qui précède, l'origine 0 joue un rôle privilégié dans l'écriture $\sum a_n x^n$ des séries entières, puisque tous les termes s'annulent en 0 sauf éventuellement le premier. La série entière converge donc toujours en 0, et on a vu que le domaine de convergence est un intervalle centré en 0. De manière plus générale, on peut considérer des séries entières centrées autour d'un point quelconque x_0 , qui sont donc de la forme $\sum a_n (x - x_0)^n$.

Une simple translation de la variable montre que de telles séries entières ont pour domaine de convergence un intervalle centré en x_0 . Comme ci-dessus, le rayon de cet intervalle, noté R , est appelé le rayon de convergence de la série. Il peut à nouveau se calculer à partir des coefficients a_n à l'aide des règles de Cauchy et de D'Alembert. Le lemme précédent s'étend à ce cas, et montre qu'une telle série entière converge normalement sur tout intervalle fermé $[x_0 - r, x_0 + r]$ inclus dans l'intervalle ouvert $]x_0 - R, x_0 + R[$. (Si $R = +\infty$, cet intervalle est $\mathbb{R}$ tout entier.)

Comme il y a convergence normale, on peut effectivement appliquer les propositions 5.6 et 5.7. Commençons par le résultat de dérivation.

Proposition 5.14 (Dérivée terme à terme d'une série entière). Soit $\sum a_n (x - x_0)^n$ une série entière de rayon de convergence R supposé non nul, et de somme notée f . Alors, f est dérivable sur $]x_0 - R, x_0 + R[$, et pour tout x de cet intervalle,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n.$$

Cette série entière, dérivée terme à terme de la série entière de départ, admet aussi R pour rayon de convergence.

Démonstration. On peut supposer que $x_0 = 0$, puisqu'on se ramène facilement à ce cas par translation de la variable. Commençons par montrer que la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ admet R pour rayon de convergence. Considérons x un réel tel que $|x| < R$, et choisissons arbitrairement un autre réel r tel que $|x| < r < R$. Pour tout n assez grand, on a $(n+1)|x|^n \leq r^n$. De plus, la série $\sum |a_n| r^n$ converge. On en déduit que la série $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ converge absolument, donc converge (voir la proposition 4.10). Réciproquement, si cette série converge en un point x , alors la suite numérique $((n+1) a_{n+1} x^n)$ est bornée (d'après la proposition 4.1), et donc la suite $(a_n x^n)$ l'est aussi. Le lemme 5.8 implique que la série entière correspondante converge dans l'intervalle ouvert $] -|x|, |x|[$, ce qui impose d'avoir $R \geq |x|$. Autrement dit, la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ diverge quand $|x| > R$. Finalement, son rayon de convergence est bien égal à R . Par un simple changement d'indice de sommation, on voit aussi qu'il s'agit de la série entière $\sum n a_n x^{n-1}$.

Le lemme 5.13 appliqué à cette dernière série entière montre qu'elle converge normalement sur tout intervalle fermé $[-r, r]$ inclus dans $] -R, R[$. Il s'agit de la dérivée terme à terme de la série entière $\sum a_n x^n$, qui par ailleurs converge évidemment en un point (0 par exemple). La proposition 5.7 s'applique enfin et prouve le résultat sur l'intervalle fermé $[-r, r]$. Comme on peut prendre r arbitrairement proche de R , on a en fait le résultat sur $] -R, R[$. $\square$

En appliquant un nombre arbitraire de fois la proposition 5.14, on obtient le résultat suivant. On rappelle qu'une fonction est dite de classe C^∞ sur un intervalle si elle y est dérivable à tout ordre.

Corollaire 5.15 (Dérivées successives d'une série entière). Soit $\sum a_n (x - x_0)^n$ une série entière de rayon de convergence R supposé non nul, et de somme notée f . Alors, f est de classe C^∞ sur $]x_0 - R, x_0 + R[$. De plus, pour tout entier naturel p et pour tout x de cet intervalle,

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n (x - x_0)^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1)\dots(n+1) a_{n+p} (x - x_0)^n.$$

Cette série entière, dérivée p -ième terme à terme de la série entière de départ, admet R pour rayon de convergence.

Exercice 5.5 (Dérivées successives de la série géométrique). Montrer que pour tout entier naturel p et tout réel $x \in]-1, 1[$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} x^n = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$, avec le coefficient binomial $\binom{n+p}{p} = \frac{(n+p)!}{n! p!}$. En déduire que $\sum n 2^{-n}$ converge et calculer sa somme.

Solution. La série géométrique $\sum x^n$, de raison égale à x , est une série entière de rayon de convergence 1, et de somme définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Le corollaire 5.15 montre que cette fonction est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ (ce qui est en fait élémentaire puisque f est une fraction rationnelle avec pour seul pôle la valeur 1), et que pour tout entier naturel p et tout réel $x \in]-1, 1[$,

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1)\dots(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} x^n.$$

Cependant, on peut montrer par récurrence sur l'entier naturel p que pour tout x de cet intervalle,

$$f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

Voir la figure 5.10 pour les graphes correspondants. En combinant ces deux expressions de $f^{(p)}(x)$, on a

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n! p!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} x^n.$$

On peut ensuite choisir des valeurs particulières pour p et x , et en déduire des valeurs de sommes de séries numériques. Pour $p = 1$ et $x = 1/2$, on en déduit après simplifications que $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-n} = 2$. $\square$

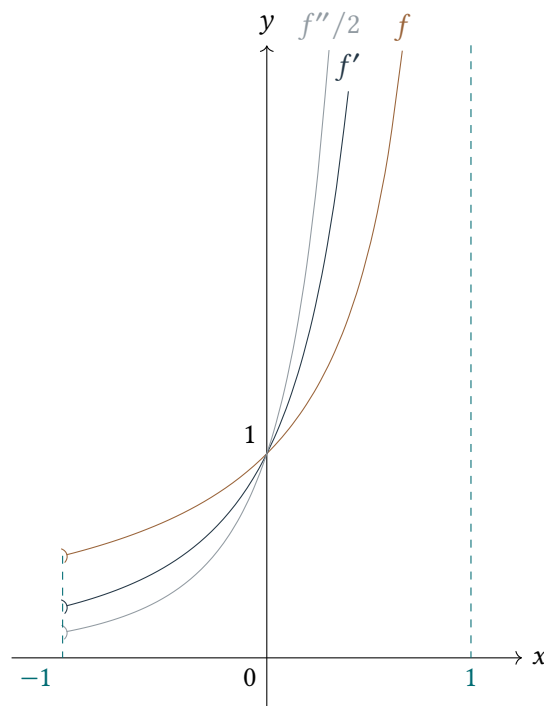


FIGURE 5.10 : La somme f de la série entière $\sum x^n$ et ses dérivées f' et $f''/2$

On peut ensuite considérer les primitives de sommes de séries entières.

Proposition 5.16 (Primitive terme à terme d'une série entière). Soit $\sum a_n (x - x_0)^n$ une série entière de rayon de convergence R supposé non nul, et de somme notée f . Alors, f admet pour primitive sur $]x_0 - R, x_0 + R[$ la fonction définie par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

Cette série entière est la primitive terme à terme qui s'annule en x_0 de la série entière de départ, et admet aussi R pour rayon de convergence.

Démonstration. Par une simple translation de la variable, on peut supposer que $x_0 = 0$. Notons R' le rayon de convergence de la série entière apparaissant dans l'expression de la fonction F . Comme le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est non nul, cette série converge absolument en n'importe quel point $r \in]0, R[$. Sachant que $\left| \frac{a_n}{n+1} r^{n+1} \right| \leq |a_n r^n|$, la série entière de F converge absolument au point r , donc converge (d'après la proposition 4.1). On en déduit que R' est non nul. En appliquant la proposition 5.14 à la série entière définissant F , on en déduit que $R' = R$ et que la dérivée F' coïncide avec la série entière dont la somme est f . (On peut aussi prouver ce résultat à l'aide de la proposition 5.6 et le corollaire 3.6.) $\square$

Exercice 5.6. Montrer que pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$. En déduire que la série $\sum 2^{-n}/n$ converge et calculer sa somme.

Solution. On a vu que $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, et pour somme $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. La proposition 5.16 montre que la fonction f admet pour primitive sur $] -1, 1[$ la fonction

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Voir la figure 5.11 pour les graphes correspondants. Cependant, f admet aussi pour primitive la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$. D'après la proposition 3.4, ces deux primitives diffèrent d'une constante. Comme elles s'annulent toutes les deux au point 0, elles sont en fait égales. D'où, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x).$$

En remplaçant x par son opposé et en procédant à un changement d'indice de sommation, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x),$$

pour tout $x \in]-1, 1[$. Enfin, en prenant des valeurs particulières pour la variable x , on peut effectuer le calcul des sommes de certaines séries numériques. On obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n} = \ln 2$$

en choisissant par exemple $x = -1/2$. $\square$

5.2.5 Développement en série entière d'une fonction

Une fonction f définie au voisinage de x_0 étant donnée, on peut alors se demander s'il existe une série entière de la forme $\sum a_n (x - x_0)^n$ de rayon de convergence non nul qui coïncide avec f autour de x_0 . Si c'est le cas, la fonction f est dite *développable en série entière* autour de x_0 .

Définition 5.7 (Fonction développable en série entière). Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un point x_0 . La fonction f est dite *développable en série entière* autour du point x_0 s'il existe une suite numérique (a_n) et un réel $r > 0$ tels que

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Le rayon de convergence R de la série entière ci-dessus vérifie $R \geq r$. On peut même avoir $R > r$.

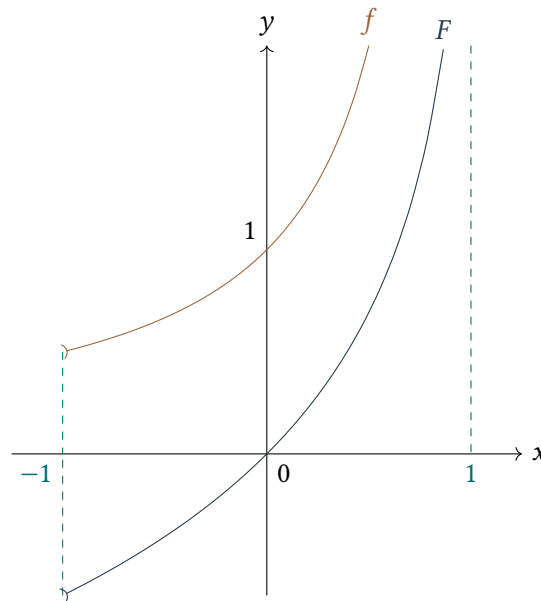


FIGURE 5.11 : La somme f de la série entière $\sum x^n$ et sa primitive F nulle en 0

Exemples 5.1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière autour de 0, avec un rayon de convergence égal à 1. En effet, on a $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$, et le rayon de convergence de la série entière est bien égal à 1, puisqu'il s'agit de la série géométrique de raison x . De plus, les exemples qui suivent les propositions 5.14 et 5.16 donnent le développement en série entière des fonctions qui se déduisent de la précédente en prenant les dérivées successives ou les primitives, c'est-à-dire les fonctions $x \mapsto \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$ et $x \mapsto -\ln(1-x)$. On peut remarquer que toutes ces fonctions peuvent se prolonger à gauche de l'abscisse -1 , alors que leurs séries entières divergent pour $x < -1$. Aux bornes, il faut examiner chaque série séparément : celle de $-\ln(1-x)$ converge aussi en $x = -1$, où $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n = -\ln 2$. Son domaine de convergence est donc $[-1, 1[$, tandis que ceux de la série géométrique et de ses dérivées sont $] -1, 1[$.

La formule de Taylor-Young (voir proposition 1.11) indique que toute fonction f qui est N fois dérivable sur un intervalle ouvert $]x_0 - r, x_0 + r[$ admet pour développement limité

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^N).$$

Plus N est grand, plus le reste du développement limité est petit au voisinage de x_0 . On peut donc se demander si le terme principal du développement limité converge vers la fonction f quand N tend vers l'infini. Ainsi, la série entière de terme général $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$, dite *série de Taylor*, fournit un bon candidat pour le développement en série entière d'une fonction f de classe C^∞ . Le résultat suivant montre que si f est développable en série entière autour de x_0 (ce qui n'est pas toujours le cas), alors en effet son développement est donné par la série de Taylor.

Proposition 5.17 (Série de Taylor). Soit f une fonction développable en série entière autour d'un point x_0 . Alors, il existe un réel $r > 0$ pour lequel la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$ et admet le développement en série entière suivant sur cet intervalle :

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Cette série entière est appelée la série de Taylor de f en x_0 .

Démonstration. Par définition, il existe une suite numérique (a_n) et un réel $r > 0$ tel que la fonction f est la somme de la série entière $\sum a_n (x - x_0)^n$ sur l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$. Cette série entière admet donc un rayon

de convergence R vérifiant $R \geq r$. Le corollaire 5.15 implique que la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$. De plus, à un ordre p donné, sa dérivée en x_0 est donnée par

$$f^{(p)}(x_0) = p(p-1)\dots 1 a_p = p! a_p.$$

On en déduit que $a_p = f^{(p)}(x_0)/p!$, donc la série entière est en fait la série de Taylor. $\square$

D'après le résultat précédent, si une fonction f est développable en série entière autour d'un point x_0 , alors elle est de classe C^∞ et s'écrit comme somme de sa série de Taylor au voisinage de x_0 . Ainsi,

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + (x - x_0)^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(N+1+n)}(x_0)}{(N+1+n)!} (x - x_0)^n$$

pour tout x proche de x_0 , et pour tout entier N . La série de droite est une fonction continue en x_0 , donc bornée autour de ce point. On retrouve donc à tout ordre N au point x_0 le développement limité

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \underset{x \rightarrow x_0}{O}((x - x_0)^N)$$

donné par la formule de Taylor-Young. On a même le résultat un peu plus fort suivant :

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \underset{x \rightarrow x_0}{O}((x - x_0)^{N+1}),$$

où la notation $\underset{x \rightarrow x_0}{O}(g(x))$ désigne une fonction qui, divisée par $g(x)$, donne un quotient borné au voisinage de x_0 . La fonction f admet donc un développement limité à tout ordre. La réciproque est fautive : certaines fonctions admettent un développement limité à tout ordre sans être développables en série entière. L'exercice 5.7 donne un exemple de telle fonction ; elle admet un développement limité à tout ordre (par la formule de Taylor-Young) car elle est C^∞ .

Corollaire 5.18. Soit f une fonction développable en série entière autour d'un point x_0 . Si $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est identiquement nulle sur un intervalle de la forme $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Démonstration. La proposition 5.17 montre que f est C^∞ sur un intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$, et que sur celui-ci, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overbrace{f^{(n)}(x_0)}^{=0}}{n!} (x - x_0)^n = 0.$$

La fonction f est donc constante égale à 0 sur l'intervalle considéré. $\square$

Exercice 5.7. Montrer que la fonction f telle que $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver que f n'est pas développable en série entière autour de 0.

Solution. La fonction f possède la propriété d'être "ultraplate", mais pas uniformément nulle, au voisinage de 0, comme le montre la figure 5.12. On observe que f est clairement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, on montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f^{(n)}(x) = Q_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

où (Q_n) est la suite de polynômes définie par la fonction initiale $Q_0(x) = 1$ et par la relation de récurrence $Q_{n+1}(x) = 2x^3 Q_n(x) - x^2 Q_n'(x)$, pour tout réel x . Pour tout entier n , la fonction $f^{(n)}$ admet donc 0 pour limite en 0. Cela implique que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n . Ainsi, f n'est pas développable en série entière, puisque sinon elle serait nulle sur un voisinage de 0, d'après le corollaire 5.18. $\square$

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour qu'une fonction de classe C^∞ soit développable en série entière autour d'un point.

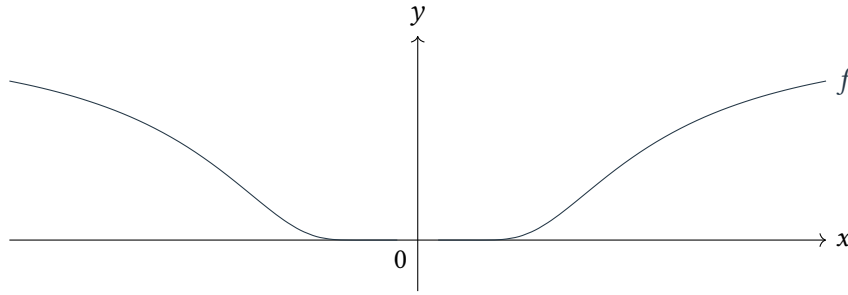


FIGURE 5.12 : La fonction $f(x) = \exp(-1/x^2)$

Proposition 5.19 (Condition suffisante de développement en série entière). Soient deux nombres réels $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, et soit une fonction f de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert $]x_0 - r, x_0 + r[$. On suppose qu'il existe un réel C (qui peut dépendre de x_0 et r) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\quad |f^{(n)}(x)| \leq C.$$

Alors, f est développable en série entière sur $]x_0 - r, x_0 + r[$, et somme de sa série de Taylor en x_0 :

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Démonstration. La formule de Taylor avec reste intégral, valable aussi pour les fonctions à valeurs complexes, donne

$$f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \frac{1}{N!} \int_{x_0}^x (x - t)^N f^{(N+1)}(t) dt.$$

L'inégalité triangulaire donne donc

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{C|x - x_0|^{N+1}}{(N+1)!} \leq \frac{Cr^{N+1}}{(N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Cela prouve l'égalité annoncée. □

Exercice 5.8 (Développement en série entière du sinus et du cosinus). Montrer que les fonctions sin et cos sont développables en série entière autour de 0. Préciser leur développement en série entière, et le rayon de convergence associé.

Solution. Les fonctions sin et cos sont de classe C^∞ , avec pour dérivées successives les fonctions

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right),$$

qui sont bornées en valeur absolue par 1 sur $\mathbb{R}$ tout entier. La proposition 5.19 implique que sin et cos coïncident sur $\mathbb{R}$ avec leur série de Taylor en 0, donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

En effet, le sinus dans la somme prend les valeurs 0, 1, 0 et -1 selon le reste de la division euclidienne de n par 4. Seul les termes indicés par $n = 2k + 1$ impair sont non nuls, et le sinus y prend la valeur $(-1)^k$. De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \quad (5.3)$$

Ici, le cosinus dans la somme prend les valeurs 1, 0, -1 et 0 selon le reste de la division euclidienne de n par 4. Seul les termes indicés par $n = 2k$ pair sont non nuls, et le cosinus y prend la valeur $(-1)^k$. Enfin, les séries entières convergent pour tout réel x , donc leur rayon de convergence est infini. On retrouve ainsi les formules de l'exercice 4.13. $\square$

Exercice 5.9 (Développement en série entière de l'exponentielle). Montrer que les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{ix}$ sont développables en série entière autour de 0. Préciser leur développement en série entière, et le rayon de convergence associé. Faire le lien avec les développements en série entière du cosinus et du sinus.

Solution. La fonction $\exp$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et elle est égale à ses dérivées de tous ordres, c'est-à-dire que $\exp^{(n)} = \exp$ pour tout n . De plus, pour tout réel $r > 0$, la fonction $\exp$ est bornée par e^r sur l'intervalle $]-r, r[$. La proposition 5.19 s'applique, et garantit que $\exp$ coïncide avec sa série de Taylor en 0 sur l'intervalle $]-r, r[$, avec r arbitraire, donc en fait sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi, $\exp$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (5.4)$$

La série entière converge pour tout réel x , donc son rayon de convergence est infini. On vient ainsi de prouver une assertion donnée dans l'exercice 4.9 qui illustre la proposition 4.9, et de retrouver une formule de l'exercice 4.13. Le développement en série entière de la fonction exponentielle est en fait valable pour des arguments imaginaires purs. Plus précisément, la fonction $x \mapsto e^{ix}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée d'ordre un entier n donné est la fonction $x \mapsto i^n e^{ix}$, qui est de module égal à 1, donc bornée sur $\mathbb{R}$. La proposition 5.19 montre que cette fonction est somme de sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$, donc que

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

pour tout réel x . En prenant la partie réelle et la partie imaginaire, ou en utilisant les formules d'Euler, on retrouve les développements en série entière du cosinus et du sinus établis dans l'exercice 5.8. $\square$

Exercice 5.10. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière autour de 0, mais qu'elle ne vérifie pas les conditions de la proposition 5.19.

