

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

L2 Chimie / Parcours Chimie / OLMA250C

Fonctions de plusieurs variables

Notes de cours

Géométrie, analyse et systèmes différentiels

Arnaud Durand

Département de Mathématiques d'Orsay

arnaud.durand@universite-paris-saclay.fr

Avant-propos

On considère connues les notions et méthodes nécessaires à l'étude des fonctions d'une seule variable réelle. Cependant, lors de la modélisation de nombreux phénomènes, il est naturel et nécessaire de considérer des fonctions dépendant de plusieurs variables. Citons quelques exemples :

- L'équation d'état de van der Waals exprime la pression P d'un échantillon de gaz comme une fonction de sa température T et du volume V qu'il occupe. On a en effet

$$P(T, V) = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2},$$

où n est le nombre de moles dans l'échantillon, a et b sont des constantes qui dépendent du gaz considéré, appelées respectivement terme de cohésion et covolume molaire, et R est la constante universelle des gaz parfaits.

- L'énergie totale E d'un pendule simple s'exprime comme une fonction de l'angle θ que fait le pendule avec la verticale et de sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$, sous la forme

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos \theta),$$

où m et ℓ désignent respectivement la masse du pendule et la longueur de la tige, et g est la valeur de l'accélération due à la pesanteur. On reviendra sur cet exemple dans la section 5.2.1.

- On peut décrire les conditions de température et de pression atmosphérique en un point du globe à l'aide de fonctions $T(x, y)$ et $P(x, y)$ de la longitude x et la latitude y . On peut même introduire une variable z afin d'étudier la dépendance vis-à-vis de l'altitude, et une variable t pour la dépendance selon l'instant. On se ramène donc à considérer des fonctions de trois ou quatre variables.

L'étude de tels phénomènes passe donc par l'analyse des fonctions de plusieurs variables associées. Par exemple, pour l'équation de van der Waals, l'étude des variations et des extrema (minimum ou maximum) de la fonction considérée peut permettre de savoir s'il existe des configurations de température et de volume donnant une pression minimale. Pour le pendule, les points critiques de l'énergie correspondent à des situations d'équilibre, dont on peut s'interroger sur l'existence et la stabilité.

Les notions et méthodes utiles à l'étude des fonctions d'une seule variable (ensemble de définition, représentation graphique, limites, continuité, dérivées et sens de variation, tangente, *etc.*) s'étendent parfois de façon élémentaire, parfois non. Un premier objectif de ce cours sera de clarifier tous ces points pour les fonctions de plusieurs variables. Notre étude se résumera aux fonctions de deux ou trois variables, même si une théorie générale des fonctions de n variables existe.

Dans ce cadre, il sera utile d'étudier aussi des notions de géométrie du plan et de l'espace, et de représentation dans divers systèmes de coordonnées. Enfin, un dernier objectif du cours sera d'étudier les systèmes différentiels linéaires d'ordre un en dimension deux, et les équations différentielles linéaires d'ordre deux, ainsi que leurs liens avec les fonctions de plusieurs variables.

Table des matières

Avant-propos	i
1 Géométrie du plan et de l'espace	1
1.1 Géométrie dans le plan	1
1.1.1 Produit scalaire et norme euclidienne	1
1.1.2 Équations de droites	2
1.1.3 Coordonnées cartésiennes et polaires	3
1.2 Géométrie dans l'espace	4
1.2.1 Produit scalaire et norme euclidienne	4
1.2.2 Produit vectoriel	5
1.2.3 Équations de plans et de droites	5
1.2.4 Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques	7
2 Fonctions de plusieurs variables : généralités et représentation graphique	10
2.1 Fonctions et ensembles de définition	10
2.2 Graphe et lignes de niveau	10
2.2.1 Graphe	10
2.2.2 Lignes de niveau	11
2.3 Fonctions partielles	11
2.4 Cas des fonctions de trois variables	12
3 Fonctions de plusieurs variables : continuité et dérivabilité	15
3.1 Limites et continuité	15
3.1.1 Limite en un point	15
3.1.2 Continuité	17
3.2 Dérivées partielles	17
3.3 Approximation affine	18
3.3.1 Développement limité au premier ordre	19
3.3.2 Application aux calculs d'incertitudes	20
3.3.3 Plan tangent	20
3.4 Dérivation de fonctions composées	22
3.4.1 Composition à l'arrivée	22
3.4.2 Composition au départ	22
3.5 Gradient et lignes de niveau	23
4 Fonctions de plusieurs variables : extrema	27
4.1 Extrema et points critiques	27
4.2 Classification des points critiques	28
4.2.1 Développement limité au deuxième ordre	28
4.2.2 Types de points critiques	29

4.2.3	Allure des lignes de niveau	31
5	Lien avec les systèmes différentiels	33
5.1	Trajectoires et portrait de phase	33
5.2	Systèmes conservatifs et hamiltoniens	35
5.2.1	Le pendule sans frottement	35
5.2.2	Systèmes conservatifs	36
5.2.3	Systèmes hamiltoniens	36
6	Systèmes différentiels linéaires	39
6.1	Classes de similitude	39
6.2	Valeurs propres associées au système	40
6.3	Cas où le discriminant est strictement négatif	40
6.4	Cas où le discriminant est strictement positif	41
6.5	Cas où le discriminant est nul	42
6.6	Application à l'oscillateur harmonique	43
6.6.1	Régime pseudo-périodique	43
6.6.2	Régime apériodique	44
6.6.3	Régime critique	44
6.6.4	Régime conservatif forcé	45

Géométrie du plan et de l'espace

1.1 Géométrie dans le plan

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels peut être muni d'une structure d'espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$. En effet, la somme de deux éléments $\vec{u}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, à savoir $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, appartient encore à $\mathbb{R}^2$. Il en va de même du produit d'un élément $\vec{u} = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ par un nombre réel λ , c'est-à-dire de $\lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y)$. De plus, tout élément $\vec{u} = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit sous la forme

$$\vec{u} = x(1, 0) + y(0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Cette décomposition montre que les deux vecteurs $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, appelée la *base canonique*.

Géométriquement, on voit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ comme un plan, et ainsi ses éléments comme des vecteurs du plan. Cependant, un couple $p = (x, y)$ peut aussi être vu comme un point du plan, et le vecteur correspondant est celui qui va de l'origine $o = (0, 0)$ jusqu'au point p , noté $\overrightarrow{op} = p - o$. Enfin, on dit que $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est le *repère canonique* de $\mathbb{R}^2$. La donnée de l'origine o et du vecteur $\vec{i}$ définit une droite appelée *axe des abscisses* et noté ox . De même, l'origine définit avec le vecteur $\vec{j}$ l'*axe des ordonnées*, noté oy .

Deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont dits *colinéaires* s'il existe deux coefficients réels μ_1 et μ_2 qui ne sont pas tous les deux nuls tels que $\mu_1\vec{u}_1 + \mu_2\vec{u}_2 = 0$. Cela signifie que $\vec{u}_2 = \lambda\vec{u}_1$ ou $\vec{u}_1 = \lambda\vec{u}_2$ pour un nombre réel λ , donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont multiples l'un de l'autre, et leurs coordonnées sont proportionnelles.

1.1.1 Produit scalaire et norme euclidienne

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{u}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est défini par la formule

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

On dit que deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont *orthogonaux*, ou *perpendiculaires*, si $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$. En particulier, le vecteur nul est orthogonal à n'importe quel vecteur.

Le produit scalaire permet de définir ensuite la longueur, ou *norme euclidienne*, d'un vecteur $\vec{u} = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La norme euclidienne vérifie les propriétés suivantes :

- on a $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = 0$;
- on a $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$ pour tout nombre réel λ , dont $|\lambda|$ désigne la valeur absolue ;
- on a l'*inégalité triangulaire* $\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\| \leq \|\vec{u}_1\| + \|\vec{u}_2\|$.

Dans le plan, on peut exprimer le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ à partir de leurs longueurs et de la mesure $\phi = \angle(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ de l'angle qu'ils forment. En effet, on a

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \cos \phi.$$

Ainsi, deux vecteurs non nuls $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux si et seulement si $\cos \phi = 0$, c'est-à-dire que les vecteurs forment un angle valant $\pi/2$ modulo π .

La norme euclidienne permet de définir une notion de convergence dans le plan. En effet, on dit qu'une suite de points p_n de $\mathbb{R}^2$ converge vers un point p de $\mathbb{R}^2$ si la norme $\|p_n - p\|$ du vecteur $\overrightarrow{pp_n} = p_n - p$ qui va du point

p au point p_n tend vers zéro quand $n \rightarrow \infty$. Dans ce cas, on note $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ ou encore $p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p$, et cela revient aux conditions $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - p\| = 0$ ou encore $\|p_n - p\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, qui concerne la convergence d'une suite de nombres réels. Cette propriété est aussi caractérisée par la convergence pour chacune des coordonnées. En effet, pour $p_n = (x_n, y_n)$ et $p = (x, y)$, on observe que

$$p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p \iff \|p_n - p\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff \begin{cases} |x_n - x| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ |y_n - y| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \\ y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y. \end{cases}$$

L'équivalence du milieu provient du fait que pour tous nombres réels α et β , on a

$$\max\{|\alpha|, |\beta|\} \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \|(\alpha, \beta)\| = \|\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}\| \leq |\alpha| \|\vec{i}\| + |\beta| \|\vec{j}\| = |\alpha| + |\beta|.$$

Les deux autres équivalences découlent de la définition de la convergence des suites.

1.1.2 Équations de droites

Équations cartésiennes

On considère un point $p_0 = (x_0, y_0)$ et un vecteur non nul $\vec{n} = (a, b)$. Alors, la droite D qui passe par le point p_0 et qui est orthogonale au vecteur $\vec{n}$ est l'ensemble des points $p = (x, y)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{p_0 p} = p - p_0$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire tels que

$$0 = \overrightarrow{p_0 p} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

On dit que $\vec{n}$ est un *vecteur normal* pour la droite D , et que cette droite admet pour *équation cartésienne*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Cela signifie que la droite D est l'ensemble de tous les points $p = (x, y)$ dont les coordonnées x et y sont solution de cette équation. L'équation ci-dessus s'écrit aussi

$$ax + by = c \quad \text{avec} \quad c = ax_0 + by_0.$$

Réciproquement, si une droite D admet pour équation cartésienne $ax + by = c$, alors le vecteur $\vec{n} = (a, b)$ est un vecteur normal pour cette droite D . On peut donc retrouver un vecteur normal de D en regardant les coefficients de son équation cartésienne.

Une même droite D admet une infinité d'équations cartésiennes, qui sont toutes proportionnelles entre elles. D'une part, si $ax + by = c$ est une équation cartésienne de D , alors $\lambda ax + \lambda by = \lambda c$ est aussi une équation cartésienne de D , quel que soit le réel $\lambda \neq 0$. D'autre part, si $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont deux équations d'une même droite, leurs vecteurs normaux non nuls (a, b) et (a', b') sont colinéaires. Il existe donc $\lambda \neq 0$ tel que $(a', b') = \lambda(a, b)$. En choisissant un point (x_0, y_0) de cette droite, on obtient $c' = a'x_0 + b'y_0 = \lambda(ax_0 + by_0) = \lambda c$. Les trois coefficients sont donc proportionnels.

Toute droite non verticale du plan admet une équation cartésienne de la forme $y = mx + h$, pour un unique couple de coefficients réels (m, h) . On appelle m la *pente* ou le *coefficient directeur* de la droite, et h son *ordonnée à l'origine*. Partant d'une équation cartésienne de la forme $ax + by = c$, en isolant y , on trouve de façon équivalente $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, car $b \neq 0$ si la droite est non verticale. Ainsi, $m = -\frac{a}{b}$ et $h = \frac{c}{b}$. Enfin, toute droite verticale du plan admet une équation cartésienne de la forme $x = x_0$, pour un nombre réel x_0 .

Équations paramétriques

On peut aussi définir une droite D par la donnée d'un point $p_0 = (x_0, y_0)$ de cette droite et d'un *vecteur directeur* $\vec{d} = (\alpha, \beta)$ non nul, c'est-à-dire un vecteur qui a la même direction que D . La droite D s'obtient alors comme l'ensemble des points $p = (x, y)$ tels que le vecteur $\overrightarrow{p_0 p}$ est un multiple de $\vec{d}$, soit tels que

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

On obtient ainsi un *système d'équations paramétriques* de la droite. Cela signifie que la droite D est l'ensemble des points $p = (x, y)$ dont les coordonnées peuvent s'écrire sous la forme (1.1) pour une certaine valeur de t .

Une interprétation physique possible est la suivante. Le système (1.1) donne la position à l'instant t d'une particule située au point $p_0 = (x_0, y_0)$ à l'instant $t = 0$ et qui admet un vecteur vitesse constant égal à $\vec{d} = (\alpha, \beta)$. La trajectoire d'une telle particule est bien une droite.

Réciproquement, considérons une droite D qui admet (1.1) pour système d'équations paramétriques. Le point $p_0 = (x_0, y_0)$, obtenu pour $t = 0$, appartient à D . De même, le point $p_1 = (x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$, obtenu pour $t = 1$, appartient aussi à D . Ainsi, $\vec{d} = p_1 - p_0 = (\alpha, \beta)$ est un vecteur directeur de D .

Une même droite D admet une infinité de systèmes d'équations paramétriques. En effet, si D admet (1.1) comme système d'équations paramétriques, alors pour tous réels t_0 et $\lambda \neq 0$,

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t_0 + \lambda \alpha t \\ y = y_0 + \beta t_0 + \lambda \beta t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

est aussi un système d'équations paramétriques pour D .

Remarques 1.1. • Les vecteurs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (-b, a)$ sont toujours orthogonaux, quels que soient les nombres réels a et b . Par conséquent, si $\vec{n} = (a, b)$ est un vecteur normal pour une droite, le vecteur $\vec{d} = (-b, a)$ en est un vecteur directeur. De même, si $\vec{d} = (\alpha, \beta)$ est un vecteur directeur d'une droite, le vecteur $\vec{n} = (-\beta, \alpha)$ en est un vecteur normal.

• On note $\vec{d}_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ un vecteur directeur et $\vec{n}_1 = (a_1, b_1)$ un vecteur normal d'une droite D_1 , puis $\vec{d}_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ un vecteur directeur et $\vec{n}_2 = (a_2, b_2)$ un vecteur normal d'une droite D_2 . Alors, D_1 et D_2 sont parallèles si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- les vecteurs $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ sont colinéaires ;
- les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires ;
- les vecteurs $\vec{d}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux ;
- les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{d}_2$ sont orthogonaux.

De même, D_1 et D_2 sont perpendiculaires si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- les vecteurs $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ sont orthogonaux ;
- les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux ;
- les vecteurs $\vec{d}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires ;
- les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{d}_2$ sont colinéaires.

Ces conditions peuvent se vérifier en examinant les équations cartésiennes et paramétriques des droites D_1 et D_2 , puisque les coefficients de ces équations permettent de trouver des vecteurs directeurs $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ et des vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ de ces droites.

1.1.3 Coordonnées cartésiennes et polaires

Coordonnées cartésiennes

Si $p = (x, y)$ désigne un point du plan $\mathbb{R}^2$, alors il s'identifie au vecteur $\vec{op}$ allant de l'origine $o = (0, 0)$ jusqu'au point p . Les composantes x et y de ce vecteur dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$ donnent les *coordonnées cartésiennes* du point p dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Coordonnées polaires

On suppose p distinct de l'origine, et on note

$$r = \|\vec{op}\| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$

Il s'agit de la distance entre le point p et l'origine. Le point $(x/r, y/r)$ appartient donc au *cercle unité*, de centre o et de rayon 1. On sait alors qu'il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}.$$

On appelle le couple (r, θ) les *coordonnées polaires* de p , voir la figure 1.1.

Les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires de p sont donc liées par les formules

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta.$$

1.2 Géométrie dans l'espace

Les notions vues ci-dessus pour le plan $\mathbb{R}^2$ se généralisent à l'espace $\mathbb{R}^3$. Cette section sera donc très semblable à la précédente.

En effet, l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de nombres réels peut être muni d'une structure d'espace vectoriel de dimension trois sur $\mathbb{R}$. La somme de deux éléments $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ de $\mathbb{R}^3$, à savoir $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$, appartient encore à $\mathbb{R}^3$. C'est aussi le cas du produit d'un élément $\vec{u} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ par un nombre réel λ , c'est-à-dire de $\lambda\vec{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Enfin, tout élément $\vec{u} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\vec{u} = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Les vecteurs $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$ forment la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Un triplet $p = (x, y, z)$ peut aussi être vu comme un point de l'espace, et le vecteur correspondant est celui qui va de l'origine $o = (0, 0, 0)$ jusqu'au point p . La donnée de l'origine o et des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ définit à nouveau l'axe des abscisses ox et l'axe des ordonnées oy , respectivement. De plus, l'origine définit avec le vecteur $\vec{k}$ l'axe des cotes, noté oz . Enfin, la donnée de l'origine et des deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ définit un plan noté oxy . On obtient de même des plans notés oxz et oyz en considérant les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$, et les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$, respectivement.

1.2.1 Produit scalaire et norme euclidienne

La formule pour le produit scalaire de deux vecteurs s'étend naturellement au cas de trois composantes : le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dans $\mathbb{R}^3$ est maintenant

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

On a toujours la propriété que deux vecteurs non nuls ont un produit scalaire nul si et seulement s'ils sont orthogonaux, c'est-à-dire sont perpendiculaires dans le plan qu'ils définissent.

La norme euclidienne d'un vecteur $\vec{u} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

et permet de définir une notion de convergence dans l'espace. Une suite de points p_n de $\mathbb{R}^3$ converge vers un point p de $\mathbb{R}^3$ si la norme $\|p_n - p\|$ du vecteur qui va du point p au point p_n tend vers zéro quand $n \rightarrow \infty$.

Si les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires, ils définissent un plan, et dans ce plan forment un angle de mesure $\phi = \angle(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ vérifie alors

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \cos \phi,$$

c'est-à-dire la même formule que celle vue en dimension deux.

1.2.2 Produit vectoriel

Un outil important et utile concernant les vecteurs en dimension trois est le *produit vectoriel*, défini de la manière suivante. Pour plus de commodité, on note les vecteurs sous forme de colonnes.

Définition 1.2 (produit vectoriel). Soient $\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On appelle *produit vectoriel* de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, et on note $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$, le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées données par

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Pour se souvenir de ces formules, on peut aussi utiliser la méthode suivante. On recopie les deux premières composantes de chaque vecteur en-dessous de ceux-ci, puis on calcule les différences des produits en croix juste en-dessous de la ligne de la composante considérée :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \boxed{\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{array}} & \rightsquigarrow & y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{array} & \begin{array}{ccc} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \boxed{\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{array}} \\ \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array} \end{array} & \rightsquigarrow & x_2 z_1 - x_1 z_2 \end{array} & \begin{array}{ccc} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{array} \\ \boxed{\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array}} \end{array} & \rightsquigarrow & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{array}$$

Géométriquement, on peut montrer que les deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul. De plus, si les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires, leur produit vectoriel $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ est l'unique vecteur qui vérifie les propriétés suivantes : il est orthogonal aux deux vecteurs de départ, sa norme est donnée par $\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\| = \|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\| \cdot \sin \phi$ avec $\phi = \angle(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ défini comme ci-dessus, et les trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ définissent une base directe (c'est-à-dire orientée comme le pouce, l'index et le majeur de la main droite). On en déduit aussi que $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ est orthogonal à tous les vecteurs du plan engendré par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

On peut montrer à partir de la définition que le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition des vecteurs $((\vec{u}_1 + \vec{u}'_1) \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 + \vec{u}'_1 \wedge \vec{u}_2)$, compatible avec la multiplication par un scalaire $(\lambda(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) = (\lambda\vec{u}_1) \wedge \vec{u}_2)$ et antisymétrique $(\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = -\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1)$.

