université PARIS-SACLAY

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

L2 Chimie / Parcours Chimie

Matrices et équations différentielles

Notes de cours et exercices corrigés

Arnaud Durand
Département de Mathématiques d'Orsay
arnaud.durand@universite-paris-saclay.fr

Avant-propos

Ces notes sont issues du cours que j'ai donné en L2 Chimie, Parcours Chimie, à la Faculté des Sciences d'Orsay en 2019 et en 2020. Elles présentent les outils d'algèbre linéaire nécessaires à l'étude des matrices, des systèmes linéaires et des valeurs propres, puis les méthodes de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

La première partie expose les notions et leurs démonstrations, accompagnées d'exemples. La deuxième propose des exercices regroupés par thème, chacun suivi d'un corrigé détaillé. Pour travailler ces exercices, il est conseillé de chercher une solution avant de consulter le corrigé, puis de comparer les méthodes employées. Les annexes rassemblent des compléments sur les racines des polynômes et le groupe symétrique.

L'ensemble peut se lire dans l'ordre du cours ou se consulter par sujet, à l'aide de la table des matières.

Conventions. Le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les vecteurs sont des colonnes sauf indication contraire. On note ${}^tA$ la transposée, I_n la matrice identité de taille n, Vect l'espace engendré et $\chi_A(t) = \det(A - tI_n)$ le polynôme caractéristique. Une valeur propre est toujours associée à un vecteur non nul. Les constantes d'intégration sont réelles dans les exercices d'équations différentielles. Une somme vide vaut 0 et un produit vide vaut 1.

Table des matières

Avant-propos **i**

I Notes de cours **1**

1 Matrices et systèmes linéaires **2**
1.1 Matrices et opérations sur les matrices . . . 2
1.1.1 Matrices, addition matricielle et multiplication par un scalaire . . . 2
1.1.2 Produit matriciel . . . 3
1.1.3 Transposition . . . 6
1.1.4 Matrices diagonales et triangulaires . . . 7
1.1.5 Trace d'une matrice carrée . . . 8
1.2 Systèmes linéaires . . . 10
1.2.1 Définition et interprétation matricielle . . . 10
1.2.2 Interprétation géométrique . . . 11
1.2.3 Opérations élémentaires et algorithme du pivot . . . 14
1.2.4 Bases de solutions d'un système homogène . . . 16
1.3 Matrices inversibles . . . 18
1.3.1 Lien avec les systèmes linéaires . . . 18
1.3.2 Cas des matrices de taille 2 . . . 21
1.3.3 Opérations sur les matrices inversibles et opérations élémentaires . . . 22
1.3.4 Matrices triangulaires inversibles . . . 25

2 Déterminant d'une matrice carrée **28**
2.1 Définition et premières propriétés . . . 28
2.2 Déterminant d'une matrice triangulaire . . . 34
2.3 Calcul par la méthode du pivot . . . 35
2.4 Développement par rapport à une ligne ou une colonne et formule d'inversion . . . 36
2.5 Produit scalaire et produit vectoriel . . . 39

3 Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée **42**
3.1 Spectre et polynôme caractéristique . . . 42
3.2 Espaces propres . . . 44
3.3 Diagonalisation . . . 45

4 Équations différentielles linéaires du second ordre **52**
4.1 Généralités . . . 52
4.1.1 Structure de l'ensemble des solutions . . . 52
4.1.2 Principe de superposition . . . 53
4.1.3 Passage par les fonctions à valeurs complexes . . . 53
4.2 Résolution de l'équation homogène . . . 54
4.2.1 Solutions complexes . . . 54
4.2.2 Solutions réelles . . . 55
4.3 Recherche d'une solution particulière . . . 57
4.4 Conditions initiales . . . 59

II Exercices corrigés 60

5 Systèmes linéaires 61
5.1 Résolution et compatibilité . . . 61
5.2 Écriture matricielle et espaces engendrés . . . 63
5.3 Systèmes homogènes et structure des solutions . . . 64
5.4 Systèmes à coefficients complexes . . . 66

6 Calcul matriciel 67
6.1 Produits et transposition . . . 67
6.2 Inversion et résolution de systèmes . . . 68
6.3 Critères d'inversibilité et indépendance linéaire . . . 71

7 Déterminants 73
7.1 Calcul et méthode du pivot . . . 73
7.2 Opérations élémentaires et propriétés . . . 74
7.3 Déterminant et inversibilité . . . 77

8 Nombres complexes et polynômes 78
8.1 Racines carrées et factorisation . . . 78

9 Valeurs propres et diagonalisation 79
9.1 Vecteurs propres et espaces propres . . . 79
9.2 Puissances et polynôme caractéristique . . . 80
9.3 Diagonalisation sur le corps des complexes . . . 82

10 Équations différentielles 83
10.1 Équations linéaires du premier ordre et raccordement . . . 83
10.2 Équation de Riccati . . . 83
10.3 Équations linéaires du second ordre . . . 84

III Annexes 86

A Détermination des racines d'un polynôme 87
A.1 Polynômes de degré 2 . . . 87
A.2 Polynômes de degré au moins 3 . . . 87

B Le groupe symétrique 89
B.1 Préliminaires . . . 89
B.2 Décomposition en produit de cycles . . . 89
B.3 Décomposition en produit de transpositions . . . 90
B.4 Signature . . . 91

Première partie

Notes de cours

CHAPITRE / 1

Matrices et systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Les lettres n, p, q, i, j désignent des nombres entiers strictement positifs.

1.1 Matrices et opérations sur les matrices

1.1.1 Matrices, addition matricielle et multiplication par un scalaire

Le terme "scalaire" qualifie un élément de l'ensemble $\mathbb{K}$, c'est-à-dire ici simplement un nombre réel ou complexe.

Définition 1.1 (Matrice, coefficients, lignes, colonnes). • On appelle *matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$* toute famille A constituée de np éléments de $\mathbb{K}$ et présentée sous la forme d'un tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On peut aussi noter $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

- Pour tous entiers $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$, le scalaire $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ est appelé *coefficient de la matrice A en position (i, j)*.
- Pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, la matrice $\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ est appelée la *i-ième ligne de la matrice A*.
- Pour tout entier $j \in \{1, \dots, p\}$, la matrice $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ est appelée la *j-ième colonne de la matrice A*.

L'usage est d'utiliser le plus possible la lettre i comme indice des lignes et la lettre j comme indice des colonnes. De plus, par convention, si une lettre majuscule A désigne une matrice de taille $n \times p$, son coefficient en position (i, j) est noté en utilisant la lettre minuscule correspondante $a_{i,j}$. On utilise parfois aussi la notation $A_{i,j}$.

Exemples 1.2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle de taille 2×3. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 3 & 5 \\ 2\mathrm{i} & 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$ est une matrice complexe de taille 3×2.

Définition 1.3 (Ensembles de matrices). L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Pour $n = 1$, on parle de *vecteurs lignes de taille* p et leur ensemble $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ s'identifie souvent à $\mathbb{K}^p$, ce qu'on note $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^p$.
- Pour $p = 1$, on parle de *vecteurs colonnes de taille* n et leur ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ s'identifie souvent à $\mathbb{K}^n$, ce qu'on note $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$.
- Pour $n = p$, on parle de *matrices carrées de taille* n et on note plus simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ leur ensemble. La famille $(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n})$ est alors appelée la *diagonale de la matrice* A.

Définition 1.4 (Matrice nulle). On appelle *matrice nulle de* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls. Elle est notée 0, ou parfois $0_{n,p}$ quand il est nécessaire de préciser sa taille.

Définition 1.5 (Addition matricielle et multiplication par un scalaire). Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On note $\lambda A + \mu B$ la matrice définie par

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} + \mu b_{1,1} & \lambda a_{1,2} + \mu b_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,p} + \mu b_{1,p} \\ \lambda a_{2,1} + \mu b_{2,1} & \lambda a_{2,2} + \mu b_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,p} + \mu b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1} + \mu b_{n,1} & \lambda a_{n,2} + \mu b_{n,2} & \cdots & \lambda a_{n,p} + \mu b_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'une *combinaison linéaire des matrices* A *et* B.

Exemple 1.6. $2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -12 & -13 \end{pmatrix}$.

1.1.2 Produit matriciel

Définition 1.7. Pour toutes matrices $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on note AB et on appelle *produit de* A *par* B la matrice de taille $p \times r$ dont le coefficient en position (i, j) est égal à $\sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$.

Concrètement, on peut présenter les calculs de la manière suivante.

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{q,1} & \cdots & b_{q,r} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{q} a_{1,k} b_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^{q} a_{1,k} b_{k,r} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{q} a_{p,k} b_{k,1} & \cdots & \sum_{k=1}^{q} a_{p,k} b_{k,r} \end{pmatrix}$$

Exemple 1.8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 7 & -3 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarques 1.9. Il faut bien prendre note des faits suivants :

- Pour que le produit de deux matrices soit défini, il doit y avoir *compatibilité des formats* :
  "une matrice de taille $p \times q$ *fois* une matrice de taille $q \times r$ *égale* une matrice de taille $p \times r$".
  En particulier, l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille n est stable par produit : le produit de deux matrices carrées de taille n est une matrice carrée de taille n.
- Le produit matriciel n'est *pas commutatif*, même si les formats sont compatibles. En guise de contre-exemple, on peut observer que
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  tandis que
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
- Un produit de matrices peut être nul sans qu'aucune d'entre elles ne le soit. Par exemple,
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
  En particulier, une puissance d'une matrice non nulle peut être nulle :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.10 (Produit d'une matrice par un vecteur ligne/colonne). *Soient une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et deux entiers $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$. On considère le vecteur colonne X_j et le vecteur ligne X_i' définis respectivement par*
$$X_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \textit{position } j \\ \\ \\ \end{array} \qquad \textit{et} \qquad X_i' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \textit{position } i \end{array}.$$
Alors, AX_j est le vecteur colonne donné par la j-ième colonne de la matrice A. De même, $X_i'A$ est le vecteur ligne donné par la i-ième ligne de A.

Plus généralement, si $C_1, \dots, C_p$ désignent les vecteurs colonnes donnés par les colonnes de la matrice A, et si X est un vecteur colonne dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont notés $x_1, \dots, x_p$, alors on a $AX = \sum_{k=1}^{p} x_k C_k$.

Proposition 1.11 (Propriétés du produit matriciel).
- Associativité : *pour toutes matrices $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, on a*
$$(AB)C = A(BC).$$
  Il n'y a donc pas d'ambiguïté à noter simplement ABC ce produit.
- Bilinéarité : *Pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C, D \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, et tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a*
$$\begin{cases} (\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC \\ B(\lambda C + \mu D) = \lambda BC + \mu BD. \end{cases}$$
- Élément neutre : *On appelle* matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients*

en dehors de la diagonale sont nuls et tous ceux sur la diagonale valent 1*, c'est-à-dire*

$$I_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\textit{taille } n}.$$

Alors, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, on a*

$$I_n A = A I_p = A.$$

Démonstration. Pour l'associativité, on fixe deux entiers $i \in \{1, \dots, p\}$ et $j \in \{1, \dots, s\}$, et on exprime le coefficient en position (i, j) de la matrice $(AB)C$ pour retrouver celui de $A(BC)$, comme suit :

$$\begin{aligned}((AB)C)_{i,j} &= \sum_{l=1}^{r} (AB)_{i,l} c_{l,j} = \sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,l} \right) c_{l,j} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,l} c_{l,j} \\ &= \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{r} a_{i,k} b_{k,l} c_{l,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} \left(\sum_{l=1}^{r} b_{k,l} c_{l,j} \right) = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} (BC)_{k,j} \\ &= (A(BC))_{i,j}.\end{aligned}$$

Les autres points du théorème se prouvent également par le calcul. □

Remarque 1.12. On note parfois simplement I, au lieu de I_n, la matrice identité quand le contexte permet de lever l'ambiguïté sur sa taille.

Exemple 1.13. Soit une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dont on note σ la somme de tous les coefficients, et soit J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1. Alors, $JMJ = \sigma J$.

Pour des raisons de compatibilité des formats, on ne peut multiplier une matrice avec elle-même que si elle est carrée. Pour une telle matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut considérer les *puissances de la matrice* A, définies par

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}}$$

pour tout entier $k \geq 1$, ainsi que par convention $A^0 = I_n$, la matrice identité.

Exemple 1.14. On note J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1. Alors, pour tout entier $k \geq 1$, on a $J^k = n^{k-1} J$. (Ce résultat peut se prouver par récurrence.)

Proposition 1.15 (Identités remarquables). *Soient deux matrices* $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *qui* commutent*, c'est-à-dire qui vérifient* $AB = BA$*. Alors, pour tout entier* $k \geq 1$*, on a*

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \quad \textit{et} \quad A^k - B^k = (A-B) \sum_{i=0}^{k-1} A^i B^{k-i-1}.$$

La première formule porte le nom de formule du binôme.

Démonstration. La première formule se démontre par récurrence, et la seconde en développant dans le membre de droite. On rappelle la définition du coefficient binomial $\binom{k}{i} = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$ et la formule du triangle de Pascal $\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \binom{k+1}{i+1}$, qui sont utiles pour la preuve. □

Remarque 1.16. Il est primordial dans cet énoncé que les matrices A et B commutent. En effet, pour $k = 2$, on a en développant

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + B^2 + AB + BA,$$

tandis que la formule du binôme indique que

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB.$$

Cette formule est donc vraie si et seulement si $AB + BA = 2AB$, autrement dit si et seulement si $AB = BA$. De même, la seconde formule donne pour $k = 2$, l'identité

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B),$$

tandis qu'en développant le second membre ci-dessus, on a

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 + AB - BA.$$

La seconde formule est donc vraie si et seulement si $AB - BA = 0$, c'est-à-dire encore une fois si les matrices A et B commutent.

Exemple 1.17. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, on a $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier $k \geq 0$. En effet, on a $A = I_3 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices I_3 et N commutent puisque $I_3 N = N = N I_3$. De plus, on a $N^2 = 0$, de sorte que $N^i = 0$ pour tout entier $i \geq 2$. Donc, la formule du binôme donne $A^k = (N + I_3)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i I_3^{k-i} = I_3 + kN = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.18 (Produit par blocs). *Soient $A, B, C, D, A', B', C', D'$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de tailles indiquées ci-dessous. Alors,*

$$\begin{array}{cc} p \updownarrow \\ p' \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ q & q' \end{array} \end{array} \times \begin{array}{cc} q \updownarrow \\ q' \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ r & r' \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} AA' + CB' & AC' + CD' \\ BA' + DB' & BC' + DD' \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le calcul se mène avec les blocs comme si ceux-ci étaient des scalaires. Cependant, il faut prendre garde au fait qu'en général les blocs ne commutent pas entre eux.