Solution. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ coïncide sur tout l'intervalle $]-1, 1[$ avec la série entière géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Cependant, sa dérivée d'ordre n est donnée par la fonction $x \mapsto \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, qui n'est pas bornée dans $]-1, 1[$, puisqu'elle tend vers $+\infty$ à gauche en 1. La dérivée d'ordre n est tout de même bornée par $\frac{n!}{(1-b)^{n+1}}$ sur tout sous-intervalle $]a, b[$ de $]-1, 1[$ tel que $b < 1$, et cette borne est leur supremum sur cet intervalle. Ce supremum tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$; il n'existe donc pas de constante commune à toutes les dérivées. Ainsi, on ne peut pas non plus y appliquer la proposition 5.19. $\square$

5.2.6 Résolution d'équations différentielles

Les séries entières permettent de trouver des solutions particulières de bon nombre d'équations différentielles linéaires. On peut aussi exprimer sous forme de série entière une solution exprimée sous forme de fonctions usuelles. Le plus simple est d'illustrer ces principes par un exemple.

On cherche à développer en série entière la fonction f définie par l'expression $f(x) = (\arcsin x)^2$. Cette fonction est définie sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$, et de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$. Pour tout x de cet ouvert, on a

$$f'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Cela permet notamment de tracer sur la figure 5.13 l'allure du graphe de la fonction f , mais aussi de prouver que $g = f'$ est solution d'une équation différentielle linéaire.

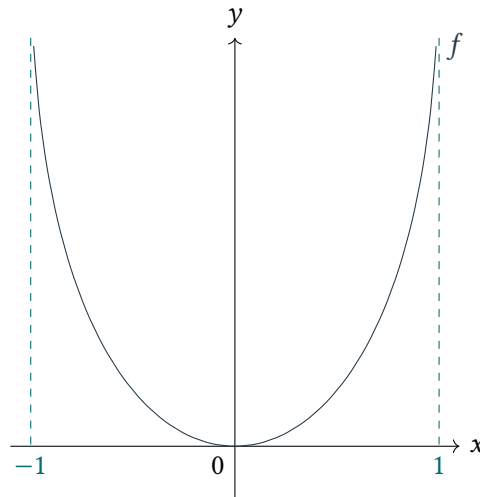


FIGURE 5.13 : La fonction $f(x) = (\arcsin x)^2$

Plus précisément, en partant des expressions ci-dessus pour f' et f'' , on calcule pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(1 - x^2) f''(x) = 2 + \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} = 2 + x f'(x).$$

Ainsi, la fonction $g = f'$ est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$(1 - x^2) y' - x y = 2. \quad (5.5)$$

On cherche maintenant des solutions de l'équation différentielle (5.5) qui s'écrivent sous la forme d'une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé non nul, et de somme notée φ . Le corollaire 5.15 montre alors que la fonction φ est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert $] -R, R[$, et on a pour tout réel x de cet intervalle,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

En injectant ces expressions dans (5.5), et en arrangeant les termes selon les puissances de x , on obtient

$$\begin{aligned} 2 &= (1 - x^2) \varphi'(x) - x \varphi(x) \\ &= (1 - x^2) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n, \end{aligned}$$

soit finalement pour tout réel $x \in] -R, R[$,

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} - n a_{n-1}) x^n = 2. \quad (5.6)$$

D'après la proposition 5.17, deux fonctions qui ont le même développement en série entière autour d'un point ont des coefficients identiques. La relation (5.6) est donc équivalente aux conditions : $a_1 = 2$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_{n-1}.$$

On distingue les indices pairs et les indices impairs. Cela revient, pour les indices pairs, à

$$a_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} a_0 = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} a_0,$$

et pour les indices impairs, à

$$a_{2k+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} a_1 = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Seul le coefficient a_0 est laissé arbitraire. En revenant aux coefficients a_n , on obtient finalement que (5.6) équivaut à l'existence d'un réel λ tel que $a_0 = \lambda$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \lambda \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Ainsi, les séries entières dont les sommes sont solution de l'équation différentielle (5.5) sont

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque. On peut voir la série entière des termes d'indices pairs et celle des termes d'indices impairs comme des séries entières de la variable x^2 . On peut déterminer leur rayon de convergence à l'aide de la règle de D'Alembert. Pour $\lambda \neq 0$, on calcule pour les coefficients pairs et impairs

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{2k+1}{2k+2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad \frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}} = \frac{2k+2}{2k+3} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1.$$

On déduit de la règle de D'Alembert que les deux séries entières, vues comme séries de la variable x^2 , ont un rayon de convergence égal à 1. Elles convergent donc si $|x^2| < 1$, et divergent si $|x^2| > 1$. Ces deux conditions correspondent respectivement à $|x| < 1$, et à $|x| > 1$. Ainsi, le rayon de convergence vaut $R = 1$. Si $\lambda = 0$, tous les coefficients pairs sont nuls, mais la série des termes impairs conserve le rayon 1, donc la conclusion reste vraie.

On sait (ou on admet) que les solutions de l'équation différentielle (5.5) définies sur l'intervalle $] -1, 1[$ forment un sous-espace affine de dimension 1 de l'ensemble des fonctions continûment dérivables. Comme les séries entières de la forme φ constituent un tel sous-espace affine, on en déduit qu'elles décrivent toutes les solutions de l'équation différentielle. Comme $g = f'$ est justement une solution de l'équation différentielle, elle s'identifie à série entière de la forme précédente : il existe un réel λ tel que g ait la même forme que φ ci-dessus. Cependant, on observe que $g(0) = f'(0) = 0$ et que $\varphi(0) = \lambda$, ce qui implique $\lambda = 0$. On en déduit le développement en série entière de la fonction g autour de l'origine : pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Finalement, comme $g = f'$ et $f(0) = 0$, on obtient à l'aide de la proposition 5.16 le développement en série entière de f comme primitive terme à terme de celui de g . Ainsi, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$(\arcsin x)^2 = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+1)!} \frac{x^{2k+2}}{2k+2} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k-1} \frac{((k-1)!)^2}{(2k)!} x^{2k}.$$

Le rayon de convergence de cette série entière primitive vaut 1 aussi. L'intervalle ouvert $] -1, 1[$ est maximal pour la convergence à l'intérieur du rayon. Les bornes doivent être étudiées séparément : ici la série converge aussi en $x = \pm 1$, avec somme $\pi^2/4$. En effet, ses coefficients sont positifs et les sommes partielles en 1 sont majorées par la limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\arcsin x)^2 = \pi^2/4$; le passage croissant à la limite donne ensuite cette valeur.

5.2.7 Un aperçu du cas complexe

Par souci de simplification, nous avons uniquement traité le cas de séries entières d'une variable réelle x . On peut aussi s'intéresser à la situation où la variable est un nombre complexe z . Une telle série entière se présente comme une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, avec (a_n) une suite de nombres complexes et z une variable complexe. On définit son *domaine de convergence* comme l'ensemble des nombres complexes z en lesquels la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge simplement, c'est-à-dire en lesquels la série numérique $\sum a_n z^n$ converge. Le

lemme 5.8 s'étend à ce cas, ce qui montre que le domaine de convergence est, à sa frontière près, un disque centré à l'origine.

Plus précisément, il existe $R \in [0, +\infty]$ tel que la série entière converge au point z dès que $|z| < R$, et diverge dès que $|z| > R$. Cette quantité R , finie ou infinie, est appelée le *rayon de convergence* de la série entière. En particulier, si R est infini, la série converge en tout point du plan complexe. Sinon, elle converge en tout point du disque ouvert de centre 0 et de rayon R , et elle diverge en dehors du disque fermé correspondant. On ne peut rien dire en général de la convergence sur la frontière de ce disque, c'est-à-dire sur le cercle de centre 0 et de rayon R . La série peut très bien y converger partout, nulle part, ou en certains points et pas d'autres.

Par exemple, la série entière $\sum z^n$ admet 1 pour rayon de convergence puisqu'il s'agit de la série géométrique de raison z . D'après la proposition 4.3, la somme de la série est donnée pour $|z| < 1$ par

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

On a vu dans la section 4.4 que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout nombre complexe z . Le rayon de convergence de la série entière correspondante vaut donc $+\infty$. On rappelle que sa somme est

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Cela permet de définir la fonction *exponentielle* sur le plan complexe. Cette définition étend la fonction exponentielle d'une variable réelle, puisqu'elle se développe selon la même série entière, voir (5.4). On peut justifier la notation e^z par le fait que la règle de calcul de l'exponentielle, à savoir $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, est vérifiée par la fonction définie par la série entière. En effet, le produit de Cauchy des séries entières de somme e^{z_1} et e^{z_2} est la série entière de somme $e^{z_1+z_2}$, puisque la proposition 5.12 (valable aussi pour les séries entières complexes) donne

$$e^{z_1} e^{z_2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}.$$

L'avant-dernière égalité utilise la formule du binôme de Newton.

On peut à partir de cette fonction exponentielle étendre les fonctions cosinus et sinus au plan complexe en posant

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

En appliquant ces formules à un nombre réel x , on retrouve les formules d'Euler. Celles-ci sont élémentaires quand on définit la notation e^{ix} à partir du cosinus et du sinus, mais on fait ici le cheminement inverse puisqu'on définit le cosinus et le sinus à partir de l'exponentielle complexe. Les deux démarches sont heureusement compatibles. En effet, pour x réel, on a donc défini ici

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!},$$

où les coefficients c_n sont donnés par $(i^n + (-i)^n)/2$. Leur valeur dépend du reste de la division euclidienne de n par 4. Plus précisément, le coefficient c_n est nul quand n est impair, et il vaut $(-1)^k$ quand $n = 2k$ est pair. On retrouve la série entière (5.3) du cosinus. On procède de même pour le sinus.

La série entière de terme général z^n/n admet 1 pour rayon de convergence. La série diverge pour $z = 1$, puisqu'on obtient alors la série harmonique, et elle converge pour $z = -1$, puisque c'est la série harmonique alternée. L'étude de la convergence aux autres points du cercle unité est plus délicate.

Séries de Fourier

Les séries de Fourier jouent un rôle très important en mathématiques et en physique, puisqu'elles permettent de représenter une fonction ou un signal périodique comme une somme (potentiellement infinie) de fonctions sinusoïdales dont les fréquences sont les multiples de la fréquence du signal. Cette décomposition permet en particulier d'identifier les fréquences les plus importantes du signal. Les séries de Fourier constituent aussi une façon efficace de coder un signal pour ensuite lui appliquer des opérations ou en déterminer des propriétés.

6.1 Rappels sur les fonctions périodiques

Commençons par quelques brefs rappels sur les fonctions périodiques.

Définition 6.1 (Fonction périodique). Une fonction f définie sur un domaine $\mathcal{D}$ inclus dans $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes est dite *périodique de période* $T > 0$, ou encore *T -périodique*, si :

- (i). le domaine $\mathcal{D}$ est invariant par la translation $x \mapsto x + T$, c'est-à-dire que pour tout x , on a $x \in \mathcal{D}$ si et seulement si $x + T \in \mathcal{D}$;
- (ii). pour tout réel $x \in \mathcal{D}$, on a $f(x + T) = f(x)$.

Si $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, la première condition est triviale. On note $\mathcal{P}(T)$ l'ensemble des fonctions T -périodiques définies sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathcal{P}(T)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions cos et sin sont 2π -périodiques. De plus, la fonction $x \mapsto e^{2i\pi x/T}$ est T -périodique pour tout réel $T > 0$ prescrit. Enfin, une fonction définie sur un intervalle de longueur T , fermé à une borne et ouvert à l'autre, peut être identifiée à une fonction T -périodique. On dit qu'on étend cette fonction par T -périodisation.

Le résultat d'intégration ci-dessous est très utile dans ce qui suit.

Proposition 6.1 (Intégration sur une période). Soit f une fonction T -périodique. On suppose que f est continue par morceaux sur l'intervalle $[0, T]$. Alors, pour tout réel x_0 , la fonction f est continue par morceaux sur $[x_0, x_0 + T]$ et on a

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

6.2 Séries trigonométriques

Une série trigonométrique est une série de fonctions dont les termes sont des fonctions trigonométriques.

Définition 6.2 (Série trigonométrique). Une *série trigonométrique* est une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ avec un terme général de la forme

$$f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ désignent deux suites numériques réelles ou complexes. Comme le réel b_0 ne joue aucun rôle, on le suppose nul, par convention.

Nous utiliserons aussi la notation exponentielle pour ces séries. Ainsi, posons $c_0 = a_0$, et pour tout entier $n \geq 1$,

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad \text{et} \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}.$$

Pour tout réel x , on obtient alors clairement $f_0(x) = c_0$, ainsi que pour tout entier $n \geq 1$ la relation

$$f_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}.$$

Au moins formellement, on peut donc représenter les séries trigonométriques des deux façons suivantes :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Réciproquement, si la seconde écriture est donnée, on peut retrouver la première en posant $a_0 = c_0$, ainsi que $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ pour tout entier $n \geq 1$.

Cela permet de donner un sens à la convergence de la deuxième série : on convient qu'elle converge en un certain sens (simplement, uniformément, etc.) dès que la première série converge en ce sens, et on définit alors la somme de la seconde série comme étant égale à la somme de la première série. De manière plus intrinsèque, on peut adopter la définition suivante pour la convergence de la série trigonométrique écrite sous forme exponentielle.

Définition 6.3 (Convergence d'une série trigonométrique). Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels ou complexes. Pour tout entier $N \geq 0$, on appelle N -ième somme partielle de la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

- (i). On dit que cette série trigonométrique *converge simplement*, en un point ou sur un intervalle donné, lorsque la suite de fonctions (S_N) y converge simplement.
- (ii). On dit que cette série trigonométrique *converge uniformément* sur un intervalle donné lorsque la suite de fonctions (S_N) y converge uniformément.
- (iii). On dit que cette série trigonométrique *converge normalement* sur un intervalle donné si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ y converge normalement.

Au vu de la correspondance entre les coefficients c_n , et les coefficients a_n et b_n , les sommes partielles vérifient

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

La définition ci-dessus est donc bien équivalente aux définitions usuelles de convergence pour la série de fonctions dont les sommes partielles constituent le membre de droite. Concernant la convergence normale de la série trigonométrique, on peut aisément en fournir une condition suffisante.

Proposition 6.2 (Conditions suffisantes de convergence normale). (i). Soient deux séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ qui convergent absolument. Alors, la série trigonométrique

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

- (ii). Soit une suite numérique (c_n) telle que les deux séries numériques $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$ convergent absolument. Alors, la série trigonométrique

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Démonstration. Le premier point découle de l'inégalité triangulaire : pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x ,

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Comme $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, la série dont le terme général est la borne ci-dessus est convergente. Ainsi, la définition de la convergence normale est satisfaite par la série trigonométrique.

Pour le second point, si on adopte la définition précédente pour la convergence normale de la série trigonométrique sous forme exponentielle, on écrit que pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel x ,

$$|c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}| \leq |c_n| + |c_{-n}|,$$

à nouveau grâce à l'inégalité triangulaire. Comme $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$ convergent absolument, la série dont le terme général est la borne ci-dessus est convergente. Cela permet de conclure que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ converge normalement, comme voulu. $\square$

Connaissant les relations entre les coefficients c_n d'une part, et les coefficients a_n et b_n d'autre part, on observe aisément que les deux séries numériques $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$ sont convergentes si et seulement si les deux séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ le sont. Cette équivalence est aussi vraie pour la convergence absolue. Ainsi, les hypothèses de chacun des deux points de la proposition précédente sont équivalentes.

On s'intéresse maintenant aux propriétés du domaine de convergence et de la somme d'une série trigonométrique.

Proposition 6.3 (Continuité et périodicité de la somme d'une série trigonométrique). *On considère une série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, et on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points x en lesquels elle converge simplement. Pour tout point $x \in \mathcal{D}$, la somme de la série est notée*

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

- (i). La fonction S , définie sur le domaine $\mathcal{D}$, est 2π -périodique.
- (ii). Si la série converge normalement sur un intervalle I de $\mathcal{D}$, alors S est continue sur I .

Démonstration. Pour le premier point, on observe que les sommes partielles de la série trigonométrique sont 2π -périodiques. Il y a donc convergence en un point quelconque x si et seulement si il y a convergence en $x + 2\pi$. Cela implique l'invariance de $\mathcal{D}$. De plus, s'il y a convergence, la 2π -périodicité se transmet à la fonction limite S . Le deuxième point découle du fait que la convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence uniforme, et de plus que les sommes partielles d'une série trigonométrique sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. La somme S est alors limite uniforme sur I d'une suite de fonctions continues, donc est continue sur I . $\square$

Exercice 6.1 (Convergence d'une série trigonométrique). Soit une suite décroissante $(b_n)_{n \geq 1}$ de réels positifs qui converge vers 0. Étudier la convergence de la série trigonométrique $\sum b_n \sin(nx)$.

Solution. Si $\sum b_n$ converge absolument, la proposition 6.2 montre que la série trigonométrique $\sum b_n \sin(nx)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. D'après la proposition 6.3, sa somme est une fonction continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

Dans le cas général où la série $\sum b_n$ n'est pas nécessairement absolument convergente, on linéarise :

$$2 \sin(nx) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right).$$

Cela permet d'exprimer les sommes partielles $S_N(x)$. En posant $b_0 = 0$, on a pour tout entier $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) S_N(x) &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^N 2b_n \sin(nx) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^N b_n \left(\cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^N b_n \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) - \sum_{n=1}^N b_n \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^N b_n \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) - \sum_{n=2}^{N+1} b_{n-1} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) \\
&= -b_N \cos\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right) + \sum_{n=1}^N (b_n - b_{n-1}) \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right).
\end{aligned}$$

Le premier terme converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$, car c'est le produit du facteur b_N , qui tend vers 0, par un facteur cosinus borné. En outre, la somme partielle dans le membre de droite correspond à une série normalement convergente, puisque pour tout réel x et tout entier $n \geq 2$, on a

$$\left| (b_n - b_{n-1}) \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) \right| \leq b_{n-1} - b_n,$$

où le membre de droite est le terme général d'une série télescopique convergente. Cette borne vaut pour $n \geq 2$; le terme $n = 1$, avec $b_0 = 0$, est majoré séparément par b_1 . La décroissance de $(b_n)_{n \geq 1}$ justifie le retrait de la valeur absolue pour les autres termes.

Notons H la somme de la série normalement convergente

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right).$$

L'identité ci-dessus montre que $2 \sin(x/2) S_N(x)$ converge uniformément vers $H(x)$ sur $\mathbb{R}$. Si x n'est pas un multiple de 2π , on peut diviser par $2 \sin(x/2)$ et en déduire que $S_N(x)$ converge vers $H(x)/(2 \sin(x/2))$. Il y a donc convergence simple en tout réel qui n'est pas un multiple de 2π , et convergence uniforme sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas de multiple de 2π , puisque sur un tel intervalle $|\sin(x/2)|$ est minoré par une constante strictement positive. De plus, la série trigonométrique est nulle quand x est multiple de 2π , donc il y a finalement convergence simple sur $\mathbb{R}$ tout entier. Par convergence uniforme, la somme de la série est continue sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas de multiple de 2π , mais peut présenter des discontinuités aux multiples de 2π . $\square$

On peut appliquer le résultat de l'exercice 6.1 au cas particulier où $b_n = 1/n$. Il s'agit bien du terme général d'une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0. Ainsi, la série trigonométrique $\sum \sin(nx)/n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier, et uniformément sur tout intervalle fermé ne contenant aucun multiple de 2π . On peut montrer que cette série converge vers une fonction f en dents de scie, 2π -périodique, valant $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ pour $x \in]0, 2\pi[$, et nulle en 0. La somme de la série est donc discontinue. Voir la figure 6.1 pour son graphique.

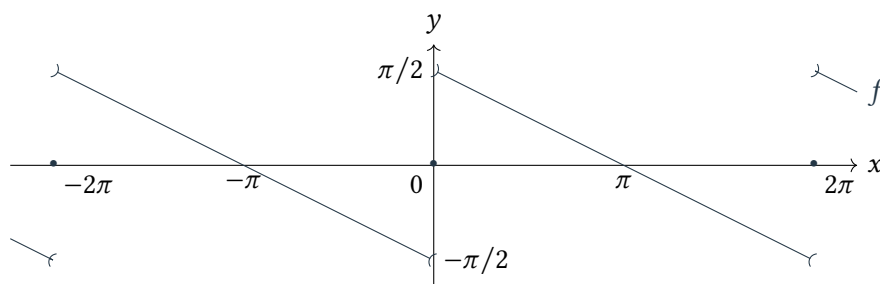


FIGURE 6.1 : Graphique de la fonction f en dents de scie.

Lorsque la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement convergente sur une période (donc sur $\mathbb{R}$), une formule simple permet de retrouver ses coefficients c_n à partir de sa somme.