Exemple 1.3. On peut retrouver le troisième vecteur de la base canonique comme produit vectoriel des deux premiers. En effet, on calcule aisément

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Équations de plans et de droites

Équations cartésiennes de plans

On considère un point $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et un vecteur non nul $\vec{n} = (a, b, c)$. Alors, le plan P qui passe par le point p_0 et qui est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ est l'ensemble des points $p = (x, y, z)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{p_0 p} = p - p_0$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire tels que

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{p_0 p} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0). \end{aligned}$$

On dit que le vecteur $\vec{n}$ est un *vecteur normal* pour le plan P , et que ce plan admet pour équation

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

soit encore

$$ax + by + cz = d \quad \text{avec} \quad d = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

En supposant par exemple $c \neq 0$, on écrit l'équation du plan sous la forme

$$z = f(x, y) = \frac{d - ax - by}{c}.$$

On donnera par la suite de cette écriture l'interprétation suivante : le graphe d'une fonction affine de deux variables est un plan de l'espace.

Comme dans le cas de la dimension deux, on peut retrouver réciproquement les coordonnées d'un vecteur normal au plan en regardant les coefficients d'une équation cartésienne. En effet, un plan qui admet $ax + by + cz = d$ pour équation cartésienne admet $\vec{n} = (a, b, c)$ pour vecteur normal.

Équations paramétriques de plans

On peut aussi définir un plan par la donnée d'un point $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{u}' = (\alpha', \beta', \gamma')$. Le plan s'obtient alors comme l'ensemble des points $p = (x, y, z)$ tels que le vecteur $\overrightarrow{p_0 p}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha s + \alpha' t \\ y = y_0 + \beta s + \beta' t \\ z = z_0 + \gamma s + \gamma' t, \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Ce système est constitué des *équations paramétriques* du plan.

Comme dans le cas de la dimension deux, on peut retrouver réciproquement les coordonnées d'un point du plan et de deux vecteurs directeurs du plan en regardant les coefficients d'un système d'équations paramétriques. En effet, un plan qui admet (1.3) pour système d'équations paramétriques admet $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{u}' = (\alpha', \beta', \gamma')$ pour vecteurs directeurs, et contient le point $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Équations cartésiennes de droites

Dans l'espace de dimension trois, une droite correspond à l'intersection de deux plans qui ne sont pas parallèles, voir la figure 1.2. Une droite est donc caractérisée par la donnée de deux équations de plans, de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d'. \end{cases}$$

Le fait que les plans soient non parallèles indique que les vecteurs normaux à ces plans, soit respectivement $\vec{n} = (a, b, c)$ et $\vec{n}' = (a', b', c')$, ne doivent pas être colinéaires. On observe de plus que la direction de la droite est orthogonale aux deux vecteurs normaux aux plans $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, donc cette droite admet le produit vectoriel $\vec{n} \wedge \vec{n}'$ pour vecteur directeur.

Équations paramétriques de droites

Tout comme en dimension deux, on peut aussi définir une droite de l'espace de dimension trois par la donnée d'un point $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et d'un vecteur directeur $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$ non nul. La droite s'obtient à nouveau comme l'ensemble des points $p = (x, y, z)$ tels que le vecteur $\overrightarrow{p_0 p}$ est un multiple du vecteur $\vec{d}$, c'est-à-dire tels que

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Ce système est constitué des *équations paramétriques* de la droite. Comme dans le cas de la dimension deux, on peut retrouver réciproquement les coordonnées d'un point du plan et d'un vecteur directeur de la droite en regardant les coefficients d'un système d'équations paramétriques. En effet, une droite qui admet (1.4) pour système d'équations paramétriques admet $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$ pour vecteur directeur, et contient le point $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Remarque 1.4. Les remarques concernant le parallélisme et l'orthogonalité faites dans le cas de la dimension deux restent valables en dimension trois. Par exemple, deux plans sont parallèles si et seulement s'ils admettent des vecteurs normaux respectifs qui sont colinéaires, une droite et un plan sont orthogonaux si et seulement si un vecteur normal au plan est colinéaire à un vecteur directeur de la droite, etc.

1.2.4 Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

Coordonnées cartésiennes

Si $p = (x, y, z)$ désigne un point de l'espace $\mathbb{R}^3$, on peut l'identifier au vecteur $\overrightarrow{op}$ allant de l'origine $o = (0, 0, 0)$ jusqu'au point p . Les composantes x , y et z de ce vecteur dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donnent les *coordonnées cartésiennes* du point p dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Coordonnées cylindriques

On suppose d'abord le point p en dehors de l'axe des cotes, c'est-à-dire $(x, y) \neq (0, 0)$. Le point $q = (x, y, 0)$ est la projection de p sur le plan passant par l'origine et engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (donc normal au troisième vecteur $\vec{k}$). On peut considérer les coordonnées polaires du point q dans ce plan, en définissant

$$r = \|\overrightarrow{oq}\| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

et θ l'unique nombre réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$ tel que

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}.$$

On définit alors les *coordonnées cylindriques* de p comme le triplet (r, θ, z) , obtenu en considérant les coordonnées polaires de la projection q et en conservant la troisième composante z , voir la figure 1.3.

Les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques du point p sont donc liées par

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Sur l'axe des cotes, on a $r = 0$ et l'angle θ est arbitraire ; les mêmes formules restent valables.

Coordonnées sphériques

Il existe un troisième système de coordonnées usuel dans l'espace de dimension trois. Pour le présenter, on note désormais r la distance qui sépare de l'origine un point $p = (x, y, z)$ qui en est distinct, soit

$$r = \|\overrightarrow{op}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0.$$

Le point $(x/r, y/r, z/r)$ appartient donc à la sphère unité, de centre o et de rayon 1. On peut repérer ce point à l'aide de sa *longitude* $\theta \in [0, 2\pi[$ et sa *colatitude* $\varphi \in [0, \pi]$.

La colatitude φ du point p est définie comme l'angle non orienté entre le vecteur $\overrightarrow{op}$ et le troisième vecteur $\vec{k}$ de la base canonique. En utilisant les deux expressions vues précédemment pour le produit scalaire entre ces deux vecteurs, on obtient la relation

$$z = \overrightarrow{op} \cdot \vec{k} = \|\overrightarrow{op}\| \|\vec{k}\| \cos \varphi = r \cos \varphi,$$

ce qui permet de définir φ comme l'unique réel de l'intervalle $[0, \pi]$ vérifiant

$$\cos \varphi = \frac{z}{r}.$$

On note comme ci-dessus $q = (x, y, 0)$ la projection de p sur le plan passant par l'origine et engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Si $q \neq o$, en considérant les coordonnées polaires dans ce plan, on obtient l'existence d'un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$x = \|\vec{oq}\| \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \|\vec{oq}\| \sin \theta.$$

Si $q = o$, le point p est sur l'axe des cotes et θ est arbitraire. En dehors de cet axe, le réel θ est appelé la longitude du point p , et peut se voir comme l'angle orienté allant du vecteur $\vec{i}$ jusqu'au vecteur $\vec{oq}$. Le triplet (r, θ, φ) constitue les *coordonnées sphériques* de p , voir la figure 1.3.

Enfin, on peut déterminer la norme du vecteur $\vec{op}$ en observant que

$$r^2 = \|\vec{op}\|^2 = \|\vec{oq}\|^2 + z^2 = \|\vec{oq}\|^2 + r^2 \cos^2 \varphi,$$

d'après le théorème de Pythagore, ce qui donne

$$\|\vec{oq}\| = \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \varphi} = r |\sin \varphi| = r \sin \varphi.$$

(On peut retirer la valeur absolue autour du sinus, car φ est compris entre 0 et π .) Cela permet d'indiquer le lien entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques du point p , à savoir les formules

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$$

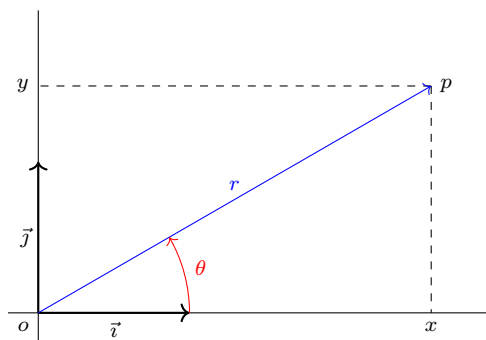


FIGURE 1.1 : Coordonnées cartésiennes et polaires dans le plan

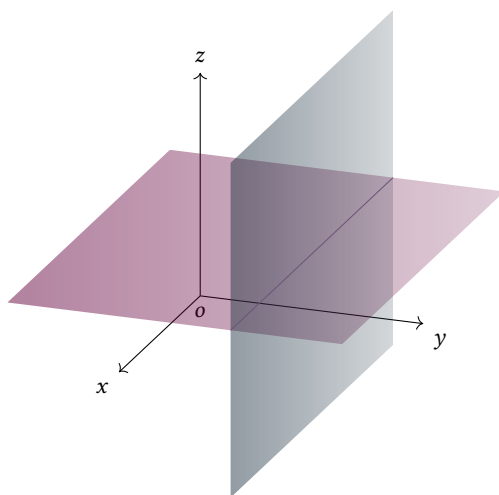
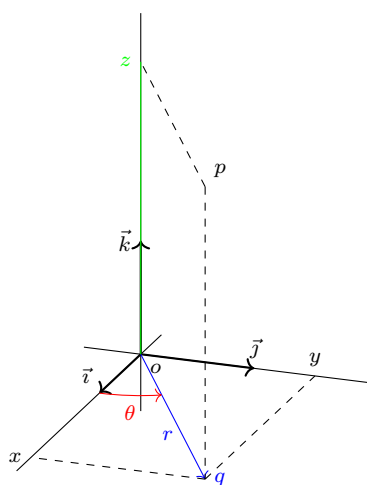
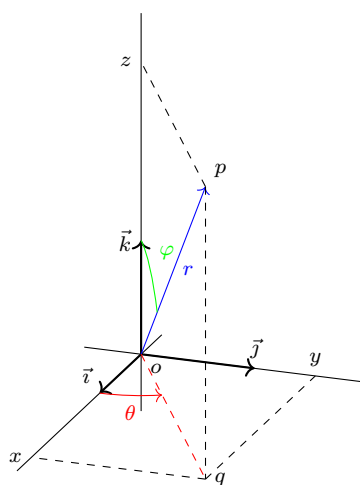


FIGURE 1.2 : Intersection de deux plans non parallèles



(a) Coordonnées cylindriques



(b) Coordonnées sphériques

FIGURE 1.3 : Coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

Fonctions de plusieurs variables : généralités et représentation graphique

On se contentera de traiter le cas des fonctions de deux, ou parfois trois, variables réelles, et qui prennent des valeurs réelles. Le cas d'un nombre plus grand de variables ne présente généralement aucune difficulté théorique supplémentaire, mais est plus difficile à représenter et visualiser.

2.1 Fonctions et ensembles de définition

Définition 2.1 (fonction de deux variables, ensemble de définition). Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. La donnée d'une fonction f définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$ consiste à attribuer à tout élément (x, y) dans D une image $f(x, y)$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble D est appelé *ensemble de définition* de la fonction f .

Il s'agit ici de la définition d'une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles. Dans le cas d'une fonction de n variables, il convient de considérer comme ensemble de définition un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Il arrive souvent en pratique qu'on définisse une fonction f de deux variables en donnant une formule explicite pour $f(x, y)$, et on doit alors déterminer l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels la formule a un sens, ce qui donne l'ensemble de définition D de la fonction.

2.2 Graphe et lignes de niveau

2.2.1 Graphe

Définition 2.2 (graphe). Soit f une fonction de deux variables, dont l'ensemble de définition est noté D . On appelle *graphe*, ou *surface représentative*, de la fonction f l'ensemble G des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient la relation $z = f(x, y)$, avec $(x, y) \in D$. Autrement dit, G est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ qui sont de la forme $(x, y, f(x, y))$ pour un certain (x, y) dans l'ensemble de définition D . Ainsi,

$$G = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D\}.$$

Le graphe d'une fonction de deux variables est un sous-ensemble de l'espace $\mathbb{R}^3$. On peut le construire en considérant, pour chaque couple (x, y) de l'ensemble de définition D , le point $(x, y, 0)$ du plan passant par l'origine et engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique $\vec{i}$ et $\vec{j}$, puis en s'élevant d'une hauteur $z = f(x, y)$ pour obtenir le point (x, y, z) du graphe, voir la figure 2.1.

Exemples 2.3. • On appelle *fonction affine* de deux variables toute fonction de la forme $f(x, y) = ax + by + c$ définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, avec a, b et c des paramètres réels fixés. Le graphe de f est l'ensemble des triplets (x, y, z) de réels qui vérifient la relation $z = f(x, y)$, ce qui est équivalent à

$$ax + by - z = -c.$$

On reconnaît ici l'équation d'un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

- Des exemples assez simples de graphes classiques s'obtiennent en considérant des fonctions polynomiales de degré deux. C'est le cas du *paraboloïde de révolution*, cas particulier de *paraboloïde elliptique*, qui est le graphe de la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$. C'est aussi le cas du *paraboloïde hyperbolique* obtenu comme graphe de la fonction $g(x, y) = x^2 - y^2$. Le changement de signe entre ces deux fonctions induit un comportement bien différent, notamment au voisinage de l'origine. On renvoie à la figure 2.2 pour le tracé de ces deux graphes, et d'autres exemples.

2.2.2 Lignes de niveau

Il est beaucoup plus difficile de tracer le graphe d'une fonction de plusieurs variables que celui d'une fonction d'une seule variable. Même dans le cas le plus simple d'une fonction de deux variables, on est confronté à la nécessité de représenter un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, le graphe, sur une page de dimension deux. De plus, il est difficile de concevoir l'allure du graphe car il n'y a pas de notion équivalente au tableau de variations.

Pour ces raisons, on utilise souvent un mode de représentation faisant appel aux *lignes (ou courbes) de niveau*, dites encore *lignes d'isovaleurs*, qui correspondent aux ensembles de points (x, y) où la fonction prend une valeur $f(x, y)$ constamment égale à un certain réel fixé à l'avance.

Exemples 2.4. Quand on trace sur une carte météorologique les courbes reliant les points de même pression atmosphérique, on parle d'*isobares*. Quand il s'agit des points de même température, on parle d'*isothermes*. Enfin, on trace sur une carte topographique les courbes reliant les points de même altitude. Voir la figure 2.3 pour un exemple de telle carte.

Définition 2.5 (ligne de niveau). Soit f une fonction de deux variables dont l'ensemble de définition est noté D , et soit h un nombre réel. On appelle *ligne de niveau h de la fonction f* l'ensemble

$$L_h = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = h\}.$$

Exemple 2.6. On considère la fonction donnée par la formule $f(x, y) = x^2 + y^2$, dont le graphe est un parabolôïde de révolution. Pour tout réel $h > 0$, la ligne de niveau h de la fonction f est le cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt{h}$. Pour $h = 0$, elle se réduit au point $(0, 0)$. De plus, les lignes de niveau $h < 0$ sont toutes égales à l'ensemble vide.

Lien avec le graphe. Les lignes de niveau d'une fonction de deux variables f peuvent se voir comme des sections du graphe. En effet, pour tout réel h , et tout couple (x, y) dans l'ensemble de définition D ,

$$(x, y) \in L_h \quad \Longleftrightarrow \quad \exists z \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} z = f(x, y) \\ z = h. \end{cases}$$

Cette dernière condition indique que le couple (x, y) donne les deux premières composantes d'un point appartenant à l'intersection du graphe de la fonction f et du plan horizontal d'équation $z = h$. On en déduit que la ligne de niveau h peut s'obtenir en faisant une section du graphe de f à la hauteur h , et en ne gardant que les deux premières coordonnées des points obtenus. On illustre ce fait avec un parabolôïde de révolution sur la figure 2.4.

2.3 Fonctions partielles

Dans l'étude de certaines propriétés des fonctions de plusieurs variables, il est naturel et utile de se ramener à des fonctions d'une seule variable, en fixant toutes les variables sauf une. Les fonctions ainsi obtenues sont appelées *fonctions partielles*.

Définition 2.7 (fonctions partielles). Soit f une fonction de deux variables, et soit (x_0, y_0) un point du domaine de définition D de la fonction f . On appelle première fonction partielle de f au point (x_0, y_0) la fonction d'une variable

$$f_1 : x \mapsto f(x, y_0).$$

La fonction f_1 est définie sur l'ensemble des nombres réels x tels que $(x, y_0) \in D$. De même, on appelle deuxième fonction partielle de f au point (x_0, y_0) la fonction d'une variable

$$f_2 : y \mapsto f(x_0, y).$$

La fonction f_2 est définie sur l'ensemble des nombres réels y tels que $(x_0, y) \in D$.

Exemple 2.8. On considère à nouveau la fonction donnée par $f(x, y) = x^2 + y^2$. Ses fonctions partielles au point $(0, 0)$ sont les fonctions $f_1(x) = f(x, 0) = x^2$ et $f_2(y) = f(0, y) = y^2$.

Lien avec le graphe. On reprend les notations de la définition. Les graphes respectifs des deux fonctions partielles f_1 et f_2 peuvent se déduire du graphe de la fonction f en considérant à nouveau des sections. En effet, par définition, un point (x, z) de $\mathbb{R}^2$ appartient au graphe de la fonction f_1 si et seulement si

$$z = f_1(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} z = f(x, y) \\ (x, y) \in D \\ y = y_0. \end{cases}$$

La dernière condition caractérise les points d'intersection du graphe de la fonction f et du plan d'équation $y = y_0$. Ainsi, le graphe de la fonction partielle f_1 peut s'obtenir en faisant une section du graphe de f à l'ordonnée y_0 , et en ne gardant que la première et la troisième coordonnées des points obtenus. De façon similaire, un point (y, z) de $\mathbb{R}^2$ appartient au graphe de la fonction f_2 si et seulement si

$$z = f_2(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} z = f(x, y) \\ (x, y) \in D \\ x = x_0. \end{cases}$$

La dernière condition caractérise l'intersection du graphe de la fonction f et du plan d'équation $x = x_0$. Ainsi, le graphe de la fonction partielle f_2 peut s'obtenir en faisant une section du graphe de f à l'abscisse x_0 , et en ne gardant que la deuxième et la troisième coordonnées des points obtenus. On renvoie à la figure 2.5 pour une illustration avec un parabolôïde de révolution.

2.4 Cas des fonctions de trois variables

Ce qui précède s'étend de façon assez naturelle aux cas des fonctions de trois variables, mais la situation se complique inmanquablement. Voici un aperçu de cette généralisation :

- Une fonction f de trois variables réelles fait correspondre à chaque triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ une valeur réelle $f(x, y, z)$. L'ensemble de définition D de f est maintenant un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$.
- Le graphe de la fonction f est le sous-ensemble G de $\mathbb{R}^4$, constitué des quadruplets (x, y, z, t) vérifiant la condition $t = f(x, y, z)$. Autrement dit,

$$G = \{(x, y, z, f(x, y, z)), (x, y, z) \in D\}.$$

- La notion de ligne de niveau se généralise en considérant les *surfaces de niveau*

$$L_h = \{(x, y, z) \in D \mid f(x, y, z) = h\},$$

pour h réel fixé à l'avance. Il s'agit donc de sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. On peut déduire les surfaces de niveau en sectionnant le graphe de la fonction f par les hyperplans (sous-espaces affines de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$) d'équation $t = h$.