1.1.3 Transposition

Définition 1.19 (Transposée). Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, une matrice de coefficients notés $a_{i,j}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$. On appelle *transposée de A* la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients en position (i, j) sont $a_{j,i}$ pour $i \in \{1, \dots, p\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. Cette matrice est notée ${}^tA$ (ou encore A^T).

Exemples 1.20.

- ${}^t\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.
- Pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, on a ${}^t\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Proposition 1.21. • Linéarité : *Pour toutes matrices* $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et tous scalaires* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, *on a* ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB$.

- Involutivité : *Pour toute matrice* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *on a* ${}^t({}^tA) = A$.
- Effet sur le produit : *Pour toutes matrices* $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, *on a* ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Démonstration. Prouvons l'assertion concernant le produit. Pour tous entiers $i \in \{1, \dots, r\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$, le coefficient en position (i, j) de la matrice ${}^t(AB)$ vérifie

$$\left({}^t(AB)\right)_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{k=1}^{q} a_{j,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{q} ({}^tB)_{i,k} ({}^tA)_{k,j} = \left({}^tB\,{}^tA\right)_{i,j}.$$

Le reste de la preuve est un jeu d'écriture. □

Définition 1.22 (Matrice symétrique, antisymétrique). Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite :

- *symétrique* si ${}^tA = A$;
- *antisymétrique* si ${}^tA = -A$.

Remarque 1.23. Les coefficients situés sur la diagonale d'une matrice antisymétrique sont nécessairement nuls (car égaux à leur opposé).

Exemple 1.24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ est symétrique. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

1.1.4 Matrices diagonales et triangulaires

Définition 1.25 (Matrice diagonale, scalaire, triangulaire). • On appelle *matrice diagonale de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice carrée de taille n dont les coefficients en dehors de la diagonale sont tous nuls, c'est-à-dire toute matrice A vérifiant $a_{i,j} = 0$ quand $i \neq j$, soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- Les matrices de la forme λI_n, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et I_n la matrice identité, sont des exemples de matrices diagonales, appelées *matrices scalaires*. Il s'agit des matrices de la forme

$$\lambda I_n = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{\text{taille } n}.$$

- On appelle *matrice triangulaire supérieure de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice carrée dont les coefficients situés strictement en-dessous de la diagonale sont nuls, c'est-à-dire toute matrice A vérifiant $a_{i,j} = 0$ quand $i > j$, soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- On appelle *matrice triangulaire inférieure de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice carrée dont les coefficients situés strictement au-dessus de la diagonale sont nuls, c'est-à-dire toute matrice A vérifiant $a_{i,j} = 0$ quand $i < j$, soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Remarques 1.26. • La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure, et *vice versa*.

- Les matrices diagonales sont exactement les matrices qui sont à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures.

Pour tous scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, on note $\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, soit

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

On observe facilement que pour tous scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, \lambda \in \mathbb{K}$, on a les identités

$$\lambda \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \operatorname{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \operatorname{diag}(\lambda\alpha_1 + \beta_1, \dots, \lambda\alpha_n + \beta_n)$$

et

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \operatorname{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \operatorname{diag}(\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n).$$

Ces identités peuvent se généraliser aux matrices triangulaires supérieures comme le spécifie le résultat suivant.

Proposition 1.27 (Combinaisons et produit de matrices triangulaires). • *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors, les matrices $\lambda A + \mu B$ et AB sont triangulaires supérieures. De plus, pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $(AB)_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$.*

- *Ce résultat reste vrai pour des matrices triangulaires inférieures.*

Démonstration. On peut se restreindre au cas des matrices triangulaires supérieures puisque le cas des matrices triangulaires inférieures s'en déduit par transposition. Pour tous entiers $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i > j$, on a

$$(\lambda A + \mu B)_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j} = 0$$

et

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{i,k}}_{=0} b_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} \underbrace{b_{k,j}}_{=0} = 0,$$

de sorte que les matrices $\lambda A + \mu B$ et AB sont bien triangulaires supérieures. De plus, pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{i,k}}_{=0} b_{k,i} + a_{i,i}b_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k} \underbrace{b_{k,i}}_{=0} = a_{i,i}b_{i,i},$$

ce qui donne l'expression des coefficients diagonaux du produit AB. □

1.1.5 Trace d'une matrice carrée

Définition 1.28 (Trace). Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace* de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A.

Proposition 1.29. • Linéarité : *Pour toutes matrices* $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et tous scalaires* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, *on a* $\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B)$.

• Lien avec le produit : *Pour toutes matrices* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, *on a* $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Démonstration. Pour la linéarité, on écrit

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{k,k} + \mu b_{k,k}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} + \mu \sum_{k=1}^{n} b_{k,k} \\ &= \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B).\end{aligned}$$

Ensuite, on remarque que les produits AB et BA sont des matrices carrées de taille n et p, respectivement, donc *a priori* des matrices différentes. Cependant, elles ont même trace, puisque

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{k=1}^{n} (AB)_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{k,l} b_{l,k} \\ &= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} b_{l,k} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{p} (BA)_{l,l} = \operatorname{tr}(BA).\end{aligned}$$

□

Exemple 1.30. Comme application de ce résultat, on peut voir que l'équation matricielle $AB - BA = I_n$ n'a pas de solutions $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, on a clairement $\operatorname{tr}(I_n) = n$, alors que $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$.

1.2 Systèmes linéaires

1.2.1 Définition et interprétation matricielle

Définition 1.31. • Un *système de n équations linéaires à p inconnues* est la donnée d'une collection d'égalités de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}\,x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 & + & a_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}\,x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & a_{n,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}\,x_p & = & b_n \end{cases}$$

où les *coefficients* $a_{i,j}$ et b_i sont des scalaires fixés *a priori* (par des valeurs explicites ou abstraites) et les variables scalaires x_j sont des *inconnues* dont on cherche à déterminer les valeurs pour que toutes les égalités soient vraies simultanément.

- Un tel système peut se présenter sous une forme matricielle $AX = B$ comme suit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

On appelle alors $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la *matrice du système*, $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$ son *second membre* et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^p$ son *inconnue*.

- Le système est dit *homogène* si son second membre B est nul, c'est-à-dire si $b_1 = \ldots = b_n = 0$. Dans le cas contraire, le système est dit *inhomogène*.
- Le système homogène *associé* à un système linéaire de la forme $AX = B$ est le système linéaire homogène $AX = 0$.
- La *matrice complète* d'un système linéaire de la forme $AX = B$ est la matrice par blocs obtenue en concaténant les matrices A et B comme suit :

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p+1}(\mathbb{K}).$$

- Une *solution* du système linéaire $AX = B$ est un vecteur $X_0 \in \mathbb{K}^p$ tel que $AX_0 = B$. L'ensemble des solutions de ce système linéaire est

$$\mathscr{S} = \{X_0 \in \mathbb{K}^p \mid AX_0 = B\}.$$

Pour tous vecteurs colonnes X, Y et tous scalaires λ, μ, on a $A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY$. Cette propriété dite de *linéarité* montre que tout système linéaire est une équation *linéaire*, ce qui justifie la terminologie. Cela implique en particulier que toute combinaison linéaire de solutions d'un système linéaire homogène est aussi solution de ce système. En effet, si X et Y vérifient $AX = AY = 0$, alors $A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = 0$.

Théorème 1.32 (Structure de l'ensemble des solutions). *Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. On considère le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$. Alors, on rencontre l'une des deux situations suivantes :*

- *Soit ce système n'a aucune solution, c'est-à-dire que $AX \neq B$ pour tout vecteur X. Alors, on dit que le système est* incompatible *et l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ est l'ensemble vide $\emptyset$.*
- *Soit ce système admet une solution, c'est-à-dire que $AX = B$ pour au moins un vecteur X. Alors, on dit que le système est* compatible *et l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ est non vide. De plus, si X_0 désigne une solution quelconque*

> *du système, dite* solution particulière*, alors on a $\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}_H$, où $\mathcal{S}_H$ désigne l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé.*

Ainsi, lorsque le système linéaire $AX = B$ est compatible, il admet au moins une solution X_0, et toutes les autres solutions s'écrivent sous la forme $X = X_0 + X'$, où X' est une solution du système linéaire homogène associé, c'est-à-dire un vecteur tel que $AX' = 0$.

Démonstration. Si le système $AX = B$ est compatible, alors il admet au moins une solution, notée X_0. Pour tout vecteur $X \in \mathbb{K}^p$, on a donc

$$AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad AX = AX_0 \quad \Longleftrightarrow \quad A(X - X_0) = 0.$$

Ainsi, X est solution du système complet si et seulement si $X - X_0$ est solution du système homogène associé, c'est-à-dire que X se présente comme la somme de X_0 et d'une solution du système homogène associé. □

Exemple 1.33. Le système linéaire $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ est incompatible.

1.2.2 Interprétation géométrique

> **Définition 1.34** (espace vectoriel engendré)**.** Soient $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{K}^n$. On note $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_r)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $X_1, \dots, X_r$, c'est-à-dire
>
> $$\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_r) = \{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r\,,\ \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}\}.$$

Remarque 1.35. Si 0 désigne le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$, alors $\mathrm{Vect}(0) = \{0\}$. Plus généralement, ajouter le vecteur nul à la collection $X_1, \dots, X_r$ ne change pas l'espace engendré, c'est-à-dire que $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_r, 0) = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_r)$. Ainsi, on peut toujours simplifier l'écriture de $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_r)$ en retirant dans la collection le vecteur nul si jamais il apparaît.

Exemples 1.36.

- Dans $\mathbb{R}^2$, on a
$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
Cet ensemble n'est autre que la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$. On a aussi
$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$
On retrouve alors le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier.
- Dans $\mathbb{R}^3$, on a
$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ 2\lambda \\ \mu \end{pmatrix},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$
On peut montrer qu'il s'agit d'un plan de l'espace.

On peut aussi chercher à exprimer un ensemble en faisant appel à l'espace engendré par une famille de vecteurs à déterminer. Ainsi, dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda + \mu - \nu \\ 2\lambda - \mu \\ \lambda + 3\mu + \nu \end{pmatrix},\ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ensuite, dans $\mathbb{R}^2$, on peut écrire

$$\left\{\begin{pmatrix} 2\lambda+\mu+2 \\ \mu-\lambda+1 \end{pmatrix},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

On peut montrer que cet ensemble est en fait $\mathbb{R}^2$ tout entier. De manière similaire, dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda+3 \\ 3\lambda+7 \\ 2\lambda+1 \end{pmatrix},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

On peut montrer que l'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible est toujours de la forme des ensembles ci-dessus, si bien que la notation Vect permet d'exprimer de façon condensée un tel ensemble solution.

Exemple 1.37. Les solutions du système linéaire $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+5y+z=2 \end{cases}$ sont tous les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 7\lambda+1 \\ -3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$, où λ est un nombre réel quelconque. L'ensemble des solutions est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Démonstration. Pour tout triplet $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+5y+z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y+3z=0 \end{cases} \quad {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2-2L_1}$$
$$\iff \begin{cases} x=1+7z \\ y=-3z. \end{cases}$$

D'où le résultat, en prenant $z=\lambda$ comme paramètre. □

L'interprétation géométrique des espaces vectoriels engendrés est très naturelle. Ainsi, par exemple, si X désigne un vecteur non nul, alors $\mathrm{Vect}(X)$ est une droite. De plus, si X et Y désignent deux vecteurs non colinéaires (et non nuls), alors $\mathrm{Vect}(X,Y)$ est un plan.

On rappelle à cette occasion le fait suivant, valable dans un plan quelconque muni d'un repère orthonormal.

Fait 1.38. *Dans le plan, toute droite $\mathscr{D}$ possède une équation de la forme*

$$ax+by+c=0,$$

avec $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $(a,b)\neq(0,0)$, c'est-à-dire que a et b ne peuvent être simultanément nuls. Le vecteur $N=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est alors un vecteur normal *de la droite $\mathscr{D}$, c'est-à-dire que $\mathscr{D}$ est orthogonale à N.*

Démonstration. Soit $A=(x_A,y_A)$ un point de la droite $\mathscr{D}$, et soit $U=(u,v)$ un vecteur directeur non nul de $\mathscr{D}$. Posons $a=-v$, $b=u$ et $c=-ax_A-by_A$. Alors $(a,b)\neq(0,0)$, et, pour tout point $M=(x,y)$,

$$M\in\mathscr{D} \iff u(y-y_A)-v(x-x_A)=0 \iff ax+by+c=0.$$

En effet, la première égalité exprime la colinéarité de U et de $\overrightarrow{AM}$: si $u\neq0$, on prend $\lambda=(x-x_A)/u$; sinon $v\neq0$, et on prend $\lambda=(y-y_A)/v$. Elle équivaut dans les deux cas à $\overrightarrow{AM}=\lambda U$. L'équation annoncée existe donc bien. Enfin, le vecteur $N=(a,b)$ est non nul et vérifie $N\cdot U=-vu+uv=0$: c'est un vecteur normal à $\mathscr{D}$. □

Remarque 1.39. Il faut prendre garde au fait que si la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au vecteur $N=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, elle n'est pas *dirigée* par ce vecteur, mais plutôt par exemple par le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que

$$\mathscr{D} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x_A-\lambda b \\ y_A+\lambda a \end{pmatrix},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\},$$

où (x_A, y_A) désignent les coordonnées d'un point A appartenant à $\mathscr{D}$.

D'après le fait précédent, l'ensemble des solutions d'un système linéaire de la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ avec $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$ s'interprète géométriquement comme l'intersection des deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, d'équations $ax + by - c = 0$ et $a'x + b'y - c' = 0$, respectivement. On peut donc rencontrer l'une des situations suivantes :

- si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont une même droite, alors l'ensemble des solutions est donné par celle-ci ;
- si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles mais distinctes, alors l'ensemble des solutions est l'ensemble vide ;
- si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes, alors l'ensemble des solutions est leur point d'intersection.

On peut développer un raisonnement similaire dans l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormal en commençant par le fait suivant.

Fait 1.40. *Dans l'espace à trois dimensions, tout plan $\mathscr{P}$ possède une équation de la forme*

$$ax + by + cz + d = 0,$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, c'est-à-dire que a, b et c ne peuvent être simultanément nuls. Le vecteur $N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est alors un vecteur normal *du plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire que $\mathscr{P}$ est orthogonal à N.*

En utilisant le fait précédent, on observe que l'ensemble des solutions d'un système linéaire

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

avec des coefficients réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ s'interprète géométriquement comme l'intersection des deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, d'équations $ax + by + cz - d = 0$ et $a'x + b'y + c'z - d' = 0$, respectivement. On peut donc rencontrer l'une des situations suivantes :

- si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont un même plan, alors l'ensemble des solutions est donné par celui-ci ;
- si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles mais distincts, alors l'ensemble des solutions est l'ensemble vide ;
- si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécantes, alors l'ensemble des solutions est leur droite d'intersection.