Proposition 6.4 (Coefficients d'une série trigonométrique normalement convergente). Soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$, de somme notée S . Alors, la fonction S est continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, et pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$,

$$c_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) e^{-ipx} dx.$$

Démonstration. Sachant qu'il y a convergence normale de la série trigonométrique, la proposition 6.3 implique directement que la fonction S est continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, il en va de même de la fonction $x \mapsto S(x) e^{-ipx}$, puisqu'il s'agit de la somme totale de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i(n-p)x}$, qui est aussi normalement convergente car le facteur e^{-ipx} est de module égal à 1. En appliquant la proposition 5.2 aux sommes partielles sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ de cette série (qui convergent uniformément puisque la série converge normalement), on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N c_n e^{i(n-p)x} dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) e^{-ipx} dx.$$

Par linéarité, le calcul de l'intégrale des sommes partielles se ramène à observer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)x} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour N assez grand, l'intégrale de la somme partielle vaut donc $2\pi c_p$, d'où le résultat. $\square$

Le résultat ci-dessus concerne l'intégrale sur une période de la somme d'une série trigonométrique normalement convergente. On peut également s'intéresser à sa dérivée.

Proposition 6.5 (Dérivée d'une série trigonométrique normalement convergente). Soit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$, de somme notée S . Si la série trigonométrique dérivée $\sum_{n \in \mathbb{Z}} in c_n e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ avec une somme notée S_1 , alors la fonction S est continûment dérivable et sa dérivée vérifie $S' = S_1$.

Démonstration. On applique cette fois la proposition 5.3 aux sommes partielles de la série trigonométrique de départ (puisque la convergence normale de la série implique la convergence uniforme de la suite de ses sommes partielles). On peut donc dériver terme à terme cette série trigonométrique. $\square$

6.3 Séries de Fourier

Les séries de Fourier forment un cas particulier de séries trigonométriques dont les coefficients sont définis à partir d'une fonction périodique. Pour simplifier, on suppose que toutes les fonctions considérées ont pour période 2π . On se ramène facilement à cette situation en observant que la fonction $x \mapsto g\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ est 2π -périodique si la fonction g est T -périodique. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions 2π -périodiques définies sur $\mathbb{R}$ et continues par morceaux sur une période (l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par exemple). On peut le munir d'une structure d'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, selon respectivement qu'on considère des fonctions à valeurs réelles ou complexes).

La proposition 6.4 ci-dessus montre que si S désigne la somme d'une série trigonométrique normalement convergente, alors S appartient à l'espace vectoriel $\mathcal{E}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(S) e^{inx} \quad \text{avec} \quad c_n(S) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) e^{-inx} dx.$$

On se pose maintenant la question de savoir si cette propriété reste vraie quand S est remplacée par une fonction quelconque f de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$, qui n'est pas *a priori* la somme d'une série trigonométrique normalement convergente. On peut considérer comme ci-dessus les coefficients

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

pour $n \in \mathbb{Z}$, appelés *coefficients de Fourier* de f , puis considérer formellement la série trigonométrique

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}, \quad (6.1)$$

appelée *série de Fourier* de f . On se demande alors si cette série trigonométrique est convergente, en précisant selon quel mode de convergence, et si la somme de la série est bien égale ou non à la fonction f de départ. Si la fonction f peut être présentée comme la somme de sa série de Fourier, on dit qu'elle est *développable en série de Fourier*. C'est le cas de toute somme de série trigonométrique normalement convergente, mais ce n'est pas une généralité dans $\mathcal{E}$.

6.3.1 Coefficients de Fourier

On définit en fait deux types de coefficients de Fourier, selon qu'on privilégie une écriture en exponentielle complexe, ou en sinus et cosinus, pour la série de Fourier d'une fonction. Suivant les cas, il sera plus opportun de privilégier l'une ou l'autre des deux écritures.

Définition 6.4 (Coefficients de Fourier). Les *coefficients de Fourier exponentiels* d'une fonction $f \in \mathcal{E}$ sont les nombres définis pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx ;$$

et ses *coefficients de Fourier trigonométriques* sont les nombres définis pour tout entier $n \geq 1$ par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$

ainsi que les nombres

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \text{et} \quad b_0(f) = 0.$$

On fixe par convention $b_0(f) = 0$ afin de faciliter l'écriture de certaines formules. On remarque en outre que $a_0(f)$ est la valeur moyenne de la fonction f sur une période. De plus, la proposition 6.4 montre que si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ désigne une série trigonométrique normalement convergente, sa somme S vérifie bien $c_n(S) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui est en accord avec la discussion ci-dessus. Enfin, d'après la proposition 6.1, on peut dans la définition des coefficients de Fourier remplacer les intégrales de $-\pi$ à π par des intégrales sur une autre période, par exemple de 0 à 2π .

Exercice 6.2 (Coefficients de Fourier de la fonction en dents de scie). Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction 2π -périodique f donnée par la formule $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ pour $x \in]0, 2\pi[$, et nulle en 0.

Solution. On rappelle que f est représentée sur la figure 6.1. Comme on connaît directement l'expression de f entre 0 et 2π , il est judicieux de calculer les intégrales entre ces deux valeurs pour déterminer les coefficients de Fourier, et la proposition 6.1 nous y autorise. (En effet, $f(x)$ ne vaut pas $(\pi-x)/2$ entre $-\pi$ et 0, donc il serait faux de remplacer $f(x)$ par $(\pi-x)/2$ si on calculait les coefficients de Fourier avec des intégrales de $-\pi$ à π .) Le coefficient constant est nul car $\int_0^{2\pi} (\pi-x)/2 dx = 0$. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \cos(nx) dx = \left[\frac{\pi-x}{2} \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \frac{\sin(nx)}{n} dx = \left[\frac{-\cos(nx)}{2n^2} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

de sorte que $a_n(f) = 0$, et on a pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin(nx) dx = \left[\frac{\pi-x}{2} \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \frac{-\cos(nx)}{n} dx \\ &= \frac{-\pi}{2} \frac{-1}{n} - \frac{\pi}{2} \frac{-1}{n} - \left[\frac{\sin(nx)}{2n^2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{n}, \end{aligned}$$

de sorte que $b_n(f) = 1/n$. Comme l'indique la proposition 6.6 ci-dessous, on aurait pu anticiper le fait que $a_n(f) = 0$ en observant que f est impaire. Le résultat $b_n(f) = 1/n$ est cohérent avec le fait, annoncé après l'exercice 6.1, que $f(x)$ est la somme de la série trigonométrique $\sum_n \sin(nx)/n$. $\square$

Exercice 6.3 (Coefficients de Fourier du carré périodisé). Donner les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction 2π -périodique vérifiant $g(x) = x^2$ si $0 \leq x < 2\pi$.

Solution. On représente la fonction g sur la figure 6.2. Comme on connaît directement l'expression de g entre 0 et 2π , il est judicieux de calculer les intégrales entre ces deux valeurs pour déterminer les coefficients de Fourier, et la proposition 6.1 nous y autorise. On a donc, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 e^{-inx} dx.$$

Les intégrales de produits de polynômes par des exponentielles réelles ou complexes se calculent en intégrant par parties pour abaisser le degré du polynôme (voir proposition 3.7). Ici, on a pour $n \neq 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x^2 e^{-inx} dx &= \left[x^2 \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \frac{e^{-inx}}{-in} dx = \frac{4\pi^2 i}{n} - \left(\left[2x \frac{e^{-inx}}{(-in)^2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2 \frac{e^{-inx}}{(-in)^2} dx \right) \\ &= \frac{4\pi^2 i}{n} + \frac{4\pi}{n^2} + \left[2 \frac{e^{-inx}}{(-in)^3} \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{n^2} (1 + i\pi n). \end{aligned}$$

De plus, pour $n = 0$, on calcule simplement

$$\int_0^{2\pi} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3} \pi^3.$$

Les coefficients de Fourier de g sont $c_n(g) = \frac{2}{n^2} (1 + i\pi n)$ pour tout $n \neq 0$, ainsi que $c_0(g) = \frac{4}{3} \pi^2$. Les coefficients trigonométriques demandés sont donc $a_0(g) = 4\pi^2/3$, $a_n(g) = 4/n^2$ et $b_n(g) = -4\pi/n$ pour $n \geq 1$. $\square$

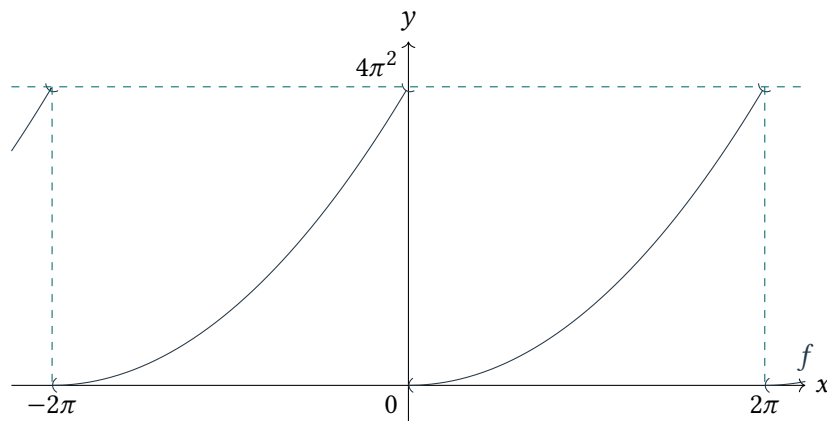


FIGURE 6.2 : Graphique de la fonction g carrée périodisée

On consigne dans l'énoncé suivant quelques propriétés élémentaires des coefficients de Fourier d'une fonction. La preuve est omise car elle ne repose que sur des propriétés basiques des intégrales, voir la section 3.1.2.

Proposition 6.6 (Propriétés des coefficients de Fourier). (i). Si $f \in \mathcal{E}$ est à valeurs réelles, alors les coefficients trigonométriques $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels pour tout $n \in \mathbb{N}$, et les coefficients exponentiels vérifient $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(ii). Si $f \in \mathcal{E}$ est impaire, alors tous les coefficients trigonométriques $a_n(f)$ sont nuls. De même, si $f \in \mathcal{E}$ est paire, alors tous les coefficients trigonométriques $b_n(f)$ sont nuls.

(iii). Pour tout entier $n \geq 1$, on a les relations

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad \text{et} \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)),$$

c'est-à-dire réciproquement

$$c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \quad \text{et} \quad c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}.$$

(iv). L'application $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$, de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ dans l'espace vectoriel des suites complexes indicées par $\mathbb{Z}$, est linéaire : quels que soient $f, g \in \mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(\lambda f + g) = \lambda c_n(f) + c_n(g).$$

De même, les applications $f \mapsto (a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $f \mapsto (b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$, de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ dans l'espace vectoriel des suites complexes indicées par $\mathbb{N}$, sont linéaires.

(v). Quelle que soit $f \in \mathcal{E}$, les suites $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont bornées : on a

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \quad \text{et} \quad \max\{|a_n(f)|, |b_n(f)|\} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ pour les coefficients exponentiels, et tout $n \in \mathbb{N}^*$ pour les trigonométriques.

Le dernier point indique que les coefficients de Fourier d'une fonction forment des suites bornées. On peut en fait démontrer qu'ils tendent vers 0 quand n tend vers l'infini. Cette propriété constitue le *lemme de Riemann-Lebesgue*.

Lemme 6.7 (Riemann-Lebesgue). *Quelle que soit $f \in \mathcal{E}$, les suites $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ convergent vers 0 à l'infini :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_{-n}(f) = 0$$

Démonstration. D'après la proposition 6.6, les coefficients de Fourier trigonométriques sont une combinaison linéaire des coefficients de Fourier exponentiels. Il suffit donc de prouver le résultat pour les coefficients exponentiels. De plus, pour tout entier $n \geq 1$, le coefficient $c_{-n}(f)$ est le nombre complexe conjugué du coefficient $c_n(\bar{f})$. Quitte à remplacer la fonction f par sa conjuguée, il suffit donc de montrer que $c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour établir le lemme.

Supposons que la fonction f est constante égale à K sur un sous-intervalle de bornes notées A et B de l'intervalle $]-\pi, \pi]$, et nulle ailleurs. On a alors

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_A^B K e^{-inx} dx = \frac{K}{2\pi} \left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_A^B = \frac{K}{2i\pi n} (e^{-inA} - e^{-inB}).$$

Grâce à l'inégalité triangulaire, on en déduit que $|c_n(f)| \leq \frac{|K|}{\pi n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Le résultat est prouvé pour une fonction constante sur un sous-intervalle de $]-\pi, \pi]$. Par linéarité et inégalité triangulaire, on en déduit le résultat pour les fonctions constantes par morceaux sur $]-\pi, \pi]$, puisque ce sont des sommes finies de fonctions de la forme précédente.

Pour conclure, on utilise le fait suivant : pour toute fonction f de l'ensemble $\mathcal{E}$ et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\tilde{f}$ périodique de période 2π et constante par morceaux sur $]-\pi, \pi]$ telle que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \leq \varepsilon.$$

D'après ce qui précède, $c_n(\tilde{f}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc il existe un entier n_0 tel que $|c_n(\tilde{f})| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi,

$$|c_n(f)| = |c_n(\tilde{f}) + c_n(f - \tilde{f})| \leq |c_n(\tilde{f})| + |c_n(f - \tilde{f})| \leq |c_n(\tilde{f})| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Cela implique comme attendu que $c_n(f)$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. □

Si la série de Fourier (6.1) associée à une fonction f converge vers f , alors cette fonction est entièrement déterminée par la donnée de ses coefficients de Fourier. On peut donc commencer par se demander si c'est effectivement le cas en général, c'est-à-dire si deux fonctions distinctes peuvent avoir les mêmes suites de coefficients. Par linéarité des coefficients de Fourier, cela revient à se demander si la fonction constante égale à 0 est la seule fonction de $\mathcal{E}$ à avoir tous ses coefficients nuls. La réponse est évidemment non, puisque par exemple la fonction égale à 0 partout, et égale à 1 aux multiples de 2π , n'est pas uniformément nulle mais a tous ses coefficients nuls. Si l'on ajoute une hypothèse de continuité, alors la réponse devient positive, comme l'indique l'énoncé suivant.

Proposition 6.8 (Injectivité des coefficients de Fourier). (i). Soit f une fonction de $\mathcal{E}$. S'il existe un point x_0 en lequel la fonction f est continue et ne s'annule pas, alors la fonction f admet au moins un coefficient de Fourier non nul.

(ii). En particulier, si f désigne une fonction continue et 2π -périodique, alors f est la fonction nulle si et seulement si tous ses coefficients de Fourier sont nuls.

(iii). Les applications $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ et $f \mapsto (a_n(f), b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$, définies sur l'espace vectoriel des fonctions continues 2π -périodiques, et à valeurs respectivement dans l'espace vectoriel des suites complexes indicées par $\mathbb{Z}$ et dans l'espace vectoriel des suites de couples de complexes indicées par $\mathbb{N}$, sont injectives.

Démonstration. Supposons par l'absurde que tous les coefficients de Fourier de la fonction f sont nuls. Il existe un nombre complexe λ de module égal à 1 tel que $|f(x_0)| = \lambda f(x_0)$, et la fonction λf vérifie donc $\lambda f(x_0) > 0$, ainsi que $c_n(\lambda f) = \lambda c_n(f) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. La fonction réelle $h = \Re(\lambda f)$ vérifie aussi $c_n(h) = (\lambda c_n(f) + \bar{\lambda} c_{-n}(f))/2 = 0$ pour tout n , et $h(x_0) = |f(x_0)| > 0$. Quitte à remplacer f par h , on peut donc supposer que f est à valeurs réelles et que $f(x_0) = y_0 > 0$. Sachant que la fonction f est continue au point x_0 , il existe un réel δ tel que $0 < \delta < \pi/2$ et $f(x) \geq y_0/2$ pour tout réel $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Si P est un polynôme trigonométrique (c'est-à-dire un polynôme en cosinus et sinus), on a

$$\int_{x_0 - \pi}^{x_0 + \pi} f(x) P(x) dx = 0. \quad (6.2)$$

En effet, en utilisant les formules d'Euler et en développant, on observe que $P(x)$ est une combinaison linéaire finie d'exponentielles complexes e^{inx} . Par linéarité, l'intégrale du produit fP sur une période est donc une combinaison linéaire finie de coefficients de Fourier de f , donc cette intégrale vaut 0.

On applique cela au polynôme trigonométrique P_N , avec $N \in \mathbb{N}$, défini pour tout réel x par

$$P_N(x) = (1 + \cos(x - x_0) - \cos \delta)^N.$$

On souhaite alors estimer le comportement de l'intégrale figurant dans (6.2) pour P_N , quand $N \rightarrow +\infty$.

L'idée à exploiter est que, quand N croît, la fonction P_N prend des valeurs de plus en plus grandes à l'intérieur de l'intervalle $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, et des valeurs de plus en plus petites en dehors de cet intervalle. Pour préciser cela, on commence par étudier rapidement les variations de $P_1(x)$ quand $x \in [x_0 - \pi, x_0 + \pi]$, et on obtient les faits suivants :

- si $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, alors $P_1(x) \geq 1$;
- si $x \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, alors $-\cos \delta \leq P_1(x) < 1$, et donc $|P_1(x)| < 1$;
- pour tout $\eta > 0$ tel que $0 < \delta + \eta < \pi/2$, si on a $|x - x_0| \geq \delta + \eta$, alors $-\cos \delta \leq P_1(x) \leq 1 + \cos(\delta + \eta) - \cos \delta$, et donc $|P_1(x)| \leq \alpha < 1$, où $\alpha = \max\{\cos \delta, 1 + \cos(\delta + \eta) - \cos \delta\}$.

En élevant toutes ces inégalités à la puissance N , on peut aisément en déduire des bornes concernant le polynôme trigonométrique $P_N = (P_1)^N$. Voir le graphique de la figure 6.3 pour le graphe des polynômes trigonométriques P_N .

On découpe alors l'intervalle d'intégration aux points $x_0 - \delta - \eta$, $x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$ et $x_0 + \delta + \eta$, et on estime chacune des intégrales correspondantes. Dans ce qui suit, K désigne une borne uniforme sur la fonction $|f|$. (La fonction f est bornée puisqu'elle est périodique et continue par morceaux.) On a

$$\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) P_N(x) dx \geq \frac{y_0}{2} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} P_N(x) dx \geq \delta y_0. \quad (6.3)$$

Pour l'intégrale de $x_0 + \delta$ à $x_0 + \delta + \eta$, et aussi par symétrie pour celle de $x_0 - \delta - \eta$, on a

$$\left| \int_{x_0+\delta}^{x_0+\delta+\eta} f(x) P_N(x) dx \right| \leq \int_{x_0+\delta}^{x_0+\delta+\eta} |f(x) P_N(x)| dx \leq K \eta.$$

Pour l'intégrale de $x_0 + \delta + \eta$ à $x_0 + \pi$, et aussi par symétrie pour celle de $x_0 - \pi$ à $x_0 - \delta - \eta$, on a

$$\left| \int_{x_0+\delta+\eta}^{x_0+\pi} f(x) P_N(x) dx \right| \leq \int_{x_0+\delta+\eta}^{x_0+\pi} |f(x) P_N(x)| dx \leq K (\pi - \delta - \eta) \alpha^N.$$

Avec (6.2) et la relation de Chasles, on en déduit que l'intégrale de gauche dans (6.3) est égale à

$$\begin{aligned} & - \int_{x_0-\pi}^{x_0-\delta-\eta} f(x) P_N(x) dx - \int_{x_0-\delta-\eta}^{x_0-\delta} f(x) P_N(x) dx - \int_{x_0+\delta}^{x_0+\delta+\eta} f(x) P_N(x) dx - \int_{x_0+\delta+\eta}^{x_0+\pi} f(x) P_N(x) dx \\ & \leq 2K\eta + 2K(\pi - \delta - \eta)\alpha^N. \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers l'infini, le deuxième terme de la borne tend vers 0. On en déduit avec (6.3) que $\delta y_0 \leq 2K\eta$. Finalement, en faisant tendre η vers 0, on obtient $\delta y_0 \leq 0$, soit une contradiction. Ainsi, la fonction f admet nécessairement au moins un coefficient de Fourier non nul.

Pour le deuxième point, supposons f continue 2π -périodique. D'après ce qui précède, si f est non nulle en un point x_0 , elle admet un coefficient de Fourier non nul. Par contraposée, si f a tous ses coefficients nuls, alors cette fonction s'annule partout. La réciproque est triviale car tous les coefficients de Fourier de la fonction nulle sont nuls.