- On peut considérer les fonctions partielles de f en un certain point (x_0, y_0, z_0) de son ensemble de définition. En fixant deux coordonnées et en laissant libre la troisième, on obtient donc trois fonctions partielles d'une seule variable :

$$x \mapsto f(x, y_0, z_0); \quad y \mapsto f(x_0, y, z_0); \quad z \mapsto f(x_0, y_0, z).$$

Le graphe de chacune de ces fonctions se déduit de celui de f en regardant la trace de ce dernier sur des plans (sous-espaces affines de dimension 2 dans $\mathbb{R}^4$). Par exemple, le graphe de la première fonction partielle se déduit de celui de f en prenant l'intersection avec le plan caractérisé par les deux équations $y = y_0$ et $z = z_0$.

- On peut aussi ne fixer qu'une seule coordonnée, et laisser libre les deux autres, ce qui donne trois fonctions partielles de deux variables :

$$(y, z) \mapsto f(x_0, y, z); \quad (x, z) \mapsto f(x, y_0, z); \quad (x, y) \mapsto f(x, y, z_0).$$

Dans ce cas, le graphe de chacune des fonctions partielles se déduit de celui de f en sectionnant par des hyperplans. Par exemple, le graphe de la première fonction partielle se déduit de celui de f en prenant l'intersection avec l'hyperplan d'équation $x = x_0$.

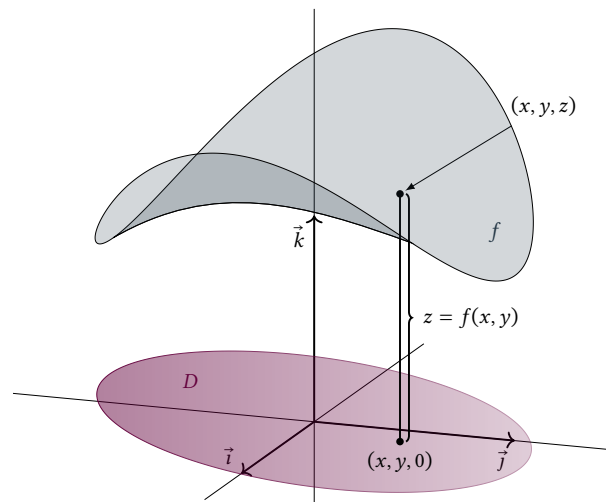
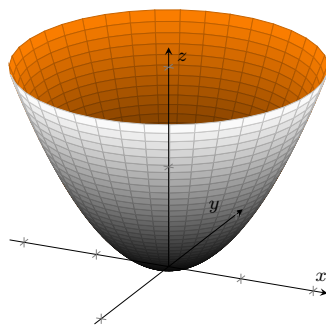
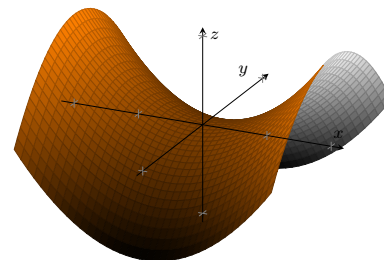


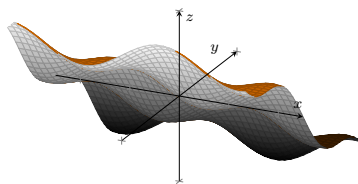
FIGURE 2.1 : Graphe d'une fonction f définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$



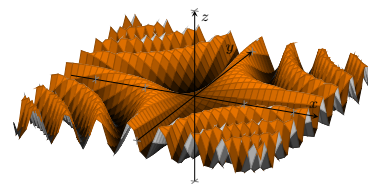
(a) $z = x^2 + y^2$



(b) $z = x^2 - y^2$



(c) $z = \sin(x) \sin(y) - y$



(d) $z = \sin(xy)$

FIGURE 2.2 : Graphes de fonctions de deux variables

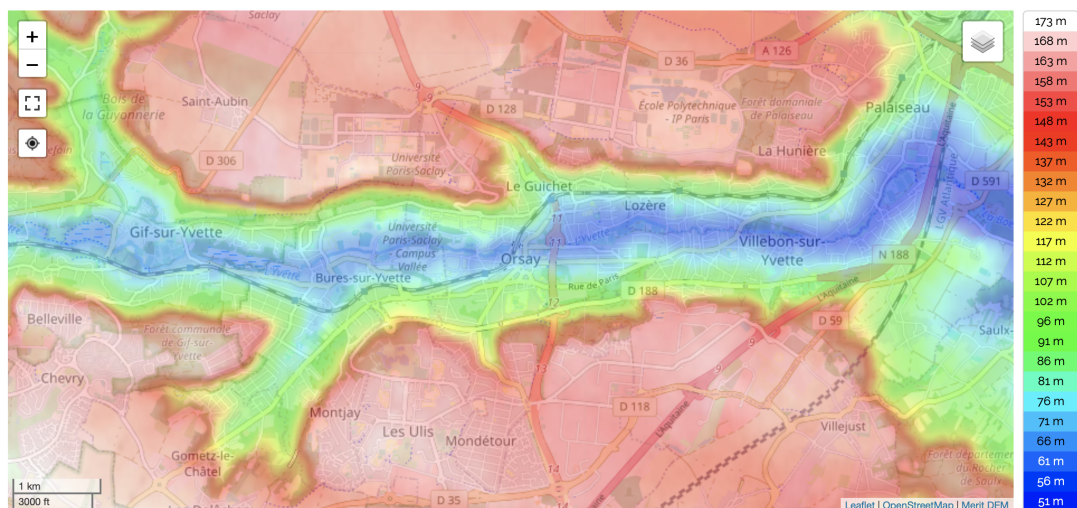


FIGURE 2.3 : Carte topographique de la vallée de l'Yvette

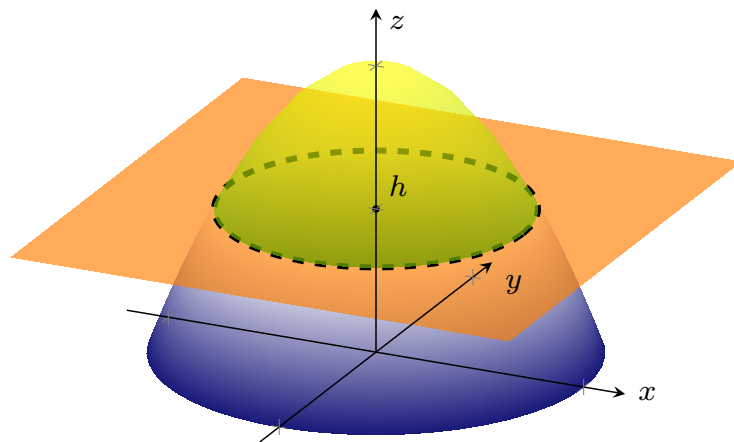


FIGURE 2.4 : Section d'un parabolôïde par un plan horizontal

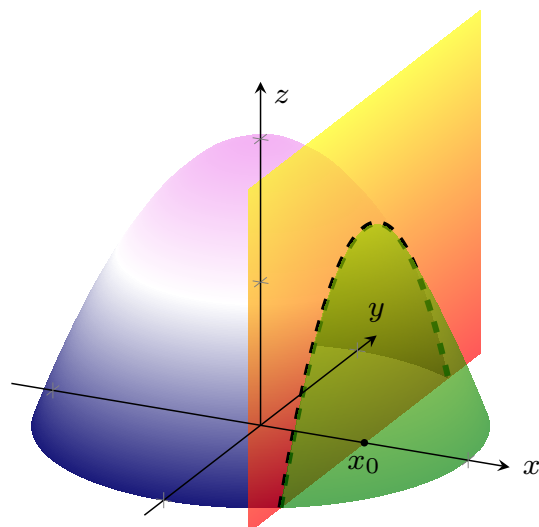


FIGURE 2.5 : Section d'un parabolôïde par un plan vertical

Fonctions de plusieurs variables : continuité et dérivabilité

L'étude des limites, de la continuité et de l'éventuelle dérivée apporte des informations cruciales sur les fonctions d'une seule variable réelle à valeurs réelles, en particulier sur leur comportement local et leurs variations. Cela se traduit par des propriétés sur le graphe des fonctions. La continuité correspond au fait qu'on peut tracer le graphe « sans lever le stylo de la feuille ». La dérivée donne quant à elle le coefficient directeur des tangentes en chaque point à la courbe représentative.

Le but de ce chapitre est d'étendre tous ces outils au cas des fonctions de plusieurs variables. Comme précédemment, on se focalisera surtout sur les fonctions de deux variables. Une nouvelle difficulté qui apparaît dans le cas multivarié est qu'on peut approcher un point en suivant une infinité de directions possibles. Le comportement local de la fonction pourra dépendre de la direction choisie. Par exemple, une fonction pourra être localement croissante dans une direction, et localement décroissante dans une autre.

3.1 Limites et continuité

3.1.1 Limite en un point

On désigne par f une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles, dont l'ensemble de définition est un sous-ensemble noté D de $\mathbb{R}^2$. On s'intéresse aux limites de la fonction f aux points qui sont *adhérents* à l'ensemble D . Il s'agit des points de $\mathbb{R}^2$ qui sont arbitrairement proches de D , mais pas forcément dans D , comme l'indique la définition suivante. On rappelle que la distance entre deux points p_0 et p est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{p_0p} = p - p_0$, soit $\|p - p_0\|$.

Définition 3.1 (point adhérent, adhérence d'un ensemble). Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Un point p_0 de $\mathbb{R}^2$ est dit *adhérent* à l'ensemble D si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point $p \in D$ qui est situé à une distance de p_0 vérifiant $\|p - p_0\| \leq \varepsilon$. On note $\overline{D}$ l'ensemble des points adhérents à D . L'ensemble $\overline{D}$ est appelé l'*adhérence* de D .

Remarques 3.2. • Un ensemble D est toujours inclus dans son adhérence $\overline{D}$. En effet, si $p_0 \in D$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on peut prendre pour point $p \in D$ le point p_0 lui-même, qui vérifie alors $\|p - p_0\| = 0 \leq \varepsilon$, de sorte que p_0 est un point adhérent à D .

• En prenant la négation de la définition, on observe qu'un point p_0 n'est pas adhérent à D s'il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout point $p \in D$, on ait $\|p - p_0\| > \varepsilon_0$. Cela signifie qu'il existe un disque de centre p_0 et de rayon $\varepsilon_0 > 0$ qui a une intersection vide avec D .

Exemples 3.3. • Si $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, alors $\overline{D} = \mathbb{R}^2$. En effet, l'origine $p_0 = 0$ est un point adhérent à D , puisque pour tout $\varepsilon > 0$, le point $p_\varepsilon = (\varepsilon, 0)$ appartient à D et vérifie $\|p_\varepsilon - p_0\| = \varepsilon$. L'adhérence $\overline{D}$ contient donc à la fois D et 0 , donc contient l'union $D \cup \{0\} = \mathbb{R}^2$.

• Si $D = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, alors $\overline{D} = \mathbb{R} \times [0, +\infty[$. En effet, tout point de la forme $p_0 = (x_0, 0)$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$ est adhérent à D , puisque pour tout $\varepsilon > 0$, le point $p_\varepsilon = (x_0, \varepsilon)$ appartient à D et vérifie $\|p_\varepsilon - p_0\| = \varepsilon$. L'adhérence $\overline{D}$ contient donc à la fois l'ensemble D et l'ensemble des points de la forme $(x_0, 0)$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$, donc contient l'union de ces deux ensembles, c'est-à-dire $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Réciproquement, si un point n'appartient pas à cette union, alors il est de la forme (x_0, y_0) pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 < 0$, et en posant $\varepsilon_0 = |y_0|/2$, on observe que le disque de centre (x_0, y_0) et de rayon ε_0 a une intersection vide avec l'ensemble D . L'adhérence $\overline{D}$ est donc exactement l'ensemble $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

Définition 3.4 (limite). Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, et soit p_0 un point adhérent à D .

- Soit ℓ un nombre réel. On dit que la fonction f admet pour limite ℓ au point p_0 , et on note $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = \ell$, ou encore $f(p) \xrightarrow[p \rightarrow p_0]{} \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall p \in D \quad \|p - p_0\| \leq \delta \implies |f(p) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ au point p_0 , et on note $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = +\infty$, ou encore $f(p) \xrightarrow[p \rightarrow p_0]{} +\infty$, si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall p \in D \quad \|p - p_0\| \leq \delta \implies f(p) \geq A.$$

- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ au point p_0 , et on note $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = -\infty$, ou encore $f(p) \xrightarrow[p \rightarrow p_0]{} -\infty$, si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall p \in D \quad \|p - p_0\| \leq \delta \implies f(p) \leq -A.$$

Si on se place dans $\mathbb{R}$ et on remplace la norme par la valeur absolue, on retrouve les définitions connues pour une fonction d'une variable.

Exemple 3.5. La fonction donnée par la formule $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ admet pour limite $+\infty$ au point 0. En effet, pour tout réel $A > 0$ et pour tout point $p = (x, y) \in D$, on a

$$\|p\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \implies f(p) = f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\|p\|^2} \geq A.$$

On rappelle que l'existence de limites n'est pas automatique, et que certaines fonctions peuvent très bien ne pas admettre de limite en un point donné. Dans le cas d'une fonction d'une variable, cela peut venir du fait que la limite à gauche et la limite à droite au point considéré sont différentes. Dans le cas d'une fonction de deux variables, ce phénomène persiste et se complique. En effet, une fonction peut avoir des limites différentes selon la manière dont on s'approche du point considéré.

En effet, considérons une courbe paramétrée plane (voir la section 3.4.2 pour la définition) de la forme $p(t) = (x(t), y(t))$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ auquel zéro est adhérent. On suppose que $p(t) \in D$ pour tout $t \in I$ suffisamment proche de zéro, afin que $f(p(t))$ soit définie, et que

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} x_0 \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} y_0.$$

Si le point $p_0 = (x_0, y_0)$ est adhérent à D , et si $f(p) \xrightarrow[p \rightarrow p_0]{} \ell$ avec une valeur ℓ finie ou infinie, alors on peut montrer par composition des limites que

$$f(p(t)) = f(x(t), y(t)) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \ell.$$

Par conséquent, si on peut trouver deux courbes paramétrées planes p_1 et p_2 vérifiant les hypothèses ci-dessus, ainsi que les conditions

$$f(p_1(t)) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \ell_1 \quad \text{et} \quad f(p_2(t)) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \ell_2$$

pour deux valeurs distinctes $\ell_1 \neq \ell_2$, alors la fonction f ne peut pas admettre de limite au point p_0 .

Exemple 3.6. La fonction $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ admet pour ensemble de définition l'ensemble $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Cette fonction n'admet pas de limite en 0. En effet, si on considère un point p du plan distinct de l'origine, de coordonnées polaires (r, θ) , c'est-à-dire que $p = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, on a

$$\begin{aligned} f(p) &= f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{(r \cos \theta)(r \sin \theta)}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} \\ &= \cos \theta \sin \theta = \frac{\sin(2\theta)}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f ne dépend pas de r , donc est constante sur chaque rayon émanant de l'origine, avec une valeur différente selon θ . Cela contredit la condition d'existence d'une limite en 0.

3.1.2 Continuité

Définition 3.7 (continuité). Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, et soit p_0 un point de D . On dit que la fonction f est *continue au point* p_0 si

$$\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = f(p_0).$$

Si E désigne un sous-ensemble de D , on dit que la fonction f est *continue sur* E si elle est continue en tout point de l'ensemble E .

Exemples 3.8. • Les projections $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sur les axes de coordonnées sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

- Les fonctions polynomiales de plusieurs variables sont continues partout. Dans le cas de deux variables, il s'agit des fonctions de la forme

$$(x, y) \mapsto a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \dots + a_{p,q}x^p y^q,$$

où les coefficients $a_{i,j}$ sont des nombres réels fixés.

- Les fractions rationnelles de plusieurs variables, c'est-à-dire les quotients de deux fonctions polynomiales, sont continues sur leur ensemble de définition, qui est l'ensemble des points où le dénominateur ne s'annule pas.

Il découle des définitions que si une fonction f de deux variables est continue en un point (x_0, y_0) , alors ses fonctions partielles en ce point

$$f_1 : x \mapsto f(x, y_0) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(x_0, y),$$

comme définies dans la section 2.3, sont continues respectivement en x_0 et en y_0 . La réciproque est fautive : les fonctions partielles peuvent être continues, sans que la fonction de départ le soit.

Exemple 3.9. On considère encore la fonction définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ pour (x, y) distinct de l'origine, dont on complète la définition par $f(0, 0) = 0$. Comme vu ci-dessus, la fonction f n'admet pas de limite en 0, donc ne peut être continue en ce point. Cependant, les fonctions partielles de f en 0, qui sont toutes les deux uniformément nulles, sont nécessairement continues.

3.2 Dérivées partielles

Dans la suite de ce chapitre, les dérivées et les développements limités sont étudiés en des points intérieurs au domaine de définition. Les théorèmes de dérivation sont appliqués sur des voisinages ouverts de ces points.

On rappelle que la dérivée d'une fonction g d'une seule variable réelle à valeurs réelles s'obtient en un point x_0 comme la limite (si elle existe) du taux d'accroissement de g au voisinage de x_0 , soit

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}.$$

Dans le cas d'une fonction f de deux variables, on peut à nouveau considérer des taux d'accroissements au voisinage de points (x_0, y_0) de l'ensemble de définition, mais on a pour liberté supplémentaire le choix de la direction dans laquelle regarder les accroissements de la variable. Les axes de coordonnées fournissent deux directions privilégiées. Cela suggère de considérer les taux d'accroissement des fonctions partielles de f au point (x_0, y_0) , soit

$$\begin{cases} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'_1(x_0) \\ \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{f_2(y_0 + h) - f_2(y_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'_2(y_0), \end{cases}$$

en supposant l'existence des limites. On obtient ainsi les *dérivées partielles*.

Définition 3.10 (dérivées partielles). Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, et soit (x_0, y_0) un point de D . Alors,

$$f_1 : x \mapsto f(x, y_0) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(x_0, y)$$

sont les fonctions partielles de la fonction f au point (x_0, y_0) . On appelle *dérivées partielles de la fonction f au point (x_0, y_0)* les nombres

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_1(x_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_2(y_0).$$

De plus, les *fonctions dérivées partielles* de f sont les fonctions de deux variables suivantes :

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Le symbole ∂ s'appelle « d rond » et la notation $\frac{\partial f}{\partial x}$ se lit donc « d rond f sur d rond x ». En pratique, il n'est pas nécessaire de passer par les fonctions partielles afin de déterminer les dérivées partielles. Il suffit en effet de dériver par rapport à une variable, en voyant l'autre comme une constante.

Exemples 3.11. • La fonction polynomiale $f(x, y) = -x^2 + 3xy^2 + 2y^3 - 7$ admet pour dérivées partielles les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x + 3y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy + 6y^2.$$

• La fonction $g(x, y) = \sin(x + y) + y$ admet pour dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \cos(x + y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \cos(x + y) + 1.$$

Remarques 3.12. • On peut généraliser la définition et la méthode précédentes au cas de fonctions de n variables. On fixe alors toutes les variables sauf une, et on dérive par rapport à la variable laissée libre.