Si on ajoute une troisième équation $a''x + b''y + c''z = d''$ au système linéaire, c'est-à-dire un troisième plan, alors on a en plus des cas précédents celui d'un unique point d'intersection pour les trois plans. C'est cette dernière situation qui se produit en général.

Exemple 1.41. Les solutions du système linéaire $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$ sont tous les triplets de la forme $(-1 + \lambda, 3 - \lambda, \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui correspond à l'ensemble $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Il s'agit de la droite de l'espace qui passe par le point de coordonnées $(-1, 3, 0)$ et est dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, -1, 1)$.

Démonstration. Pour tous réels $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 5y + 5z = 15 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ y + z = 3 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \tfrac{1}{5} L_2$$

$$\iff \quad \begin{cases} x = -1 + z \\ y = 3 - z, \end{cases}$$

ce qui conduit au résultat en prenant $z = \lambda$ comme paramètre. □

1.2.3 Opérations élémentaires et algorithme du pivot

Définition 1.42 (Opérations élémentaires sur les lignes). Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle *opération élémentaire sur les lignes* d'un système linéaire les opérations suivantes :

- permutation des i-ième et j-ième lignes, notée $L_i \leftrightarrow L_j$;
- multiplication de la i-ième ligne par $\lambda \neq 0$, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- addition de la j-ième ligne multipliée par λ à la i-ième ligne, avec $i \neq j$, notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Proposition 1.43. *Transformer un système linéaire donné en lui appliquant n'importe quelle opération élémentaire sur les lignes ne modifie pas l'ensemble des solutions.*

Démonstration. Les opérations élémentaires sur les lignes transforment un système linéaire en un système équivalent, puisqu'on peut toujours les défaire en appliquant une autre opération élémentaire. Ainsi, l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ se défait en l'appliquant à nouveau. De plus, l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ se défait en appliquant $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$. Enfin, l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ se défait en appliquant $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$. □

Pour résoudre un système linéaire, il n'est pas nécessaire de procéder par substitutions des inconnues. Appliquer de façon méthodique les opérations élémentaires ci-dessus est suffisant, et la méthode conseillée est donnée par *l'élimination de Gauss-Jordan*, plus communément appelée **algorithme du pivot de Gauss**.

Afin de présenter cette méthode, on part d'un système écrit de façon symbolique sous la forme

$$\begin{cases} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases}$$

Le nombre exact d'équations et d'inconnues est sans importance, l'essentiel étant de comprendre et d'assimiler le principe de l'algorithme, afin d'être capable de l'appliquer à des situations concrètes.

Dans le membre de gauche, chaque point $\bullet$ représente un terme $a_{i,j}x_j$ dont le coefficient $a_{i,j}$ est quelconque. Un blanc indique un coefficient nul, et le symbole $\star$ indique un coefficient non nul : il ne signifie pas que le produit $a_{i,j}x_j$ est non nul, puisque l'inconnue peut valoir zéro. Les termes correspondant à une même inconnue sont disposés dans une même colonne. À droite du signe égal, les points représentent les coefficients du second membre.

Le but de l'algorithme est de faire disparaître successivement quelques-uns de ces termes afin de présenter le système sous la forme suivante, dite *forme échelonnée* :

$$\begin{cases} \star & & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \star & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \star & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases}$$

- **Étape 1 :** On peut supposer qu'il existe un coefficient non nul $\star$ dans le système, dans le membre de gauche ; sinon, le système est incompatible si le second membre est non nul, et tout vecteur est solution s'il est nul. Quitte à permuter deux lignes (à l'aide d'une opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$) et deux inconnues entre elles, on peut toujours placer ce coefficient non nul en position $(1, 1)$, ainsi :

$$\begin{cases} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \star & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases} \iff \begin{cases} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases}$$

Une permutation d'inconnues doit être effectuée dans toutes les équations, en conservant les noms des inconnues au-dessus des colonnes : elle change l'ordre des coordonnées, et non leurs valeurs. Ce coefficient non nul $\star$ est appelé *pivot*. On s'arrange si possible pour le choisir égal à 1, ce qui simplifiera les calculs ultérieurs.

- **Étape 2 :** On conserve la première ligne. On applique alors à chacune des lignes suivantes une opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ afin d'annuler tous les termes de la première colonne sous le pivot, c'est-à-dire ceux qui correspondent à la même inconnue que celle du pivot :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Si une ligne devient $0 = 0$, on peut la supprimer. Si elle devient $0 = b$ avec $b \neq 0$, le système est incompatible : on interrompt l'algorithme et il n'y a aucune solution. Il faut donc examiner le second membre avant de supprimer une ligne dont tous les coefficients de gauche sont nuls. De plus, si plusieurs équations complètes sont identiques ou proportionnelles par un facteur non nul, on n'en conserve qu'une seule.

- **Répétition des étapes 1 et 2 :** On ne touche pas à la première ligne, et on considère le sous-système formé par les autres lignes. Celui-ci fait apparaître une inconnue de moins que le système initial. On lui applique alors les deux étapes précédentes :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \star & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \star & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \star & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

On itère ce processus jusqu'à pouvoir présenter le système ainsi :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \star & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \star & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

- **Remontée :** Enfin, en appliquant des opérations élémentaires de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, on annule tous les termes situés au-dessus des pivots repérés par le symbole $\star$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \star & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \star & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \star & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \star & \bullet & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \star & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \star & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \star & & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \star & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \star & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

L'algorithme est alors terminé, puisqu'on a en effet obtenu une forme échelonnée du système. Pour exprimer les solutions, on peut être amené à fixer comme paramètres les inconnues ne correspondant à aucun pivot (s'il y en a), et exprimer les autres inconnues en fonction de celles-ci.

Exemples 1.44. • On applique l'algorithme du pivot au système suivant, d'inconnue le quadruplet (x, y, z, t) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & -y & +z & +t & = & 2 & \\ 2x & -y & +3z & +t & = & 3 & \\ x & -2y & +3z & -t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & -y & +z & +t & = & 2 & \\ & y & +z & -t & = & -1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & -y & +2z & -2t & = & -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & -y & +z & +t & = & 2 & \\ & y & +z & -t & = & -1 & \\ & & 3z & -3t & = & -3 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & -y & & +2t & = & 3 & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3 \\ & y & & & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_3 \\ & & 3z & -3t & = & -3 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 - 2t \\ y & = & 0 \\ z & = & -1 + t \end{array}\right.$$

Les solutions du système sont donc les quadruplets $(3 - 2\lambda, 0, -1 + \lambda, \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Cela donne l'ensemble $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- On applique l'algorithme du pivot au système suivant, d'inconnue le quadruplet (x, y, z, t) :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & +z & +3t & = & 1 \\ x & & +z & +t & = & 3 \\ & y & & +t & = & -1 \\ x & +y & +z & +2t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +2y & +z & +3t & = & 1 & \\ & -2y & & -2t & = & 2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & y & & +t & = & -1 & \\ & -y & & -t & = & 1 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & +z & +3t & = & 1 \\ & y & & +t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & & +z & +t & = & 3 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ & y & & +t & = & -1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 - z - t \\ y & = & -1 - t \end{array}\right.$$

Les solutions sont les quadruplets $(3 - \lambda - \mu, -1 - \mu, \lambda, \mu)$, avec λ, μ dans $\mathbb{R}$. Cela donne l'ensemble $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

1.2.4 Bases de solutions d'un système homogène

On vient de voir que pour exprimer les solutions d'un système linéaire, on peut mettre en œuvre l'algorithme du pivot puis, si le système est compatible et une fois une forme échelonnée atteinte, fixer comme paramètres les inconnues ne correspondant à aucun pivot, et exprimer les autres inconnues en fonction de celles-ci.

Dans ce paragraphe, notons n le nombre d'inconnues. Dans le cas d'un système homogène $AX = 0$, il y a toujours compatibilité, puisque le vecteur nul $X = 0$ est solution. L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_H$ est donc non vide. S'il s'agit

de la seule solution, alors on a $\mathcal{S}_H = \{0\}$. Sinon, on trouve des vecteurs colonnes $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_r),$$

c'est-à-dire que toute solution du système s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs colonnes $X_1, \dots, X_r$. Il arrive cependant que certains de ces vecteurs soient redondants (quand par exemple un des vecteurs peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des autres), ce qui complique inutilement l'expression de l'ensemble des solutions. Dans ce contexte, la notion de base apparaît quand on n'a aucune redondance, et garantit une écriture aussi simple que possible pour l'espace des solutions.

Définition 1.45 (Famille libre, famille liée, base). • Soit $r \geq 0$ un entier. Pour $r = 0$, la famille vide est une base de $\{0\}$. On dit que des vecteurs $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{K}^n$ forment une *famille libre* si pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0.$$

Cela signifie qu'il n'existe aucune relation linéaire non triviale entre ces vecteurs.

- Dans ce cas, on dit aussi que les vecteurs $X_1, \dots, X_r$ forment une *base* de l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_r)$.
- Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs forment une *famille liée*.

Remarques 1.46. • En mathématiques, la notion de base est plus générale, mais la définition ci-dessus sera suffisante dans le cadre de ce cours.

- Une famille constituée d'un seul vecteur non nul X_1 est toujours une famille libre, et donc c'est une base de l'espace $\mathrm{Vect}(X_1)$, qui est une droite vectorielle sur $\mathbb{K}$. Si $r = 2$, l'espace vectoriel engendré par une famille libre X_1, X_2 est un plan vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'interprétation comme droite ou plan de la géométrie réelle s'applique lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exemple 1.47. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note X_i le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf la i-ième qui vaut 1. Alors, $\mathbb{K}^n = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n)$, et les vecteurs $X_1, \dots, X_n$ forment une base de $\mathbb{K}^n$. Cette base est appelée la *base canonique*. En effet, pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, le vecteur de $\mathbb{K}^n$ de coordonnées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ s'écrit comme $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, si $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n = 0$, alors le vecteur de coordonnées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est le vecteur nul, donc tous les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont nuls.

Proposition 1.48. *Soit $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{K}^n$ une famille libre. Alors, tout élément $X \in \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_r)$ s'écrit* de manière unique *comme une combinaison linéaire des vecteurs $X_1, \dots, X_r$, c'est-à-dire que*

$$X = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r,$$

avec une seule possibilité pour le r-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$.

Définition 1.49 (Base de solutions). Soit $r \geq 0$ un entier. Pour $r = 0$, la famille vide est une base de $\{0\}$. On dit que des vecteurs $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{K}^n$ forment une *base de solutions* d'un système homogène $AX = 0$ si l'ensemble des solutions s'écrit

$$\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_r)$$

et si les vecteurs $X_1, \dots, X_r$ forment une famille libre.

Exemples 1.50. On reprend les exemples traités dans la section 1.2.3, en traitant les systèmes homogènes associés :

- En appliquant l'algorithme du pivot au système homogène suivant, d'inconnue le quadruplet (x, y, z, t), on a

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - y + 3z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2t \\ y = 0 \\ z = t. \end{cases}$$

  Les solutions du système sont donc les quadruplets $(-2\lambda, 0, \lambda, \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en donne une base de solutions.

- En appliquant l'algorithme du pivot au système homogène suivant, d'inconnue le quadruplet (x, y, z, t), on a

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3t = 0 \\ x + z + t = 0 \\ y + t = 0 \\ x + y + z + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z - t \\ y = -t. \end{cases}$$

  Les solutions sont les quadruplets $(-\lambda - \mu, -\mu, \lambda, \mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ainsi, les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donnent une base.

Remarque 1.51. D'après le théorème 1.32, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ d'un système linéaire compatible $AX = B$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière X_0 du système complet et de l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_H$ du système linéaire homogène associé $AX = 0$. On peut donc exprimer les solutions d'un système complet admettant plusieurs solutions par la donnée d'une solution particulière et d'une base de solutions du système homogène associé.

1.3 Matrices inversibles

1.3.1 Lien avec les systèmes linéaires

Le cas le plus simple de système linéaire est celui d'une seule équation et d'une seule inconnue, ce qui correspond à une équation de la forme $ax = b$, avec pour coefficients $a, b, \in \mathbb{R}$ et pour inconnue $x \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 0$, le système possède une unique solution b/a. Si $a = 0$, il n'a aucune solution lorsque $b \neq 0$, et tout scalaire est solution lorsque $b = 0$. De plus, on peut diviser par a si et seulement si a est non nul.

Dans le cas plus général d'un système linéaire $AX = B$ à n équations et p inconnues, on dispose d'un résultat similaire, à condition de remplacer la possibilité de diviser par a par une propriété d'*inversibilité* de la matrice A.

Définition 1.52 (Matrice inversible, inverse). On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* s'il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AU = UA = I_n.$$

Si une telle matrice U existe, alors elle est unique. On la note A^{-1} et on l'appelle l'*inverse* de A.

Démonstration. Prouvons l'unicité de l'inverse. Si deux matrices $U, U' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $AU = UA = I_n$ et $AU' = U'A = I_n$, alors on peut écrire $U = UI_n = U(AU') = (UA)U' = I_nU' = U'$, ce qui donne $U = U'$. □

Définition 1.53 (Groupe linéaire). L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et s'appelle le *groupe linéaire de degré n sur* $\mathbb{K}$.

Le lien entre matrices inversibles et résolution des systèmes linéaires est exprimé par la définition et le résultat suivants.

Définition 1.54 (Système de Cramer). Un système linéaire de la forme $AX = B$, avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^n$ et $X \in \mathbb{K}^p$, est qualifié de *système de Cramer* si sa matrice A est une matrice inversible (donc en particulier carrée, c'est-à-dire que $n = p$).

Théorème 1.55. *Pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et tout vecteur $B \in \mathbb{K}^n$, le système de Cramer $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution donnée par $A^{-1}B$.*

Démonstration. Il suffit d'observer que pour tout vecteur $X \in \mathbb{K}^n$, on a

$$AX = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad X = A^{-1}B.$$

En effet, on multiplie par A^{-1} les deux membres de l'égalité de gauche pour passer à celle de droite, et on multiplie par A les deux membres de l'égalité de droite pour passer à celle de gauche. □

Il reste à exposer des méthodes pour déterminer si une matrice donnée est inversible ou non, et pour calculer l'inverse d'une matrice inversible.