Pour montrer l'injectivité de $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$, prenons deux fonctions continues 2π -périodiques f et g vérifiant $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par linéarité, $c_n(f - g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et donc $f - g = 0$, puis $f = g$. On a la même propriété pour les coefficients de Fourier trigonométriques, du fait de leurs liens avec les coefficients exponentiels, voir la proposition 6.6. $\square$

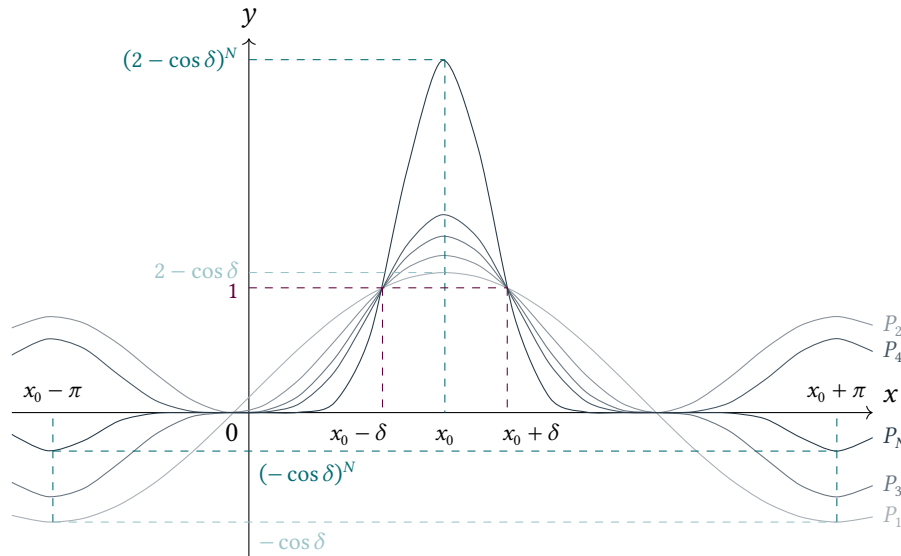


FIGURE 6.3 : Les polynômes trigonométriques P_N

6.3.2 Séries de Fourier de fonctions régulières

Comme évoqué au début de cette section 6.3, une question principale concerne la convergence des séries de Fourier des fonctions de l'ensemble $\mathcal{E}$, et l'expression de leurs sommes.

Définition 6.5 (Séries de Fourier). Soit f une fonction de l'ensemble $\mathcal{E}$. La *série de Fourier exponentielle* de f est la série trigonométrique définie à partir des coefficients de Fourier exponentiels de f par

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}.$$

La *série de Fourier trigonométrique* de f est la série trigonométrique définie à partir des coefficients de Fourier trigonométriques de f par

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)).$$

On sait que si une de ces deux séries converge (simplement, uniformément, ou normalement), alors l'autre converge, et les deux sommes sont égales. Dans ce cas, si la somme vaut $f(x)$, on dit que f est *développable en série de Fourier*, ou encore qu'elle est *somme de sa série de Fourier*.

Cette définition s'interprète en traitement du signal. Si une fonction g modélise un signal périodique de période T , alors la fonction f définie par $f(x) = g\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ est 2π -périodique. Si de plus f est somme de sa série de Fourier, alors on peut écrire pour tout réel x ,

$$g(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n(f) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \right).$$

Ainsi, le signal g peut se voir comme une superposition de fonctions sinusoïdales, appelées *harmoniques*, de période T/n , soit de fréquence n/T . La décomposition en série de Fourier permet donc d'effectuer une analyse fréquentielle du signal, en identifiant les fréquences les plus importantes.

Il est souvent délicat de déterminer si une fonction donnée de $\mathcal{E}$ est développable en série de Fourier. On a cependant vu en préambule de cette section 6.3 que c'est le cas si la fonction est la somme d'une série trigonométrique normalement convergente. On a même le résultat suivant.

Proposition 6.9 (Convergence normale des séries de Fourier). Soit f une fonction 2π -périodique et continue, telle que les deux séries numériques $\sum c_n(f)$ et $\sum c_{-n}(f)$ convergent absolument. Alors, la fonction f est somme de sa série de Fourier, et cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. La proposition 6.2 implique que la série de Fourier de la fonction f converge normalement. Notons S la somme de cette série. Les propositions 6.3 et 6.4 montrent que S est une fonction continue et 2π -périodique dont les coefficients de Fourier vérifient $c_n(S) = c_n(f)$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. Enfin, la remarque qui suit la proposition 6.8 permet de conclure que $S = f$. $\square$

Si la fonction f est suffisamment régulière, par exemple au moins deux fois continûment dérivable (de classe C^2), l'hypothèse de la proposition 6.9 est satisfaite car on peut bien contrôler la décroissance à l'infini des coefficients de Fourier de la fonction. C'est l'objet de l'énoncé qui suit.

Proposition 6.10 (Majoration des coefficients de Fourier). Soit f une fonction 2π -périodique et p fois continûment dérivable (c'est-à-dire de classe C^p) sur $\mathbb{R}$, pour un certain entier $p \geq 1$. Alors, pour tout entier relatif $n \neq 0$,

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi |n|^p} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(p)}(x)| dx.$$

Démonstration. En procédant à une intégration par parties, on observe que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \left[f(x) \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \frac{e^{-inx}}{-in} dx.$$

Comme f et $x \mapsto e^{-inx}$ sont 2π -périodiques, le terme entre les crochets prend la même valeur en $-\pi$ et en π , donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx.$$

En appliquant cette identité aux dérivées successives $f', f'', \dots, f^{(p-1)}$ de la fonction f , qui sont aussi des fonctions 2π -périodiques, on conclut que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{(in)^p} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(x) e^{-inx} dx.$$

Par conséquent, en divisant par 2π et en prenant le module, on a finalement, à l'aide de la borne de la proposition 6.6,

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f^{(p)})|}{|n|^p} \leq \frac{1}{2\pi |n|^p} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(p)}(x)| dx. \quad \square$$

Si $p = 2$, la décroissance des coefficients de Fourier est donc suffisante pour appliquer la proposition 6.9.

Proposition 6.11 (Convergence normale des séries de Fourier des fonctions de classe C^2). Soit f une fonction 2π -périodique et deux fois continûment dérivable (de classe C^2) sur $\mathbb{R}$. Alors, la fonction f est somme de sa série de Fourier, et cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. La proposition 6.10 appliquée au cas où $p = 2$ implique que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\max\{|c_n(f)|, |c_{-n}(f)|\} \leq \frac{1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| dx.$$

Par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum 1/n^2$, on en déduit que les séries numériques $\sum c_n(f)$ et $\sum c_{-n}(f)$ sont absolument convergentes. On conclut avec la proposition 6.9. $\square$

Exercice 6.4 (Calcul de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ et de la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$). Soit f la fonction paire et 2π -périodique qui vérifie $f(x) = x(\pi - x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$. Exprimer la série de Fourier de f , et montrer qu'elle converge normalement vers f . En déduire la valeur de la somme de la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et de celle de la série de Riemann alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Solution. On représente le graphe de f sur la figure 6.4. Comme f n'est pas C^2 (en tout point multiple de π , sa dérivée à gauche et sa dérivée à droite ne sont pas les mêmes), on ne peut pas utiliser la proposition 6.11.

Cependant, les coefficients de Fourier décroissent assez vite pour pouvoir appliquer la proposition 6.9. Comme f est paire, on privilégie les coefficients de Fourier trigonométriques puisque $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, voir la proposition 6.6. Il reste à calculer les coefficients $a_n(f)$. Par parité de f , on se ramène à intégrer de 0 à π . On a

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\pi \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ensuite, pour tout $n \geq 1$, on intègre par parties pour abaisser le degré du polynôme :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[x(\pi - x) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \\ &= -\frac{2}{\pi n} \left(\left[(\pi - 2x) \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -2 \frac{-\cos(nx)}{n} dx \right) \\ &= -\frac{2}{\pi n} \left(\frac{\pi}{n} (1 + (-1)^n) - \frac{2}{n} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \right) = -\frac{2}{n^2} (1 + (-1)^n). \end{aligned}$$

On remarque en particulier que les coefficients d'indice impair sont nuls. Les coefficients d'indice pair de la forme $n = 2k$ valent eux $a_{2k}(f) = -1/k^2$.

Grâce au lien entre coefficients donné dans la proposition 6.6, on en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$c_{-n}(f) = c_n(f) = \frac{a_n(f)}{2} = -\frac{1}{n^2} (1 + (-1)^n) \quad \text{donc} \quad \max\{|c_n(f)|, |c_{-n}(f)|\} \leq \frac{2}{n^2},$$

avec une borne qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Par comparaison, on peut donc appliquer la proposition 6.9. On en déduit que la série de Fourier de f converge normalement vers f . Finalement, en revenant aux coefficients trigonométriques, on a pour tout réel x ,

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2}.$$

Les conséquences de cette formule sont multiples. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

en choisissant respectivement $x = 0$ et $x = \pi/2$ dans la formule précédente. □

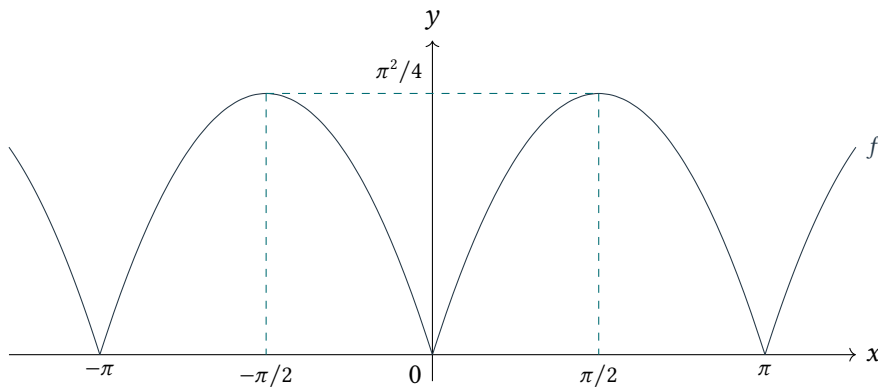


FIGURE 6.4 : La fonction $f(x) = x(\pi - x)$ périodisée

6.3.3 Théorème de Dirichlet

L'étude de la convergence des séries de Fourier de fonctions peu régulières est plus délicate. Dans ce cas, on n'a pas toujours convergence uniforme ou normale de la série. Cependant, on peut souvent appliquer le résultat de convergence simple suivant dû à Dirichlet, valable pour les fonctions *continûment dérivables par morceaux*.

Définition 6.6 (Fonctions continûment dérivables par morceaux). Une fonction f est *continûment dérivable par morceaux*, ou encore qu'elle est *de classe C^1 par morceaux*, sur un segment $[a, b]$ s'il existe un nombre fini de points $a = y_0 < \dots < y_n = b$ tels que la fonction f est de classe C^1 sur chaque intervalle $]y_p, y_{p+1}[$, et les fonctions f et f' admettent des limites finies à droite en chaque y_p et à gauche en chaque y_{p+1} .

On rappelle au passage que les fonctions continues par morceaux sont celles relevant de la définition 3.2. Pour toute fonction continue par morceaux f définie sur $\mathbb{R}$, on considère la *régularisée*

$$f_*(x) = \frac{1}{2} (f(x-) + f(x+)),$$

où $f(x-)$ et $f(x+)$ sont respectivement les limites à gauche et à droite de la fonction f au point x . On a $f_*(x) = f(x)$ si f est continue en x . On admet alors le résultat suivant.

Théorème 6.12 (Dirichlet). Soit f une fonction 2π -périodique et continûment dérivable par morceaux sur une période. Alors, la série de Fourier de f converge simplement en tout point $x \in \mathbb{R}$ et sa somme vérifie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = f_*(x).$$

On a privilégié ici l'écriture exponentielle pour la série de Fourier, mais le résultat est également valable pour l'écriture trigonométrique, puisque les deux séries sont de même nature, et sont de somme égale s'il y a convergence.

Exercice 6.5 (Série de Fourier de l'indicatrice de l'intervalle $]0, \pi]$ périodisée). Soit f la fonction 2π -périodique qui vérifie $f(x) = 0$ si $x \in]-\pi, 0]$, et $f(x) = 1$ si $x \in]0, \pi]$. Calculer les coefficients exponentiels de Fourier de f , écrire sa série de Fourier, et en déterminer la somme.

Solution. On représente sur la figure 6.5 le graphe de la fonction f . Pour tout entier relatif $n \neq 0$, on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-inx}}{-in} \right]_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{2i\pi n}.$$

En particulier, les coefficients d'indice n pair sont nuls. Si n est impair, on a $c_n(f) = \frac{1}{i\pi n}$. Il reste à calculer

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

La série de Fourier de la fonction f s'écrit alors

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ \text{impair}}} \frac{e^{inx}}{i\pi n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Comme f est 2π -périodique et continûment dérivable par morceaux, on peut lui appliquer le théorème 6.12. La série de Fourier converge simplement en tout point $x \in \mathbb{R}$ vers $f(x)$ si x n'est pas multiple de π (point de continuité), et vers $1/2$ si x est multiple de π (point de discontinuité). Ainsi, la somme de la série de Fourier de f , c'est-à-dire sa régularisée f_* , admet le graphe représenté sur la figure 6.6. $\square$

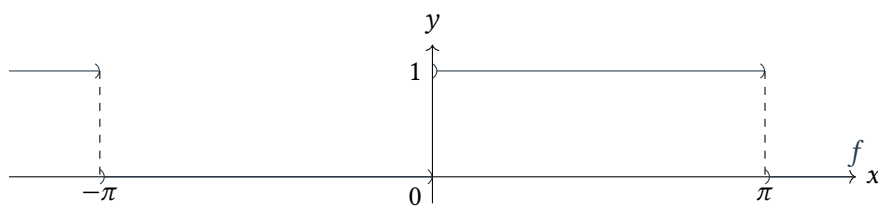


FIGURE 6.5 : Fonction indicatrice de l'intervalle $]0, \pi]$

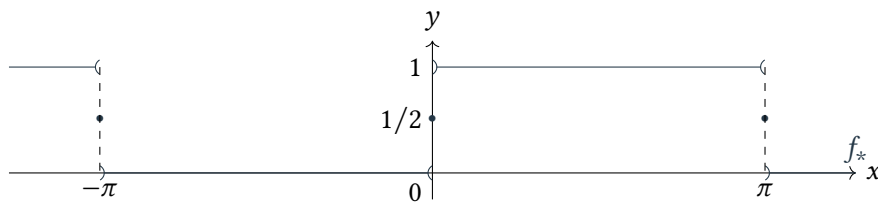


FIGURE 6.6 : Régularisée de la fonction indicatrice de l'intervalle $]0, \pi]$

6.3.4 Formule de Parseval

La formule de Parseval montre que la somme des modules au carré des coefficients de Fourier d'une fonction continue par morceaux est égale à la valeur moyenne du module au carré de cette fonction. En traitement du signal, ce résultat s'interprète comme suit : la valeur moyenne sur une période du module au carré représente la puissance moyenne du signal (à un facteur physique près). La formule de Parseval la décompose en contributions fréquentielles. L'énergie sur une période s'obtient en multipliant cette moyenne par la période.

Proposition 6.13 (Formule de Parseval). *Pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$, la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ est convergente et a pour somme*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

L'hypothèse portant ici sur f est plus faible que celle faite dans les énoncés de convergence présentés ci-dessus. Certaines fonctions vérifient la formule de Parseval sans qu'il y ait convergence de leur série de Fourier.

En exploitant les liens entre les coefficients de Fourier exponentiels et les coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction, on obtient aussi que pour toute fonction f à valeurs réelles de l'ensemble $\mathcal{E}$, les deux séries numériques $\sum a_n(f)^2$ et $\sum b_n(f)^2$ sont convergentes et

$$a_0(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

Exercice 6.6. Appliquer la formule de Parseval à la fonction f de l'exercice 6.5. Retrouver les valeurs des sommes de la série de Riemann et de la série de Riemann alternée de l'exercice 6.4.

Solution. La fonction f appartient bien à l'espace $\mathcal{E}$. Avec les valeurs des coefficients de Fourier de f calculées dans l'exercice 6.5, la formule de Parseval conduit à

$$\left| \frac{1}{2} \right|^2 + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \text{ impair}}} \left| \frac{1}{i\pi n} \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1^2 dx \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On peut alors retrouver les valeurs des sommes de la série de Riemann et de la série de Riemann alternée de l'exercice 6.4. En distinguant les termes d'indice pair des termes d'indice impair, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

La somme de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est donc solution d'une équation du premier degré. En la résolvant, on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On peut ensuite retrouver la somme de la série alternée correspondante. En effet, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12},$$

toujours en distinguant les termes d'indice pair des termes d'indice impair. □

Deuxième partie

Probabilités et statistiques

Quelques notions de probabilités

L'objectif de ce chapitre est de rappeler des notions de probabilités vues au lycée et d'en introduire quelques nouvelles. Nous nous limitons aux concepts de base qui fournissent les outils nécessaires à la résolution d'exercices simples. Nous aborderons des définitions clés, des exemples et des propriétés utiles pour mieux comprendre et manipuler les probabilités dans divers contextes.

7.1 Généralités

Lors d'une expérience aléatoire, on considère un ensemble d'éventualités. D'un point de vue mathématique, cet ensemble est appelé "univers" et on le note usuellement Ω . Dans le cadre de ce chapitre, on va étudier la probabilité d'événements, c'est-à-dire de sous-ensembles admissibles de Ω . Dans le cas infini, on fixe une famille de sous-ensembles de Ω contenant Ω , stable par complémentaire et par union dénombrable, appelée une *tribu*.

Exemple 7.1. On veut étudier le lancer d'un dé à six faces. Pour modéliser cette expérience aléatoire, on peut considérer que l'univers est l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Par exemple, l'événement "obtenir un six" correspond au sous-ensemble $\{6\}$ de Ω . L'événement "obtenir un nombre impair" correspond au sous-ensemble $\{1, 3, 5\}$ de Ω .

On munit l'univers Ω d'une *mesure de probabilité* associée à l'expérience aléatoire. Dans le cas du lancer de dé, si celui-ci est équilibré, on considérera la probabilité, aussi appelée la loi, uniforme sur Ω qui attribue la même probabilité à chaque face, c'est-à-dire $1/6$.

Définition 7.1 (Événements). On considère deux événements A et B de Ω , c'est-à-dire deux sous-ensembles admissibles de Ω . On définit :

- l'événement *contraire* de A , noté $\bar{A}$, par $\bar{A} = \Omega \setminus A$, c'est-à-dire le complémentaire de A dans Ω , constitué des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A ;
- l'*intersection* de A et B , notée $A \cap B$, constituée des éléments communs à A et à B , c'est-à-dire que l'événement $A \cap B$ se produit si et seulement si A et B se produisent tous deux ;
- l'*union* de A et B , notée $A \cup B$, constituée des éléments appartenant à A ou à B , c'est-à-dire que l'événement $A \cup B$ se produit si et seulement si A ou B se produit, ou bien encore les deux à la fois (ou non exclusif).

Définition 7.2 (Mesure de probabilité). Une *mesure de probabilité* attribue à chaque événement une valeur dans $[0, 1]$, avec $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Elle est *dénombrablement additive* : pour toute suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

En particulier, si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Deux événements A et B avec $A \cap B = \emptyset$ ne peuvent se produire ensemble : ils sont *incompatibles*.

Proposition 7.1 (Propriétés d'une mesure de probabilité). Si $\mathbb{P}$ désigne une mesure de probabilité sur Ω , on a les propriétés suivantes :

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- pour tout événement A de Ω , on a $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- pour tous événements A et B de Ω (pas nécessairement incompatibles), on a la formule du crible, ou encore le

principe d'inclusion-exclusion :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Démonstration. Les deux premières propriétés découlent de la définition. Pour la troisième, on écrit

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus (A \cap B)) \quad \text{et} \quad B = (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B)),$$

où les événements dont on prend l'union sont incompatibles. On en déduit que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)).$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)).$$

La somme des deux derniers termes est égale à la probabilité de l'événement $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$, car celui-ci peut s'écrire comme l'union des événements incompatibles $A \setminus (A \cap B)$ et $B \setminus (A \cap B)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}((A \cup B) \setminus (A \cap B)).$$

De même, la somme des deux derniers termes est égale à la probabilité de l'événement $A \cup B$, car celui-ci peut s'écrire comme l'union des événements incompatibles $A \cap B$ et $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Donc,

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cup B). \quad \square$$

7.2 Probabilités conditionnelles et indépendance

La notion de probabilité conditionnelle apparaît quand on fait l'hypothèse qu'un certain événement B s'est déjà produit et qu'on cherche la probabilité qu'un événement A se produise alors.