• Si on change la façon de noter les variables, alors il faut changer la notation pour les dérivées partielles. Par exemple, si on considère une fonction φ du triplet de variables (p, T, V) , les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p}(p, T, V); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial T}(p, T, V); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial V}(p, T, V).$$

3.3 Approximation affine

Il est possible d'approcher au voisinage d'un point x_0 une fonction g dérivable d'une seule variable réelle par une fonction affine à l'aide de son *développement limité* au premier ordre :

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0). \quad (3.1)$$

La notation $o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$ désigne une fonction *négligeable* devant $x - x_0$ quand $x \rightarrow x_0$, c'est-à-dire une fonction dont le quotient par $x - x_0$ tend vers zéro quand $x \rightarrow x_0$. Plus précisément, la notation $o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)$ peut être remplacée par $(x - x_0)\varepsilon(x - x_0)$, où ε est une fonction telle que $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Le développement limité (3.1) constitue la *formule de Taylor-Young* au premier ordre. Géométriquement, la fonction affine qui figure dans la formule (3.1) donne l'équation de la tangente au point x_0 pour la courbe représentative de la fonction g , c'est-à-dire

$$y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0).$$

Remarque 3.13. Pour démontrer la formule (3.1), on suppose que g est dérivable au point x_0 et on définit

$$\varepsilon(h) = \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} - g'(x_0).$$

On a $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, par définition de la dérivée, ainsi que cette identité équivalente à (3.1) :

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + h \varepsilon(h).$$

On souhaite maintenant étendre ces outils et propriétés au cas des fonctions de plusieurs variables.

3.3.1 Développement limité au premier ordre

Définition 3.14 (développement limité au premier ordre). Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, et soit (x_0, y_0) un point appartenant à D . Un *développement limité au premier ordre* de la fonction f au point (x_0, y_0) est une expression de la forme

$$f(x, y) = a + b(x - x_0) + c(y - y_0) + \underset{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)}{o}(\|(x - x_0, y - y_0)\|),$$

où a, b et c sont des nombres réels, et le dernier terme, appelé *reste* du développement limité, désigne une fonction des deux variables x et y dont le quotient par la norme $\|(x - x_0, y - y_0)\|$ tend vers zéro quand $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Autrement dit, $\underset{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)}{o}(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$ représente une expression de la forme $\|(x - x_0, y - y_0)\| \varepsilon(x - x_0, y - y_0)$, où ε est une fonction de deux variables telle que $\varepsilon(h, k) \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$. Ce reste est donc négligeable devant $\|(x - x_0, y - y_0)\|$.

On peut montrer que si une fonction f admet un développement limité au premier ordre, alors l'écriture ci-dessus est unique, ce qui signifie que les coefficients a, b et c sont déterminés de façon unique par la fonction f .

Dans le cas d'une variable, la formule de Taylor-Young indique que le développement limité au premier ordre s'exprime à l'aide de la dérivée, quand elle existe. On dispose d'un résultat analogue pour deux variables, avec une condition supplémentaire de continuité sur les dérivées partielles.

Proposition 3.15 (formule de Taylor-Young au premier ordre). Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, et soit (x_0, y_0) un point appartenant à D . On suppose que les dérivées partielles de f existent et sont continues au voisinage de (x_0, y_0) . Alors, le développement limité au premier ordre de la fonction f au point (x_0, y_0) est donné par

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \underset{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)}{o}(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

Sous ces hypothèses, on peut donc présenter la fonction f comme la somme de la fonction affine de deux variables

$$(x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

et d'un reste qui est négligeable devant la distance $\|(x - x_0, y - y_0)\|$. La fonction affine ci-dessus est appelée la *meilleure approximation affine* de la fonction f au voisinage du point (x_0, y_0) .

Remarques 3.16. • Avec $x = x_0 + h$ et $y = y_0 + k$, on peut présenter la formule de Taylor-Young sous la forme

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{o}(\|(h, k)\|).$$

- Si on fixe une des variables dans la formule de Taylor-Young, on retrouve le développement limité au premier ordre des fonctions partielles. Par exemple, si on fixe y_0 , la formule donne

$$f_1(x) = f(x, y_0) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \underset{x \rightarrow x_0}{o}(x - x_0).$$

- On précise que la formule de Taylor-Young est écrite ci-dessus pour les fonctions de deux variables, mais elle s'étend de façon naturelle aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Par exemple, pour une fonction de trois variables, on a

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) + o_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)}(\|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\|).$$

3.3.2 Application aux calculs d'incertitudes

La meilleure approximation affine permet d'estimer l'incertitude sur la valeur prise par une fonction $f(x, y)$ quand on connaît des valeurs approximatives de x et y . On suppose qu'on mesure pour ces variables des valeurs x_0 et y_0 avec respectivement des erreurs Δx et Δy . Alors, les valeurs réelles, qui restent inconnues, peuvent s'écrire $x = x_0 + h$ et $y = y_0 + k$, avec $|h| \leq \Delta x$ et $|k| \leq \Delta y$. Si les marges d'erreur sont petites, la meilleure approximation affine donnée ci-dessus indique que

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k.$$

Ainsi, la valeur prise par la fonction sera connue avec une précision d'environ

$$\Delta f(x_0, y_0) \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \Delta y.$$

Exemple 3.17. On s'intéresse à la fabrication de pièces cylindriques dont on peut mesurer le diamètre d et la hauteur h avec respectivement des précisions Δd et Δh . Le volume de l'objet est donné par $V(d, h) = \frac{\pi}{4}d^2h$, et on a donc

$$\frac{\partial V}{\partial d}(d, h) = \frac{\pi}{2}dh \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial h}(d, h) = \frac{\pi}{4}d^2.$$

On suppose qu'on mesure sur une pièce un diamètre d_0 et une hauteur h_0 . Alors, le diamètre réel se situe dans l'intervalle $[d_0 \pm \Delta d]$, et la hauteur dans l'intervalle $[h_0 \pm \Delta h]$. On suppose $0 \leq \Delta d < d_0$ et $0 \leq \Delta h < h_0$. Une estimation au premier ordre de l'erreur maximale sur le volume est

$$\Delta V(d_0, h_0) \approx \left| \frac{\partial V}{\partial d}(d_0, h_0) \right| \Delta d + \left| \frac{\partial V}{\partial h}(d_0, h_0) \right| \Delta h = \frac{\pi}{4}d_0(2h_0\Delta d + d_0\Delta h).$$

Il est souvent plus parlant d'exprimer ce résultat avec des incertitudes relatives, c'est-à-dire sous la forme

$$\frac{\Delta V(d_0, h_0)}{V(d_0, h_0)} \approx \frac{\pi d_0(2h_0\Delta d + d_0\Delta h)/4}{\pi d_0^2 h_0/4} = 2\frac{\Delta d}{d_0} + \frac{\Delta h}{h_0}.$$

Par exemple, si on est capable de mesurer d et h avec une incertitude de 1%, l'incertitude relative sur le volume est d'environ 3% au premier ordre. Cette approximation n'est pas une borne rigoureuse. Puisque le volume est croissant en d et en h pour des dimensions positives, l'erreur relative maximale exacte est

$$\frac{\Delta V(d_0, h_0)}{V(d_0, h_0)} = \left(1 + \frac{\Delta d}{d_0}\right)^2 \left(1 + \frac{\Delta h}{h_0}\right) - 1.$$

Elle vaut donc $1,01^3 - 1 = 0,030301$, soit 3,0301%, dans cet exemple.

3.3.3 Plan tangent

Le graphe de la meilleure approximation affine d'une fonction de deux variables en un point donné est un plan, et ce plan approche au mieux le graphe de la fonction au voisinage de ce point. Il est qualifié de *plan tangent*. La figure 3.1 donne une représentation d'un plan tangent à un paraboloïde.

Définition 3.18 (plan tangent). Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, et soit (x_0, y_0) un point appartenant à D . On suppose que les dérivées partielles de f existent et sont continues au voisinage de (x_0, y_0) . Le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

est appelé le *plan tangent* au graphe de la fonction f au point (x_0, y_0) . Il admet pour vecteur normal le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$.

Remarque 3.19. On rappelle que le graphe de la fonction partielle f_1 au point (x_0, y_0) s'obtient en prenant la section du graphe de f par le plan d'équation $y = y_0$. L'intersection du plan tangent au point (x_0, y_0) avec ce dernier plan donne alors la tangente au graphe de f_1 au point x_0 . De même, l'intersection du plan tangent au point (x_0, y_0) avec le plan d'équation $x = x_0$ donne la tangente au graphe de f_2 au point y_0 .

Un cas particulièrement intéressant est quand le plan tangent est horizontal. En effet, si une telle fonction f atteint son maximum en un point (x_0, y_0) , c'est-à-dire si

$$\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0),$$

alors le plan tangent à f en ce point est horizontal et il se situe au-dessus du graphe. Cette situation se produit sur l'exemple de la figure 3.1. De même, si f atteint son minimum en (x_0, y_0) , le plan tangent en ce point est horizontal et il se situe en-dessous du graphe. Le graphe de la fonction admet donc nécessairement un plan tangent horizontal là où il présente un extremum. Ces affirmations seront prouvées dans le chapitre 4. Il est donc intéressant de préciser quand cette situation peut se présenter.

Proposition 3.20. Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, et soit (x_0, y_0) un point appartenant à D . On suppose que les dérivées partielles de f existent et sont continues au voisinage de (x_0, y_0) . Le graphe de la fonction f admet un plan tangent horizontal au point (x_0, y_0) si et seulement si les dérivées partielles vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

On dit alors que (x_0, y_0) est un point critique de la fonction f .

Remarques 3.21. • On a vu que si la fonction f admet un extremum en un point (x_0, y_0) , alors ce point est un point critique pour f . Cependant, la réciproque est fautive, comme le montre l'exemple de la fonction $f(x, y) = x^3$. Cette fonction admet pour dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Le point $(0, 0)$ est donc un point critique pour f . Cependant, la fonction f n'admet pas d'extremum en ce point, puisque $f(x, y) < 0$ si $x < 0$, alors que $f(x, y) > 0$ si $x > 0$.

- On dit qu'une fonction f définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ admet un maximum *local* en un point (x_0, y_0) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in D \quad \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \varepsilon \implies f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

La notion de minimum local se définit de façon similaire. La discussion précédente reste vraie si on s'intéresse aux extrema *locaux* des fonctions : si une fonction admet un extremum local en un point, alors ce point est un point critique et le plan tangent y est horizontal, mais cependant la réciproque n'est pas vraie. On renvoie au chapitre 4 pour plus de détails sur ces questions.

3.4 Dérivation de fonctions composées

Dans le contexte des fonctions de plusieurs variables, il y a plusieurs façons d'interpréter la composée de deux fonctions. Pour des fonctions d'au plus deux variables, on peut par exemple rencontrer les situations

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Si on se place du point de vue de la fonction de deux variables f , on parle dans le premier cas de composition « à l'arrivée » car on applique à f par la suite une autre fonction g . On parle de composition « au départ » dans le second cas, car on applique f à l'image d'une fonction p à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est elle appliquée au préalable. On cherche dans cette section à exprimer les dérivées de telles fonctions composées.

3.4.1 Composition à l'arrivée

On se place dans la situation où on applique une fonction f de deux variables renvoyant une seule valeur, puis une fonction g d'une seule variable. On suppose que la fonction f est définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ et prend ses valeurs dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans lequel la fonction g est correctement définie. On se trouve donc dans la situation

$$D \xrightarrow{f} f(D) \xrightarrow{g} \mathbb{R},$$

avec $D \subset \mathbb{R}^2$ et $f(D) \subset \mathbb{R}$. On rappelle que $f(D)$ désigne l'ensemble des images des éléments de D par la fonction f . La composée $g \circ f$ est donc une fonction de deux variables définie sur D par la formule

$$g \circ f(x, y) = g(f(x, y)).$$

Les fonctions partielles en un point (x_0, y_0) de D sont donc

$$x \mapsto g(f(x, y_0)) \quad \text{et} \quad y \mapsto g(f(x_0, y)).$$

On rappelle la formule de dérivation des fonctions composées d'une variable : $(\varphi \circ \psi)' = \psi' \varphi' \circ \psi$. En appliquant cette formule aux fonctions partielles de $g \circ f$, on en déduit l'énoncé suivant.

Proposition 3.22. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, soit g une fonction à valeurs réelles définie sur l'ensemble $f(D)$, et soit un point (x_0, y_0) de D . On suppose que la fonction f admet des dérivées partielles au point (x_0, y_0) et que la fonction g est dérivable au point $f(x_0, y_0)$. Alors, la fonction $g \circ f$ admet des dérivées partielles au point (x_0, y_0) qui sont données par les formules

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(f(x_0, y_0)) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial (g \circ f)}{\partial y}(x_0, y_0) = g'(f(x_0, y_0)) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Exemple 3.23. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction donnée par la formule $h(x, y) = g(\cos x + \sin y)$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, qui sont données par

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = -g'(\cos x + \sin y) \sin x \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = g'(\cos x + \sin y) \cos y.$$

Remarque 3.24. Comme la proposition ci-dessus découle uniquement de l'application aux fonctions partielles de la formule de dérivation des fonctions composées d'une seule variable, elle s'étend naturellement aux fonctions f d'un nombre quelconque de variables.

3.4.2 Composition au départ

On suppose maintenant que la fonction de deux variables f s'applique dans un second temps. La première fonction p doit donc renvoyer un couple de valeurs réelles, auquel on applique ensuite f . On est donc dans la situation

$$I \xrightarrow{p} p(I) \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des images de cet intervalle par la fonction p est noté $p(I)$. Il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, sur lequel on suppose définie la fonction f . L'ensemble de définition de f , noté D , doit donc vérifier $D \supset p(I)$. On qualifie la fonction p de *courbe paramétrée plane*, car elle associe à tout paramètre $t \in I$ un point du plan $p(t) = (x(t), y(t))$. L'image d'une telle courbe paramétrée plane par une fonction de deux variables est représentée sur la figure 3.2.

On suppose dans ce qui suit que la fonction f admet des dérivées partielles continues, et que la fonction p est dérivable. La composée $f \circ p$ est donc une fonction à valeurs réelles d'une seule variable réelle. Pour déterminer sa dérivée en un point t_0 à l'intérieur de I , on peut considérer l'accroissement

$$\begin{aligned} f(p(t)) - f(p(t_0)) &= f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))(x(t) - x(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))(y(t) - y(t_0)) + o_{t \rightarrow t_0}(\|(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))\|). \end{aligned}$$

On a appliqué ci-dessus la formule de Taylor-Young à la fonction f au point $(x(t_0), y(t_0))$. Cependant, comme la fonction p est dérivable, ses composantes x et y le sont aussi, de sorte que

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + o_{t \rightarrow t_0}(t - t_0) \quad \text{et} \quad y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + o_{t \rightarrow t_0}(t - t_0).$$

En combinant ces développements limités, on en déduit que

$$\frac{f(p(t)) - f(p(t_0))}{t - t_0} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} x'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) + y'(t_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)).$$

Cela conduit au résultat suivant.

Proposition 3.25. Soit $p = (x, y)$ une courbe paramétrée plane définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ qui contient $p(I)$, et soit un point t_0 de I . On suppose que les composantes x et y de p sont dérivables au point t_0 et que la fonction f admet des dérivées partielles continues au voisinage du point $(x(t_0), y(t_0))$. Alors, la fonction $f \circ p$ est dérivable au point t_0 et sa dérivée en ce point est donnée par la formule

$$(f \circ p)'(t_0) = x'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) + y'(t_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)). \quad (3.2)$$

Remarques 3.26. • On peut à nouveau étendre la proposition ci-dessus au cas de fonctions d'un nombre arbitraire n de variables.

- Un cas simple d'application de cette formule est quand la fonction de départ est de la forme $p(t) = (x_0 + t, y_0)$. La composée vérifie

$$f \circ p(t) = f(x_0 + t, y_0) = f_1(x_0 + t),$$

où f_1 désigne la première fonction partielle de f au point (x_0, y_0) . La proposition ci-dessus redonne alors comme attendu

$$f_1'(x_0) = (f \circ p)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

On retrouve bien sûr le même résultat pour la seconde fonction partielle si on prend pour fonction de départ $p(t) = (x_0, y_0 + t)$.

Exemple 3.27. On étudie le déplacement d'un randonneur dans un massif montagneux. On suppose que la position du randonneur à l'instant t est donnée par deux coordonnées $p(t) = (x(t), y(t))$. De plus, on suppose que l'altitude en tout point de coordonnées (x, y) du massif montagneux est donnée par une fonction $f(x, y)$. L'altitude à l'instant t du randonneur s'écrit donc $z(t) = f(x(t), y(t))$, la composée des fonctions f et p . La proposition ci-dessus permet donc d'exprimer la vitesse ascensionnelle $z'(t)$ du randonneur.

3.5 Gradient et lignes de niveau

On peut donner une interprétation géométrique de la proposition précédente, en observant que (3.2) correspond au produit scalaire de deux vecteurs : le vecteur vitesse $p'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ de la courbe paramétrée p , et

le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles de f , soit $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\right)$, appelé *gradient* de f au point $(x(t_0), y(t_0))$.

Définition 3.28 (gradient). Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, et soit (x_0, y_0) un point de D en lequel f admet des dérivées partielles. On appelle *gradient* de f le vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes sont les dérivées partielles de la fonction f , soit le vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

On peut naturellement étendre la définition du gradient au cas de fonctions d'un nombre arbitraire n de variables. De plus, on utilise parfois pour le gradient la notation $\vec{\nabla}f(x_0, y_0)$. Le symbole ∇ est appelé « nabla ». Avec ces notations, on peut réécrire la formule (3.2) de dérivation des fonctions composées sous la forme suivante.

Corollaire 3.29. Soit p une courbe paramétrée plane définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ qui contient $p(I)$, et soit un point t_0 de I . On suppose que p est dérivable au point t_0 , et on note $\vec{p}'(t_0)$ le vecteur vitesse correspondant. On suppose aussi que f admet des dérivées partielles continues au voisinage du point $p(t_0)$. Alors, la fonction $f \circ p$ est dérivable au point t_0 et sa dérivée en ce point est le produit scalaire

$$(f \circ p)'(t_0) = \overrightarrow{\text{grad}}f(p(t_0)) \cdot \vec{p}'(t_0).$$

Si une ligne de niveau de la fonction f peut s'exprimer comme l'image d'une courbe paramétrée plane p , alors elle est orthogonale au gradient. En effet, la fonction composée $f \circ p$ est alors constante. Ainsi, sa dérivée est partout nulle, et le résultat ci-dessus indique que le gradient de f en tout point $p(t_0)$ de la ligne de niveau est orthogonal au vecteur vitesse $\vec{p}'(t_0)$, qui oriente la tangente en ce point lorsqu'il est non nul. On consigne cette observation dans l'énoncé suivant, et on l'illustre avec la figure 3.3.

Proposition 3.30. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, et soit p une courbe paramétrée plane définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dont l'image s'identifie à une partie d'une ligne de niveau de f . On suppose que p est dérivable et que f admet des dérivées partielles continues. Alors, pour tout $t_0 \in I$, le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}f(p(t_0))$ de la fonction f au point $p(t_0)$, et le vecteur vitesse $\vec{p}'(t_0)$ sont orthogonaux. Lorsque ce vecteur vitesse est non nul, il dirige la tangente à la courbe paramétrée en ce point.

Remarque 3.31. Sous les hypothèses du résultat précédent, et si le gradient de f en un certain point p_0 n'est pas nul, on peut déduire une équation de la tangente au point p_0 pour la ligne de niveau de f qui passe par ce point. En effet, le résultat précédent indique que le gradient est un vecteur normal pour cette tangente. D'après ce qui a été vu à la section 1.1.2, on peut alors conclure que la tangente à la ligne de niveau de f qui passe par le point $p_0 = (x_0, y_0)$ admet pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

On peut déduire de ce qui précède que le gradient a tendance à s'orienter dans des directions orthogonales à celles où f ne varie pas beaucoup. On peut approfondir cette observation en prouvant que le gradient s'oriente en fait dans les directions où la fonction f augmente le plus rapidement. Ainsi, le gradient indique les directions de plus grande pente du graphe de f .