Exemples 1.56. • La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et on peut vérifier par le calcul que son inverse est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, simplement en multipliant ces deux matrices entre elles et en vérifiant que leur produit est la matrice identité. Cependant, il n'est pas évident de dégager de cet exemple une formule générale pour l'inverse d'une matrice quelconque.

- Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. La matrice diagonale $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est inversible si et seulement si tous les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont non nuls. Dans ce cas, son inverse est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1})$, où chaque $\alpha_i^{-1} = \dfrac{1}{\alpha_i}$ désigne l'inverse du scalaire α_i. Autrement dit,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Remarques 1.57. • Toute matrice carrée qui possède une ligne ou une colonne nulle n'est *pas* inversible. En effet, supposons qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède une colonne nulle, par exemple la j-ième. Alors, pour toute matrice $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la j-ième colonne du produit UA est également nulle, et donc la matrice UA ne peut être égale à l'identité. De manière similaire, si c'est la i-ième ligne de A qui est nulle, alors pour toute matrice $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la i-ième ligne du produit AU est également nulle, et donc la matrice AU ne peut être égale à l'identité. Une telle matrice A n'est donc pas inversible.

- Pour $n = 1$, l'ensemble $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ s'identifie simplement à $\mathbb{K}$ (égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), ensemble dans lequel tout élément non nul est inversible. Cependant, dès que $n \geq 2$, il existe des matrices non nulles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui ne sont pas inversibles, comme par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 1.58. *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si pour tout second membre $B \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ admet une unique solution.*

Démonstration. Si la matrice A est inversible, alors le système linéaire $AX = B$ est un système de Cramer, donc il possède une unique solution, comme indiqué par le théorème 1.55.

Réciproquement, supposons que le système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution quel que soit le vecteur $B \in \mathbb{K}^n$. Notons $B_1, \dots, B_n$ les vecteurs colonnes de la matrice identité I_n. Pour tout entier $j \in \{1, \dots, n\}$, le système linéaire $AX = B_j$ admet une unique solution $U_j \in \mathbb{K}^n$. On note U la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont données par les vecteurs $U_1, \dots, U_n$. On constate alors que $AU = I_n$.

Il reste à vérifier que $UA = I_n$. On observe à cet effet que $A(UA - I_n) = (AU)A - A = I_nA - A = 0$. Chaque colonne de la matrice $UA - I_n$ est donc solution du système linéaire homogène $AX = 0$. Cependant, ce système admet pour unique solution le vecteur nul. Ainsi, toutes les colonnes de la matrice $UA - I_n$ sont nulles. D'où $UA = I_n$. On en conclut que la matrice A est bien inversible, d'inverse la matrice U ainsi construite. □

Le théorème précédent montre que pour déterminer si une matrice est inversible, et pour calculer son inverse si elle existe, il suffit de résoudre un système linéaire dont le second membre est quelconque.

Exemples 1.59. • La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. En effet, pour tous réels a, b, c, x, y, z, on a

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrrr} 2x & +3y & +z & = & a & & \\ x & +y & +2z & = & & b & \\ x & +y & +z & = & & & c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrrrl} x & +y & +2z & = & & b & & \\ 2x & +3y & +z & = & a & & & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ x & +y & +z & = & & & c & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrrrl} x & +y & +2z & = & & b & & \\ & y & -3z & = & a & -2b & & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & -z & = & & -b & +c & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrrrl} x & +y & & = & & -b & +2c & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ & y & & = & a & +b & -3c & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ & & -z & = & & -b & +c & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrrrl} x & & & = & -a & -2b & +5c & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & y & & = & a & +b & -3c & \\ & & -z & = & & -b & +c & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcrrrl} x & & & = & -a & -2b & +5c & \\ & y & & = & a & +b & -3c & \\ & & z & = & & b & -c & L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. En effet, pour tous réels a, b, c, x, y, z, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x & & -z & = & a & & \\ x & +2y & +z & = & & b & \\ -x & +4y & +5z & = & & & c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & & -z & = & a & & & \\ & 2y & +2z & = & -a & +b & & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & 4y & +4z & = & a & & +c & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & & -z & = & a & & & \\ & 2y & +2z & = & -a & +b & & \\ & & 0 & = & 3a & -2b & +c & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

Pour $a = 1$ et $b = c = 0$, on voit clairement que le système est incompatible à cause de la dernière équation. On a donc trouvé un exemple de second membre pour lequel le système linéaire n'a pas de solution. La matrice de ce système n'est donc pas inversible.

1.3.2 Cas des matrices de taille 2

Il est assez facile de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée de taille 2 soit inversible. Dans le cas où une telle matrice est inversible, on dispose en outre d'une formule pour son inverse. Ces résultats peuvent se généraliser au cas des matrices carrées de taille quelconque, mais au prix de complications substantielles, voir le chapitre 2.

Définition 1.60 (Déterminant d'une matrice carrée de taille 2). Soient des scalaires $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On appelle *déterminant* de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, et on note $\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, le scalaire $ad - bc$.

Théorème 1.61. *Soient $a, b, c, d, \in \mathbb{K}$. La matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si son déterminant $ad - bc$ est non nul. Dans ce cas, on a*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On voit par le calcul que la matrice scalaire $(ad - bc)I_2$ est le résultat de chacun des deux produits

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si le déterminant $ad - bc$ est non nul, alors la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est la matrice $\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. En revanche, si le déterminant $ad - bc$ est nul, alors la matrice considérée n'est pas inversible. Par l'absurde, supposons le contraire. On a alors

$$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} (ad - bc) I_2 = 0,$$

ce qui implique $a = b = c = d = 0$. La matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est donc la matrice nulle, ce qui contredit sa supposée inversibilité. □

Le théorème précédent illustre la motivation historique de l'introduction du déterminant : *déterminer* s'il y a unicité des solutions pour un système linéaire de deux équations à deux inconnues, c'est-à-dire savoir si le système est de Cramer. Dans ce cas, on dispose même de formules de résolution du système, dites *formules de Cramer*.

Théorème 1.62 (Formules de Cramer pour les systèmes 2×2). *Considérons des scalaires $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{K}$ et supposons que $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$. Alors le système linéaire $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{K}$ est un système de Cramer. Son unique solution est donnée par les relations suivantes, appelées* formules de Cramer *:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}.$$

Remarque 1.63. On retrouve au dénominateur de ces deux formules le déterminant de la matrice du système linéaire. Au numérateur de la formule donnant x, on reconnaît le déterminant obtenu en remplaçant la première colonne de la matrice du système par le second membre de ce système. La formule donnant y s'obtient de façon similaire en remplaçant cette fois la seconde colonne.

Démonstration. Si la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ a un déterminant non nul, alors elle est inversible. Le système considéré, qui s'écrit aussi sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$, est donc un système de Cramer. On sait par le théorème 1.55 que ce système possède pour unique solution le vecteur

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ab' - ba'} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{ab' - ba'} \begin{pmatrix} cb' - bc' \\ ac' - ca' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui conduit aux formules annoncées. Dans ce calcul, on a aussi utilisé la formule pour l'inverse de la matrice qui est donnée par le théorème 1.61. □

1.3.3 Opérations sur les matrices inversibles et opérations élémentaires

Théorème 1.64. *Soient deux matrices inversibles $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On dispose des propriétés qui suivent.*

(i). Inversibilité de l'inverse : *La matrice A^{-1} est inversible et son inverse est $(A^{-1})^{-1} = A$.*

(ii). Inversibilité d'un produit : *Le produit AB est une matrice inversible et son inverse est $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

(iii). Inversibilité des puissances : *Pour tout entier $k \geq 0$, la matrice A^k est inversible et son inverse est $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, matrice qui est notée A^{-k}. Par conséquent, $(A^{-k})^{-1} = A^k$.*

(iv). Inversibilité de la transposée : *La transposée ${}^tA$ est inversible et son inverse est $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.*

Remarque 1.65. Si les matrices A et B ne commutent pas, alors l'inverse du produit AB n'est pas donné par $A^{-1}B^{-1}$.

Démonstration. Prouvons successivement les diverses assertions :

(i). Par définition de l'inversibilité, on a $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, de sorte que la matrice A^{-1} est inversible, d'inverse A.

(ii). Pour le produit, on a $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$, ainsi que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$, de sorte que AB est bien inversible, d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

(iii). L'assertion concernant l'inversibilité des puissances se prouve par récurrence à partir de la précédente.

(iv). On a enfin ${}^tA{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n = I_n$, ainsi que ${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n = I_n$, de sorte que ${}^tA$ est inversible, d'inverse ${}^t(A^{-1})$.

On constate donc que les assertions se prouvent en utilisant uniquement la définition de l'inverse d'une matrice et, pour la dernière, une propriété basique de la transposée. □

On peut effectuer sur les lignes d'une matrice des opérations élémentaires semblables à celles appliquées aux lignes d'un système linéaire. Celles-ci sont encore notées $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. On peut en outre effectuer des opérations élémentaires du même type sur les colonnes, notées naturellement $C_i \leftrightarrow C_j$, $C_i \leftarrow \lambda C_i$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$.

L'intérêt de ce point de vue matriciel est que les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes peuvent s'interpréter comme des multiplications, respectivement à gauche et à droite, par les matrices inversibles ayant les formes particulières suivantes :

- *Permutation de deux lignes ou deux colonnes :* Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts, on note $P_{n,i,j}$ la matrice obtenue à partir de la matrice identité de taille n en permutant les lignes i et j, c'est-à-dire la matrice

$$P_{n,i,j} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

où tous les coefficients non spécifiés (pour des raisons de clarté) sont nuls. On obtient également cette matrice en permutant les colonnes i et j dans la matrice identité de taille n. On remarque que la matrice $P_{n,i,j}$ est inversible, et en fait sa propre inverse.

Alors, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on observe par le calcul que la matrice $P_{n,i,j}A$ est celle obtenue en faisant subir à la matrice A l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$.

De plus, si $i, j \in \{1, \dots, p\}$, alors $AP_{p,i,j}$ est la matrice obtenue en faisant subir à A l'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$.

- *Multiplication par un scalaire :* Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, on note $M_{n,i,\lambda}$ la matrice obtenue en remplaçant par λ le i-ième coefficient diagonal de la matrice identité de taille n, c'est-à-dire la matrice

$$M_{n,i,\lambda} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

où tous les coefficients non spécifiés sont nuls. On remarque que la matrice $M_{n,i,\lambda}$ est inversible, d'inverse égale à la matrice $M_{n,i,1/\lambda}$.
Alors, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on observe par le calcul que la matrice $M_{n,i,\lambda}A$ est celle obtenue en faisant subir à la matrice A l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
De plus, si $i \in \{1, \dots, p\}$, alors $AM_{p,i,\lambda}$ est la matrice obtenue en faisant subir à A l'opération élémentaire $C_i \leftarrow \lambda C_i$.

- *Addition d'une ligne ou colonne avec le multiple d'une autre :* Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, avec $i \neq j$, et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, on note $S_{n,i,j,\lambda}$ la matrice obtenue en remplaçant par λ le coefficient en position (i, j) dans la matrice identité de taille n, c'est-à-dire la matrice

$$S_{n,i,j,\lambda} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{colonne } j \end{array} & \end{array}$$

où tous les coefficients non spécifiés sont nuls. On voit que cette matrice est inversible, avec pour inverse la matrice $S_{n,i,j,-\lambda}$.
Alors, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on observe par le calcul que la matrice $S_{n,i,j,\lambda}A$ est celle obtenue en faisant subir à la matrice A l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
De plus, si $i, j \in \{1, \dots, p\}$, toujours avec $i \neq j$, alors $AS_{p,i,j,\lambda}$ est la matrice obtenue en faisant subir à la matrice A l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

Les observations précédentes montrent que pour déterminer si une matrice est inversible et pour calculer son inverse, on peut adopter un formalisme totalement matriciel, et s'affranchir de celui des systèmes linéaires. On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice considérée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ en multipliant celle-ci à gauche par des matrices inversibles $U_1, \dots, U_q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ parmi celles définies ci-dessus, et ce en suivant un algorithme similaire à celui du pivot de Gauss. On peut alors rencontrer l'un des deux cas suivants au cours de ces transformations :

- Si on obtient une matrice $U_q \dots U_1 A$ non inversible, c'est que la matrice de départ A n'était pas inversible. (En effet, si la matrice A était inversible, alors le théorème 1.64 assurerait que le produit $U_q \dots U_1 A$ est inversible également.)
- Si on finit par obtenir $U_q \dots U_1 A = I_n$, la matrice identité de taille n, alors en multipliant chaque membre de cette égalité par $U_1^{-1} \dots U_q^{-1}$, on observe que $A = U_1^{-1} \dots U_q^{-1}$. Ainsi, la matrice A est inversible et son inverse est simplement $A^{-1} = U_q \dots U_1$, soit encore $U_q \dots U_1 I_n$, qui est donc la matrice obtenue en appliquant à la matrice identité les mêmes opérations que celles effectuées pour transformer A. Pour présenter le calcul de l'inverse de A, on peut donc partir de la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$, lui appliquer les diverses opérations effectuées sur les lignes de A. Ce faisant, on obtient finalement la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_n & A^{-1} \end{pmatrix}$.

Dans ce qui précède, on peut tout à fait remplacer les opérations sur les lignes par des opérations sur les colonnes. Cela revient cette fois à multiplier à droite par les matrices inversibles évoquées ci-dessus, et à chercher à transformer la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix}$ en la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_n \\ A^{-1} \end{pmatrix}$.

Exemples 1.66. • La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est la matrice $A^{-1} =$

$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour le démontrer, on va effectuer des opérations élémentaires sur la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$ en suivant l'algorithme de Gauss sur le bloc correspondant à la matrice A. Ainsi, on part de

$$\begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

qu'on multiplie à gauche par $S_{3,2,1,-1}$ et $S_{3,3,1,-1}$ pour obtenir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

puis qu'on multiplie à gauche par $S_{3,3,2,-1}$ afin d'obtenir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

ce qu'on multiplie à gauche par $S_{3,1,3,1}$ et $S_{3,2,3,1}$ pour former

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \\ \end{array}$$

qu'on multiplie ensuite à gauche par $S_{3,1,2,3}$ pour avoir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

et enfin on multiplie cela à gauche par $M_{3,2,-1}$ et $M_{3,3,-1}$ pour déduire

$$\begin{pmatrix} I_n & A^{-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. En effet, en effectuant les opérations élémentaires indiquées ci-après, on remarque qu'on aboutit à une matrice non inversible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \\ \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3} L_2 \end{array}$$

1.3.4 Matrices triangulaires inversibles

On rappelle qu'une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, et que son inverse est la matrice diagonale obtenue en prenant pour coefficients diagonaux les inverses des scalaires de la matrice de départ.