Définition 7.3 (Probabilité conditionnelle). Soient A et B deux événements de Ω , avec $\mathbb{P}(B) > 0$. La *probabilité de A sachant B* est définie par

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

On déduit de la définition la *formule des probabilités composées* :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B).$$

On remarque aussi que

$$\mathbb{P}(\bar{A} | B) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

La deuxième égalité vient du fait que B est l'union de $\bar{A} \cap B$ et $A \cap B$, qui sont incompatibles. Donc,

$$\mathbb{P}(\bar{A} | B) = 1 - \mathbb{P}(A | B).$$

De plus, si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, on a la *formule de Bayes* :

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(B | A) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Pour $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, on a enfin la *formule des probabilités totales* :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A | \bar{B}) \mathbb{P}(\bar{B}).$$

La première égalité provient du fait que A est l'union des événements incompatibles $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$. On peut étendre cette formule à n'importe quelle famille $B_1, \dots, B_n$ d'événements incompatibles de probabilités strictement positives dont l'union vaut Ω , au lieu de considérer simplement B et $\bar{B}$. On a alors en général

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B_1) \mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(A | B_n) \mathbb{P}(B_n).$$

Définition 7.4 (Indépendance). Deux événements A et B de Ω sont dits *indépendants* si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Si $P(B) > 0$, la condition est équivalente à $P(A | B) = P(A)$. Cette condition signifie que faire l'hypothèse que B est réalisé n'a aucune influence sur la probabilité que A soit réalisé.

7.3 Équiprobabilité et lien avec le dénombrement

Le calcul de la probabilité d'un événement A se ramène souvent au dénombrement de l'ensemble des cas où l'événement A se produit. C'est le cas quand il y a *équiprobabilité*, c'est-à-dire quand Ω est un ensemble fini dont tous les éléments ont la même probabilité. Pour tout $\omega \in \Omega$, la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega\}$ est alors

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{Card } \Omega},$$

où $\text{Card } \Omega$ est le cardinal de Ω , c'est-à-dire son nombre d'éléments.

Exemple 7.2 (Lancer de dé). On revient au lancer de dé. L'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est un ensemble fini. Chaque face du dé est codée par un élément ω de Ω et sa probabilité d'apparaître est $P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{Card } \Omega} = \frac{1}{6}$.

Plus généralement, pour tout événement A de Ω , on a

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{\text{“nombre de cas favorables à } A\text{”}}{\text{“nombre de cas total”}}.$$

Le nombre de cas à considérer peut se calculer avec des outils de dénombrement, comme les suivants :

- nombre de permutations d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire le nombre de façons de ranger n objets numérotés dans n boîtes numérotées, sachant que chaque boîte contient un seul objet ; ce nombre est

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n ;$$

- nombre de choix possibles de k objets numérotés parmi n . Ce nombre est donné par le coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1) \cdots 2 \cdot 1}.$$

On rappelle les formules suivantes :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On a aussi

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

ainsi que le *triangle de Pascal* qui donne la relation :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

7.4 Variables aléatoires

Définition 7.5 (Variable aléatoire). Une *variable aléatoire réelle* est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\{X \leq a\}$ est un événement pour tout réel a . Elle est *discrète* si elle prend presque sûrement ses valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable. Nous étudierons aussi les variables à *densité*, définies ci-dessous. Ces deux catégories ne couvrent pas toutes les lois possibles ; le seul fait de prendre des valeurs dans un ensemble non dénombrable ne garantit pas l'existence d'une densité.

Intuitivement, X est une valeur aléatoire associée à l'issue de l'expérience.

Exemples 7.3. • Si X désigne le résultat d'un lancer de dé, alors X est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Si T désigne la durée de vie d'une ampoule électrique, alors T peut être modélisée par une variable aléatoire à densité, à valeurs dans un sous-intervalle de $\mathbb{R}^+$.

7.4.1 Variables discrètes

Définition 7.6 (Loi, espérance, variance et écart-type; cas fini). Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans un sous-ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ de $\mathbb{R}$.

- La *loi* de X correspond à la donnée de x_i et $\mathbb{P}(X = x_i)$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
- L'*espérance* de X est définie par $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i)$.
- La *variance* de X est définie par $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.
- L'*écart-type* de X est défini par $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Ici, $\mathbb{P}(X = x_i)$ est la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$, qui désigne de façon condensée l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) = x_i$. La plupart du temps, on décrira X directement *via* sa loi sans revenir à l'univers sous-jacent Ω . Cela revient à choisir directement pour univers Ω l'ensemble des valeurs prises par X . On a toujours $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) = 1$ car les événements $\{X = x_i\}$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, sont incompatibles et leur union vaut Ω tout entier.

L'espérance, la variance et l'écart-type de X sont des quantités qui ne sont pas aléatoires et qui dépendent uniquement de la loi de X . La variance de X mesure l'écart quadratique moyen entre X et son espérance : plus elle est grande, plus X est dispersée autour de son espérance ; plus elle est petite, plus X est concentrée.

Enfin, si φ est une fonction définie sur $\{x_1, \dots, x_n\}$, on note de manière générale

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

Définition 7.7 (Loi, espérance, variance et écart-type; cas infini dénombrable). On considère une variable aléatoire discrète X à valeurs dans un sous-ensemble infini dénombrable $\{x_1, x_2, \dots\}$ de $\mathbb{R}$. On remplace n par l'infini dans la définition précédente (si les formules ainsi obtenues ont bien un sens).

- La *loi* de X correspond à la donnée de x_i et $\mathbb{P}(X = x_i)$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots\}$.
- L'*espérance* de X est définie par $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ si la série converge absolument.
- La *variance* de X est définie comme dans la définition 7.6 si les séries sous-jacentes à cette formule convergent absolument.
- L'*écart-type* de X est défini comme dans la définition 7.6.

7.4.2 Variables à densité

Pour de telles variables X , on ne peut en général pas décrire la loi de X en donnant simplement $\mathbb{P}(X = x)$ pour toutes les valeurs x que X peut prendre. En effet, on va voir que $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout réel x . On va plutôt utiliser la notion de densité de probabilité pour décrire la loi de X .

Définition 7.8 (Densité de probabilité). Une *densité de probabilité* est une fonction f positive sur $\mathbb{R}$, intégrable, dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. Dans les exemples de ce cours, f est continue par morceaux, avec éventuellement

des singularités isolées où l'intégrale est généralisée, c'est-à-dire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Définition 7.9 (Loi, espérance, variance et écart-type; cas à densité). Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

- On dit qu'une variable aléatoire X admet pour densité la fonction f , ou que la loi de X est donnée par la densité f , si pour tous réels a et b vérifiant $a \leq b$, on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

- L'espérance de X est définie par $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ si l'intégrale converge absolument.
- La variance de X est définie comme dans la définition 7.6 si les intégrales généralisées sous-jacentes à cette formule convergent absolument.
- L'écart-type de X est défini comme dans la définition 7.6.

Ici, $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ est la probabilité de l'événement $\{a \leq X \leq b\}$, qui désigne de façon condensée l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $a \leq X(\omega) \leq b$. Il découle aussi de la définition que pour tout réel a , on a

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X < a) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(X > a),$$

et que pour tous réels $a \leq b$, on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X > a) - \mathbb{P}(X > b).$$

Pour tout réel x fixé, il serait faux de dire que $\mathbb{P}(X = x) = f(x)$, puisqu'on a en fait

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(x \leq X \leq x) = \int_x^x f(t) dt = 0.$$

Enfin, si φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on note de manière générale

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx$$

si cette intégrale généralisée converge absolument. Par exemple, on a donc

$$\text{Var}(X) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \right) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2$$

si on a bien convergence absolue de ces intégrales généralisées.

7.4.3 Sommes de variables aléatoires

Décrivons le comportement de l'espérance et de la variance d'une somme de variables aléatoires réelles, en particulier quand elles sont indépendantes et identiquement distribuées au sens suivant.

Définition 7.10 (Indépendance et identité de loi). • On dit que deux variables aléatoires réelles X et Y sont *indépendantes* si pour tous réels a et b , les événements $\{X \leq a\}$ et $\{Y \leq b\}$ sont indépendants :

$$\mathbb{P}(X \leq a \text{ et } Y \leq b) = \mathbb{P}(X \leq a) \cdot \mathbb{P}(Y \leq b).$$

- Plus généralement, on dit que n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont *indépendantes* si pour tous réels $a_1, \dots, a_n$, les événements $\{X_i \leq a_i\}$, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, sont indépendants :

$$\mathbb{P}(X_1 \leq a_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n \leq a_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq a_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq a_n).$$

- Des variables aléatoires réelles sont dites *identiquement distribuées* si elles ont la même loi.

Pour signifier que des variables aléatoires réelles sont indépendantes et identiquement distribuées, on utilise souvent l'abréviation "i.i.d."

Proposition 7.2 (Espérance et variance d'une combinaison linéaire de variables aléatoires). Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, et soit λ un nombre réel.

- Si X et Y ont des espérances finies, alors $\lambda X + Y$ aussi et

$$\mathbb{E}[\lambda X + Y] = \lambda \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

- Si X a une variance finie, alors λX aussi et

$$\text{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \text{Var}(X).$$

- Si les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes, et admettent des variances finies, alors leur somme aussi et

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

On en déduit que si $X_1, \dots, X_n$ désignent des variables aléatoires pour lesquelles l'espérance existe, on a

$$\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n].$$

De plus, si ces variables sont indépendantes et admettent toutes une variance, on a

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n).$$

Par conséquent, si ces variables sont indépendantes et identiquement distribuées, on a

$$\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = n \mathbb{E}[X_1] \quad \text{et} \quad \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = n \text{Var}(X_1).$$

7.5 Lois usuelles

Présentons des lois de probabilité qui sont très fréquemment utilisées et qui sont à connaître.

7.5.1 Variables discrètes

Loi uniforme

Définition 7.11 (Loi uniforme sur un ensemble fini). Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$. On dit qu'une variable X suit la *loi uniforme* sur E , et on note $X \sim U(E)$, si X prend ses valeurs dans E et si toutes les valeurs de x_i ont la même probabilité de se réaliser, c'est-à-dire que pour tout indice $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

Loi de Bernoulli

Définition 7.12 (Loi de Bernoulli). Soit p un réel de l'intervalle $]0, 1[$. On dit qu'une variable X suit la *loi de Bernoulli* de paramètre p , et on note $X \sim \text{Ber}(p)$, si X prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ et si

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Une telle variable X permet de modéliser une épreuve aléatoire, dite *épreuve de Bernoulli*, où on a seulement deux issues possibles : le succès qui se produit avec probabilité p , et l'échec qui se produit avec probabilité $1 - p$. On note $X = 1$ en cas de succès à l'épreuve et $X = 0$ en cas d'échec.

Exemple 7.4 (Pile ou face). Jeu de pile ou face avec une pièce équilibrée. On parie par exemple sur pile, ce qui représente le succès à l'épreuve. Alors, la variable X correspondante, qui vaut 1 si la pièce tombe sur pile et 0 si elle tombe sur face, suit la loi $\text{Ber}(1/2)$.

L'espérance et la variance d'une variable $X \sim \text{Ber}(p)$ sont données respectivement par

$$\mathbb{E}[X] = p \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p).$$

Loi binomiale

Définition 7.13 (Loi binomiale). Soit un entier $n \geq 1$ et soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p , et on note $X \sim \text{Bin}(n, p)$, si X prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ et si pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Cette loi apparaît quand on répète n fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p . Le nombre de succès suit alors la loi binomiale de paramètres n et p . Plus précisément, si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes de loi $\text{Ber}(p)$, leur somme $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\text{Bin}(n, p)$. À titre d'exemple, on représente la loi $\text{Bin}(6, 1/3)$ sur la figure 7.1.

L'espérance et la variance d'une variable $X \sim \text{Bin}(n, p)$ peuvent donc se déduire des résultats généraux vus dans la section 7.4.3 concernant les sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On trouve

$$\mathbb{E}[X] = np \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = np(1 - p).$$

On remarque que $\text{Bin}(1, p) = \text{Ber}(p)$, c'est-à-dire qu'une variable aléatoire binomiale de paramètres 1 et p est en fait une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p .

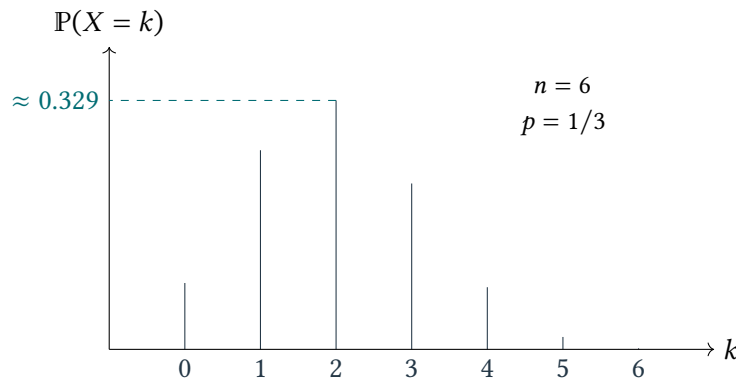


FIGURE 7.1 : Loi binomiale $\text{Bin}(6, 1/3)$

Loi d'une proportion observée

D'après ce qui précède, si une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p est répétée n fois de façon indépendante, alors le nombre X de succès suit la loi binomiale de paramètres n et p . Dans ce cas, la *variable d'échantillonnage "proportion observée"*, définie par

$$p_0 = \frac{X}{n},$$

prend ses valeurs dans l'ensemble fini $\{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$ et sa loi est donnée par les mêmes probabilités que la loi binomiale. (Cependant, ce n'est pas la loi binomiale car l'ensemble des valeurs n'est pas le même.) Pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, on a donc

$$\mathbb{P}\left(p_0 = \frac{k}{n}\right) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

L'espérance et la variance d'une telle variable p_0 sont données respectivement par

$$\mathbb{E}[p_0] = \frac{\mathbb{E}[X]}{n} = \frac{np}{n} = p \quad \text{et} \quad \text{Var}(p_0) = \frac{\text{Var}(X)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

On a $\text{Var}(p_0) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc p_0 est très proche de p quand n est très grand.

Loi de Poisson

Cette loi apparaît naturellement quand on considère un nombre très grand d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès très faible. Elle permet donc de modéliser le nombre d'occurrences de phénomènes rares.

Définition 7.14 (Loi de Poisson). Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable X suit la *loi de Poisson* de paramètre λ , et on note $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et si pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

À titre d'exemple, on représente la loi $\text{Poi}(1)$ sur la figure 7.2. On remarque qu'une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson peut prendre *a priori* des valeurs arbitrairement grandes. On peut montrer que l'espérance et la variance d'une variable $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ vérifient

$$\mathbb{E}[X] = \text{Var}(X) = \lambda.$$

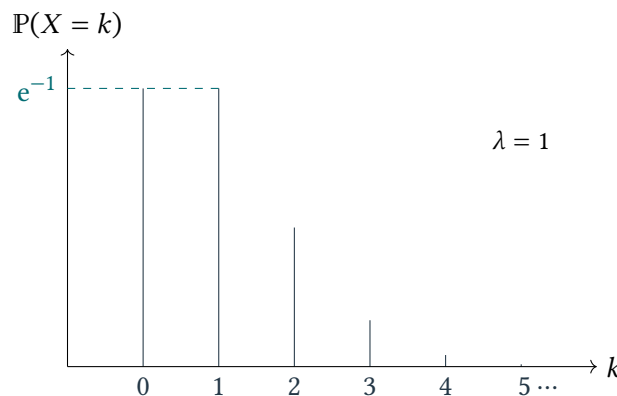


FIGURE 7.2 : Loi de Poisson $\text{Poi}(1)$

7.5.2 Variables à densité

Loi uniforme

Définition 7.15 (Loi uniforme sur un intervalle). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur $|I| \in]0, +\infty[$. On dit qu'une variable X suit la *loi uniforme* sur I , et on note $X \sim U(I)$, si elle admet pour densité la fonction constante égale à $1/|I|$ sur I , et nulle en dehors de I .

Si $X \sim U([0, 1])$, on a donc pour tous réels a et b vérifiant $0 \leq a \leq b \leq 1$,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b 1 \, dx = [x]_a^b = b - a.$$

Loi exponentielle

Cette loi permet de modéliser la durée de phénomènes “sans mémoire”, où faire l’hypothèse que le phénomène a duré jusqu’à un instant t n’a pas d’influence sur le temps qu’il va durer après t .

Définition 7.16 (Loi exponentielle). Soit un réel $\lambda > 0$. On dit qu’une variable X suit la *loi exponentielle* de paramètre λ , et on note $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, si elle admet une densité nulle pour $x < 0$ et donnée, pour $x \geq 0$, par la fonction

$$x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}.$$

On représente la densité de la loi $\text{Exp}(1)$ sur la figure 7.3. Si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, on a donc pour $0 \leq a \leq b$,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

On peut montrer que l’espérance et la variance d’une variable $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ sont respectivement

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

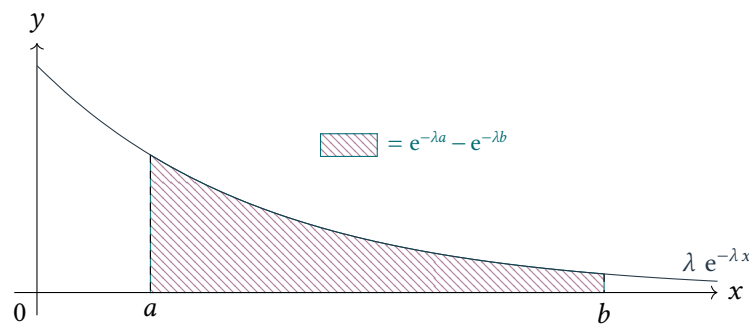


FIGURE 7.3 : Loi exponentielle $\text{Exp}(1)$

Loi normale

La loi normale est une loi de probabilité importante en statistique. Elle est souvent utilisée pour modéliser des phénomènes naturels, et elle est caractérisée par sa densité en forme de cloche. Elle est aussi importante en théorie des probabilités, car le théorème central limite décrit la limite en loi des sommes centrées et réduites de variables indépendantes et identiquement distribuées, d’espérance finie et de variance finie strictement positive.

Définition 7.17 (Loi normale). Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, de carré noté σ^2 . On dit qu’une variable X suit la *loi normale* de paramètres μ et σ^2 , et on note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si elle admet pour densité la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On dit aussi que X suit la *loi gaussienne*, ou encore la *loi de Gauss*, de paramètres μ et σ^2 .

Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que X suit la loi normale *centrée réduite*, et on note donc $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Dans ce cas, la densité est simplement donnée par la fonction

$$x \mapsto \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

On représente sur la figure 7.4 cette densité, et sur la figure 7.5 quelques densités de lois normales obtenues pour d’autres paramètres. On peut montrer que l’espérance et la variance d’une variable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sont

$$\mathbb{E}[X] = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

De plus, partant d'une telle variable X , on peut toujours construire une variable normale centrée réduite, puisqu'on a

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est donnée en annexe dans la table E.1.

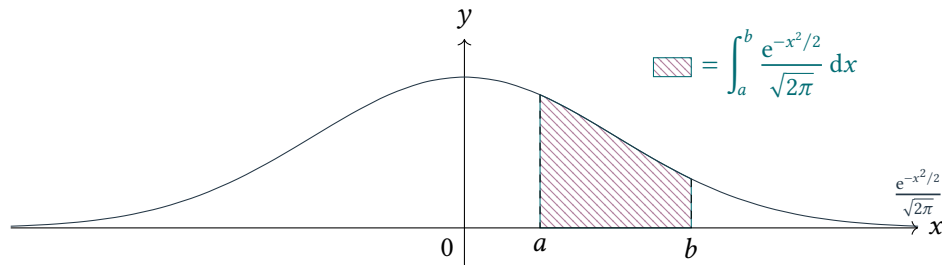


FIGURE 7.4 : Densité de la loi normale $N(0, 1)$

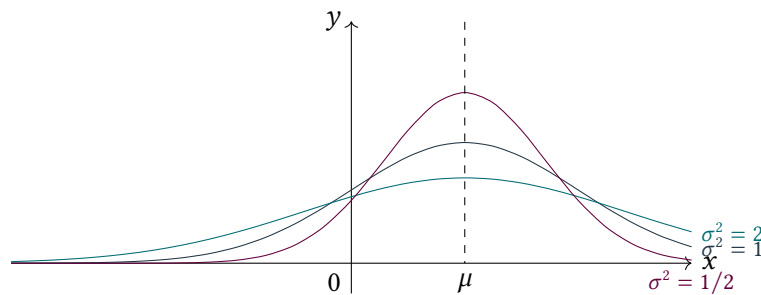


FIGURE 7.5 : Diverses densités de lois normales

Loi du χ^2

La loi du χ^2 est la loi d'une somme de carrés de variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes. Elle apparaît dans divers contextes, notamment en statistique, voir la section 8.2.4. Sa définition fait apparaître la fonction Γ , définie pour tout réel $x > 0$ par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On peut montrer par récurrence que la fonction Γ intervenant dans cette définition prolonge la factorielle, puisqu'elle vérifie $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geq 1$.