Proposition 3.32. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f admet des dérivées partielles continues au voisinage d'un point $p_0 = (x_0, y_0)$ de D . Si le gradient en p_0 est nul, toutes les variations $(f \circ p)'(0)$ sont nulles. Sinon, parmi toutes les courbes paramétrées planes p qui passent par p_0 à vitesse 1, c'est-à-dire qui vérifient $p(0) = p_0$ et $\|\vec{p}'(0)\| = 1$, la variation $(f \circ p)'(0)$ est maximale quand le vecteur vitesse $\vec{p}'(0)$ va dans la même direction que le gradient $\vec{\text{grad}}f(p_0)$.*

Dans le cas où le gradient est non nul, pour établir ce résultat, il suffit d'écrire grâce au corollaire ci-dessus que la dérivée de la composée est donnée par le produit scalaire

$$(f \circ p)'(0) = \vec{\text{grad}}f(p_0) \cdot \vec{p}'(0) = \|\vec{\text{grad}}f(p_0)\| \cos \alpha,$$

où α désigne l'angle entre le gradient et le vecteur vitesse. Cette quantité ne dépend du choix de la courbe paramétrée p qu'au travers de cet angle, et elle est maximale quand l'angle est nul. Cela correspond bien à la configuration où le gradient et le vecteur vitesse sont dans la même direction.

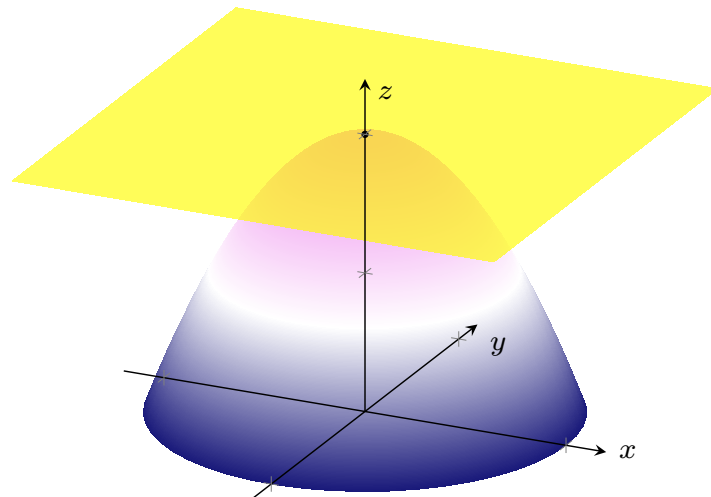


FIGURE 3.1 : Graphe de $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ et plan tangent en $(0, 0)$

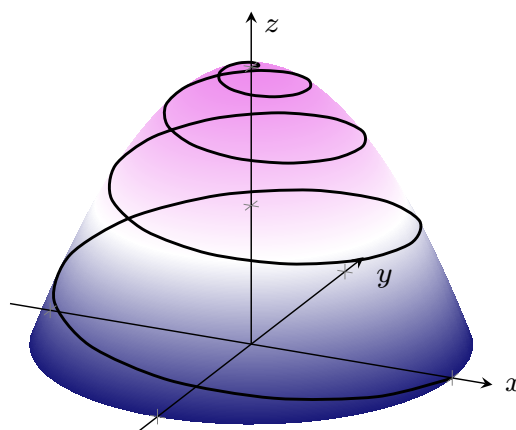


FIGURE 3.2 : Image d'une spirale par la fonction donnant un paraboloïde

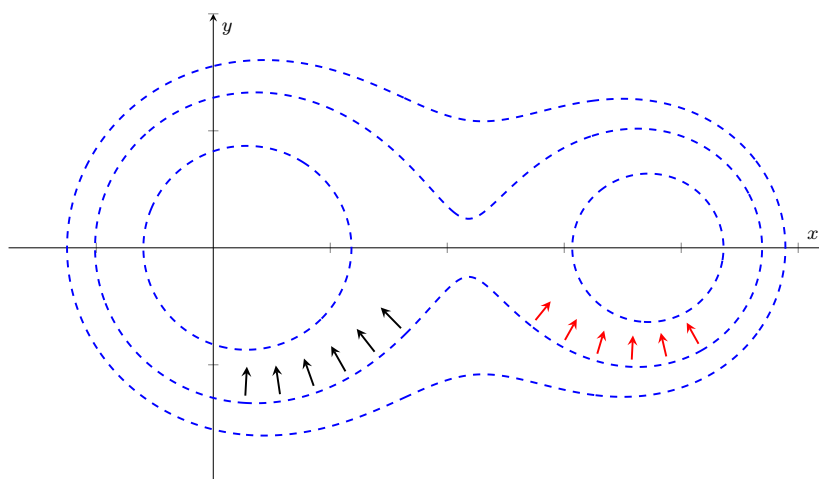


FIGURE 3.3 : Lignes de niveau et gradient

Fonctions de plusieurs variables : extrema

Le but de ce chapitre est d'approfondir la discussion amorcée à la section 3.3.3 au sujet des extrema (maxima et minima) d'une fonction de plusieurs variables. Comme précédemment, on s'intéressera essentiellement au cas de deux variables, et on pourra se convaincre que la plupart des résultats s'étendent naturellement au cas d'un nombre plus grand de variables.

4.1 Extrema et points critiques

On commence par préciser la définition d'un maximum ou d'un minimum local ou global pour une fonction de deux variables.

Définition 4.1 (extrema). Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, et soit (x_0, y_0) un point de D . On dit que la fonction f admet un *maximum global* au point (x_0, y_0) si

$$\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

On dit que f admet un *maximum local* en (x_0, y_0) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in D \quad \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \varepsilon \implies f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

De façon similaire, on dit que f admet un *minimum global* en (x_0, y_0) si

$$\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

On dit que f admet un *minimum local* en (x_0, y_0) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in D \quad \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \varepsilon \implies f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Dans tous ces cas, on dit que la fonction f admet un *extremum* (local ou global) au point (x_0, y_0) .

On a esquissé dans la section 3.3.3 le lien avec les points critiques de la fonction considérée. On commence par préciser la définition correspondante.

Définition 4.2 (point critique). Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'un point (x_0, y_0) de D est un *point critique* pour la fonction f si les dérivées partielles y sont nulles, c'est-à-dire si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Dans les résultats de dérivation qui suivent, les points considérés sont intérieurs au domaine D . On rappelle que si f est de classe C^1 au voisinage de (x_0, y_0) et si ce point est critique pour f , alors le graphe de f admet un plan tangent horizontal en ce point. On souhaite maintenant établir le lien entre points critiques et extrema locaux. Supposons que la fonction f admette un extremum local en un point (x_0, y_0) intérieur à D où ses deux dérivées partielles existent. Alors, c'est aussi le cas des fonctions partielles en ce point. Plus précisément, supposons que cet extremum soit un maximum local. On sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in D \quad \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \varepsilon \implies f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Notons comme d'habitude f_1 et f_2 les fonctions partielles de f au point (x_0, y_0) . Pour tout réel x tel que (x, y_0) appartient à D , on a donc

$$|x - x_0| \leq \varepsilon \implies f_1(x) = f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) = f_1(x_0).$$

Ainsi, la fonction partielle f_1 admet un maximum local au point x_0 . Sa dérivée en ce point est donc nulle. De la même manière, on peut démontrer que la dérivée au point y_0 de la fonction partielle f_2 est nulle aussi. On en déduit que (x_0, y_0) est un point critique pour f .

On a utilisé ici le fait que la dérivée d'une fonction réelle de la variable réelle s'annule là où elle admet un extremum local. Considérons en effet une fonction réelle g définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et supposons que g admette un maximum local en un point t_0 intérieur à I . On a alors pour tout réel $h > 0$ suffisamment petit,

$$0 \geq \frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} g'(t_0),$$

et de même pour tout réel $h < 0$ suffisamment petit,

$$0 \leq \frac{g(t_0 + h) - g(t_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} g'(t_0),$$

ce qui donne bien $g'(t_0) = 0$. On peut finalement énoncer le résultat suivant.

Proposition 4.3 (principe de Fermat). *Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) intérieur à D où elle admet des dérivées partielles. Alors, ce point (x_0, y_0) est un point critique pour f .*

Comme déjà mentionné dans la section 3.3.3, il faut prendre garde au fait que la réciproque de ce résultat est fausse. En effet, on a vu que la fonction $f(x, y) = x^3$ admet l'origine $(0, 0)$ pour point critique, mais n'admet pas d'extremum local en ce point. Un autre exemple est fourni par la fonction $g(x, y) = x^2 - y^2$, qui admet encore l'origine pour point critique, mais qui n'admet pas d'extremum local en ce point. On remarque cependant que sa première fonction partielle à l'origine $g(x, 0) = x^2$ est minimale en 0, et que sa seconde fonction partielle à l'origine $g(0, y) = -y^2$ est maximale en 0.

4.2 Classification des points critiques

Quand on cherche à localiser les extrema locaux d'une fonction de deux variables, le principe de Fermat suggère de s'intéresser aux points critiques. Les points critiques sont alors de bons candidats, mais on doit vérifier s'il s'agit bien des points où la fonction atteint un extremum local. L'analyse repose alors sur un développement limité à l'ordre deux.

4.2.1 Développement limité au deuxième ordre

Un tel développement limité est donné par une formule de Taylor-Young qui fait intervenir les dérivées partielles d'ordre deux, qui sont définies par

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right); & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right); & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Cependant, pour les fonctions suffisamment régulières, ce qui sera toujours le cas dans notre étude, les deux dérivées partielles d'ordre deux qui font intervenir des variables différentes coïncident.

Proposition 4.4 (lemme de Schwarz). Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$. On suppose que la fonction f est de classe C^2 , c'est-à-dire qu'elle admet des dérivées partielles d'ordre deux qui sont continues. Alors, on a en tout point $(x_0, y_0) \in D$ l'identité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Le résultat précédent est admis, tout comme la formule de Taylor-Young à l'ordre deux qui est énoncée ci-dessous et qui généralise la formule du premier ordre donnée dans la section 3.3.1.

Proposition 4.5 (formule de Taylor-Young à l'ordre deux). Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$, et soit (x_0, y_0) un point appartenant à D . On suppose que les dérivées partielles d'ordre deux de f existent et sont continues au voisinage de (x_0, y_0) . On note les dérivées partielles d'ordre un

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

et les dérivées partielles d'ordre deux

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0); \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0); \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0). \quad (4.1)$$

Alors, le développement limité au deuxième ordre de la fonction f au point (x_0, y_0) est donné par

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o_{(h,k) \rightarrow (0,0)}(\|(h, k)\|^2).$$

Remarque 4.6. Ce résultat se généralise aux fonctions f d'un nombre arbitraire n de variables $x_1, \dots, x_n$, mais cela peut vite devenir fastidieux car il faut considérer toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Il y a donc n dérivées partielles d'ordre un et n^2 dérivées partielles d'ordre deux à calculer. Cependant, pour les fonctions de classe C^2 , le lemme de Schwarz reste vrai, ce qui réduit un peu le nombre de dérivées d'ordre deux à calculer en pratique.

4.2.2 Types de points critiques

La formule de Taylor-Young vue ci-dessus permet de déterminer si un point critique correspond effectivement ou non à un extremum. Lorsque la forme quadratique associée est non dégénérée, elle permet de distinguer un maximum local, un minimum local et un point selle. Dans le cas dégénéré, le développement à l'ordre deux ne suffit pas à conclure : un point critique dégénéré peut lui aussi être un extremum ou un point selle.

L'analyse repose sur la remarque suivante. Notons (x_0, y_0) un point critique pour la fonction f . Par définition, les dérivées partielles d'ordre un sont nulles en ce point, et la formule de Taylor-Young d'ordre deux donne

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o_{(h,k) \rightarrow (0,0)}(\|(h, k)\|^2),$$

où r , s et t sont les dérivées partielles d'ordre deux de la fonction f au point (x_0, y_0) , définies par (4.1). De plus, la fonction f admet un maximum local en ce point si et seulement si le membre de gauche ci-dessus est négatif pour tout couple (h, k) suffisamment proche de l'origine $(0, 0)$. De même, f admet un minimum local si et seulement si le membre de gauche est positif. Il apparaît donc crucial de s'intéresser au signe du terme

$$q(h, k) = rh^2 + 2shk + tk^2.$$

Le rôle du reste doit toutefois être précisé. Si q est définie positive ou négative, il existe $c > 0$ tel que $|q(h, k)| \geq c\|(h, k)\|^2$: le reste ne change donc pas son signe suffisamment près de l'origine. Si q prend les deux signes, on raisonne le long de deux directions où ces signes sont opposés. Si q est dégénérée, le reste peut être décisif.

On s'intéresse pour commencer au cas où $s = 0$, car son étude est plus simple et permet de développer l'intuition sur le cas général.

Cas particulier où $s = 0$. Le terme à considérer devient simplement

$$q(h, k) = rh^2 + tk^2,$$

et son signe dépend directement des valeurs de r et t , puisque les carrés h^2 et k^2 sont toujours positifs. On peut distinguer les configurations suivantes :

- Si $r > 0$ et $t > 0$, alors $q(h, k) > 0$ pour tout couple (h, k) non nul. Le point (x_0, y_0) est donc un minimum local.
- Si $r < 0$ et $t < 0$, alors $q(h, k) < 0$ pour tout couple (h, k) non nul. Le point (x_0, y_0) est donc un maximum local.
- Si $rt < 0$, c'est-à-dire si r et t sont non nuls et de signes différents, alors $q(h, k)$ est parfois positif, parfois négatif, suivant les valeurs relatives de h et k . Le point (x_0, y_0) n'est pas un extremum local, et on le qualifie dans ce cas de *point selle*.
- Si $rt = 0$, c'est-à-dire si r ou t est nul (ou les deux), alors $q(h, k)$ est nul sur toute une direction, et on ne peut plus négliger le reste $o(\|(h, k)\|^2)$. On ne peut pas conclure et une étude plus approfondie est nécessaire. Le point (x_0, y_0) est qualifié de *point critique dégénéré*.

Cas général. On essaie de se ramener au cas précédent en écrivant $q(h, k)$ comme une combinaison linéaire de deux carrés. C'est un cas simple de la *méthode de Gauss* pour les formes quadratiques.

- On suppose que $r \neq 0$, et on procède à la transformation

$$q(h, k) = r\left(h^2 + \frac{2s}{r}hk + \frac{t}{r}k^2\right) = r\left(\left(h + \frac{s}{r}k\right)^2 - \frac{s^2 - rt}{r^2}k^2\right).$$

On identifie alors différents comportements suivant les signes de r et de $s^2 - rt$. Plus précisément, on distingue les situations suivantes :

- Si $r > 0$ et $s^2 - rt < 0$, alors $q(h, k) > 0$ pour tout couple (h, k) non nul. Le point (x_0, y_0) est donc un minimum local.
- Si $r < 0$ et $s^2 - rt < 0$, alors $q(h, k) < 0$ pour tout couple (h, k) non nul. Le point (x_0, y_0) est donc un maximum local.
- Si $s^2 - rt > 0$, alors $q(h, k)$ est parfois positif, parfois négatif, suivant les valeurs relatives de h et k . Le point (x_0, y_0) n'est pas un extremum local, et on le qualifie de *point selle*.
- Si $s^2 - rt = 0$, on ne peut pas conclure et (x_0, y_0) est qualifié de *point critique dégénéré*.
- On suppose que $r = 0$, $t \neq 0$ et $s \neq 0$, et on procède à la transformation

$$q(h, k) = 2shk + tk^2 = t\left(\left(k + \frac{s}{t}h\right)^2 - \frac{s^2}{t^2}h^2\right).$$

On observe que $q(h, k)$ est parfois positif, parfois négatif, suivant les valeurs relatives de h et k . Le point (x_0, y_0) n'est donc pas un extremum local, et on le qualifie alors de *point selle*. On remarque que dans ce cas $s^2 - rt > 0$ quand s est non nul.

- On suppose enfin que $r = t = 0$ et $s \neq 0$, et on écrit

$$q(h, k) = 2shk = \frac{s}{2}((h + k)^2 - (h - k)^2).$$

On observe à nouveau que le signe de $q(h, k)$ dépend des valeurs relatives de h et k . Ainsi, le point (x_0, y_0) n'est donc pas un extremum local, et c'est un *point selle*. On remarque encore ici que $s^2 - rt > 0$ quand s est non nul.

Dans les deux derniers cas, si $s = 0$, le point critique est dégénéré et une étude supplémentaire est nécessaire.

On peut résumer toute la discussion ci-dessus dans l'énoncé qui suit.

Proposition 4.7. Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, et soit (x_0, y_0) un point critique pour f . On note par (4.1) les dérivées partielles d'ordre deux de f . On a alors les cas suivants :

- Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, alors (x_0, y_0) est un maximum local.
- Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, alors (x_0, y_0) est un minimum local.
- Si $s^2 - rt > 0$, alors (x_0, y_0) n'est pas un extremum local, et on le qualifie de point selle.
- Si $s^2 - rt = 0$, alors on ne peut pas conclure et on qualifie (x_0, y_0) de point critique dégénéré.

On illustre toutes les situations possibles par les exemples simples représentés sur la figure 4.1. Il s'agit successivement des fonctions $(x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ et $(x, y) \mapsto (x + y)^3$. Dans tous ces exemples, le point critique considéré est $(0, 0)$.

En conclusion, la méthode à appliquer pour identifier les extrema locaux d'une fonction f de classe C^2 de deux variables est la suivante :

- On calcule les dérivées partielles d'ordre un de f , et on cherche où elles s'annulent simultanément pour déterminer les points critiques.
- On calcule les dérivées partielles d'ordre deux de f aux points critiques et on applique la proposition ci-dessus pour déterminer si le point critique est effectivement un extremum local.

4.2.3 Allure des lignes de niveau

On admet le résultat difficile suivant qui permet de localiser et classer graphiquement les points critiques d'une fonction de deux variables f à partir de l'allure locale des lignes de niveau.

Théorème 4.8 (lemme de Morse). Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$, et soit (x_0, y_0) un point critique non dégénéré de f .

- Si (x_0, y_0) est un extremum local, sa ligne de niveau se réduit localement à ce point. Les lignes de niveau voisines non vides, de valeurs différentes de $f(x_0, y_0)$, sont localement des courbes fermées emboîtées les unes dans les autres qui entourent le point critique.
- Si (x_0, y_0) est un point selle, alors la ligne de niveau correspondant à la valeur $f(x_0, y_0)$ est constituée au voisinage de (x_0, y_0) de deux courbes qui se croisent en ce point et divisent le plan en quatre zones. Les autres lignes de niveau sont constituées de deux courbes qui se situent dans deux zones opposées.

On peut illustrer ce résultat à l'aide de la figure 4.2. On représente successivement les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$, $(x, y) \mapsto x^2 - 2y^2$ et $(x, y) \mapsto \sin^2 x - \sin^2 y$. Dans les deux premiers cas, le seul point critique est $(0, 0)$. Dans le dernier cas, les points critiques sont les points $(p\pi/2, q\pi/2)$, pour p et q entiers relatifs. En un tel point critique, avec la notation 4.1, les dérivées partielles d'ordre deux valent

$$r = 2 \cos(2x); \quad s = 0; \quad t = -2 \cos(2y),$$

de sorte que $s^2 - rt = 4(-1)^{p+q}$. Par conséquent, si p et q ont la même parité, le point critique est un point selle. Sinon, le point critique est un extremum local. On rencontre donc sur cet exemple les deux situations identifiées dans le lemme de Morse.