On peut alors se demander s'il existe un critère de même nature concernant l'inversibilité des matrices triangulaires supérieures ou inférieures. C'est l'objet du résultat suivant.

Théorème 1.67. *Une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas, son inverse A^{-1} est aussi triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de A.*

Démonstration. On peut se restreindre au cas des matrices triangulaires supérieures, car le cas des matrices triangulaires inférieures s'en déduit en prenant la transposée. La preuve se fait par récurrence sur la taille n des matrices considérées.

Le résultat est clair pour les matrices triangulaires supérieures de taille $n = 1$, puisque celles-ci sont simplement de la forme $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{K}$. Une telle matrice est alors clairement inversible si et seulement si $a \neq 0$, et son inverse est la matrice $\begin{pmatrix} a^{-1} \end{pmatrix}$, qui est triangulaire supérieure.

Considérons maintenant un entier $n \geq 1$ tel que le théorème est vrai pour toutes les matrices triangulaires supérieures de taille n (hypothèse de récurrence), puis prenons une matrice triangulaire supérieure de taille $n+1$, notée A. Alors, on peut écrire $A = \begin{pmatrix} U & V \\ 0_{1,n} & w \end{pmatrix}$, pour un scalaire $w \in \mathbb{K}$, un vecteur colonne $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure U de taille n dont les coefficients diagonaux sont donnés par les n premiers coefficients diagonaux de A (le dernier coefficient étant w).

- Si la matrice A est inversible, alors son inverse peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \begin{pmatrix} U' & V' \\ T' & w' \end{pmatrix}$, pour un scalaire $w' \in \mathbb{K}$, un vecteur colonne $V' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, un vecteur ligne $T' \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et une matrice carrée U' de taille n. On effectue par blocs le calcul du produit $AA^{-1} = I_{n+1}$, ce qui donne
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U & V \\ 0_{1,n} & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U' & V' \\ T' & w' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} UU' + VT' & UV' + Vw' \\ wT' & ww' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
En identifiant bloc par bloc le membre de gauche et le membre de droite, on en déduit que
$$\begin{cases} ww' = 1 \\ wT' = 0_{1,n} \\ UU' + VT' = I_n. \end{cases}$$
La première identité implique que w est non nul et que w' est son inverse. La deuxième identité permet d'affirmer que le vecteur ligne T' est nul. La troisième identité s'écrit donc simplement $UU' = I_n$. En effectuant de même le produit $A^{-1}A = I_{n+1}$, on observe en particulier que $U'U = I_n$. Cela signifie que la matrice U, triangulaire supérieure de taille n, est inversible d'inverse U'. D'après l'hypothèse de récurrence, les coefficients diagonaux de U sont tous non nuls, et la matrice U' est également une matrice triangulaire supérieure. De plus, les coefficients diagonaux de U' sont les inverses des coefficients diagonaux de U. Finalement, tous les coefficients diagonaux de A sont bien non nuls, et la matrice A^{-1} est bien une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de A.
- Réciproquement, supposons que la matrice A a tous ses coefficients diagonaux non nuls. Le bloc U est alors une matrice triangulaire supérieure de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls. L'hypothèse de récurrence assure que ce bloc est une matrice inversible, et que son inverse U^{-1} est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de U. On montre alors par des calculs de produits matriciels par blocs que la matrice $\begin{pmatrix} U^{-1} & -w^{-1}U^{-1}V \\ 0_{1,n} & w^{-1} \end{pmatrix}$, multipliée par la matrice A à gauche d'une part, et à droite d'autre part, est égale à la matrice identité de taille $n+1$. Ainsi, la matrice A est bien inversible avec pour inverse la matrice décrite précédemment, matrice qui est bien triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux inverses de ceux de la matrice A.

On conclut la preuve en invoquant le principe de récurrence. □

Le théorème précédent trouve un prolongement naturel au cadre des systèmes linéaires.

Définition 1.68 (Système triangulaire)**.** On dit qu'un système linéaire est *triangulaire* si sa matrice est une matrice triangulaire. Les coefficients diagonaux du système sont les coefficients de cette matrice.

Théorème 1.69. *Tout système linéaire triangulaire à coefficients diagonaux non nuls est un système de Cramer, et possède donc une unique solution.*

CHAPITRE / 2

Déterminant d'une matrice carrée

Il existe plusieurs façons d'aborder le concept de déterminant, mais nous nous intéresserons uniquement au point de vue qui s'inscrit dans la continuité du chapitre précédent et qui est le plus facilement manipulable en pratique : celui du déterminant d'une matrice carrée.

En effet, nous avons vu dans la partie 1.3.2 le cas des matrices carrées de taille 2. Le déterminant d'une telle matrice est défini par

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

lorsque $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. De plus, le déterminant permet de caractériser l'inversibilité des matrices, puisque la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si son déterminant $ad - bc$ est non nul. Dans ce cas, on dispose même d'une formule pour la matrice inverse, et cette formule fait intervenir encore une fois le déterminant. Pour un système ayant autant d'équations que d'inconnues, le déterminant permet donc de reconnaître un système de Cramer : sa non-nullité garantit l'existence d'une unique solution pour tout second membre. Cette caractérisation concerne les matrices carrées ; un système rectangulaire peut aussi avoir une unique solution sans être un système de Cramer.

L'objet de ce chapitre est d'une part d'étendre la définition et les résultats rappelés ci-dessus au cas des matrices carrées de taille n quelconque, et d'autre part de présenter des propriétés générales du déterminant d'une matrice, ainsi que des méthodes de calcul.

2.1 Définition et premières propriétés

Le déterminant d'une matrice carrée de taille $n \geq 1$ quelconque peut se définir grâce à la *formule de Leibniz* (2.2) ci-dessous. Cette formule fait appel aux *permutations* et à leur *signature*, que nous présentons au préalable.

L'étude des permutations d'un ensemble fini $\{1, \dots, n\}$, et du *groupe symétrique de degré n* qu'elles constituent, est un vaste sujet que nous nous contentons d'effleurer ici pour le simple besoin de définir le déterminant. Le lecteur curieux trouvera dans l'annexe B quelques compléments intéressants, mais qui vont au-delà du programme de ce cours.

Définition 2.1 (Permutation, groupe symétrique).
- On appelle *permutation* de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ toute application σ de cet ensemble dans lui-même qui est *bijective*, c'est-à-dire telle que pour tout $y \in \{1, \dots, n\}$, il existe un unique $x \in \{1, \dots, n\}$ vérifiant $\sigma(x) = y$.
- On appelle *groupe symétrique de degré n*, et on note $\mathfrak{S}_n$, l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ décrit donc une façon de mettre en correspondance deux à deux les éléments de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. On présente usuellement une telle permutation sous la forme matricielle

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Le cardinal du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire le nombre de permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, est égal à $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2.1$. En effet, on peut associer n valeurs possibles à l'entier 1, puis il reste $n-1$ valeurs possibles pour associer à l'entier 2, puis $n-2$ valeurs possibles pour 3, *etc.*, jusqu'à une seule valeur restante pour associer à l'entier n.

Une caractéristique importante des permutations, utile pour la définition du déterminant est la notion de *signature*. Il y a plusieurs définitions possibles, mais la plus immédiate repose sur le *nombre d'inversions*.

Définition 2.2 (Nombre d'inversions, signature). • Le *nombre d'inversions*, noté $N(\sigma)$, d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est le nombre de couples (x, y) d'entiers dans $\{1, \dots, n\}$ tels que $x < y$ et $\sigma(x) > \sigma(y)$.

- On appelle *signature* l'application $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ définie par $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$ pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

On peut désormais donner la définition du déterminant d'une matrice carrée de taille quelconque $n \geq 1$.

Définition 2.3 (Déterminant d'une matrice carrée). Soit une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont notés $a_{i,j}$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On appelle *déterminant* de A le scalaire appartenant à $\mathbb{K}$ défini par

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}. \tag{2.2}$$

Cette formule est appelée la *formule de Leibniz*. Le déterminant de A est souvent écrit en explicitant les coefficients de la matrice de la manière suivante : pour $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, on écrit $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

La formule de Leibniz montre que le déterminant se calcule en formant tous les produits possibles des coefficients de A qui n'autorisent qu'un seul coefficient par ligne et par colonne, en affectant chaque produit du signe ± 1 suivant la façon dont les coefficients ont été choisis, et en faisant la somme de tous les produits signés ainsi obtenus.

Exemples 2.4. On observe aisément que $\det(0_n) = 0$ et $\det(I_n) = 1$. Plus généralement, dans le cas d'une matrice diagonale quelconque, on peut affirmer que pour tous scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, on a

$$\det \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 \dots \alpha_n. \tag{2.3}$$

Dans ce cas, seule la permutation identité peut donner une contribution non nulle à la somme, puisque les coefficients d'une matrice diagonale vérifient $a_{i,\sigma(i)} = 0$ dès qu'on a la condition $\sigma(i) \neq i$.

Lorsque les matrices sont de petite taille ($n \leq 3$), on peut facilement expliciter la formule de Leibniz pour leur déterminant :

- *Matrices carrées de taille* 1 : Une matrice de taille 1 est réduite à un seul coefficient $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{K}$, et son déterminant est clairement égal à la valeur de ce coefficient, soit $\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$.
- *Matrices carrées de taille* 2 : Le cas de ces matrices a été abordé dans la partie 1.3.2. En appliquant la formule de Leibniz à une telle matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, on retrouve $\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Le terme ad correspond à la permutation identité, et le terme $-bc$ correspond à la permutation qui échange 1 et 2.
- *Matrices carrées de taille* 3 : En appliquant la formule de Leibniz à une matrice carrée de taille 3 à coefficients dans $\mathbb{K}$, on obtient
$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi.$$
Pour retrouver facilement cette formule, on peut utiliser la *règle de Sarrus* suivante. On commence par recopier les deux premières colonnes de A à sa droite :
$$\begin{array}{ccc|cc} a & d & g & a & d \\ b & e & h & b & e \\ c & f & i & c & f \end{array}$$

Puis, on ajoute les produits le long des trois diagonales entre le nord-ouest et le sud-est :

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{a} & \overset{\circ}{d} & \underset{\circ}{\underline{g}} & a & d \\ b & \boxed{e} & h & \underline{b} & e \\ c & f & \boxed{i} & \overset{\circ}{c} & \underline{f} \end{array} \quad \rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccc} + & \boxed{a} & \boxed{e} & \boxed{i} \\ + & \overset{\circ}{d} & \overset{\circ}{h} & \overset{\circ}{c} \\ + & \underline{g} & \underline{b} & \underline{f} \end{array}$$

Et enfin, on retranche les produits le long des trois diagonales entre le sud-ouest et le nord-est :

$$\begin{array}{ccccc} a & d & \boxed{g} & \overset{\circ}{a} & \underline{d} \\ b & \boxed{e} & \overset{\circ}{h} & \underline{b} & e \\ \boxed{c} & \overset{\circ}{f} & \underline{i} & c & f \end{array} \quad \rightsquigarrow\rightsquigarrow\rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccc} - & \boxed{c} & \boxed{e} & \boxed{g} \\ - & \overset{\circ}{f} & \overset{\circ}{h} & \overset{\circ}{a} \\ - & \underline{i} & \underline{b} & \underline{d} \end{array}$$

Nota bene : Il faut prendre garde au fait que la règle de Sarrus ne fonctionne que pour les matrices carrées de taille 3.

Dès que la taille des matrices excède 4, on utilise rarement en pratique la formule de Leibniz pour calculer le déterminant car elle est lourde à manipuler. En effet, on rappelle que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ comporte $n!$ éléments. Ainsi, pour $n = 4$, la formule implique de calculer $4! = 24$ produits ; pour $n = 5$, on a $5! = 120$ produits à calculer, *etc.*

C'est pourquoi il est utile de disposer de propriétés et de méthodes facilitant le calcul du déterminant, en dispensant d'employer directement la formule de Leibniz. Commençons donc par énoncer les propriétés les plus importantes satisfaites par le déterminant.

Proposition 2.5 (Multilinéarité). *Soient $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, des vecteurs lignes $X_1, \dots, X_{i_0-1}, X_{i_0+1}, \dots, X_n, X, Y \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et des scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors, les déterminants des matrices basées sur ces lignes vérifient la relation*

$$\det \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{i_0-1} \\ \lambda X + \mu Y \\ X_{i_0+1} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{i_0-1} \\ X \\ X_{i_0+1} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{i_0-1} \\ Y \\ X_{i_0+1} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Démonstration. On écrit $x_{i,j}$ les coefficients de chaque vecteur ligne de la forme X_i, ainsi que χ_j et ψ_j les coefficients des vecteurs lignes X et Y, respectivement. La formule de Leibniz indique que le déterminant de la matrice formée par les lignes X_i en position $i \neq i_0$, et la ligne $\lambda X + \mu Y$ en position $i = i_0$, est égal à

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \left(\lambda \chi_{\sigma(i_0)} + \mu \psi_{\sigma(i_0)} \right) \prod_{i \neq i_0} x_{i,\sigma(i)}.$$

Cependant, par linéarité de la somme, cela s'identifie à

$$\lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \chi_{\sigma(i_0)} \prod_{i \neq i_0} x_{i,\sigma(i)} + \mu \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \psi_{\sigma(i_0)} \prod_{i \neq i_0} x_{i,\sigma(i)}.$$

La première somme correspond à la formule de Leibniz pour le déterminant de la matrice formée par les lignes X_i en position $i \neq i_0$, et la ligne X en position $i = i_0$. Et la deuxième correspond au même déterminant, avec la ligne Y au lieu de X. On en déduit comme attendu la linéarité par rapport à la ligne d'indice i_0, et ce pour tous les entiers $i_0 \in \{1, \dots, n\}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les lignes de la matrice λA sont celles de la matrice A, toutes multipliées par λ. On utilise la linéarité sur chaque ligne pour faire sortir un coefficient λ à chaque fois. Comme il y a n lignes, il sort finalement un coefficient λ^n. □

Proposition 2.6 (Caractère antisymétrique et alterné). *Soient des vecteurs lignes $X_1, \dots, X_n \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Alors, le déterminant de la matrice basée sur ces lignes change de signe quand on permute deux lignes : pour tous les choix d'indices $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ distincts,*

$$\det \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{i_1-1} \\ X_{i_1} \\ X_{i_1+1} \\ \vdots \\ X_{i_2-1} \\ X_{i_2} \\ X_{i_2+1} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{i_1-1} \\ X_{i_2} \\ X_{i_1+1} \\ \vdots \\ X_{i_2-1} \\ X_{i_1} \\ X_{i_2+1} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, si deux lignes d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont identiques, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration. On note $x_{i,j}$ les coefficients de chaque vecteur ligne X_i. La matrice basée sur les lignes X_i considérées dans leur ordre initial a donc pour coefficients $x_{i,j}$. Si on permute les lignes d'indices i_1 et i_2, les coefficients de la matrice deviennent $x_{\tau(i),j}$, où τ est la permutation qui échange les entiers i_1 et i_2, et qui laisse les autres entiers inchangés. (Une telle permutation est appelée une transposition, voir l'annexe B.) La formule de Leibniz pour cette nouvelle matrice devient

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\tau(i),\sigma(i)} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i'=1}^{n} x_{i',\sigma(\tau^{-1}(i'))} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma' \circ \tau) \prod_{i'=1}^{n} x_{i',\sigma'(i')}. \end{aligned}$$

Ci-dessus, on a procédé successivement aux changements d'indices $i' = \tau(i)$ et $\sigma' = \sigma \circ \tau^{-1}$. Cependant, dans la dernière expression, la signature vérifie $\varepsilon(\sigma' \circ \tau) = \varepsilon(\sigma')\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma')$, d'après le théorème B.9 de l'annexe B. On obtient donc l'opposé de la formule de Leibniz pour la matrice initiale : l'échange des deux lignes change bien le signe du déterminant.