Définition 7.18 (Loi du χ^2). Soit un entier $n \geq 1$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi du χ^2 à n degrés de liberté, et on note $X \sim \text{Chi2}(n)$, si elle admet une densité nulle pour $x \leq 0$ et donnée, pour $x > 0$, par la fonction

$$x \mapsto \frac{x^{(n/2)-1} e^{-x/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}.$$

On peut montrer que l'espérance et la variance d'une variable $X \sim \text{Chi2}(n)$ sont

$$\mathbb{E}[X] = n \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = 2n.$$

Les quantiles de la loi du χ^2 sont donnés en annexe dans la table E.2.

7.5.3 Approximations

Considérons une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p , c'est-à-dire que $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Dans les applications numériques, on utilisera les approximations suivantes :

- si n est grand avec $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, alors la loi de X peut être approchée par une loi normale de moyenne np et de variance $np(1-p)$, ce qu'on peut noter

$$X \approx N(\mu, \sigma^2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mu = np \\ \sigma^2 = np(1-p). \end{cases}$$

- si n est grand et p petit, alors la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre np , ce qu'on peut noter

$$X \approx \text{Poi}(\lambda) \quad \text{avec} \quad \lambda = np.$$

Ces règles sont des indications pratiques, sans garantie uniforme de précision dans les queues de distribution. Pour l'approximation normale, on utilise souvent la correction de continuité

$$\mathbb{P}(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

où Φ est la fonction de répartition de $N(0, 1)$. L'approximation de Poisson correspond au régime $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $np \rightarrow \lambda$; la condition $np < 5$ n'est pas nécessaire.

Quelques notions de statistiques

Ce chapitre vise à introduire des notions basiques de statistiques. Nous nous concentrons sur les concepts essentiels qui fournissent les outils nécessaires pour résoudre des exercices simples. Ce chapitre présente des méthodes sans démonstration formelle. Les démarches présentées peuvent être mises en pratique dans des situations concrètes en exercice, ce qui facilitera leur compréhension.

8.1 Statistique descriptive

8.1.1 Types de variables

En statistiques, on étudie certaines caractéristiques d'une population potentiellement très vaste en s'appuyant uniquement sur une fraction de la population, appelée *échantillon*, censée être représentative de la population toute entière. Un tel échantillon est choisi par tirage au sort au sein de la population. On cherche ensuite à déterminer avec un certain niveau de confiance des informations sur l'ensemble de la population au vu de ce qui se passe pour l'échantillon utilisé. On utilise pour cela des outils probabilistes dans le but d'analyser les données acquises.

On s'intéressera principalement à des caractéristiques de nature *quantitative*, correspondant à des variables mesurables (taille, poids, nombre d'enfants, *etc.*), mais il y a aussi des caractéristiques de nature *qualitative*, correspondant à des variables non mesurables (couleur des yeux, *etc.*). Les variables quantitatives peuvent être *discrètes*, c'est-à-dire prenant au plus un nombre dénombrable de valeurs possibles (nombre d'enfants par exemple), ou *continues*, c'est-à-dire pouvant prendre toutes les valeurs d'un intervalle (taille ou poids par exemple).

8.1.2 Paramètres de tendance d'une variable quantitative

On s'intéresse à une caractéristique quantitative dans la population, décrite par une variable X . On considère un échantillon de taille N et on note $x_1, \dots, x_N$ les valeurs prises par cette variable pour les membres de l'échantillon.

Définition 8.1 (Moyenne, médiane, mode). La tendance centrale d'une variable X peut être décrite par la *moyenne* d'un échantillon $x_1, \dots, x_N$, définie par

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (8.1)$$

Elle peut aussi être décrite par une *médiane* : une valeur m telle qu'au moins la moitié des observations soient inférieures ou égales à m , et au moins la moitié supérieures ou égales à m . Si on ordonne l'échantillon de manière à avoir $x_1 \leq \dots \leq x_N$, on retient habituellement la valeur

$$\begin{cases} x_{p+1} & \text{si } N = 2p + 1 \\ \frac{x_p + x_{p+1}}{2} & \text{si } N = 2p. \end{cases}$$

Le *mode* permet également de décrire la tendance centrale de X . Il s'agit de la valeur la plus fréquente dans l'échantillon, ou des valeurs les plus fréquentes s'il y en a plusieurs.

Définition 8.2 (Variance, écart-type, quartiles, intervalle de variation). La tendance de dispersion d'une variable X peut être décrite par la *variance* d'un de ses échantillons $x_1, \dots, x_N$, ou son *écart-type*, définis

respectivement par

$$s_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \bar{x}^2 \quad \text{et} \quad s_x = \sqrt{s_x^2}. \quad (8.2)$$

On peut aussi utiliser les *premier et troisième quartiles* qui, avec la médiane, repèrent approximativement les fractions 25%, 50% et 75% des données ordonnées; pour un échantillon fini, leur définition dépend de la convention de quantile retenue. On peut également utiliser l'*intervalle de variation*, égal à $[x_1, x_N]$ si l'échantillon est ordonné comme précédemment.

8.1.3 Estimation de la moyenne et la variance

On note respectivement μ_X et σ_X^2 la moyenne et la variance de la variable X , prises sur l'intégralité de la population. Ces valeurs ne sont pas directement accessibles car la population est trop grande, mais on peut les *estimer* au regard de l'échantillon choisi. Pour les résultats d'inférence ci-dessous, on suppose des observations indépendantes et de même loi que X (modèle i.i.d.). Les formules de variance supposent une variance finie. Pour un tirage sans remise dans une population finie, ces formules ne s'appliquent sans correction que si la fraction sondée est négligeable.

Définition 8.3 (Estimateurs de la moyenne et de la variance). Pour $N \geq 2$, l'*estimateur de la moyenne* théorique μ_X est la moyenne de l'échantillon $\bar{x}$ définie par (8.1). L'*estimateur de la variance* théorique σ_X^2 est

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{N}{N-1} s_x^2.$$

Une propriété souhaitable de l'estimateur de la variance théorique σ_X^2 (absence de biais) explique pourquoi il n'est pas la variance de l'échantillon s_x^2 donnée par (8.2), mais celle-ci multipliée par un facteur $N/(N-1)$.

8.2 Tests d'hypothèse

8.2.1 Généralités

Un test statistique permet de décider, au vu d'observations, entre deux hypothèses notées habituellement H_0 et H_1 et appelées respectivement l'*hypothèse nulle* et l'*hypothèse alternative*. On distingue les tests *unilatéraux* et les tests *bilatéraux*, suivant la forme de l'hypothèse alternative.

- Exemples 8.1.** • *Test de conformité* : pour déterminer si un échantillon d'individus est conforme à une population pour une certaine caractéristique, les différences observées n'étant dues qu'au hasard.
- *Test d'homogénéité* : pour déterminer si deux échantillons d'individus sont similaires pour une certaine caractéristique, les différences observées n'étant dues qu'au hasard.

Définition 8.4 (Erreurs de première et seconde espèce). • Une *erreur de première espèce* consiste à rejeter H_0 alors qu'elle est vraie. Le niveau α est une borne supérieure fixée à l'avance pour sa probabilité sous H_0 .

- Une *erreur de seconde espèce* consiste à ne pas rejeter H_0 alors que l'alternative est vraie. Sa probabilité β dépend de la valeur du paramètre sous l'alternative; la puissance correspondante vaut $1 - \beta$.

Ne pas rejeter H_0 ne prouve pas qu'elle est vraie : les données peuvent simplement être insuffisantes pour mettre en évidence une différence. On choisit souvent $\alpha = 5\%$. Pour les tests fondés sur une approximation de loi, le contrôle de ce niveau est lui-même approché.

Concrètement, on procède en général de la manière suivante pour bâtir et appliquer un test.

Méthode 8.1 (Principe général de construction d'un test d'hypothèse). (i). On définit une *statistique de test*, ou un *paramètre de test*, qui est une fonction des variables observées.

- (ii). On se place sous l'hypothèse nulle H_0 et on calcule la probabilité avec laquelle la statistique de test dépasse un certain seuil, critère qui entraînera le rejet de H_0 .
- (iii). La valeur du seuil est ajustée de façon à ce que cette probabilité soit inférieure ou égale au niveau α (ou approximativement égale pour un test asymptotique). Elle se lit dans des tables statistiques, voir l'annexe E.
- (iv). On applique le test aux données en calculant la valeur correspondante pour la statistique de test et en la comparant au seuil choisi.

8.2.2 Test de conformité à une proportion théorique de référence

On étudie sur une population une propriété qui peut être satisfaite par chaque individu. La proportion théorique d'individus de la population qui vérifient cette propriété est notée π . On dispose d'un échantillon de taille N , avec une proportion notée p_0 d'individus qui vérifient la propriété. Au vu de ces données, on veut tester si la proportion théorique π est égale à une valeur de référence π_0 . On suppose que les conditions de validité suivantes (qui permettent des approximations de loi) sont vérifiées : $N\pi_0 \geq 5$ et $N(1-\pi_0) \geq 5$. On commence par considérer le cas bilatéral.

Méthode 8.2 (Test bilatéral de conformité à une proportion théorique). (i). Les hypothèses sont les suivantes :

- H_0 : "L'échantillon provient d'une population où la proportion théorique est $\pi = \pi_0$."
 - H_1 : "L'échantillon provient d'une population où la proportion théorique est $\pi \neq \pi_0$."
- (ii). Si p_0 désigne la proportion d'individus qui vérifient la propriété dans l'échantillon de taille N , la statistique de test est donnée par $|T| = \frac{|p_0 - \pi_0|}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{N}}}$.
- (iii). Si H_0 est vérifiée, $|T|$ se comporte approximativement comme la valeur absolue d'une variable aléatoire Z de loi normale centrée réduite $N(0, 1)$, de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(|T| > \varepsilon \mid H_0) \approx \mathbb{P}(|Z| > \varepsilon)$.
- (iv). À l'aide de la table E.1 de la loi $N(0, 1)$, on choisit le seuil $\varepsilon > 0$ de façon à ce que le membre de droite soit très proche de α .
- (v). On rejette H_0 si la valeur de $|T|$ qui correspond aux données dépasse le seuil. Sinon, on ne rejette pas H_0 .

On considère maintenant le cas unilatéral.

Méthode 8.3 (Test unilatéral de conformité à une proportion théorique). (i). Les hypothèses sont les suivantes :

- H_0 : "L'échantillon provient d'une population où la proportion théorique est $\pi = \pi_0$."
 - H_1 : "L'échantillon provient d'une population où la proportion théorique est $\pi > \pi_0$."
- (ii). Si p_0 désigne la proportion d'individus qui vérifient la propriété dans l'échantillon de taille N , la statistique de test est donnée par $T = \frac{p_0 - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{N}}}$.
- (iii). Si H_0 est vérifiée, T se comporte approximativement comme une variable aléatoire Z de loi normale centrée réduite $N(0, 1)$, de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(T > \varepsilon \mid H_0) \approx \mathbb{P}(Z > \varepsilon)$.
- (iv). À l'aide de la table E.1 de la loi $N(0, 1)$, on choisit le seuil $\varepsilon > 0$ de façon à ce que le membre de droite soit très proche de α .
- (v). On rejette H_0 si la valeur de T qui correspond aux données dépasse le seuil. Sinon, on ne rejette pas H_0 .

On peut traiter de même la situation symétrique où H_1 est "L'échantillon provient d'une population dans laquelle la proportion théorique est $\pi < \pi_0$ ". On compare alors T au seuil $-\varepsilon$.

8.2.3 Test d'homogénéité

On considère deux échantillons indépendants A et B , de tailles N_A et N_B , avec proportions observées $p_{0,A}$ et $p_{0,B}$. Sous l'hypothèse $H_0 : \pi_A = \pi_B$, on estime leur proportion commune par

$$\hat{p} = \frac{N_A p_{0,A} + N_B p_{0,B}}{N_A + N_B}.$$

On utilise l'approximation normale si les quatre effectifs attendus $N_A \hat{p}$, $N_A(1 - \hat{p})$, $N_B \hat{p}$ et $N_B(1 - \hat{p})$ sont suffisamment grands (au moins 5 comme règle pratique). On commence par le cas bilatéral.

Méthode 8.4 (Test bilatéral d'homogénéité). (i). Les hypothèses sont les suivantes :

- H_0 : “Les proportions théoriques des deux populations sont égales : $\pi_A = \pi_B$.”
 - H_1 : “Les deux échantillons proviennent de deux populations pour lesquelles les proportions théoriques respectives avec laquelle la propriété considérée est vérifiée sont différentes.”
- (ii). Si $p_{0,A}$ et $p_{0,B}$ désignent les proportions d'individus qui vérifient la propriété dans les échantillons A et B , la statistique de test est donnée par $|T| = \frac{|p_{0,A} - p_{0,B}|}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}\right)}}$.
- (iii). Si H_0 est vérifiée, $|T|$ se comporte approximativement comme la valeur absolue d'une variable aléatoire Z de loi normale centrée réduite $N(0, 1)$, de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(|T| > \varepsilon \mid H_0) \approx \mathbb{P}(|Z| > \varepsilon)$.
- (iv). À l'aide de la table E.1 de la loi $N(0, 1)$, on choisit le seuil $\varepsilon > 0$ de façon à ce que le membre de droite soit très proche de α .
- (v). On rejette H_0 si la valeur de $|T|$ qui correspond aux données dépasse le seuil. Sinon, on ne rejette pas H_0 .

On considère maintenant le cas unilatéral.

Méthode 8.5 (Test unilatéral d'homogénéité). (i). Les hypothèses sont les suivantes :

- H_0 : “Les proportions théoriques des deux populations sont égales : $\pi_A = \pi_B$.”
 - H_1 : “Les deux échantillons proviennent de deux populations pour lesquelles les proportions théoriques respectives π_A et π_B avec laquelle la propriété considérée est vérifiée sont telles que $\pi_A > \pi_B$.”
- (ii). Si $p_{0,A}$ et $p_{0,B}$ désignent les proportions d'individus qui vérifient la propriété dans les échantillons A et B , la statistique de test est donnée par $T = \frac{p_{0,A} - p_{0,B}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}\right)}}$.
- (iii). Si H_0 est vérifiée, T se comporte approximativement comme une variable aléatoire Z de loi normale centrée réduite $N(0, 1)$, de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(T > \varepsilon \mid H_0) \approx \mathbb{P}(Z > \varepsilon)$.
- (iv). À l'aide de la table E.1 de la loi $N(0, 1)$, on choisit le seuil $\varepsilon > 0$ de façon à ce que le membre de droite soit très proche de α .
- (v). On rejette H_0 si la valeur de T qui correspond aux données dépasse le seuil. Sinon, on ne rejette pas H_0 .

On traite de même la situation symétrique où H_1 est : “Les deux échantillons proviennent de deux populations pour lesquelles les proportions théoriques respectives π_A et π_B avec laquelle la propriété considérée est vérifiée sont telles que $\pi_A < \pi_B$.” On compare alors T au seuil $-\varepsilon$.

8.2.4 Test du χ^2 (chi-deux) de conformité

Le test du χ^2 (chi-deux) est un test statistique qui permet de vérifier la conformité entre une répartition observée entre plusieurs classes et une répartition théorique, ou de vérifier l'ajustement d'un échantillon à une loi donnée. Il repose sur la loi du χ^2 à n degrés de liberté, notée $\text{Chi2}(n)$ et présentée dans la section 7.5.

Conformité entre répartition observée et répartition théorique

On étudie une caractéristique qualitative qui partage la population en L classes. On choisit un échantillon de taille N dans la population, puis on note $O_1, \dots, O_L$ les effectifs observés de chaque classe au sein de cet échantillon.

Méthode 8.6 (Test de conformité entre répartition observée et répartition théorique). (i). Les hypothèses sont les suivantes :

- H_0 : “L'échantillon est issu d'une population partagée en L classes, à l'intérieur desquelles les proportions théoriques sont $\pi_1 = *, \dots, \pi_L = *$.” Les symboles $*$ sont à remplacer par des valeurs numériques en général dictées par le problème.
- H_1 : “L'échantillon est issu d'une population dont les proportions théoriques ne sont pas celles données précédemment.”

(ii). Si l'hypothèse H_0 est vérifiée, on note $C_1, \dots, C_L$ les effectifs obtenus théoriquement dans chaque classe au sein de l'échantillon, c'est-à-dire $C_i = N \pi_i$ pour la classe i . On peut alors dresser un tableau de contingence comme celui de la table 8.1.

(iii). On utilise la règle pratique suivante pour l'approximation par la loi du χ^2 : $C_i \geq 5$ pour tout $i \in \{1, \dots, L\}$. La statistique de test est alors donnée par $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^L \frac{(O_i - C_i)^2}{C_i}$.

(iv). Partant des données, on calcule la valeur correspondante pour χ_0^2 et on la compare avec le seuil donné par la table E.2 de la loi du χ^2 à $L - 1$ degrés de liberté, au quantile d'ordre $1 - \alpha$. On rejette H_0 si χ_0^2 dépasse ce seuil.

Classes	1	2	...	i	...	L	Total
Effectifs observés	O_1	O_2	...	O_i	...	O_L	N
Proportions théoriques	π_1	π_2	...	π_i	...	π_L	1
Effectifs théoriques	$C_1 = N \pi_1$	$C_2 = N \pi_2$	...	$C_i = N \pi_i$	...	$C_L = N \pi_L$	N

TABLE 8.1 : Tableau de contingence pour le test du χ^2 de conformité.

Les classes doivent être disjointes et couvrir toutes les issues possibles. Si certains effectifs attendus sont trop petits, on regroupe des classes avant le calcul et on met à jour L . Cette procédure suppose des observations indépendantes et ne teste pas leur indépendance.

Ajustement à une loi

On veut déterminer si des effectifs observés $O_1, \dots, O_L$ sur un échantillon de taille N sont compatibles avec une loi.

Méthode 8.7 (Test d'ajustement à une loi). (i). Les hypothèses sont les suivantes, en désignant par le symbole $*$ une loi en général dictée par le problème et dont on aura peut-être dû estimer des paramètres au préalable :

- H_0 : “L'échantillon est réalisé par N variables indépendantes et distribuées selon la loi $*$.”
- H_1 : “La loi commune des observations n'appartient pas à la famille $*$. L'indépendance des observations est une hypothèse du modèle.”

(ii). On se ramène à la situation précédente en déterminant les effectifs qu'on devrait théoriquement avoir dans l'échantillon si l'hypothèse H_0 était réalisée.

(iii). On utilise la même statistique de test que précédemment, mais le seuil est cette fois déterminé grâce à la table E.2 de la loi du χ^2 à $L - 1 - m$ degrés de liberté, où m désigne le nombre de paramètres estimés sur ce même échantillon, avec $L - 1 - m > 0$. Cette correction suppose un ajustement régulier approprié aux classes (par exemple par maximum de vraisemblance sur les effectifs regroupés); elle n'est pas automatiquement valide pour toute méthode d'estimation.

Par exemple, pour une loi de Poisson de paramètre λ , on a $E[X] = \lambda$. La moyenne de l'échantillon $\bar{x}$ fournit donc un estimateur de λ (et non son inverse). On calcule les effectifs attendus à partir de la loi ajustée et on regroupe si nécessaire les classes extrêmes, sans omettre la queue infinie de la loi. Pour le seuil, on tient compte de la méthode d'ajustement et des conditions de l'énoncé précédent.

8.3 Fluctuations d'échantillonnage

8.3.1 Cas d'une proportion

Intervalle de fluctuation d'une proportion observée

On s'intéresse à une caractéristique décrite par une variable qualitative et on étudie sa répartition dans une population. On désigne par π la proportion d'une caractéristique spécifique dans toute la population et par p_0 cette proportion dans un échantillon de taille N .

On suppose que la proportion π est connue. Alors, on remarque que p_0 change selon le choix de l'échantillon. C'est donc une variable aléatoire dite *d'échantillonnage*. On rappelle qu'elle a pour espérance π et pour variance $\pi(1 - \pi)/N$, voir la section 7.5.