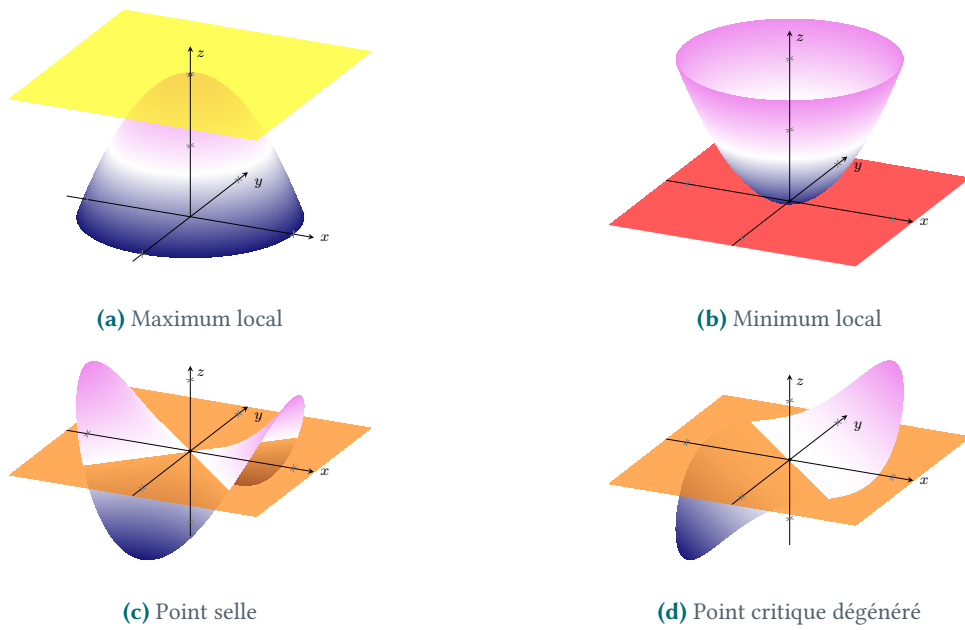


FIGURE 4.1 : Classification des points critiques

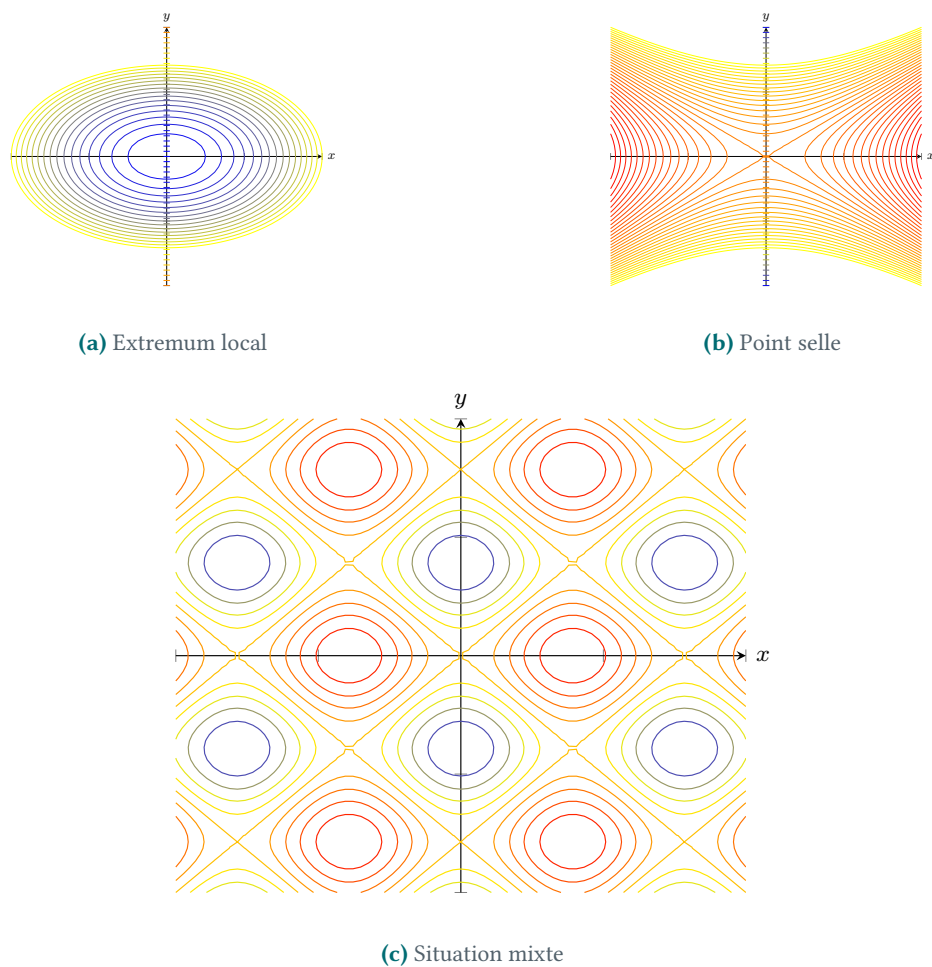


FIGURE 4.2 : Allure des lignes de niveau près de points critiques

Lien avec les systèmes différentiels

Le but de ce chapitre est d'illustrer le rôle des fonctions de plusieurs variables dans l'étude de certains systèmes différentiels. On rappelle qu'une *équation différentielle* est la donnée d'une relation entre une fonction et ses dérivées, et que résoudre une telle équation consiste à déterminer les fonctions qui vérifient la relation. Le problème peut en général s'écrire

$$\Phi'(t) = F(t, \Phi(t)),$$

où F désigne une fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et Φ est une fonction inconnue à déterminer.

On traite uniquement le cas des équations différentielles *autonomes*, qui s'écrivent sous la forme

$$\Phi'(t) = G(\Phi(t)), \quad (5.1)$$

où G est définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ et toujours à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On adopte un point de vue principalement qualitatif : on s'intéresse à l'allure des solutions et à leur comportement asymptotique.

Un sous-cas important est le cas *linéaire*, dans lequel l'équation différentielle (5.1) s'écrit

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = a_{1,1}\varphi_1(t) + \dots + a_{1,d}\varphi_d(t) \\ \vdots \\ \varphi_d'(t) = a_{d,1}\varphi_1(t) + \dots + a_{d,d}\varphi_d(t), \end{cases} \quad (5.2)$$

où les coefficients $a_{i,j}$ désignent des nombres réels, et $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ désignent les composantes de la fonction inconnue Φ , puisque celle-ci est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On qualifie alors (5.2) de *système différentiel linéaire*. Le lien avec (5.1) s'établit en écrivant les composantes $g_1, \dots, g_d$ de G comme

$$g_i(x_1, \dots, x_d) = a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,d}x_d.$$

On observe que toutes les dérivées partielles de ces fonctions existent et sont constantes. Elles vérifient en effet $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_d) = a_{i,j}$. Le cas de la dimension $d = 2$ sera détaillé dans le chapitre 6.

5.1 Trajectoires et portrait de phase

On considère d'abord l'équation différentielle autonome (5.1), et on suppose que la fonction G est de classe C^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire qu'elle admet des dérivées partielles continues. On admet alors que pour tout point $p \in \Omega$, il existe une unique solution Φ_p de l'équation (5.1) définie sur le plus grand intervalle possible I_p et vérifiant la *condition initiale* $\Phi_p(0) = p$. (C'est une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz.) On dit que la fonction Φ_p est la *trajectoire* passant par p .

Définition 5.1 (portrait de phase). On appelle *portrait de phase* de l'équation différentielle autonome (5.1) l'ensemble constitué par l'image dans $\mathbb{R}^d$ de toutes les trajectoires Φ_p , c'est-à-dire l'ensemble

$$\{\Phi_p(I_p), p \in \Omega\} \quad \text{avec} \quad \Phi_p(I_p) = \{\Phi_p(t), t \in I_p\}.$$

On représente en outre des flèches sur les trajectoires pour indiquer dans quel sens elles sont parcourues quand la variable t augmente. On se limite dans ce qui suit au cas où la dimension d vaut un ou deux. En dimension un, la représentation du portrait de phase est assez limitée, puisqu'il s'agit d'intervalles de $\mathbb{R}$. On peut tout de même faire figurer l'orientation des trajectoires et les éventuels points d'équilibre.

Exemple 5.2. On considère l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = (\varphi(t) - 1)\varphi(t) = Q(\varphi(t)).$$

Les points d'équilibre sont les réels p pour lesquels la fonction constante égale à p est solution. Cela correspond aux racines du polynôme

$$Q(x) = (x - 1)x,$$

qui sont les réels 0 et 1. Le portrait de phase fait donc apparaître les deux trajectoires constantes correspondantes. De plus, on observe que $Q(x) > 0$ si $x < 0$ ou $x > 1$, et que $Q(x) < 0$ si $0 < x < 1$. Si une trajectoire φ passe par un point x à l'instant t , alors le signe de la dérivée $\varphi'(t)$ est donné par celui de $Q(x)$. Les trajectoires qui passent en-dessous de 0 ou au-dessus de 1 ont donc tendance à augmenter ensuite, et celles qui passent entre 0 et 1 ont tendance à diminuer. Cela permet d'orienter les trajectoires, et de voir que 0 est un équilibre stable, tandis que 1 est un équilibre instable. Le portrait de phase est représenté sur la figure 5.1.

On s'intéresse plus souvent au cas de la dimension deux. On commence par quelques exemples pour illustrer le lien avec les fonctions de plusieurs variables, et en particulier leurs lignes de niveau.

Exemple 5.3. On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = \varphi_1(t) \\ \varphi_2'(t) = -\varphi_2(t). \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un cas particulier de (5.2), constitué de deux équations différentielles indépendantes dont on connaît les solutions. Ce sont en effet

$$\varphi_1(t) = c_1 e^t \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) = c_2 e^{-t},$$

où c_1 et c_2 sont deux réels arbitraires. Pour tout point $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, la trajectoire passant par p à l'instant $t = 0$ est donc donnée par la fonction

$$\Phi_p(t) = (p_1 e^t, p_2 e^{-t}),$$

définie sur l'intervalle I_p égal à $\mathbb{R}$ tout entier. Il s'agit d'une courbe paramétrée plane dont l'image est incluse dans l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant la relation $xy = p_1 p_2$. Les trajectoires du système différentiel sont contenues dans les lignes de niveau de la fonction

$$f(x, y) = xy.$$

Chaque branche d'hyperbole constitue une trajectoire distincte ; au niveau zéro, on distingue l'origine, qui est un équilibre, et les quatre demi-axes ouverts. On peut tracer de façon explicite ces lignes de niveau : au niveau 0, on trouve l'union des deux axes de coordonnées, et à un niveau $h \neq 0$, on trouve l'union des deux branches de l'hyperbole d'équation $xy = h$.

Cependant, on peut essayer d'appliquer le lemme de Morse présenté dans la section 4.2.3 pour comprendre s'il permet d'anticiper l'allure des lignes de niveau. En effet, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et ses dérivées partielles sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x.$$

Par conséquent, f admet l'origine $(0, 0)$ pour unique point critique. De plus, les dérivées partielles d'ordre deux sont données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Avec les notations (4.1), les dérivées partielles d'ordre deux au point critique $(0, 0)$ sont donc $r = 0$, $s = 1$ et $t = 0$, de sorte que $s^2 - rt = 1$. L'unique point critique $(0, 0)$ est donc un point selle pour la fonction f . Le lemme de Morse indique que la ligne de niveau correspondant à la valeur 0 est constituée au voisinage du point critique de deux courbes qui se croisent en ce point et divisent le plan en quatre zones. De plus, les autres lignes de niveau sont constituées de deux courbes qui se situent dans deux zones opposées. Cela rejoint la description des lignes de niveau donnée ci-dessus. Celles-ci, ainsi que les trajectoires correspondantes, sont tracées sur la figure 5.2.

L'exemple ci-dessus est un cas particulier de système différentiel linéaire en dimension deux. Leur étude générale sera menée dans le chapitre 6.

5.2 Systèmes conservatifs et hamiltoniens

On étudie maintenant des cas particuliers remarquables de systèmes différentiels non linéaires en dimension deux. Une telle étude est motivée en particulier par des problèmes issus de la physique.

5.2.1 Le pendule sans frottement

Le mouvement d'un pendule sans frottement est décrit par une équation différentielle du second ordre (parce qu'elle fait intervenir des dérivées secondes) de la forme

$$\theta''(t) + a \sin(\theta(t)) = 0,$$

pour un paramètre $a > 0$. En considérant $\varphi_1 = \theta$ et $\varphi_2 = \theta'$, on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) = -a \sin(\varphi_1(t)). \end{cases}$$

On considère une trajectoire (φ_1, φ_2) solution de ce système. Alors, en multipliant les deux équations, on obtient la relation

$$\varphi_2'(t)\varphi_2(t) = -a\varphi_1'(t) \sin(\varphi_1(t)).$$

On intègre et on déduit l'existence d'une constante h telle que pour tout t ,

$$\frac{(\varphi_2(t))^2}{2} - a \cos(\varphi_1(t)) = h.$$

On en déduit que l'image des trajectoires est contenue dans les lignes de niveau de la fonction de deux variables donnée par la formule

$$f_a(x, y) = \frac{y^2}{2} - a \cos x.$$

Avec $a = g/l$, l'énergie totale du pendule est $E = m\ell^2(f_a(\theta, \theta') + a)$. La fonction f_a représente donc l'énergie à un facteur multiplicatif et une constante additive près. On observe donc qu'elle est constante le long des trajectoires.

On peut représenter les lignes de niveau de la fonction f_a , en exprimant par exemple y en fonction de x . On peut aussi utiliser le lemme de Morse vu dans la section 4.2.3 pour avoir une idée de leur allure. On observe que la fonction f_a est de classe C^2 sur le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier. Ses dérivées partielles sont les fonctions

$$\frac{\partial f_a}{\partial x}(x, y) = a \sin x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_a}{\partial y}(x, y) = y.$$

Les points critiques sont donc tous les couples de la forme $(k\pi, 0)$, avec $k \in \mathbb{Z}$ entier relatif. Avec les notations (4.1), les dérivées partielles d'ordre deux en un tel point critique sont donc

$$r = a \cos(k\pi) = (-1)^k a; \quad s = 0; \quad t = 1.$$

On en déduit directement qu'au point critique $(k\pi, 0)$, on a

$$s^2 - rt = (-1)^{k+1} a.$$

Par conséquent, si k est pair, le point critique $(k\pi, 0)$ est un minimum local. Si k est impair, il s'agit d'un point selle. Le lemme de Morse indique donc que les lignes de niveau entourent localement le point critique dans le premier cas. Dans le second cas, les lignes de niveau a se croisent au point critique et divisent localement le plan en quatre zones, et les autres lignes se répartissent dans deux zones opposées qui sont ainsi délimitées.

On représente le portrait de phase du pendule sans frottement sur la figure 5.3. Pour simuler le mouvement du pendule, on pourra se rendre sur le site http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/pend_pesant1.php

5.2.2 Systèmes conservatifs

L'exemple du pendule sans frottement est un cas particulier d'équation *conservative* du type

$$\theta''(t) + U'(\theta(t)) = 0,$$

où U est une fonction réelle de classe C^2 sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ appelée *potentiel*. En posant comme dans l'exemple $\varphi_1 = \theta$ et $\varphi_2 = \theta'$, on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) = -U'(\varphi_1(t)). \end{cases}$$

En considérant une trajectoire (φ_1, φ_2) solution du système et en multipliant les deux équations, on a

$$\varphi_2'(t)\varphi_2(t) = -\varphi_1'(t)U'(\varphi_1(t)).$$

Ainsi, il existe une constante h telle que pour tout t de l'intervalle de définition de la trajectoire,

$$\frac{(\varphi_2(t))^2}{2} + U(\varphi_1(t)) = h.$$

On interprète cette relation comme le fait que l'énergie totale du système est conservée. On observe que l'image des trajectoires est contenue dans les lignes de niveau de la fonction de deux variables

$$f(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x).$$

Le potentiel U étant de classe C^2 , la fonction f est de classe C^2 . On pourra appliquer le lemme de Morse au voisinage de ses points critiques non dégénérés, après avoir vérifié cette condition. Les dérivées partielles de f sont les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = U'(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y,$$

de sorte que les points critiques sont de la forme $(x_0, 0)$, avec x_0 un point où la dérivée U' du potentiel s'annule. Avec les notations (4.1), les dérivées partielles d'ordre deux en un tel point critique sont alors

$$r = U''(x_0); \quad s = 0; \quad t = 1,$$

si bien que clairement,

$$s^2 - rt = -U''(x_0).$$

La classification du point critique $(x_0, 0)$ dépend donc du signe de la dérivée seconde du potentiel au point x_0 . Si $U''(x_0) > 0$, alors $(x_0, 0)$ est un minimum local pour f , qui correspond donc à un minimum d'énergie. Si $U''(x_0) < 0$, alors $(x_0, 0)$ est un point selle. Enfin, si $U''(x_0) = 0$, alors $(x_0, 0)$ est un point critique dégénéré et on ne peut pas appliquer le lemme de Morse.

Remarque 5.4. Dans le cas du pendule sans frottement, on a $U(x) = -a \cos x$, pour $a > 0$.

5.2.3 Systèmes hamiltoniens

Un système conservatif, en particulier le pendule sans frottement, est un exemple de système *hamiltonien*. En dimension deux, un système hamiltonien est un système différentiel du type

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = \frac{\partial H}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ \varphi_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)). \end{cases}$$

La fonction de deux variables H est supposée de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Il s'agit du *hamiltonien* du système. Étant donnée une trajectoire (φ_1, φ_2) solution du système hamiltonien, on considère la fonction

$$\psi(t) = H(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Cette fonction est dérivable et, d'après les formules de dérivation des fonctions composées vues dans la section 3.4.2, sa dérivée vérifie

$$\psi'(t) = \varphi_1'(t) \frac{\partial H}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + \varphi_2'(t) \frac{\partial H}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = 0.$$

On s'aperçoit en effet que ψ' est nulle en remplaçant φ_1' et φ_2' par leur expression donnée par le système différentiel, et en simplifiant. Finalement, il existe une constante h telle que pour tout t de l'intervalle de définition de la trajectoire,

$$\psi(t) = H(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = h.$$

Ainsi, l'image des trajectoires est contenue dans les lignes de niveau du hamiltonien H . Si celles-ci sont faciles à tracer, on en déduit le portrait de phase. On peut aussi envisager d'appliquer le lemme de Morse pour estimer l'allure des lignes de niveau de H au voisinage de ses points critiques.

Remarque 5.5. Pour un système conservatif, le hamiltonien est relié au potentiel par la formule $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$. C'est l'énergie du système. Pour le pendule sans frottement, $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - a \cos x$.