Supposons maintenant qu'une matrice possède deux lignes identiques. En échangeant ces deux lignes, la matrice est inchangée, donc la valeur de son déterminant reste la même. Cependant, le point précédent implique que l'échange des deux lignes remplace la valeur du déterminant par celle opposée. La seule possibilité est que cette valeur soit nulle. □

Proposition 2.7 (Nullité sur une famille liée). *Soient des vecteurs lignes $X_1, \dots, X_n \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe une relation linéaire entre ces vecteurs, c'est-à-dire que*

$$\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n = 0$$

pour certains scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls. Alors, le déterminant de la matrice formée par ces vecteurs lignes vérifie

$$\det \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = 0.$$

Par conséquent, le déterminant d'une matrice est inchangé lorsqu'on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres.

Démonstration. Au moins un des coefficients λ_i est non nul. On peut supposer par commodité qu'il s'agit de λ_1. Il ressort clairement de la formule de Leibniz que si une matrice possède une ligne nulle, alors son déterminant est nul. On a donc par linéarité par rapport à la première ligne

$$\begin{aligned} 0 = \det &\begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \\ = \lambda_1 \det &\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \lambda_2 \det \begin{pmatrix} X_2 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \det \begin{pmatrix} X_n \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hormis éventuellement la première, toutes les matrices considérées dans cette expression possèdent deux lignes identiques. La proposition 2.6 implique que leurs déterminants sont tous nuls. Comme $\lambda_1 \neq 0$, il en résulte que le premier déterminant est nécessairement nul aussi.

Ensuite, notons $X_1', \ldots, X_n' \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ des vecteurs lignes. Ajouter au premier vecteur X_1' une combinaison linéaire des suivants revient à considérer

$$X_1'' = X_1' + \lambda_2 X_2' + \ldots + \lambda_n X_n',$$

avec $\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Comme il existe clairement une relation linéaire entre les vecteurs $X_1' - X_1''$ et $X_2', \ldots, X_n'$, le déterminant de la matrice qu'ils constituent est nul. On a donc par linéarité

$$0 = \det \begin{pmatrix} X_1' - X_1'' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_n' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_n' \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} X_1'' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_n' \end{pmatrix},$$

ce qui montre que les derniers déterminants écrits ci-dessus sont identiques.

Dans cette preuve, on a agi uniquement sur la première ligne des matrices par souci de commodité, mais on aurait pu faire de même sur les autres lignes sans aucune difficulté supplémentaire. □

Proposition 2.8 (Invariance par transposition). *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,*

$$\det({}^t A) = \det(A).$$

Démonstration. Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{i,j}$. Sa transposée ${}^t A$ a pour coefficients $a_{j,i}$. La formule de Leibniz donne donc

$$\begin{aligned} \det({}^t A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i'=1}^n a_{i',\sigma^{-1}(i')} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma'^{-1}) \prod_{i'=1}^n a_{i',\sigma'(i')} = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{i'=1}^n a_{i',\sigma'(i')} \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a procédé successivement aux changements d'indices $i' = \sigma(i)$ et $\sigma' = \sigma^{-1}$ (l'application réciproque de σ), et on a utilisé le fait qu'une permutation et son inverse on la même signature. □

Remarque 2.9. On rappelle que, lors du passage à la transposée, les colonnes deviennent les lignes. La proposition 2.8 implique que les énoncés des propositions 2.5, 2.6 et 2.7 restent vrais si on y remplace le mot "ligne" par "colonne".

Proposition 2.10 (Déterminant d'un produit). *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Démonstration. On commence par observer que les lignes de la matrice AB sont des combinaisons linéaires, dont les coefficients sont donnés par la matrice A des lignes de la matrice B. En effet, pour tout $i, k \in \{1, \dots, n\}$, si on note $(AB)_i$ la i-ième ligne de AB et B_k la k-ième ligne de B, ainsi que $a_{i,k}$ le coefficient en position (i, k) de A, on a $(AB)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} B_k$. En utilisant la multilinéarité (proposition 2.5), on observe que le déterminant de AB vérifie

$$\det\begin{pmatrix} \sum_{k_1=1}^{n} a_{1,k_1} B_{k_1} \\ \vdots \\ \sum_{k_n=1}^{n} a_{n,k_n} B_{k_n} \end{pmatrix} = \sum_{1 \le k_1, \dots, k_n \le n} a_{1,k_1} \cdots a_{n,k_n} \det\begin{pmatrix} B_{k_1} \\ \vdots \\ B_{k_n} \end{pmatrix}.$$

La somme porte sur tous les choix possibles d'indices $k_1, \dots, k_n$ entre 1 et n. Cependant, si deux de ces indices sont égaux, deux lignes dans la matrice du membre de droite sont égales, ce qui implique la nullité du déterminant correspondant (voir proposition 2.6). On peut donc considérer la somme sur les indices $k_1, \dots, k_n$ tous distincts. Cela revient à supposer que ces indices sont donnés par une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire que $k_1 = \sigma(1)$, *etc.* On en déduit que

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \det\begin{pmatrix} B_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ B_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Pour conclure, il reste à observer que le déterminant du membre de droite est égal à celui de la matrice B, multiplié par la signature $\varepsilon(\sigma)$ de la permutation σ. (En effet, d'après la proposition 2.6, cette égalité est vraie pour toutes les transpositions (c'est-à-dire les permutations qui échangent deux entiers et laissent les autres invariants, voir l'annexe B), puisque dans ce cas on échange deux lignes, ce qui multiplie le déterminant par -1, qui est bien la valeur de la signature d'une transposition. Et de plus, les transpositions engendrent par composition toutes les permutations, et la signature est multiplicative. Cela résulte des théorèmes B.7 et B.9 de l'annexe B.) D'où

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}\, \varepsilon(\sigma) \det B = \det(A)\det(B),$$

par une dernière application de la formule de Leibniz. □

Proposition 2.11 (Caractérisation de l'inversibilité). *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,*

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(A) \neq 0.$$

Dans ce cas, on a de plus

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Démonstration. Si A est inversible, $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$, ce qui donne les deux assertions. Réciproquement, supposons $\det(A) \neq 0$. L'élimination de Gauss transforme A en une matrice échelonnée $R = EA$, où E est un produit de matrices élémentaires inversibles. Les opérations sur les lignes multiplient le déterminant par un scalaire non nul, donc $\det(R) \neq 0$. Une ligne nulle rendrait le déterminant nul ; R possède donc n pivots. Comme R est carrée, la remontée de Gauss et la normalisation des pivots la transforment en I_n. Il existe ainsi un produit F de matrices élémentaires tel que $FEA = I_n$. La matrice FE étant inversible, $A = (FE)^{-1}$ est inversible. Ce raisonnement est valable sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$. □

2.2 Déterminant d'une matrice triangulaire

On rappelle que pour tous scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, le déterminant de la matrice diagonale $\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est égal au produit des coefficients diagonaux $\alpha_1 \dots \alpha_n$, voir (2.3). Ce résultat s'étend au cas des matrices triangulaires (supérieures ou inférieures), et même si ces matrices sont *a priori* plus compliquées que des matrices diagonales, seuls leurs coefficients diagonaux importent pour le calcul du déterminant.

Théorème 2.12. *Soient des scalaires $a_{i,j}$, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Alors, le déterminant des matrices triangulaires supérieures et inférieures basées sur ces coefficients est donné par la relation*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \dots a_{n,n}.$$

Démonstration. L'invariance par transposition du déterminant (voir proposition 2.8) permet de restreindre l'étude au cas des matrices triangulaires supérieures. On rappelle la formule de Leibniz

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Si une permutation σ apporte une contribution non nulle à cette somme, elle vérifie nécessairement $\sigma(i) \geq i$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$. En particulier, on a $\sigma(n) \geq n$, donc simplement $\sigma(n) = n$. Ensuite, $\sigma(n-1) \geq n-1$, mais comme n est déjà l'image de n par σ, on n'a d'autre choix que d'avoir $\sigma(n-1) = n-1$. On reproduit ce raisonnement jusqu'à se rendre compte que nécessairement, $\sigma(i) = i$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$.

Finalement, seule la permutation identité peut contribuer de manière non nulle à la somme. Cette permutation ayant une signature égale à 1, le terme correspondant est $a_{1,1} \dots a_{n,n}$, ce qui conduit à la formule annoncée. □

Exemple 2.13. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2$

Le résultat qui précède se généralise au cas des matrices triangulaires (supérieures ou inférieures) par blocs.

Théorème 2.14. *Soient des entiers strictement positifs r et $n_1, \dots, n_r$ tels que $n = n_1 + \dots + n_r$, et soient des matrices $A_{p,q} \in \mathscr{M}_{n_p,n_q}(\mathbb{K})$, pour $p, q \in \{1, \dots, r\}$. Alors, le déterminant des matrices triangulaires supérieures et inférieures par blocs basées sur ces matrices est donné par la relation*

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{r-1,r} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{r,r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{r,1} & \cdots & A_{r,r-1} & A_{r,r} \end{vmatrix}$$
$$= \det(A_{1,1}) \dots \det(A_{r,r}).$$

Remarque 2.15. Dans l'énoncé ci-dessus, les matrices $A_{i,i}$ qui constituent les blocs diagonaux sont bien des matrices carrées, et cela a donc bien un sens de considérer leur déterminant.

Démonstration. Il suffit de traiter deux blocs, puis de raisonner par récurrence. Soit $M = \begin{pmatrix} U & W \\ 0 & V \end{pmatrix}$, avec U de taille n_1 et V de taille n_2. Dans la formule de Leibniz, tout terme non nul correspond à une permutation qui envoie les n_2 derniers indices dans les n_2 dernières colonnes, car le bloc inférieur gauche est nul. Par bijectivité, les n_1 premiers indices sont alors envoyés dans les n_1 premières colonnes. Une telle permutation est la juxtaposition de deux permutations $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{n_1}$ et $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n_2}$; sa signature est $\varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$. La somme de Leibniz se factorise donc en $\det(U)\det(V)$. Le cas triangulaire inférieur s'en déduit par transposition. □

Exemple 2.16. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-14) \cdot (-1) = 14$

2.3 Calcul par la méthode du pivot

Le déterminant d'une matrice peut se calculer à l'aide de l'algorithme du pivot (voir section 1.2.3) car on comprend bien comment les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice (opérations définies dans la section 1.3.3) agissent sur le déterminant. L'algorithme permet de se ramener à une matrice triangulaire supérieure dont le déterminant peut se calculer grâce au théorème 2.12.

Théorème 2.17. *Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$, avec $i \neq j$, et soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

- *Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne modifient pas le déterminant.*
- *Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplient le déterminant par λ.*
- *Les opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplient le déterminant par -1.*

Démonstration. D'après la section 1.3.3, l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ correspond à la multiplication à gauche par $S_{n,i,j,\lambda}$, tandis que $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ correspond à la multiplication à droite par $S_{n,j,i,\lambda}$. Ces deux matrices élémentaires ont pour déterminant 1. La multiplication d'une ligne ou d'une colonne par λ fait intervenir $M_{n,i,\lambda}$, de déterminant λ, et l'échange de deux lignes ou colonnes distinctes fait intervenir $P_{n,i,j}$, de déterminant -1. La multiplicativité du déterminant (proposition 2.10) donne les trois assertions. □

Exemples 2.18. • En procédant à des opérations sur les lignes comme dans les deux premières étapes de l'algorithme du pivot, et en utilisant la formule pour le déterminant des matrices triangulaires par blocs (théorème 2.14), on calcule le déterminant suivant :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -16 & 2 & 5 \\ 0 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= 1 \cdot \begin{vmatrix} -16 & 2 & 5 \\ -6 & 4 & 3 \\ -10 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -10 & 3 \\ 4 & -6 & 3 \\ 2 & -16 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_3 \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -10 & 3 \\ 0 & 34 & -9 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= 1 \cdot \begin{vmatrix} 34 & -9 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2.
\end{aligned}$$

- Pour tous nombres complexes $a, b \in \mathbb{C}$, en utilisant des opérations élémentaires pour rendre triangulaire la matrice à traiter, on calcule

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b & b \\ b-a & a-b & 0 \\ b-a & 0 & a-b \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (b-a)^2 \begin{vmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + bL_2 + bL_3 \\ \text{(deux opérations successives)} \end{matrix}$$

$$= (b-a)^2(a+2b)(-1)^2 = (b-a)^2(a+2b).$$

2.4 Développement par rapport à une ligne ou une colonne et formule d'inversion

Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et un entier $j \in \{1, \dots, n\}$. De plus, pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $E_i \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls, sauf le i-ième qui vaut 1. On utilise la linéarité du déterminant le long de la j-ième colonne (voir proposition 2.5) afin d'exprimer le déterminant de la matrice A comme suit :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \begin{vmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots \\ \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots \\ \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}.$$

Cela provient du fait que la j-ième colonne de A peut s'écrire $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} E_i$.

On procède ensuite à des échanges de colonnes et de lignes pour amener le coefficient 1 en position (i, j) ci-dessus vers la position $(1, 1)$, tout cherchant à garder l'ordre des autres colonnes et lignes. Concrètement, on échange la j-ième colonne et la $(j-1)$-ième colonne, puis la nouvelle $(j-1)$-ième colonne et la $(j-2)$-ième colonne, *etc.*, jusqu'à amener la j-ième colonne initiale en première position. Ce faisant, on procède à $j-1$ échanges de colonnes, ce qui multiplie le déterminant par $(-1)^{j-1}$.