Définition 8.5 (Intervalle de fluctuation d'une proportion observée). On suppose que les conditions de validité suivantes sont satisfaites : $N\pi \geq 5$ et $N(1 - \pi) \geq 5$. L'intervalle de fluctuation correspond aux valeurs attendues pour p_0 dans l'échantillon de taille N au risque α près. Il est donné par la formule

$$\text{IF}_{1-\alpha}(p_0) = \left[\pi - \varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{N}}, \pi + \varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{N}} \right],$$

où ε_α est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de $N(0, 1)$: la probabilité que p_0 appartienne à l'intervalle est alors approximativement $1 - \alpha$. On la détermine avec la table E.1 de la loi $N(0, 1)$. Par exemple, $\varepsilon_\alpha \approx 1,96$ pour $\alpha = 5\%$.

L'intervalle de fluctuation ainsi obtenu n'est pas aléatoire : il ne dépend que de la taille de l'échantillon, du niveau de risque et de la proportion π supposée fixée.

Intervalle de confiance d'une proportion théorique

On considère la situation inverse où la proportion observée p_0 est connue et celle théorique π est inconnue. On estime la valeur de π au vu de celle de p_0 sur un échantillon de taille N .

Définition 8.6 (Intervalle de confiance d'une proportion théorique). On suppose que les conditions de validité suivantes sont satisfaites : $Np_0 \geq 5$ et $N(1 - p_0) \geq 5$ (règle pratique, sans garantie de couverture exacte). L'intervalle de confiance de Wald a un niveau de confiance approximatif $1 - \alpha$. Il est donné par la formule

$$\text{IC}_{1-\alpha}(\pi) = \left[p_0 - \varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{N}}, p_0 + \varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{N}} \right],$$

où ε_α est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de $N(0, 1)$. On la détermine avec la table E.1 de la loi $N(0, 1)$. Par exemple, $\varepsilon_\alpha \approx 1,96$ pour $\alpha = 5\%$.

Avant observation, les bornes sont aléatoires : sur des répétitions de l'échantillonnage, la proportion d'intervalles contenant le paramètre fixe π est approximativement $1 - \alpha$. Après observation, l'intervalle est fixé : on ne donne pas une probabilité au paramètre. Cette approximation est peu fiable pour de petits effectifs ou des proportions proches de 0 ou 1.

8.3.2 Cas d'une moyenne

Tout comme dans la section 8.1, on s'intéresse à une caractéristique quantitative dans la population, décrite par une variable X . On note σ^2 la variance de cette variable aléatoire, ainsi que s_x^2 la variance d'un échantillon $(x_1, \dots, x_N)$ correspondant à des réalisations indépendantes de la variable X . D'après la définition 8.3, l'estimateur de la variance de X à partir d'un tel échantillon est donné par

$$\sigma_x^2 = \frac{N}{N-1} s_x^2.$$

Si on calcule la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon, on obtient une valeur qui dépend du choix aléatoire de l'échantillon. C'est donc une variable aléatoire dite d'*échantillonnage*. Si la variable de départ X a pour espérance μ et pour variance σ^2 , on peut montrer que la variable d'échantillonnage $\bar{x}$ admet pour espérance μ et pour variance σ^2/N .

Intervalle de fluctuation d'une moyenne observée

On suppose que les valeurs μ et σ^2 sont connues mais que $\bar{x}$ est inconnue.

Définition 8.7 (Intervalle de fluctuation d'une moyenne observée). L'*intervalle de fluctuation* regroupe les valeurs possibles pour $\bar{x}$ pour un échantillon de taille N au risque α près. Il est donné par la formule

$$\text{IF}_{1-\alpha}(\bar{x}) = \left[\mu - \varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}, \mu + \varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} \right],$$

où ε_α est donné par la table E.1 de la loi $N(0, 1)$. Par exemple, $\varepsilon_\alpha \approx 1,96$ pour $\alpha = 5\%$.

L'intervalle de fluctuation ainsi obtenu n'est pas aléatoire. La démarche précédente est valide quand $\bar{x}$ suit, au moins approximativement, la loi normale $N(\mu, \sigma^2/N)$.

Intervalle de confiance d'une moyenne théorique

Cette fois-ci, ce sont les valeurs $\bar{x}$ et s_x^2 qui sont connues, et la valeur de μ inconnue à estimer.

Définition 8.8 (Intervalle de confiance d'une moyenne théorique). Un *intervalle de confiance* est construit à partir de l'échantillon pour contenir la moyenne fixe μ avec une fréquence $1 - \alpha$ lors de répétitions de l'échantillonnage, exactement ou approximativement selon les hypothèses précisées ci-dessous. On utilise les formules suivantes :

- si σ^2 est connue, $\text{IC}_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{x} - \varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}, \bar{x} + \varepsilon_\alpha \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} \right]$, où la valeur ε_α est spécifiée par la table E.1 de la loi $N(0, 1)$;
- si σ^2 est inconnue, $\text{IC}_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{x} - t_\alpha \sqrt{\frac{s_x^2}{N}}, \bar{x} + t_\alpha \sqrt{\frac{s_x^2}{N}} \right]$, où t_α est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi de Student à $N - 1$ degrés de liberté, pour $N \geq 2$.

Ces intervalles ont une couverture exacte $1 - \alpha$ pour un échantillon i.i.d. de loi normale : on utilise la loi normale si σ^2 est connue, et la loi de Student si elle est estimée. Pour une population non normale de variance finie strictement positive, les formules peuvent servir d'approximations lorsque N est suffisamment grand. Une moyenne approximativement normale ne suffit pas à rendre la statistique de Student exactement distribuée selon cette loi. L'interprétation du niveau de confiance repose, ici aussi, sur la répétition de l'échantillonnage.

Troisième partie

Annexes

Formulaire de trigonométrie

A.1 Propriétés élémentaires

Les fonctions trigonométriques circulaires *sinus*, *cosinus*, *tangente* et *cotangente* vérifient les relations suivantes :

- $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$ pour $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$;
- $\cotan a = \frac{\cos a}{\sin a}$ pour $a \neq k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$;
- $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$;
- $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$.

Toutes les identités avec des quotients sont valables lorsque chaque dénominateur est non nul et chaque fonction est définie. Dans tout ce formulaire, si f désigne une fonction, alors f^2 désigne son carré, défini par $f^2(a) = (f(a))^2$ pour tout a . Les fonctions trigonométriques se lisent sur le *cercle trigonométrique* comme indiqué sur la figure A.1. Les valeurs remarquables prises par les fonctions trigonométriques apparaissent sur la figure A.2.

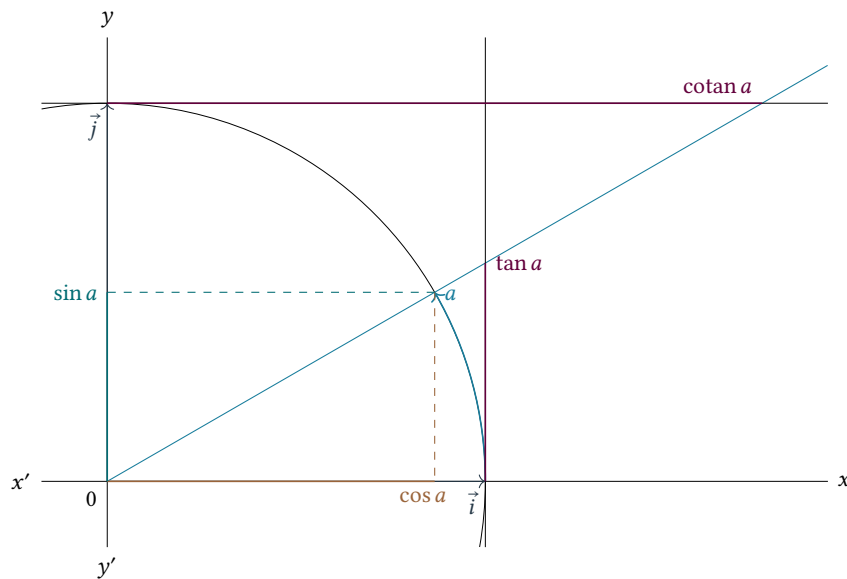


FIGURE A.1 : Cercle trigonométrique et fonctions trigonométriques circulaires

Pour des raisons de symétrie du cercle et des lignes trigonométriques, on peut exprimer en fonction des valeurs des sinus, cosinus, tangente et cotangente d'un angle a donné celles des angles $-a$, $a + \pi$, $\pi - a$, $\frac{\pi}{2} - a$ et $\frac{\pi}{2} + a$.

- Par symétrie centrale par rapport à l'origine, on a

$$\begin{cases} \cos(a + \pi) = -\cos a \\ \sin(a + \pi) = -\sin a \\ \tan(a + \pi) = \tan a \\ \cotan(a + \pi) = \cotan a \end{cases}$$

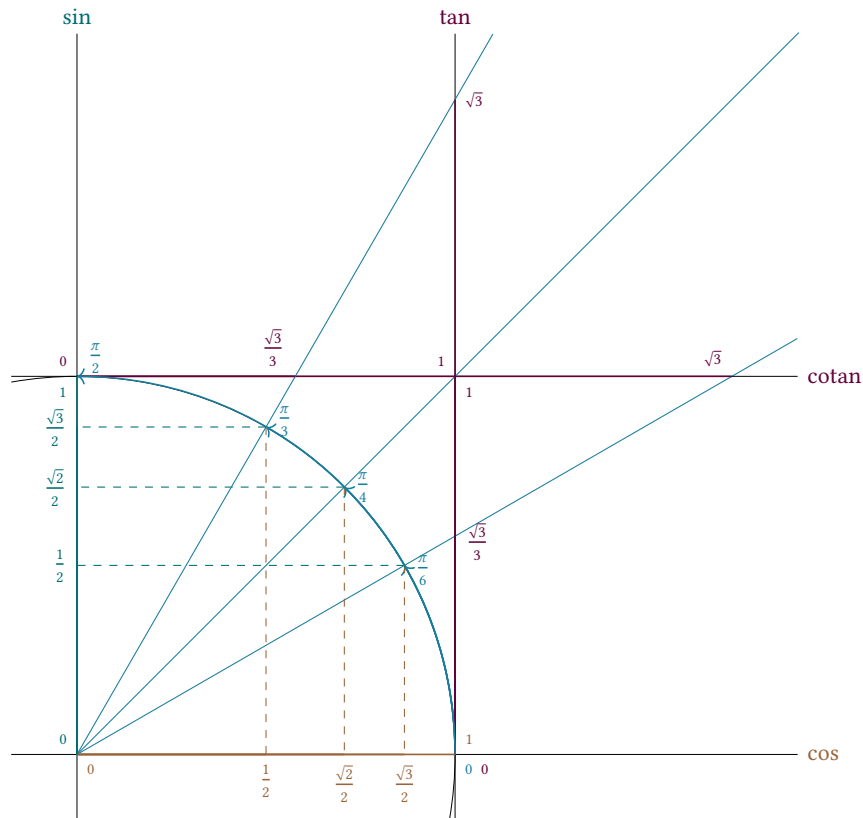


FIGURE A.2 : Valeurs remarquables des fonctions trigonométriques circulaires

- Par symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses, et à l'axe des ordonnées, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(-a) = \cos a \\ \sin(-a) = -\sin a \\ \tan(-a) = -\tan a \\ \cotan(-a) = -\cotan a \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\pi - a) = -\cos a \\ \sin(\pi - a) = \sin a \\ \tan(\pi - a) = -\tan a \\ \cotan(\pi - a) = -\cotan a \end{array} \right.$$

- Par symétrie axiale par rapport à la première bissectrice, et ensuite par rapport à l'axe des ordonnées, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cotan a \\ \cotan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cotan a \\ \cotan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a. \end{array} \right.$$

On peut illustrer ces relations à l'aide de la figure A.3. Les valeurs du cosinus et du sinus se lisent sur les axes des abscisses et des ordonnées, respectivement. Les valeurs de la tangente et de la cotangente, ou de leurs opposés selon le quadrant dans lequel l'angle se situe, se lisent sur les axes portant l'indication correspondante.

On observe aussi bien sûr que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π , et que les fonctions tangente et cotangente sont périodiques de période π , c'est-à-dire que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(a + 2\pi) = \cos a \\ \sin(a + 2\pi) = \sin a \\ \tan(a + \pi) = \tan a \\ \cotan(a + \pi) = \cotan a. \end{array} \right.$$

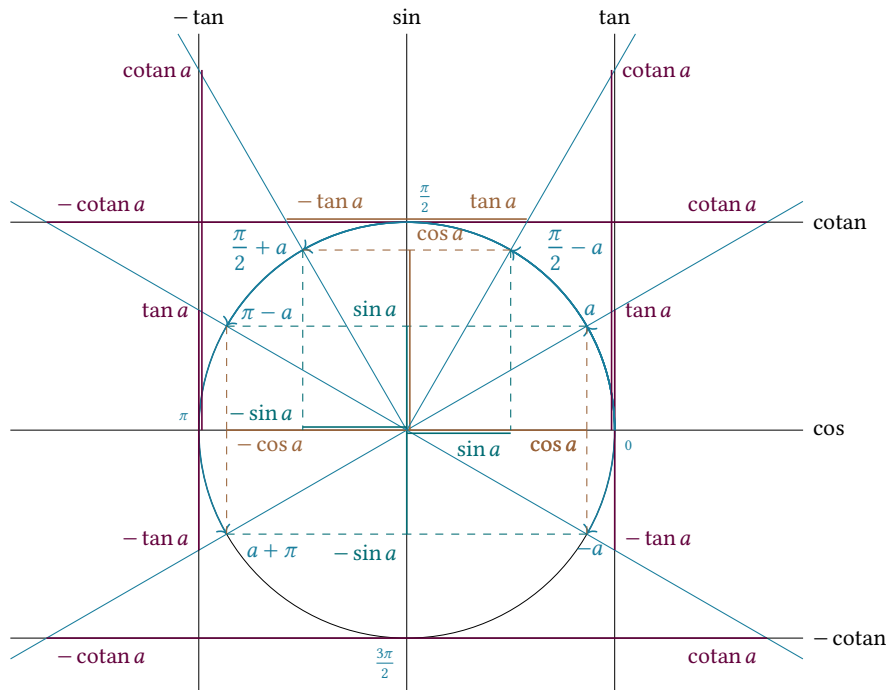


FIGURE A.3 : Symétries des fonctions trigonométriques circulaires

A.2 Formules d'addition

Les *formules d'addition* expriment le sinus, le cosinus et la tangente de la somme de deux angles, en fonction des sinus, cosinus et tangente de chacun des angles, comme suit : pour tous nombres réels a et b ,

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \end{cases}$$

la dernière formule étant valable lorsque $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ sont définies, c'est-à-dire lorsque aucun des nombres a , b et $a+b$ n'appartient à $\pi/2 + \pi\mathbb{Z}$. En remplaçant b par son opposé, on obtient les formules

$$\begin{cases} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}. \end{cases}$$

De même, en choisissant $b = a$ dans les trois premières formules, on déduit les *formules de l'angle double* :

$$\begin{cases} \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin(2a) = 2 \sin a \cos a \\ \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}. \end{cases}$$

En partant de la première de ces formules, on peut obtenir les *formules de réduction du carré* :

$$\begin{cases} \cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos(2a)) \\ \sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos(2a)) \\ \tan^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}. \end{cases}$$

Enfin, en appliquant ces formules avec $a = \theta/2$, on en déduit les *formules de l'angle moitié* pour le sinus et le cosinus :

$$\begin{cases} \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \\ \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}. \end{cases}$$

La première identité portant sur la tangente s'obtient en écrivant

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \frac{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{2 \cos^2(\theta/2)} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta},$$

et la deuxième s'en déduit en observant que $\sin^2 \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$.

A.3 Transformations produits/sommes

En ajoutant ou en soustrayant les expressions de $\cos(a + b)$ et de $\cos(a - b)$, et en faisant de même avec le sinus, on peut transformer des produits de fonctions trigonométriques en sommes :

$$\begin{cases} \cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b)) \\ \sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)) \\ \sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b)). \end{cases}$$

Ensuite, en posant $p = a + b$ et $q = a - b$ dans les formules précédentes, on peut transformer des sommes de fonctions trigonométriques en produits :

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p + q}{2}\right) \sin\left(\frac{p - q}{2}\right) \\ \sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \sin\left(\frac{p - q}{2}\right). \end{cases}$$

On en déduit une généralisation de la formule de l'angle moitié pour la fonction tangente :

$$\tan\left(\frac{p + q}{2}\right) = \frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = -\frac{\cos p - \cos q}{\sin p - \sin q}.$$

A.4 Fonctions inverses

La fonction cosinus réalise une bijection de l'intervalle $[0, \pi]$ vers l'intervalle $[-1, 1]$, et sa réciproque est appelée la fonction *arc cosinus*, notée $\arccos$. De même, la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[-1, 1]$, et sa réciproque est appelée la fonction *arc sinus*, notée $\arcsin$. Ces deux fonctions vérifient, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Les fonctions cosinus et sinus, ainsi que leurs réciproques, sont représentées graphiquement sur la figure A.4.

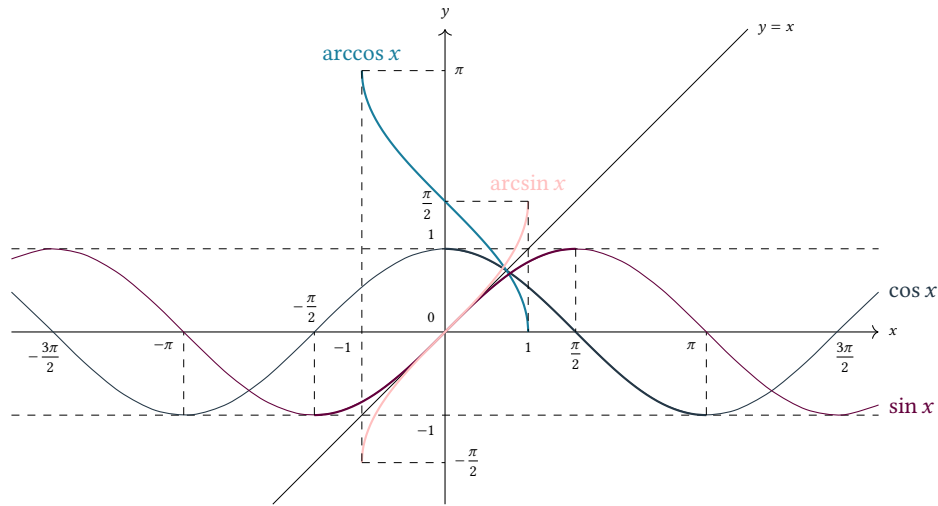


FIGURE A.4 : Représentations graphiques des fonctions cos, sin, arccos et arcsin

La fonction tangente réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers $]-\infty, +\infty[$, et sa réciproque est appelée la fonction *arc tangente*, notée $\arctan$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x) \quad \text{avec} \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La fonction tangente et sa réciproque sont représentées graphiquement sur la figure A.5.

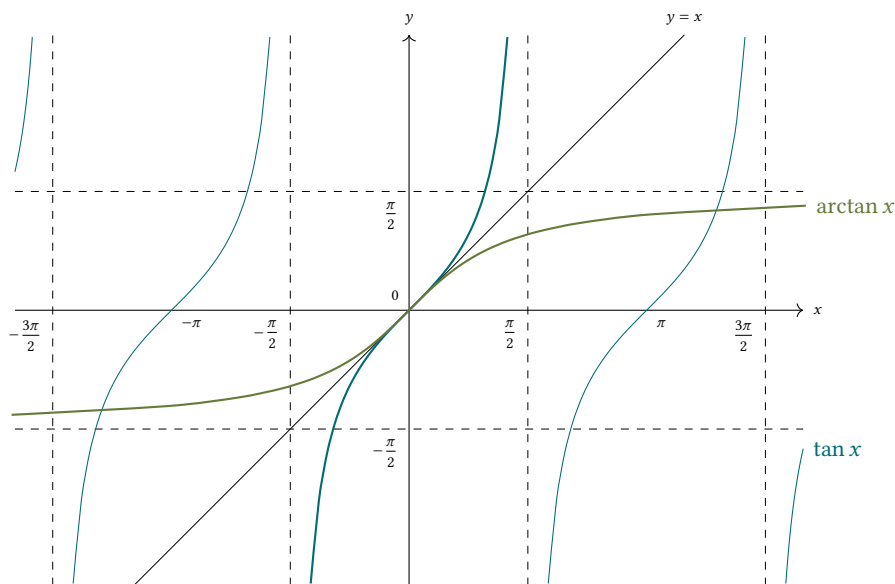


FIGURE A.5 : Représentations graphiques des fonctions tan et arctan

A.5 Trigonométrie hyperbolique

Les fonctions trigonométriques hyperboliques sont définies à partir de la fonction exponentielle par les formules

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ces fonctions sont appelées respectivement *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*. Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques permettent de définir la *tangente hyperbolique* en posant

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

De plus, elles vérifient la relation

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Ainsi, les points de coordonnées $\cosh x$ et $\sinh x$ appartiennent donc à l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$. Ils se trouvent à l'intersection de l'hyperbole et de la demi-droite issue de l'origine qui définit avec l'axe des abscisses une aire signée égale à $x/2$, comme l'illustre la figure A.6.