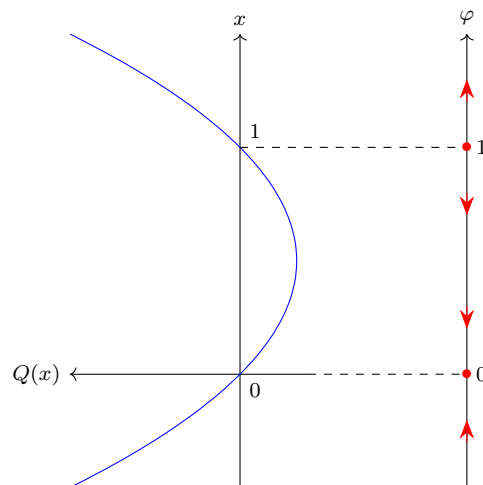


FIGURE 5.1 : Polynôme Q et portrait de phase associé

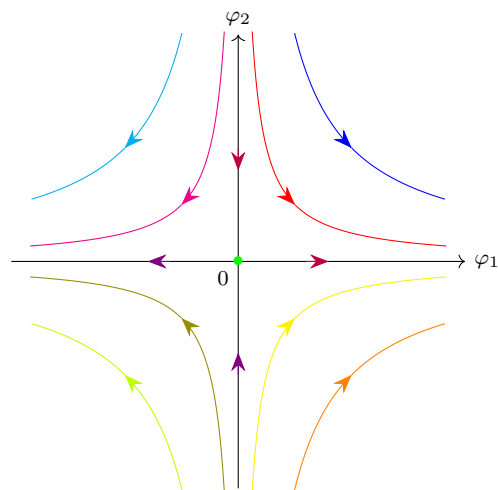


FIGURE 5.2 : Portrait de phase. Point selle.

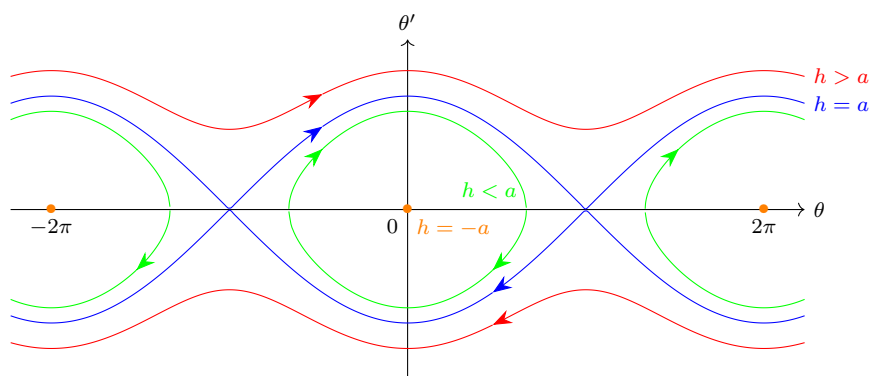


FIGURE 5.3 : Portrait de phase du pendule sans frottement.

Systèmes différentiels linéaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse spécifiquement aux systèmes différentiels linéaires en dimension deux, ce qui consiste à supposer que $d = 2$ dans (5.2). Un tel système s'écrit donc sous la forme

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) = c\varphi_1(t) + d\varphi_2(t), \end{cases} \quad (6.1)$$

où a, b, c et d sont des coefficients réels.

6.1 Classes de similitude

L'analyse repose sur une classification des applications linéaires liées aux systèmes du type (6.1), que nous exploitons ici sans souci de généralité et sans preuve. On considère l'application linéaire

$$M : (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy). \quad (6.2)$$

Celle-ci code le système différentiel (6.1), qui est en effet équivalent à l'équation

$$(\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)) = M(\varphi_1(t), \varphi_2(t)). \quad (6.3)$$

Considérons une autre application linéaire P de la forme (6.2) avec d'autres coefficients. Si P est bijective, la connaissance d'un couple de fonctions (φ_1, φ_2) est équivalente à celle du couple

$$(\psi_1(t), \psi_2(t)) = P(\varphi_1(t), \varphi_2(t)). \quad (6.4)$$

Cependant, un couple (φ_1, φ_2) est solution du système différentiel (6.1) si et seulement si le nouveau couple (ψ_1, ψ_2) vérifie, la notation P^{-1} désignant la réciproque de P , la relation

$$P^{-1}(\psi_1'(t), \psi_2'(t)) = M(P^{-1}(\psi_1(t), \psi_2(t))),$$

c'est-à-dire

$$(\psi_1'(t), \psi_2'(t)) = P \circ M \circ P^{-1}(\psi_1(t), \psi_2(t)). \quad (6.5)$$

La composée $P \circ M \circ P^{-1}$ est aussi une application linéaire du type (6.2), donc l'équation différentielle (6.5) est du même type que (6.3), et au final correspond à un autre système différentiel du type (6.1). Ainsi, résoudre le système différentiel (6.1) codé par l'équation (6.3) est équivalent à résoudre le système différentiel du même type obtenu en remplaçant l'application linéaire M par l'application linéaire $P \circ M \circ P^{-1}$.

Définition 6.1 (similitude d'applications linéaires). On dit que deux applications linéaires M et N sont *semblables*, ou sont dans la même *classe de similitude* s'il existe une application linéaire bijective P telle que

$$N = P \circ M \circ P^{-1}.$$

En conclusion, résoudre le système différentiel (6.1) codé par l'équation (6.3) est équivalent, suite à un changement des fonctions inconnues du type (6.4), à résoudre le système différentiel obtenu en remplaçant l'application linéaire M par une application linéaire qui lui est semblable. L'idée est bien sûr de remplacer M par une application linéaire semblable pour laquelle le système différentiel du type (6.1) prend une forme particulièrement simple à étudier. On résout donc un système intermédiaire équivalent plus simple, pour revenir finalement au système initial.

6.2 Valeurs propres associées au système

Dans ce but, on commence par chercher les *valeurs propres* de M , qui sont les nombres réels ou complexes λ pour lesquels l'application linéaire

$$(x, y) \mapsto M(x, y) - \lambda(x, y)$$

n'est pas injective, en prolongeant M à $\mathbb{C}^2$ lorsque λ est complexe. Plus concrètement, on peut montrer dans le cas de la dimension deux qu'il y a une ou deux valeurs propres, et qu'il s'agit des racines du polynôme de degré deux

$$Q_M(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc),$$

où les coefficients a, b, c et d sont ceux figurant dans l'expression (6.2) de l'application linéaire M .

Le comportement des trajectoires est différent suivant que les racines sont réelles ou non. Le signe du discriminant Δ de ce polynôme joue donc un rôle important. On rappelle que

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc).$$

On note δ un nombre (éventuellement complexe) tel que $\delta^2 = \Delta$. Le polynôme Q_M admet pour racines

$$\frac{a + d - \delta}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a + d + \delta}{2}. \quad (6.6)$$

Il y a trois cas : les deux nombres sont réels et coïncident si $\Delta = 0$, ils sont réels et distincts si $\Delta > 0$, ils sont complexes conjugués si $\Delta < 0$. On prend alors δ respectivement égal à 0, à $\sqrt{\Delta}$ et à $i\sqrt{-\Delta}$.

Les valeurs propres de l'application linéaire M sont donc données par les formules (6.6), et on va montrer que la distinction de cas ci-dessus conduit en fait aux diverses configurations possibles pour le portrait de phase du système différentiel (6.1).

6.3 Cas où le discriminant est strictement négatif

Si le discriminant Δ est strictement négatif, alors l'application linéaire M admet deux valeurs propres complexes conjuguées données par (6.6). On peut les écrire sous la forme $\alpha \pm i\beta$ avec

$$\alpha = \frac{a + d}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

On peut alors démontrer que l'application linéaire M est semblable à l'application linéaire

$$(x, y) \mapsto (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y).$$

Par conséquent, résoudre le système différentiel (6.1) équivaut à résoudre le nouveau système

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = \alpha\psi_1(t) - \beta\psi_2(t) \\ \psi_2'(t) = \beta\psi_1(t) + \alpha\psi_2(t). \end{cases}$$

Soit (ψ_1, ψ_2) une trajectoire solution de ce système. On passe en coordonnées polaires en considérant les fonctions r et θ telles que

$$\psi_1(t) = r(t) \cos(\theta(t)) \quad \text{et} \quad \psi_2(t) = r(t) \sin(\theta(t)).$$

En supposant que ces fonctions sont dérivables, on peut calculer

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = r'(t) \cos(\theta(t)) - r(t)\theta'(t) \sin(\theta(t)) \\ \psi_2'(t) = r'(t) \sin(\theta(t)) + r(t)\theta'(t) \cos(\theta(t)). \end{cases}$$

En remplaçant les fonctions ψ_1 et ψ_2 ainsi que leurs dérivées dans le système différentiel, on en déduit après simplifications que

$$\begin{cases} (r'(t) - \alpha r(t)) \cos(\theta(t)) = r(t)(\theta'(t) - \beta) \sin(\theta(t)) \\ (r'(t) - \alpha r(t)) \sin(\theta(t)) = r(t)(\beta - \theta'(t)) \cos(\theta(t)). \end{cases}$$

En considérant d'une part le produit en croix entre ces deux identités, et d'autre part la somme des carrés de chaque identité, on obtient les relations

$$\begin{cases} (r'(t) - \alpha r(t))r(t)(\theta'(t) - \beta) = 0 \\ (r'(t) - \alpha r(t))^2 = (r(t)(\beta - \theta'(t)))^2. \end{cases}$$

On observe que la trajectoire constante $(\psi_1(t), \psi_2(t)) = (0, 0)$ est l'unique solution du système différentiel qui passe par l'origine. Par conséquent, si $r(t)$ s'annule à un instant t , alors il est toujours nul. En mettant ce cas à part pour simplifier par $r(t)$, on déduit des équations ci-dessus que

$$r'(t) = \alpha r(t) \quad \text{et} \quad \theta'(t) = \beta.$$

Il existe donc deux constantes r_0 et θ_0 telles que pour tout t ,

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t} \quad \text{et} \quad \theta(t) = \beta t + \theta_0.$$

On en déduit les formules suivantes pour les trajectoires

$$\psi_1(t) = r_0 e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta_0) \quad \text{et} \quad \psi_2(t) = r_0 e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta_0).$$

On peut rencontrer les configurations suivantes, illustrées par la figure 6.1 :

- Le portrait de phase s'organise en spirales qui s'échappent de l'origine si $\alpha > 0$, et qui convergent vers l'origine si $\alpha < 0$. On dit respectivement que l'origine est un *foyer instable*, ou un *foyer stable*.
- Le portrait de phase est formé de cercles centrés en l'origine si $\alpha = 0$.

6.4 Cas où le discriminant est strictement positif

Si le discriminant Δ est strictement positif, alors l'application linéaire M admet deux valeurs propres réelles distinctes données par (6.6). On les note λ et μ . On peut alors démontrer que l'application linéaire M est semblable à l'application linéaire

$$(x, y) \mapsto (\lambda x, \mu y).$$

Par conséquent, résoudre le système différentiel (6.1) équivaut à résoudre le nouveau système

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = \lambda \psi_1(t) \\ \psi_2'(t) = \mu \psi_2(t). \end{cases}$$

Il existe donc deux constantes c_1 et c_2 telles que pour tout t ,

$$\psi_1(t) = c_1 e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad \psi_2(t) = c_2 e^{\mu t}.$$

Si les deux valeurs propres λ et μ sont non nulles et si $c_1 \neq 0$, l'image de la trajectoire ci-dessus est donc contenue dans la courbe d'équation

$$y = c_2 \left(\frac{x}{c_1} \right)^{\mu/\lambda}, \quad \frac{x}{c_1} > 0.$$

Si $c_1 = 0$, la trajectoire reste sur l'axe des ordonnées. Dès lors, on peut rencontrer les configurations suivantes :

- Si les valeurs propres λ et μ sont de signe différent, alors la puissance μ/λ est strictement négative et les trajectoires se répartissent de façon symétrique dans les quadrants. On parle de *point selle*.
- Si elles sont de même signe, alors la puissance est strictement positive et les trajectoires se répartissent de façon symétrique dans deux demi-plans. On parle de *nœud instable*, ou de *nœud stable*, suivant respectivement que les deux valeurs propres sont strictement positives, ou strictement négatives.

Si une valeur propre est nulle, par exemple, si $\mu = 0$, l'image de la trajectoire est contenue dans la courbe d'équation $y = c_2$. Pour $c_1 \neq 0$, chaque trajectoire décrit une demi-droite horizontale ouverte, qui converge vers l'axe des ordonnées si $\lambda < 0$ et s'en échappe si $\lambda > 0$. Pour $c_1 = 0$, elle est constante : chaque point de l'axe des ordonnées est un équilibre. Toutes les configurations possibles sont représentées sur la figure 6.2.

6.5 Cas où le discriminant est nul

Si le discriminant Δ est nul, alors l'application linéaire possède une unique valeur propre $\lambda = \frac{a+d}{2}$ d'après (6.6). Deux cas sont possibles.

Premièrement, M peut être semblable à l'application linéaire

$$(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y).$$

Résoudre le système différentiel (6.1) équivaut alors à résoudre

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = \lambda \psi_1(t) \\ \psi_2'(t) = \lambda \psi_2(t). \end{cases}$$

Il existe donc deux constantes c_1 et c_2 telles que pour tout t ,

$$\psi_1(t) = c_1 e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad \psi_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

- Si $\lambda = 0$, alors les trajectoires sont constantes et correspondent simplement à des points du plan.
- Sinon, les trajectoires non constantes correspondent à des demi-droites ouvertes issues de l'origine, parcourues vers l'origine si $\lambda < 0$, et s'en échappant si $\lambda > 0$. On parle respectivement de *nœud stable*, ou de *nœud instable*.

Deuxièmement, M peut être semblable à l'application linéaire

$$(x, y) \mapsto (\lambda x + y, \lambda y).$$

Résoudre le système différentiel (6.1) équivaut alors à résoudre

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = \lambda \psi_1(t) + \psi_2(t) \\ \psi_2'(t) = \lambda \psi_2(t). \end{cases}$$

La seconde équation implique directement l'existence d'une constante c_2 telle que pour tout t ,

$$\psi_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

On cherche alors ψ_1 sous la forme $t \mapsto e^{\lambda t} g(t)$, avec g une fonction dérivable. On calcule pour tout t ,

$$\psi_1'(t) = e^{\lambda t} (g'(t) + \lambda g(t)) = \lambda \psi_1(t) + \psi_2(t) + e^{\lambda t} (g'(t) - c_2).$$

La première équation est équivalente à la condition $g'(t) = c_2$ pour tout t , ce qui donne $g(t) = c_2 t + c_1$, pour une constante c_1 . On en déduit l'existence de deux constantes c_1 et c_2 telles que pour tout t ,

$$\psi_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad \psi_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

- Si $\lambda = 0$, le portrait de phase est formé de lignes horizontales, parcourues dans le sens positif dans le demi-plan supérieur, et dans le sens négatif dans le demi-plan inférieur, ainsi que de points situés sur l'axe des abscisses. Ces situations sont obtenues respectivement pour c_2 strictement positif, strictement négatif, et nul.
- Si $\lambda \neq 0$ et $c_2 \neq 0$, l'image de la trajectoire ci-dessus est contenue dans la courbe d'équation

$$x = \left(c_1 + \frac{c_2}{\lambda} \ln \frac{y}{c_2} \right) \frac{y}{c_2}.$$

Elle est parcourue en direction de l'origine quand $\lambda < 0$, et elle émane de l'origine quand $\lambda > 0$. On parle respectivement de *nœud dégénéré stable*, ou de *nœud dégénéré instable*.

Si $c_2 = 0$, on a $\psi_2(t) = 0$ et $\psi_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$: la trajectoire est l'origine ou un demi-axe ouvert si $\lambda \neq 0$, et un point si $\lambda = 0$.

La figure 6.3 illustre les configurations non triviales ; le cas $M = 0$, où tout point est un équilibre, n'y est pas représenté. Dans le cas non diagonalisable avec $\lambda = 0$, le dessin correspond au système $\psi_1' = \psi_2, \psi_2' = 0$.

6.6 Application à l'oscillateur harmonique

L'étude générale ci-dessus peut s'illustrer en considérant un *oscillateur harmonique*, modélisant par exemple un circuit LC ou un système masse-ressort. Cela correspond à l'équation différentielle

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0, \quad (6.7)$$

où $\omega_0 > 0$ s'appelle la *pulsation propre* du système, et $\alpha \geq 0$ est un coefficient d'*amortissement* qui rend compte d'une éventuelle dissipation d'énergie. En considérant les fonctions $\varphi_1 = y$ et $\varphi_2 = y'$, on se ramène à l'étude du système différentiel

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) = -\omega_0^2 \varphi_1(t) - \alpha \varphi_2(t), \end{cases} \quad (6.8)$$

qui est bien un cas particulier de (6.1). Plus précisément, une fonction deux fois dérivable y est solution de l'équation différentielle (6.7) si et seulement si le couple de fonctions (y, y') est solution du système différentiel (6.8). La discussion précédente indique de considérer l'application linéaire

$$M : (x, y) \mapsto (y, -\omega_0^2 x - \alpha y),$$

ainsi que le polynôme et le discriminant associé, soit respectivement,

$$Q_M(x) = x^2 + \alpha x + \omega_0^2 \quad \text{et} \quad \Delta = \alpha^2 - 4\omega_0^2,$$

et enfin les valeurs propres données par (6.6). Les solutions ont des allures différentes selon que Δ est strictement négatif, strictement positif, ou nul. Ces trois cas sont décrits ci-dessous.

6.6.1 Régime pseudo-périodique

Le régime *pseudo-périodique* correspond au cas où $\omega_0 > \alpha/2$, c'est-à-dire où $\Delta < 0$. Les valeurs propres associées à l'application linéaire M sont

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\alpha}{2} \pm i\omega \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

On utilise un changement de coordonnées réel :

$$P : (x, y) \mapsto \left(x, -\frac{y + \alpha x/2}{\omega}\right), \quad P^{-1} : (u, v) \mapsto \left(u, -\frac{\alpha}{2}u - \omega v\right).$$

Un calcul direct donne

$$P \circ M \circ P^{-1}(u, v) = \left(-\frac{\alpha}{2}u - \omega v, \omega u - \frac{\alpha}{2}v\right).$$

D'après la section 6.3, les solutions dans ces nouvelles coordonnées sont

$$\psi_1(t) = r_0 e^{-\alpha t/2} \cos(\omega t + \theta_0), \quad \psi_2(t) = r_0 e^{-\alpha t/2} \sin(\omega t + \theta_0),$$

pour deux constantes réelles r_0 et θ_0 . En revenant aux coordonnées initiales par P^{-1} , on obtient toutes les solutions de (6.7) et leurs dérivées :

$$y(t) = r_0 e^{-\alpha t/2} \cos(\omega t + \theta_0), \quad y'(t) = -r_0 e^{-\alpha t/2} \left(\frac{\alpha}{2} \cos(\omega t + \theta_0) + \omega \sin(\omega t + \theta_0)\right).$$

Si $\alpha > 0$, le portrait de phase est formé de spirales elliptiques parcourues dans le sens horaire et convergeant vers l'origine. On représente une trajectoire sur les figures 6.4 et 6.6.

Si le coefficient d'amortissement vérifie $\alpha = 0$, le système différentiel (6.8) devient

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) = -\omega_0^2 \varphi_1(t). \end{cases}$$

Il s'agit d'un système hamiltonien conservatif de potentiel $U(x) = \frac{\omega_0^2}{2}x^2$. Les images des trajectoires solutions s'inscrivent dans les lignes de niveau du hamiltonien

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 + \omega_0^2 x^2).$$

Les lignes de niveau $h \geq 0$ du hamiltonien sont les courbes d'équations $y = \pm \sqrt{2h - \omega_0^2 x^2}$. On les représente sur les figures 6.5 et 6.6. Pour $h > 0$, il s'agit géométriquement d'ellipses dont l'orientation et l'excentricité dépendent du paramètre ω_0 . Pour $h = 0$, le niveau se réduit à l'origine, qui est un équilibre. Pour l'orientation des lignes de niveau, on observe sur le système différentiel que φ_1 croît quand φ_2 est positif, et φ_1 décroît quand φ_2 est négatif; ou encore que φ_2 décroît quand φ_1 est positif, et φ_2 croît quand φ_1 est négatif. Les lignes de niveau sont donc parcourues dans le sens horaire. De plus, le couple $(\varphi_1, \varphi_2) = (y, y')$ est solution de (6.8) si et seulement si pour tout réel t ,

$$y(t) = r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) \quad \text{et} \quad y'(t) = -r_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0), \quad (6.9)$$

où r_0 et θ_0 sont deux constantes. On peut qualifier ces solutions de *périodiques*.