Ensuite, on échange la i-ième ligne et la $(i-1)$-ième ligne, puis la nouvelle $(i-1)$-ième ligne et la $(i-2)$-ième ligne, *etc.*, jusqu'à amener la i-ième ligne initiale en première position. Ce faisant, on procède à $i-1$ échanges de lignes, ce qui multiplie le déterminant par $(-1)^{i-1}$. Le déterminant dans la formule ci-dessus est donc égal à

$$(-1)^{j-1}(-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & \\ & & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

En utilisant la formule du déterminant des matrices triangulaires supérieures par blocs (théorème 2.14), cela est encore égal à $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$, où

$$\Delta_{i,j}(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & \\ & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

Pour $n = 1$, on convient que le déterminant de la matrice vide vaut 1. Il s'agit du déterminant de la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en retirant à la matrice A sa i-ième ligne et sa j-ième colonne.

Finalement, on obtient la formule du *développement par rapport à la j-ième colonne* du déterminant de la matrice :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

Cette formule permet donc de ramener le calcul du déterminant d'une matrice carrée de taille n au calcul de déterminants de matrices de taille $n-1$. Elle est particulièrement opportune lorsque la colonne par rapport à laquelle on développe contient beaucoup de coefficients nuls, puisque dans ce cas peu de déterminants de taille $n-1$ comptent effectivement dans la somme.

Définition 2.19 (Mineur, cofacteur, comatrice). Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soient deux entiers $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

- On appelle *mineur de A de position* (i, j), et on note $\Delta_{i,j}(A)$, le scalaire défini par la formule (2.4). Pour $n = 1$, on convient que le déterminant de la matrice vide vaut 1. Il s'agit du déterminant de la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en retirant à la matrice A sa i-ième ligne et sa j-ième colonne.
- On appelle *cofacteur de A de position* (i, j) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$.
- On appelle *comatrice de A*, et on note $\mathrm{com}(A)$, la matrice des cofacteurs de A, soit $\mathrm{com}(A) = ((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A))_{1\le i,j\le n}$. Il s'agit d'une matrice carrée de taille n.

Remarque 2.20. Le cofacteur de A en position (i, j) s'obtient à partir du mineur correspondant simplement en le multipliant par le signe $(-1)^{i+j}$. Un moyen pour se souvenir de la valeur de ce signe est de partir du signe $+$ en position $(1, 1)$, et d'alterner au fur et à mesure que l'on parcourt la matrice selon les lignes ou les colonnes :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.21. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le calcul mené au début de cette section peut aussi se faire en développant le déterminant par rapport à une ligne. On peut consigner les formules obtenues de manière correspondante dans l'énoncé suivant.

Théorème 2.22. *Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

- Développement par rapport à une ligne : *pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

- Développement par rapport à une colonne : *pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

Exemples 2.23. • Vérifions l'efficacité de la méthode présentée ci-dessus sur un exemple de matrice qui contient une ligne ou une colonne avec beaucoup de coefficients nuls :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -\left(-(1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) + \left(-(-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) \\
&= -(-1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-2)) + (1 \cdot 3) = 4.
\end{aligned}$$

On a développé d'abord selon la troisième colonne, puis selon la troisième ligne et la première colonne, respectivement dans les deux matrices obtenues à l'issue de la première étape.

- Pour tout entier $n \geq 1$, on veut calculer la valeur du déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

L'indice n rend compte de la taille du déterminant : il y a ici n lignes et n colonnes. Ce déterminant est dit *tridiagonal* parce que les coefficients non nuls sont placés sur la diagonale principale et les deux diagonales autour. En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant obtenu, on trouve la relation $D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$ dès que $n \geq 3$. Cela permet de montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $D_n = 2^{n+1} - 1$.

Théorème 2.24 (Formule d'inversion). *Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,*

$$A\,{}^t\operatorname{com}(A) = {}^t\operatorname{com}(A)\,A = \det(A)\,I_n.$$

En particulier, si la matrice A est inversible, son inverse est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\operatorname{com}(A).$$

Remarque 2.25. Cette formule pour l'inverse d'une matrice A n'a souvent qu'un intérêt théorique. En effet, pour l'appliquer, il faut calculer le déterminant de A et tous les cofacteurs de A, ce qui signifie calculer un déterminant de taille n et n^2 déterminants de taille $n-1$. Il est la plupart du temps beaucoup plus rapide de calculer directement l'inverse de A par exemple avec la méthode du pivot.

Démonstration. Il suffit de montrer que $A\,{}^t\operatorname{com}(A) = \det(A)\,I_n$. En effet, en remplaçant A par ${}^tA$ dans cette égalité, en utilisant le fait que $\det({}^tA) = \det(A)$ d'après la proposition 2.8, et le fait que ${}^t\operatorname{com}({}^tA) = \operatorname{com}(A)$, on en déduit que ${}^t\operatorname{com}(A)\,A = \det(A)\,I_n$.

On rappelle que la formule du développement par rapport à la i-ième ligne donne $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\Delta_{i,j}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}({}^t\operatorname{com}(A))_{j,i}$. Les coefficients diagonaux de la matrice produit $A\,{}^t\operatorname{com}(A)$ sont donc bien tous égaux à $\det(A)$, comme attendu.

Pour le calcul d'un coefficient non diagonal en position (i,j), avec $i \neq j$, notons $\widetilde{A}$ la matrice obtenue à partir de A en copiant la i-ième ligne dans la j-ième. La matrice $\widetilde{A}$ possède deux lignes identiques, donc on a $\det(\widetilde{A}) = 0$. De plus, les mineurs des matrices A et $\widetilde{A}$ qui sont positionnés sur la j-ième ligne sont identiques car ils sont obtenus par effacement de cette j-ième ligne, qui est la seule qui diffère entre A et $\widetilde{A}$. Ainsi, $\Delta_{j,k}(\widetilde{A}) = \Delta_{j,k}(A)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. En développant le déterminant de $\widetilde{A}$ par rapport à la j-ième ligne, on trouve qu'il est égal à

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}\tilde{a}_{j,k}\Delta_{j,k}(\widetilde{A}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{i,k}\Delta_{j,k}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}({}^t\operatorname{com}(A))_{k,j}.$$

Ce dernier terme est le coefficient en position (i,j) du produit matriciel $A\,{}^t\operatorname{com}(A)$. Étant égal au déterminant de la matrice $\widetilde{A}$, il est donc nul. □

Exemple 2.26. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. On appelle *déterminant de Vandermonde* des nombres complexes $x_1, \dots, x_n$ le déterminant défini par

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On a $V_1(x_1) = 1$. Pour calculer ce déterminant, on procède par récurrence en supposant la formule établie en taille n, puis en considérant le déterminant de Vandermonde de taille $n+1$ donné par

$$P(x) = V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

En développant cela par rapport à la $(n+1)$-ième ligne, on obtient

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x_1, \dots, x_n) x^j,$$

où chaque $a_j(x_1, \dots, x_n)$ désigne le cofacteur en position $(n+1, j+1)$ qui dépend uniquement des variables $x_1, \dots, x_n$, mais pas de x. Le cofacteur en position $(n+1, n+1)$ vérifie clairement $a_n(x_1, \dots, x_n) = V_n(x_1, \dots, x_n)$.

De plus, si $x = x_i$, alors les i-ième et $(n+1)$-ième lignes du déterminant définissant $P(x_i)$ sont égales, de sorte que ce déterminant est nul. Si les nombres $x_1, \dots, x_n$ sont distincts, l'hypothèse de récurrence donne $a_n = V_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Le polynôme P est donc de degré exactement n, et ces nombres en constituent les n racines distinctes. Ce polynôme admet donc pour forme factorisée $P(x) = a_n(x_1, \dots, x_n)(x - x_1) \dots (x - x_n)$. On en déduit la formule de récurrence

$$V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x) = V_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

Cette égalité reste vraie si les nombres $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas distincts : dans ce cas les deux déterminants $V_n(x_1, \dots, x_n)$ et $V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x)$ sont nuls parce qu'au moins deux de leurs lignes coincident.

À partir de la relation de récurrence obtenue ci-dessus, on peut en conclure que pour tous nombres complexes $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, on a

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

En particulier, le déterminant de Vandermonde est non nul si et seulement si les nombres $x_1, \dots, x_n$ sont distincts.

2.5 Produit scalaire et produit vectoriel

En dimension $n = 3$, le déterminant présente des liens avec les notions de *produit scalaire* et de *produit vectoriel*. On se restreint ici au cas réel, c'est-à-dire qu'on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On travaille donc dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.27 (Produit scalaire). Le *produit scalaire* de deux vecteurs X et Y dans $\mathbb{R}^3$ est le réel défini par $X \cdot Y = {}^tXY$, soit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

où x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 désignent les coordonnées des vecteurs X et Y.

On observe sur cette définition que le produit scalaire est bilinéaire (c'est-à-dire linéaire en chacune des deux variables X et Y), symétrique ($X \cdot Y = Y \cdot X$) et qu'il est lié à la norme (longueur) des vecteurs par la relation $\|X\|^2 = X \cdot X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Le produit scalaire se rapporte aux notions d'orthogonalité, de colinéarité et d'angles. Tout d'abord, deux vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^3$ sont dits *orthogonaux* (ou *perpendiculaires*) si leur produit scalaire est nul : $X \cdot Y = 0$. Cela signifie soit qu'un des vecteurs au moins est nul, soit qu'ils forment un angle droit.

Ensuite, on peut montrer que deux vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^3$ sont *colinéaires*, c'est-à-dire forment une famille liée, si et seulement si $|X \cdot Y| = \|X\| \cdot \|Y\|$, où $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ désigne comme ci-dessus la norme du vecteur X, et $\|Y\|$ est défini de même.

Enfin, si les deux vecteurs X et Y ne sont pas colinéaires, on sait que $\mathrm{Vect}(X,Y)$ est un plan géométrique. L'*angle géométrique* $\widehat{(X,Y)}$ défini par les vecteurs X et Y est alors caractérisé par $\cos\widehat{(X,Y)} = \dfrac{X\cdot Y}{\|X\|\cdot\|Y\|}$.

Exemple 2.28. Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux deux à deux, et sont tous de norme égale à 1. De plus, ils forment une famille libre et l'espace vectoriel qu'ils engendrent est $\mathbb{R}^3$. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$ qui est dite *orthonormée* ou *orthonormale*. Il s'agit de la *base canonique*.

Grâce aux notions de déterminant et de produit scalaire, on peut définir simplement la notion de produit vectoriel qui a une utilité notamment en physique (électromagnétisme...).

Définition 2.29 (Produit mixte, produit vectoriel).

- Soient trois vecteurs colonnes $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$. On appelle *produit mixte* de X, Y, Z, et on note $[X,Y,Z]$ le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}$, soit

$$\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\right] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

  où $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ sont les coordonnées de X, Y, Z.

- Soient deux vecteurs $X, Y \in \mathbb{R}^3$. On appelle *produit vectoriel* de X et Y, et on note $X \wedge Y$, le vecteur de $\mathbb{R}^3$ caractérisé par

$$\forall Z \in \mathbb{R}^3 \qquad (X \wedge Y)\cdot Z = [X,Y,Z], \tag{2.5}$$

  c'est-à-dire le vecteur de coordonnées données par

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Pour déduire (2.6) de (2.5), il suffit de prendre pour vecteur Z les vecteurs de la base canonique considérée dans l'exemple précédent. En effet, par exemple le produit scalaire avec le premier vecteur de la base canonique donne la valeur de la première composante du produit vectoriel, soit

$$\begin{aligned}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = x_2y_3 - x_3y_2,\end{aligned}$$

en développant par rapport à la dernière colonne dans ce dernier déterminant.

Pour se souvenir de ces formules, on peut aussi utiliser la méthode suivante. On recopie les deux premières composantes de chaque vecteur en-dessous de ceux-ci, puis on calcule les déterminants des matrices de taille 2 situées juste en-dessous de la ligne de la composante considérée :

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ \boxed{\begin{matrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix}} \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} \xrightarrow{\det} x_2y_3 - x_3y_2 \qquad \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \boxed{\begin{matrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{matrix}} \\ x_2 & y_2 \end{matrix} \xrightarrow{\det} x_3y_1 - x_1y_3 \qquad \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \boxed{\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}} \end{matrix} \xrightarrow{\det} x_1y_2 - x_2y_1$$

Géométriquement, si les vecteurs X et Y ne sont pas colinéaires, leur produit vectoriel $X \wedge Y$ est l'unique vecteur qui vérifie les propriétés suivantes : il est orthogonal aux deux vecteurs de départ, sa norme est donnée par $\|X \wedge Y\| = \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \sin \widehat{(X, Y)}$, et les trois vecteurs $X, Y, X \wedge Y$ définissent une base directe (c'est-à-dire orientée comme le pouce, l'index et le majeur de la main droite).

On peut montrer à partir de la définition que le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition des vecteurs ($(X + X') \wedge Y = X \wedge Y + X' \wedge Y$), compatible avec la multiplication par un scalaire ($\lambda(X \wedge Y) = (\lambda X) \wedge Y$) et antisymétrique ($X \wedge Y = -Y \wedge X$).

Exemple 2.30. On peut retrouver le troisième vecteur de la base canonique comme produit vectoriel des deux premiers. En effet, on calcule aisément

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

CHAPITRE / 3

Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée

Les matrices ont été utilisées dans les chapitres précédents essentiellement pour leur rôle dans le codage et la résolution des systèmes linéaires, soit pour répondre à la question de l'existence et de la détermination d'un vecteur $X \in \mathbb{K}^p$ vérifiant $AX = B$, lorsque $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Cela revient à étudier l'*image* de l'application $X \mapsto AX$, c'est-à-dire à l'ensemble des vecteurs qu'elle permet d'atteindre.

L'application définie à partir d'une matrice comme ci-dessus vérifie une propriété particulièrement importante : elle est *linéaire*. Cela signifie que pour toute combinaison linéaire $\lambda X + \mu Y$ de vecteurs $X, Y \in \mathbb{K}^p$ avec des coefficients $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY$. Ainsi, l'image de la combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Lorsque la matrice est carrée ($p = n$), pour mieux comprendre comment agit une telle application sur les vecteurs de l'espace, on peut donc chercher des directions privilégiées où elle se comporte comme une dilatation, et lorsqu'il existe une base de vecteurs propres, décrire entièrement son action à partir de ces dilatations. De telles directions sont orientées par les *vecteurs propres* et les coefficients de dilatation correspondants sont les *valeurs propres*.

3.1 Spectre et polynôme caractéristique

Les notions de vecteurs et valeurs propres, ainsi que la notion de spectre d'une matrice carrée de taille $n \geq 1$ sont définies comme suit.