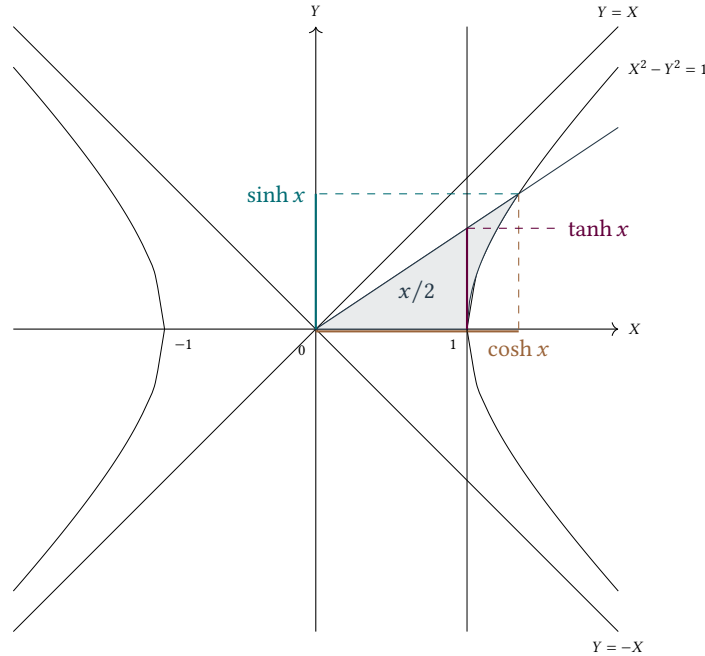


FIGURE A.6 : Hyperbole et fonctions trigonométriques hyperboliques

La fonction cosinus hyperbolique réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ vers l'intervalle $[1, +\infty[$, et sa réciproque est appelée la fonction *argument cosinus hyperbolique*, notée $\operatorname{argcosh}$. De même, la fonction sinus hyperbolique réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ vers $]-\infty, +\infty[$, et sa réciproque est appelée la fonction *argument sinus hyperbolique*, notée $\operatorname{argsinh}$. Ces deux fonctions admettent les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{argcosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \\ \operatorname{argsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right). \end{cases}$$

La fonction tangente hyperbolique réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ vers $]-1, 1[$, et sa réciproque est appelée la fonction *argument tangente hyperbolique*, notée $\operatorname{argtanh}$. Elle admet aussi l'expression

$$\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

Les fonctions trigonométriques hyperboliques et leurs réciproques sont représentées graphiquement sur la figure A.7.

Le lien avec les fonctions trigonométriques circulaires est donné par les *formules d'Euler* suivantes :

$$\begin{cases} \cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} = \cosh(ia) \\ \sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} = -i \sinh(ia) \\ \tan a = -i \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{e^{ia} + e^{-ia}} = -i \tanh(ia). \end{cases}$$

Cela permet en particulier de déduire de toutes les formules de trigonométrie circulaire vues ci-dessus des analogues en trigonométrie hyperbolique.

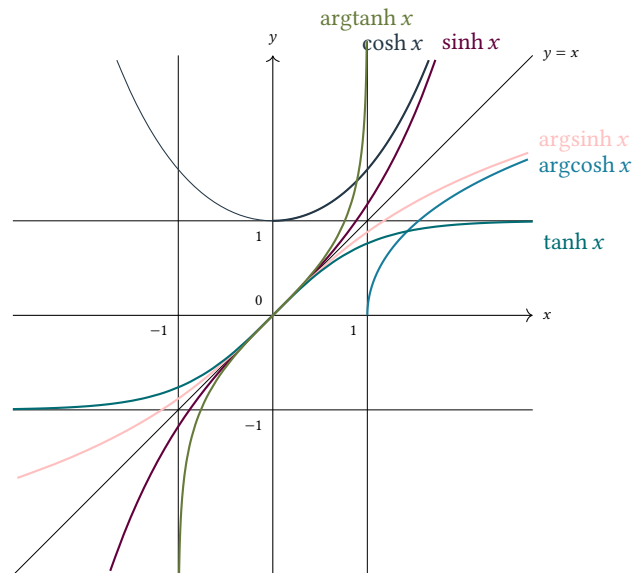


FIGURE A.7 : Représentations graphiques des fonctions trigonométriques hyperboliques et leurs réciproques

A.6 Changements de variables

Pour le calcul des primitives ou d'intégrales de fractions rationnelles en cosinus et en sinus d'une variable a , c'est-à-dire de quotients de deux polynômes trigonométriques, une stratégie consiste à se ramener à un intervalle d'intégration inclus dans $]-\pi, \pi[$, puis à procéder au changement de variable

$$t = \tan\left(\frac{a}{2}\right).$$

On peut alors remplacer les fonctions trigonométriques circulaires apparaissant dans l'intégrande, et l'élément d'intégration par les expressions

$$\begin{cases} \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan a = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad da = \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Ces expressions se déduisent des formules de réduction du carré.

De même, pour le calcul des primitives ou d'intégrales de fractions rationnelles en cosinus et en sinus hyperboliques d'une variable a , une stratégie consiste à procéder au changement de variable

$$t = \tanh\left(\frac{a}{2}\right).$$

On peut alors remplacer les fonctions trigonométriques hyperboliques apparaissant dans l'intégrande, et l'élément d'intégration par les expressions

$$\begin{cases} \cosh a = \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \sinh a = \frac{2t}{1-t^2} \\ \tanh a = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad da = \frac{2 dt}{1-t^2}.$$

Développements limités usuels en zéro

Ces formules sont valables quand $x \rightarrow 0$, pour tout entier $n \geq 0$. Une somme vide vaut 0. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $\binom{\alpha}{0} = 1$ et $\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k!$ pour $k \geq 1$.

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\
 \sinh x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
 \cosh x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\
 \sin x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
 \cos x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \\
 (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \\
 \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \\
 \ln(1-x) &= -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\
 \frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) \\
 \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) \\
 \sqrt{1+x} &= \sum_{k=0}^n \binom{1/2}{k} x^k + o(x^n) \\
 \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} x^k + o(x^n) \\
 \arctan x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\
 \operatorname{arctanh} x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\
 \arcsin x &= \sum_{k=0}^n \frac{\binom{2k}{k}}{4^k(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\
 \operatorname{argsinh} x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{4^k(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}) \\
 \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7) \\
 \tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^7)
 \end{aligned}$$

Dérivées usuelles

La dérivée de toute fonction constante est nulle. On indique successivement la fonction considérée, sa dérivée, et les valeurs autorisées des paramètres pour qu'il y ait bien dérivabilité :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^n) &= n x^{n-1} & (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*) \\ \frac{d}{dx}(x^n) &= n x^{n-1} & (x \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{Z}) \\ \frac{d}{dx}(x^\alpha) &= \alpha x^{\alpha-1} & (x \in \mathbb{R}^{+*}, \alpha \in \mathbb{R}) \\ \frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) &= \alpha e^{\alpha x} & (x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}) \\ \frac{d}{dx}(a^x) &= a^x \ln a & (x \in \mathbb{R}, a > 0) \\ \frac{d}{dx}(\ln |x|) &= \frac{1}{x} & (x \in \mathbb{R}^*) \\ \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x & (x \in \mathbb{R}) \\ \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x & (x \in \mathbb{R}) \\ \frac{d}{dx}(\tan x) &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} & (x \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z}) \\ \frac{d}{dx}(\cotan x) &= -1 - \cotan^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x} & (x \notin \pi\mathbb{Z}) \\ \frac{d}{dx}(\cosh x) &= \sinh x & (x \in \mathbb{R}) \\ \frac{d}{dx}(\sinh x) &= \cosh x & (x \in \mathbb{R}) \\ \frac{d}{dx}(\tanh x) &= 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} & (x \in \mathbb{R}) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tanh x}\right) &= 1 - \frac{1}{\tanh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} & (x \in \mathbb{R}^*) \\ \frac{d}{dx}(\arcsin x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (-1 < x < 1) \\ \frac{d}{dx}(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (-1 < x < 1) \\ \frac{d}{dx}(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2} & (x \in \mathbb{R}) \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{argsinh} x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & (x \in \mathbb{R}) \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{argcosh} x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & (x > 1) \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{argtanh} x) &= \frac{1}{1-x^2} & (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

Primitives usuelles

On indique la fonction considérée, une de ses primitives (les autres se déduisant par ajout d'une constante sur chaque intervalle considéré), et les valeurs autorisées des paramètres pour qu'on puisse bien considérer les primitives :

$$\begin{aligned}
 \int (x - x_0)^n dx &= \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} & (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, x_0 \in \mathbb{R}) \\
 \int (x - x_0)^n dx &= \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} & (x \neq x_0, n \in \{-2, -3, \dots\}, x_0 \in \mathbb{R}) \\
 \int (x - x_0)^\alpha dx &= \frac{(x - x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1} & (x > x_0, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, x_0 \in \mathbb{R}) \\
 \int (x - z_0)^n dx &= \frac{(x - z_0)^{n+1}}{n+1} & (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \\
 \int \frac{dx}{x-a} &= \ln |x-a| & (x \neq a, a \in \mathbb{R}) \\
 \int \frac{dx}{x-(a+ib)} &= \frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + b^2) + i \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) & (x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*) \\
 \int \ln x dx &= x(\ln x - 1) & (x > 0) \\
 \int e^{\alpha x} dx &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} & (x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}^*) \\
 \int \sin x dx &= -\cos x & (x \in \mathbb{R}) \\
 \int \cos x dx &= \sin x & (x \in \mathbb{R}) \\
 \int \tan x dx &= -\ln |\cos x| & (-\pi/2 < x - k\pi < \pi/2, k \in \mathbb{Z}) \\
 \int \cotan x dx &= \ln |\sin x| & (0 < x - k\pi < \pi, k \in \mathbb{Z}) \\
 \int \sinh x dx &= \cosh x & (x \in \mathbb{R}) \\
 \int \cosh x dx &= \sinh x & (x \in \mathbb{R}) \\
 \int \tanh x dx &= \ln(\cosh x) & (x \in \mathbb{R}) \\
 \int \frac{dx}{\tanh x} &= \ln |\sinh x| & (x \neq 0) \\
 \int \sin^2 x dx &= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} & (x \in \mathbb{R}) \\
 \int \cos^2 x dx &= \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} & (x \in \mathbb{R}) \\
 \int \tan^2 x dx &= \tan x - x & (-\pi/2 < x - k\pi < \pi/2, k \in \mathbb{Z}) \\
 \int \cotan^2 x dx &= -\cotan x - x & (0 < x - k\pi < \pi, k \in \mathbb{Z}) \\
 \int \sinh^2 x dx &= \frac{\sinh(2x)}{4} - \frac{x}{2} & (x \in \mathbb{R}) \\
 \int \cosh^2 x dx &= \frac{\sinh(2x)}{4} + \frac{x}{2} & (x \in \mathbb{R}) \\
 \int \tanh^2 x dx &= x - \tanh x & (x \in \mathbb{R}) \\
 \int \frac{dx}{\tanh^2 x} &= x - \frac{1}{\tanh x} & (x \neq 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x} &= \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| & (0 < x - k\pi < \pi), \quad k \in \mathbb{Z} \\
\int \frac{dx}{\cos x} &= \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| & (-\pi/2 < x - k\pi < \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}) \\
\int \frac{dx}{\sinh x} &= \ln \left| \tanh \left(\frac{x}{2} \right) \right| & (x \neq 0) \\
\int \frac{dx}{\cosh x} &= 2 \operatorname{arctan}(e^x) & (x \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{dx}{\sin^2 x} &= \int (1 + \cotan^2 x) \, dx = -\cotan x & (0 < x - k\pi < \pi), \quad k \in \mathbb{Z} \\
\int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x & (-\pi/2 < x - k\pi < \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}) \\
\int \frac{dx}{\sinh^2 x} &= \int \left(\frac{1}{\tanh^2 x} - 1 \right) dx = -\frac{1}{\tanh x} & (x \neq 0) \\
\int \frac{dx}{\cosh^2 x} &= \int (1 - \tanh^2 x) \, dx = \tanh x & (x \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{dx}{\sin^4 x} &= -\cotan x - \frac{\cotan^3 x}{3} & (0 < x - k\pi < \pi, \quad k \in \mathbb{Z}) \\
\int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} & (-\pi/2 < x - k\pi < \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}) \\
\int \frac{dx}{1+x^2} &= \operatorname{arctan} x & (x \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctan} \left(\frac{x}{a} \right) & (x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^*) \\
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| & (x \notin \{-1, 1\}) \\
\int \frac{dx}{1-x^2} &= \operatorname{argtanh} x & (-1 < x < 1) \\
\int \frac{dx}{a^2-x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| & (x \notin \{-|a|, |a|\}, \quad a \in \mathbb{R}^*) \\
\int \frac{dx}{a^2-x^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{argtanh} \left(\frac{x}{a} \right) & (-|a| < x < |a|, \quad a \in \mathbb{R}^*) \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x & (-1 < x < 1) \\
\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \arcsin \left(\frac{x}{|a|} \right) & (-|a| < x < |a|, \quad a \in \mathbb{R}^*) \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) = \operatorname{argsinh} x & (x \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| = -\operatorname{argcosh}(-x) & (x < -1) \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| = \operatorname{argcosh} x & (x > 1) \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| & (x \in \mathbb{R}, \quad a > 0 : |x| > \sqrt{-a}, \quad a < 0) \\
\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x + \frac{x}{2(x^2+1)} & (x \in \mathbb{R}) \\
\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx &= \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x - \frac{x}{2(x^2+1)} & (x \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Tables des lois normales et du χ^2

Les valeurs en différents points t de la fonction de répartition $F(t) = \mathbb{P}(Z \leq t)$ d'une variable aléatoire Z qui suit la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ sont données dans la table E.1. Par exemple, à l'intersection de la ligne 1.6 et de la colonne 0.05, on lit $F(1.65) \approx 0.9505$.

t	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

TABLE E.1 : Table de la loi $N(0, 1)$ normale centrée réduite

Les quantiles de la loi du χ^2 à n degrés de liberté sont donnés dans la table E.2. Si F_n est la fonction de répartition de $\text{Chi2}(n)$ et $p \in]0, 1[$, alors le quantile d'ordre p de la loi du χ^2 à n degrés de liberté est le réel t tel que $F_n(t) = p$.

$n \setminus p$	0.001	0.005	0.010	0.020	0.025	0.050	0.1	0.15	0.2
1	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0010	0.0039	0.0158	0.0358	0.0642
2	0.0020	0.0100	0.0201	0.0404	0.0506	0.1026	0.2107	0.3250	0.4463
3	0.0243	0.0717	0.1148	0.1848	0.2158	0.3518	0.5844	0.7978	1.0052
4	0.0908	0.2070	0.2971	0.4294	0.4844	0.7107	1.0636	1.3665	1.6488
5	0.2102	0.4117	0.5543	0.7519	0.8312	1.1455	1.6103	1.9938	2.3425
6	0.3811	0.6757	0.8721	1.1344	1.2373	1.6354	2.2041	2.6613	3.0701
7	0.5985	0.9893	1.2390	1.5643	1.6899	2.1673	2.8331	3.3583	3.8223
8	0.8571	1.3444	1.6465	2.0325	2.1797	2.7326	3.4895	4.0782	4.5936
9	1.1519	1.7349	2.0879	2.5324	2.7004	3.3251	4.1682	4.8165	5.3801
10	1.4787	2.1559	2.5582	3.0591	3.2470	3.9403	4.8652	5.5701	6.1791
11	1.8339	2.6032	3.0535	3.6087	3.8157	4.5748	5.5778	6.3364	6.9887
12	2.2142	3.0738	3.5706	4.1783	4.4038	5.2260	6.3038	7.1138	7.8073
13	2.6172	3.5650	4.1069	4.7654	5.0088	5.8919	7.0415	7.9008	8.6339
14	3.0407	4.0747	4.6604	5.3682	5.6287	6.5706	7.7895	8.6963	9.4673
15	3.4827	4.6009	5.2293	5.9849	6.2621	7.2609	8.5468	9.4993	10.3070
16	3.9416	5.1422	5.8122	6.6142	6.9077	7.9616	9.3122	10.3090	11.1521
17	4.4161	5.6972	6.4078	7.2550	7.5642	8.6718	10.0852	11.1249	12.0023
18	4.9048	6.2648	7.0149	7.9062	8.2307	9.3905	10.8649	11.9463	12.8570
19	5.4068	6.8440	7.6327	8.5670	8.9065	10.1170	11.6509	12.7727	13.7158
20	5.9210	7.4338	8.2604	9.2367	9.5908	10.8508	12.4426	13.6039	14.5784
21	6.4467	8.0337	8.8972	9.9146	10.2829	11.5913	13.2396	14.4393	15.4446
22	6.9830	8.6427	9.5425	10.6000	10.9823	12.3380	14.0415	15.2788	16.3140
23	7.5292	9.2604	10.1957	11.2926	11.6886	13.0905	14.8480	16.1219	17.1865
24	8.0849	9.8862	10.8564	11.9918	12.4012	13.8484	15.6587	16.9686	18.0618
25	8.6493	10.5197	11.5240	12.6973	13.1197	14.6114	16.4734	17.8184	18.9398

$n \setminus p$	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.980	0.990	0.995	0.999
1	1.6424	2.0723	2.7055	3.8415	5.0239	5.4119	6.6349	7.8794	10.8276
2	3.2189	3.7942	4.6052	5.9915	7.3778	7.8240	9.2103	10.5966	13.8155
3	4.6416	5.3170	6.2514	7.8147	9.3484	9.8374	11.3449	12.8382	16.2662
4	5.9886	6.7449	7.7794	9.4877	11.1433	11.6678	13.2767	14.8603	18.4668
5	7.2893	8.1152	9.2364	11.0705	12.8325	13.3882	15.0863	16.7496	20.5150
6	8.5581	9.4461	10.6446	12.5916	14.4494	15.0332	16.8119	18.5476	22.4577
7	9.8032	10.7479	12.0170	14.0671	16.0128	16.6224	18.4753	20.2777	24.3219
8	11.0301	12.0271	13.3616	15.5073	17.5345	18.1682	20.0902	21.9550	26.1245
9	12.2421	13.2880	14.6837	16.9190	19.0228	19.6790	21.6660	23.5894	27.8772
10	13.4420	14.5339	15.9872	18.3070	20.4832	21.1608	23.2093	25.1882	29.5883
11	14.6314	15.7671	17.2750	19.6751	21.9200	22.6179	24.7250	26.7568	31.2641
12	15.8120	16.9893	18.5493	21.0261	23.3367	24.0540	26.2170	28.2995	32.9095
13	16.9848	18.2020	19.8119	22.3620	24.7356	25.4715	27.6882	29.8195	34.5282
14	18.1508	19.4062	21.0641	23.6848	26.1189	26.8728	29.1412	31.3193	36.1233
15	19.3107	20.6030	22.3071	24.9958	27.4884	28.2595	30.5779	32.8013	37.6973
16	20.4651	21.7931	23.5418	26.2962	28.8454	29.6332	31.9999	34.2672	39.2524
17	21.6146	22.9770	24.7690	27.5871	30.1910	30.9950	33.4087	35.7185	40.7902
18	22.7595	24.1555	25.9894	28.8693	31.5264	32.3462	34.8053	37.1565	42.3124
19	23.9004	25.3289	27.2036	30.1435	32.8523	33.6874	36.1909	38.5823	43.8202
20	25.0375	26.4976	28.4120	31.4104	34.1696	35.0196	37.5662	39.9968	45.3147
21	26.1711	27.6620	29.6151	32.6706	35.4789	36.3434	38.9322	41.4011	46.7970
22	27.3015	28.8225	30.8133	33.9244	36.7807	37.6595	40.2894	42.7957	48.2679
23	28.4288	29.9792	32.0069	35.1725	38.0756	38.9683	41.6384	44.1813	49.7282
24	29.5533	31.1325	33.1962	36.4150	39.3641	40.2704	42.9798	45.5585	51.1786
25	30.6752	32.2825	34.3816	37.6525	40.6465	41.5661	44.3141	46.9279	52.6197

TABLE E.2 : Table de la loi $\chi^2(n)$ du χ^2 à n degrés de liberté