6.6.2 Régime apériodique

Le régime *apériodique* correspond au cas où $\omega_0 < \alpha/2$, c'est-à-dire où $\Delta > 0$. Les valeurs propres associées à l'application linéaire M sont

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\alpha \pm \delta}{2} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}.$$

On considère alors l'application linéaire P et sa réciproque P^{-1} données respectivement par

$$P : (x, y) \mapsto \left(\frac{\lambda_+ x - y}{\delta}, \frac{-\lambda_- x + y}{\delta} \right) \quad \text{et} \quad P^{-1} : (x, y) \mapsto (x + y, \lambda_- x + \lambda_+ y).$$

On peut montrer que la composée $N = P \circ M \circ P^{-1}$ est l'application linéaire donnée par

$$N : (x, y) \mapsto (\lambda_- x, \lambda_+ y).$$

D'après la section 6.4, le couple de fonctions (φ_1, φ_2) est solution du système différentiel (6.8) si et seulement si le couple $(\psi_1, \psi_2) = P(\varphi_1, \varphi_2)$ est de la forme

$$\psi_1(t) = c_1 e^{\lambda_- t} \quad \text{et} \quad \psi_2(t) = c_2 e^{\lambda_+ t},$$

avec deux constantes c_1 et c_2 . Comme $(\varphi_1, \varphi_2) = P^{-1}(\psi_1, \psi_2)$, on en déduit que (φ_1, φ_2) est solution du système différentiel (6.8) si et seulement si pour deux constantes c_1 et c_2 et tout réel t ,

$$\varphi_1(t) = c_1 e^{\lambda_- t} + c_2 e^{\lambda_+ t} \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) = \lambda_- c_1 e^{\lambda_- t} + \lambda_+ c_2 e^{\lambda_+ t}.$$

Ainsi, une fonction deux fois dérivable y est solution de l'équation différentielle (6.7) si et seulement si (y, y') est solution de (6.8), si et seulement si pour deux constantes c_1 et c_2 et tout réel t ,

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_- t} + c_2 e^{\lambda_+ t} \quad \text{et} \quad y'(t) = \lambda_- c_1 e^{\lambda_- t} + \lambda_+ c_2 e^{\lambda_+ t}.$$

Le portrait de phase correspond à des courbes convergeant vers l'origine car λ_- et λ_+ sont strictement négatifs. On représente une trajectoire sur les figures 6.4 et 6.6.

6.6.3 Régime critique

Le régime *critique* correspond au cas où $\omega_0 = \alpha/2$, c'est-à-dire où $\Delta = 0$. L'unique valeur propre associée à l'application linéaire M est

$$\lambda = -\omega_0 = -\frac{\alpha}{2}.$$

On considère alors l'application linéaire P et sa réciproque P^{-1} données respectivement par

$$P : (x, y) \mapsto (-y/\omega_0, \omega_0 x + y) \quad \text{et} \quad P^{-1} : (x, y) \mapsto (x + y/\omega_0, -\omega_0 x).$$

On peut montrer que la composée $N = P \circ M \circ P^{-1}$ est l'application linéaire donnée par

$$N : (x, y) \mapsto (-\omega_0 x + y, -\omega_0 y).$$

D'après la section 6.5, le couple de fonctions (φ_1, φ_2) est solution du système différentiel (6.8) si et seulement si le couple $(\psi_1, \psi_2) = P(\varphi_1, \varphi_2)$ est de la forme

$$\psi_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\omega_0 t} \quad \text{et} \quad \psi_2(t) = c_2 e^{-\omega_0 t},$$

avec deux constantes c_1 et c_2 . Comme $(\varphi_1, \varphi_2) = P^{-1}(\psi_1, \psi_2)$, on en déduit que (φ_1, φ_2) est solution du système différentiel (6.8) si et seulement si pour deux constantes c_1 et c_2 et tout réel t ,

$$\varphi_1(t) = (c_1 + c_2/\omega_0 + c_2 t) e^{-\omega_0 t} \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) = -\omega_0(c_1 + c_2 t) e^{-\omega_0 t}.$$

Quitte à remplacer $c_1 + c_2/\omega_0$ par c_1 , en conservant c_2 , on en conclut qu'une fonction deux fois dérivable y est solution de l'équation différentielle (6.7) si et seulement si (y, y') est solution de (6.8), si et seulement si pour deux constantes c_1 et c_2 et tout réel t ,

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\omega_0 t} \quad \text{et} \quad y'(t) = -\omega_0(c_1 - c_2/\omega_0 + c_2 t) e^{-\omega_0 t}.$$

Le portrait de phase correspond à des courbes convergeant vers l'origine car ω_0 est strictement positif. On représente une trajectoire sur les figures 6.4 et 6.6.

6.6.4 Régime conservatif forcé

On suppose que le coefficient d'amortissement vérifie $\alpha = 0$ et que l'oscillateur est soumis à une force ou un potentiel extérieur. Cela conduit à remplacer l'équation différentielle (6.7) par

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = \sin(\omega t), \quad (6.10)$$

avec $\omega_0, \omega > 0$. Toutes les solutions de (6.10) s'obtiennent comme la somme d'une solution particulière de (6.10) et de toutes les solutions de (6.7) lorsque $\alpha = 0$. Celles-ci sont de la forme (6.9).

Si $\omega \neq \omega_0$, on observe alors que l'équation différentielle (6.10) admet pour solutions les fonctions

$$y(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2} + r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0),$$

avec r_0 et θ_0 deux constantes. Si $\omega = \omega_0$, l'équation différentielle (6.10) admet pour solutions

$$y(t) = -\frac{t}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t) + r_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0),$$

avec r_0 et θ_0 deux constantes. Dans ce second cas, on remarque que les solutions ne sont pas bornées et l'amplitude des oscillations tend vers l'infini. Cela se produit quand la pulsation d'excitation ω est égale à la pulsation propre ω_0 du système. C'est le phénomène de *résonance*. On illustre les différents comportements discutés ci-dessus sur la figure 6.7.

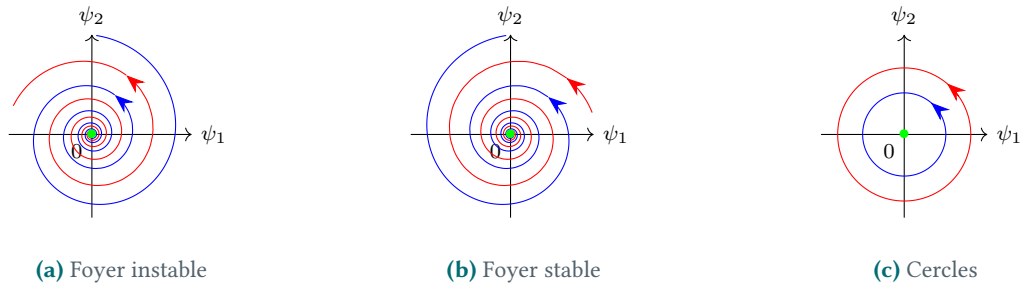


FIGURE 6.1 : Cas où le discriminant est strictement négatif

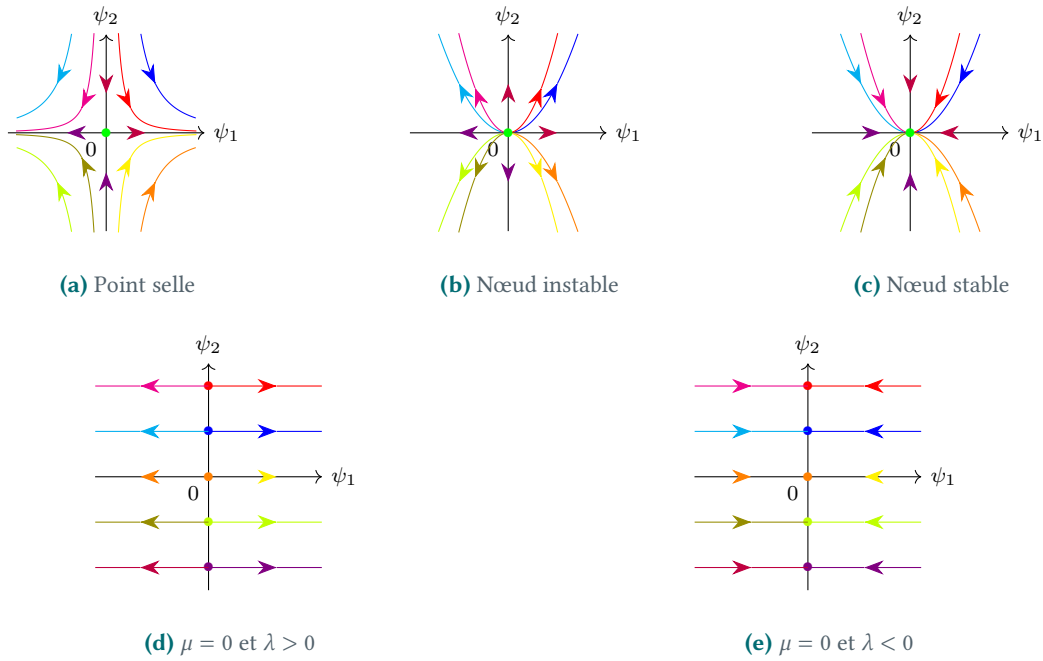


FIGURE 6.2 : Cas où le discriminant est strictement positif

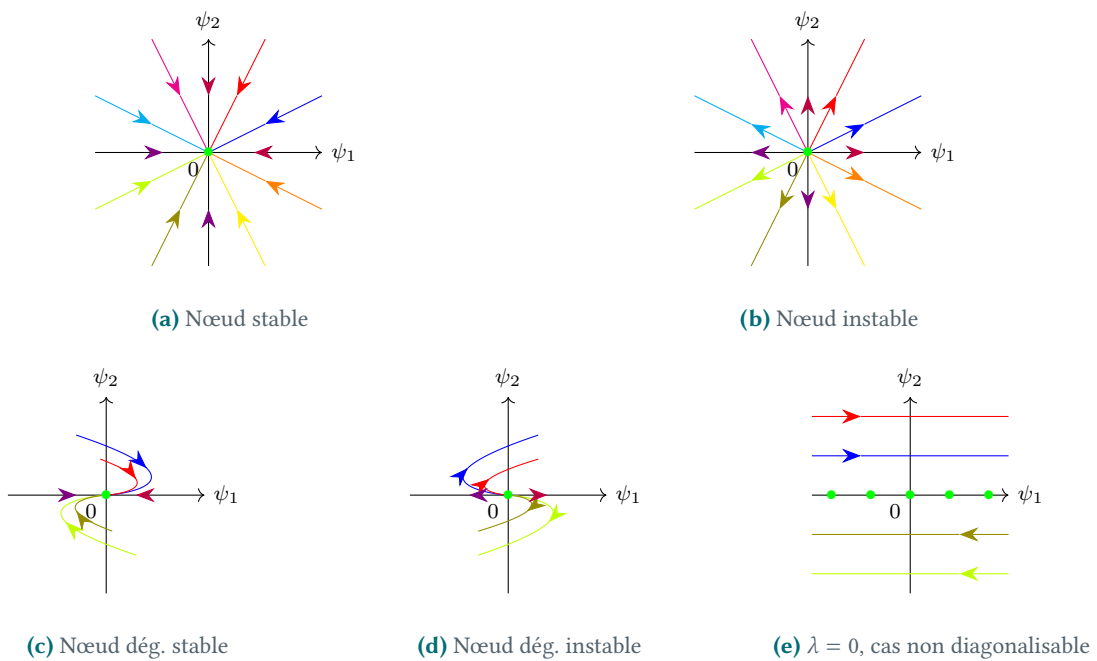


FIGURE 6.3 : Cas où le discriminant est nul

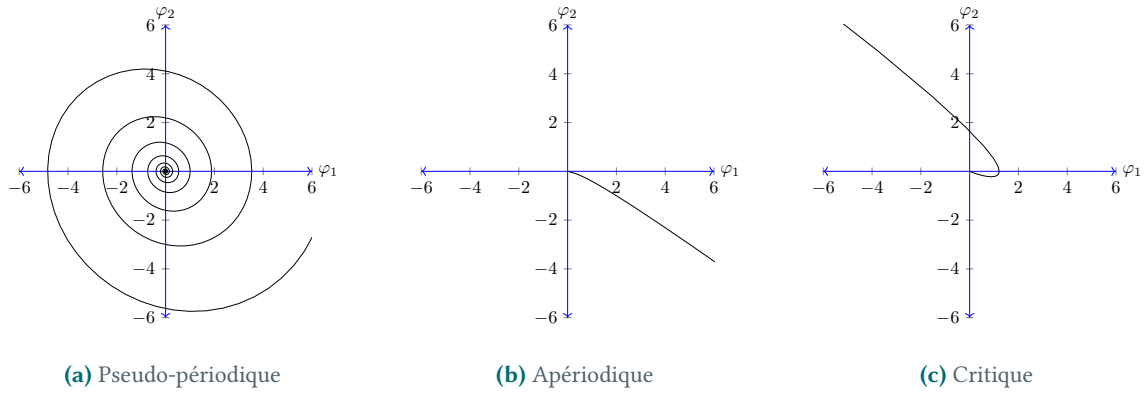
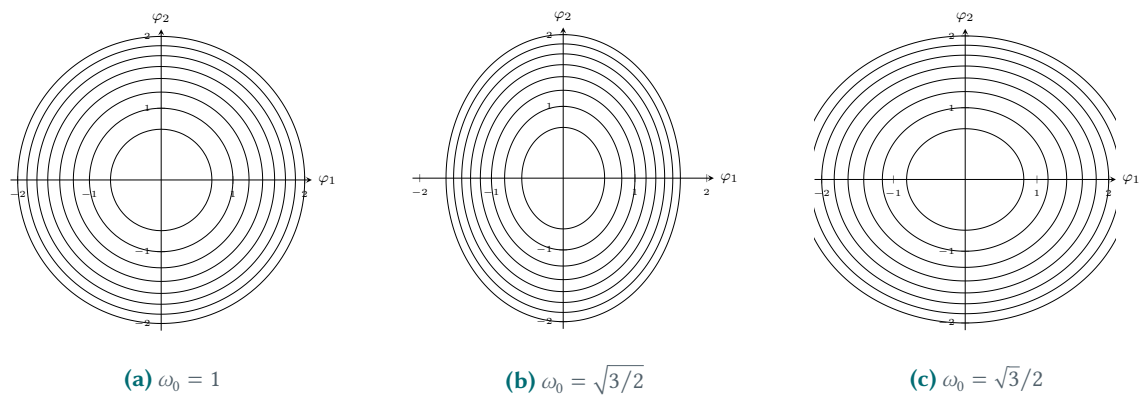
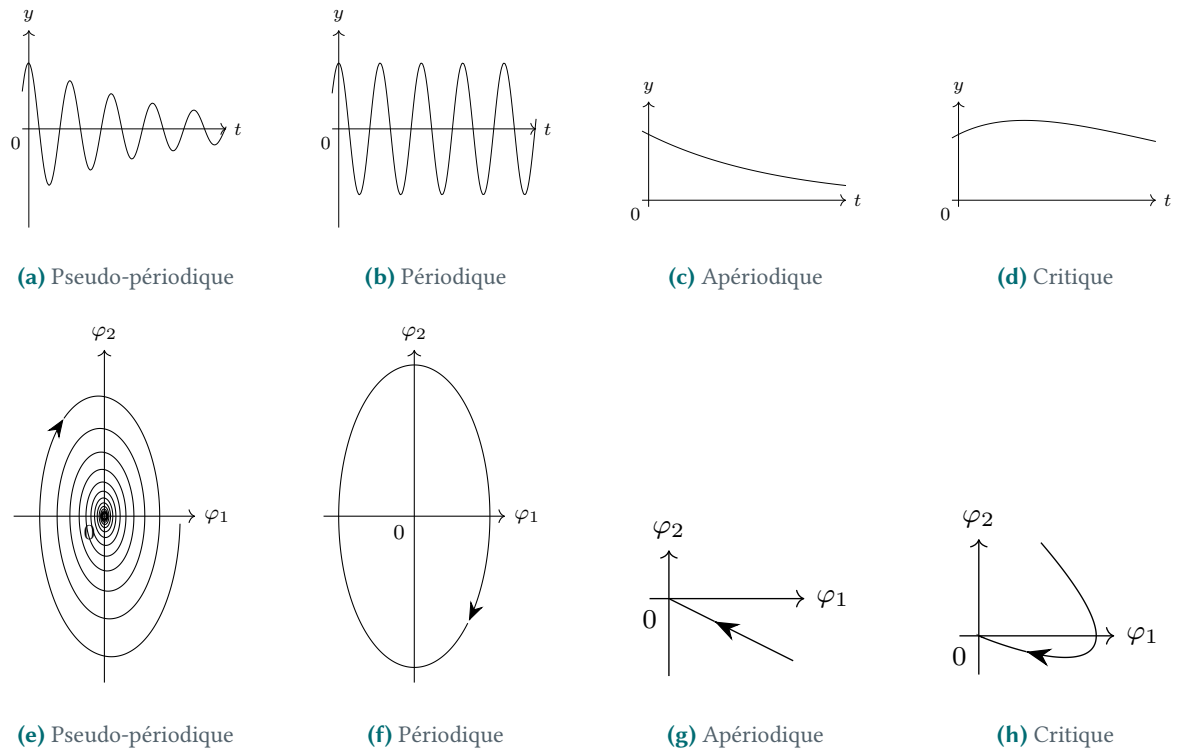
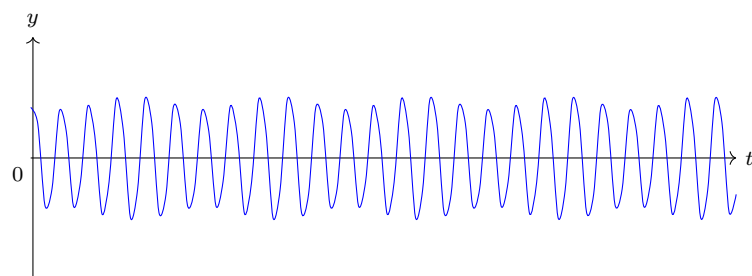
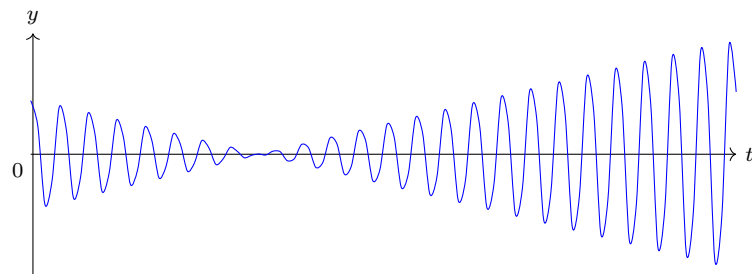


FIGURE 6.4 : Portrait de phase de l'oscillateur harmonique dissipatif

FIGURE 6.5 : Portrait de phase de l'oscillateur harmonique conservatif ($\alpha = 0$)FIGURE 6.6 : Solutions et portraits de phase pour l'oscillateur harmonique. Chaque portrait représente le couple (y, y') de la solution placée au-dessus; les échelles des axes peuvent différer.



(a) Cas général



(b) Résonance

FIGURE 6.7 : Régimes pour un oscillateur forcé