Définition 3.1 (Valeur propre, vecteur propre, spectre). Soit une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est appelé *valeur propre* de la matrice A s'il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $AX = \alpha X$.
- Un tel vecteur X est appelé *vecteur propre* de la matrice A attaché à la valeur propre α.
- On appelle *spectre* de la matrice A, et on note $\mathrm{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.

Remarque 3.2. Il découle de cette définition que toute combinaison linéaire non nulle de vecteurs propres attachés à une même valeur propre est aussi un vecteur propre attaché à cette valeur propre.

Le calcul des valeurs propres peut se mener grâce à l'observation suivante. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire. Par définition, α est valeur propre de la matrice A si et seulement si il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n$ tel que $AX = \alpha X$, c'est-à-dire tel que $(A - \alpha I_n)X = 0$. Pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, le système $BX = 0$ admet une solution non nulle si et seulement si B n'est pas inversible. En effet, si B est inversible, multiplier par B^{-1} impose $X = 0$. Réciproquement, si B n'est pas inversible, une forme échelonnée de B ne peut avoir n pivots, car la remontée permettrait alors de la transformer en I_n par des opérations inversibles. Il y a donc au moins une inconnue libre dans le système homogène, ce qui fournit une solution non nulle. D'après la proposition 2.11, cette condition équivaut à $\det(B) = 0$. On en déduit que α est valeur propre de la matrice A si et seulement si $\det(A - \alpha I_n) = 0$. Déterminer les valeurs propres d'une matrice revient donc à résoudre cette équation.

En notant comme d'habitude $a_{i,j}$, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, les coefficients de la matrice A, on obtient

$$\det(A - \alpha I_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \alpha & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \alpha & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - \alpha & & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} - \alpha \end{vmatrix}.$$

On peut se convaincre en revenant à la définition du déterminant avec la formule de Leibniz (2.2) que cette quantité est une fonction polynomiale de degré n de la variable α.

Définition 3.3 (Polynôme caractéristique). Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *polynôme caractéristique* de la matrice A et on note $\chi_A(x)$ le polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{K} \qquad \chi_A(x) = \det(A - xI_n).$$

On rappelle qu'une *racine* d'un polynôme P est une solution de l'équation $P(x) = 0$. Le raisonnement ci-dessus démontre donc le résultat suivant.

Proposition 3.4. *Le spectre d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est égal à l'ensemble des racines dans $\mathbb{K}$ de son polynôme caractéristique χ_A.*

Le polynôme caractéristique et le spectre d'une matrice vérifient de plus les propriétés suivantes.

Proposition 3.5. *Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *Le polynôme caractéristique χ_A a pour degré n exactement.*
- *Le spectre $\mathrm{Sp}(A)$ comporte au plus n éléments ; il y a donc au plus n valeurs propres distinctes.*
- *Le polynôme caractéristique χ_A admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le spectre $\mathrm{Sp}(A)$ est donc non vide. Cependant, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le spectre $\mathrm{Sp}(A)$ peut être vide, c'est-à-dire que A peut n'admettre aucune valeur propre.*

Démonstration. • Le fait que χ_A ait pour degré n exactement se voit en écrivant la formule de Leibniz (2.2) qui définit le déterminant

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{i,\sigma(i)} - x\delta_{i,\sigma(i)}).$$

Ici, $a_{i,j}$ désigne comme d'habitude le coefficient de la matrice A en position (i, j), et $\delta_{i,j}$ est le *symbole de Kronecker*, égal à 1 si $i = j$ et à 0 sinon. (Il s'agit du coefficient en position (i, j) de la matrice identité.) Chaque terme non nul de la somme est un polynôme de degré égal au nombre de points fixes de la permutation σ considérée, c'est-à-dire au nombre d'entiers $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\sigma(i) = i$. Il y a donc un seul terme de degré n, qui correspond à la permutation identité. Les autres termes sont de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

- Le polynôme caractéristique χ_A a un degré exactement égal à n, donc il a au plus n racines. La proposition 3.4 implique que le spectre de A comporte au plus n éléments.
- Tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$, mais pas forcément dans $\mathbb{R}$. C'est en particulier le cas du polynôme caractéristique χ_A. La proposition 3.4 permet de conclure que $\mathrm{Sp}(A)$ est non vide si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais peut très bien être vide si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. □

Exemples 3.6. • Pour tous scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, si on note A la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors $A - xI_n = \mathrm{diag}(\alpha_1 - x, \dots, \alpha_n - x)$ pour tout scalaire $x \in \mathbb{K}$, et donc

$$\chi_A(x) = \det \mathrm{diag}(\alpha_1 - x, \dots, \alpha_n - x) = (\alpha_1 - x) \dots (\alpha_n - x),$$

d'après la formule (2.3). On en déduit directement que le spectre de la matrice A vérifie $\mathrm{Sp}(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, avec éventuellement des redondances parmi les valeurs α_i. De plus, en notant $E_i \in \mathbb{K}^n$ le vecteur colonne dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ième qui vaut 1, on observe que $AE_i = \alpha_i E_i$. Le vecteur E_i est donc un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre α_i.

- Le théorème 2.12 montre que le résultat précédent reste valable pour les matrices triangulaires. En effet, si A désigne une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) dont les coefficients diagonaux sont des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, alors $A - xI_n$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $\alpha_1 - x, \dots, \alpha_n - x$. Ainsi, le polynôme caractéristique de A est encore $(\alpha_1 - x) \dots (\alpha_n - x)$, ce qui montre que le spectre de A est à nouveau donné par $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Cependant, les vecteurs E_i introduits précédemment ne sont plus nécessairement ici des vecteurs propres pour la matrice A.

- À partir de scalaires quelconques $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{K}$, on considère le polynôme $P(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + x^n$. Alors, le polynôme caractéristique de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -c_{n-2} \\ (0) & & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

est donné par $\chi_C(x) = (-1)^n P(x)$. Cette matrice est appelée la *matrice compagnon* du polynôme P. Pour $n = 1$, on a $C = (-c_0)$ et $\chi_C(x) = -c_0 - x = -P(x)$. Pour $n \geq 2$, le résultat se montre par récurrence à partir du développement du déterminant de la matrice $C - xI_n$ selon la première ligne, soit

$$\begin{aligned} \chi_C(x) = \det(C - xI_n) &= \begin{vmatrix} -x & & (0) & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -x & -c_{n-2} \\ (0) & & 1 & -x - c_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= -x \begin{vmatrix} -x & & (0) & -c_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & -x & -c_{n-2} \\ (0) & & 1 & -x - c_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^n c_0 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -x & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -x \\ (0) & & & 1 \end{vmatrix}}_{=1} \end{aligned}$$

et de l'utilisation de l'hypothèse de récurrence sur le déterminant constituant le premier terme ci-dessus. Ainsi, il ressort de cet exemple que tout polynôme de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant $(-1)^n$ est le polynôme caractéristique d'au moins une matrice carrée de taille n.

- Les matrices compagnons fournissent de nombreux exemples concrets. Ainsi, la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice compagnon du polynôme $x^3 - 2x^2 - x + 2$, et le résultat ci-dessus montre que le polynôme caractéristique de B est $\chi_B(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$. La forme factorisée de ce polynôme est $\chi_B(x) = -(x-1)(x+1)(x-2)$. Le spectre de la matrice B est donné par l'ensemble des racines du polynôme, soit $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1, 2\}$.

La proposition 3.4 et les exemples précédents montrent que déterminer concrètement le spectre d'une matrice revient à calculer son polynôme caractéristique, donc un déterminant grâce aux méthodes développées dans le chapitre 2, puis à chercher les racines de ce polynôme. Il est donc utile de rappeler les diverses stratégies à mettre en œuvre pour déterminer les racines d'un polynôme. C'est l'objet de l'annexe A.

3.2 Espaces propres

En ajoutant le vecteur nul aux vecteurs propres associés à une valeur propre donnée, on obtient ce qu'on appelle un *espace propre*.

Définition 3.7 (Espace propre). Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit une valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On appelle *espace propre* de la matrice A associé à la valeur propre λ l'ensemble défini par

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = \lambda X\}.$$

Cet ensemble est donc constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de la matrice A associés à la valeur propre λ.

Si λ désigne une valeur propre de la matrice A, alors l'espace propre $E_\lambda(A)$ est aussi l'ensemble des vecteurs $X \in \mathbb{K}^n$ qui sont solution du système linéaire $(A - \lambda I_n)X = 0$. De plus, ce système admet des solutions non nulles

par définition du fait que λ est valeur propre. On a vu à la section 1.2.4 que dans ce cas, il existe une famille libre de vecteurs $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_r).$$

Ces vecteurs sont des vecteurs propres de la matrice A associés à la valeur propre λ et ils forment une base de l'espace propre $E_\lambda(A)$. Le choix de ces vecteurs $X_1, \dots, X_r$ n'est pas unique, mais en revanche on peut montrer que l'entier r l'est. Cet entier est appelé *dimension* de l'espace propre $E_\lambda(A)$, et on note $r = \alpha_\lambda = \dim E_\lambda(A)$.

Proposition 3.8. *Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit une valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Comme λ est racine du polynôme caractéristique χ_A, il existe un entier $\beta_\lambda \geq 1$ le plus grand possible, appelé* multiplicité *de λ, tel que $\chi_A(x) = (x-\lambda)^{\beta_\lambda} Q(x)$, avec Q un polynôme. Alors, on a $1 \leq \alpha_\lambda \leq \beta_\lambda$.*

Démonstration. Posons $r = \dim E_\lambda(A) \geq 1$. Complétons une base de cet espace propre en une base de $\mathbb{K}^n$, et notons P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de cette base. Alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda I_r & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \qquad \chi_A(x) = (\lambda - x)^r \det(C - xI_{n-r}).$$

Si $r = n$, la dernière expression se lit simplement $(\lambda - x)^n$. Le facteur $(x-\lambda)^r$ divise donc χ_A, ce qui prouve $r \leq \beta_\lambda$. □

Remarque 3.9. On note $\#S$ le *cardinal* d'un ensemble fini S, c'est-à-dire son nombre d'éléments. Puisqu'il s'agit des racines du polynôme caractéristique, les valeurs propres λ ont des multiplicités β_λ dont la somme vaut au plus le degré du polynôme, à savoir n. Il ressort de la proposition 3.8 que

$$\#\,\mathrm{Sp}(A) \leq \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \alpha_\lambda \leq \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \beta_\lambda \leq n. \tag{3.1}$$

Proposition 3.10. *Les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Plus précisément, si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont distinctes et $X_j \in E_{\lambda_j}(A)$, alors*

$$X_1 + \cdots + X_r = 0 \quad \Longrightarrow \quad X_1 = \cdots = X_r = 0.$$

En particulier, deux espaces propres distincts ont pour intersection $\{0\}$.

Démonstration. Fixons j. Appliquons à la relation $\sum_k X_k = 0$ la matrice $\prod_{k \neq j}(A - \lambda_k I_n)$. Tous les termes sauf celui d'indice j s'annulent, d'où

$$\left(\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)\right) X_j = 0.$$

Le scalaire est non nul, donc $X_j = 0$. Ceci vaut pour chaque j. □

En réunissant des bases des espaces propres distincts, on obtient donc une famille libre. La seule nullité des intersections deux à deux ne suffirait pas à prouver ce résultat pour une famille quelconque de sous-espaces.

3.3 Diagonalisation

L'étude des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée permet dans les bons cas de la présenter comme une matrice diagonale après un changement de base approprié. Dans ce cas, la matrice est *semblable* à une matrice diagonale et elle est dite *diagonalisable*.

Définition 3.11. Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Deux matrices semblables sont la représentation d'une même *transformation linéaire* de $\mathbb{K}^n$, chacune dans une base donnée. Elles partagent donc de nombreuses propriétés. En particulier, on peut voir facilement que si $B = P^{-1}AP$, alors on a $B - xI_n = P^{-1}(A - xI_n)P$ pour tout scalaire $x \in \mathbb{K}$, de sorte que $\chi_A(x) = \chi_B(x)$, d'après les propositions 2.10 et 2.11. Deux matrices semblables ont donc le même polynôme caractéristique, et par conséquent le même spectre. De plus, si on a $BX = \lambda X$, alors $A(PX) = \lambda(PX)$. Les vecteurs propres des deux matrices A et B associés à une même valeur propre sont donc en correspondance via la matrice P. Il en résulte que les espaces propres associés à une même valeur propre pour chacune des matrices sont en correspondance via P. En particulier, si A et B sont deux matrices semblables, on a donc $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$, et pour toute valeur propre λ, les espaces propres $E_\lambda(A)$ et $E_\lambda(B)$ ont même dimension.

Définition 3.12. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Remarque 3.13. Grâce aux propositions 1.29, 2.10 et 2.11, on déduit aisément de (3.2) une expression de la trace et du déterminant de la matrice A en fonction des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. En effet, en notant Δ la matrice $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on observe que $A = P\Delta P^{-1}$, ce qui donne

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P\Delta P^{-1}) = \mathrm{tr}(P^{-1}P\Delta) = \mathrm{tr}(\Delta) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \\ \det(A) = \det(P\Delta P^{-1}) = \det(P)\det(\Delta)\dfrac{1}{\det(P)} = \det(\Delta) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n. \end{cases}$$

Le résultat suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour garantir qu'une matrice est diagonalisable. On rappelle que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, la dimension de l'espace propre $E_\lambda(A)$ est notée α_λ.

Théorème 3.14. *Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i). la matrice A est diagonalisable ;

(ii). le polynôme caractéristique de la matrice A peut s'écrire sous la forme scindée $\chi_A(x) = (-1)^n \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (x - \lambda)^{\alpha_\lambda}$.

(iii). les espaces propres de la matrice A vérifient $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \alpha_\lambda = n$.

Démonstration. • ((i).)⇒((ii).) : La matrice A est diagonalisable, donc il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit la matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, voir (3.2). On a remarqué précédemment que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, si bien que $\chi_A(x) = \chi_\Delta(x)$ pour tout $x \in \mathbb{K}$. Cependant, on sait que $\chi_\Delta(x) = (\lambda_1 - x) \dots (\lambda_n - x)$. On peut donc écrire le polynôme caractéristique de A sous la forme $\chi_A(x) = (-1)^n \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (x - \lambda)^{\beta_\lambda}$, où le spectre est donné par $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, et chaque β_λ désigne la multiplicité de la valeur propre λ, c'est-à-dire le nombre de fois qu'elle apparaît dans cette liste. Supposons pour fixer les idées qu'une valeur propre donnée λ corresponde aux β_λ premiers coefficients diagonaux de la matrice Δ. En désignant par X_i le vecteur colonne de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf la i-ième qui vaut 1, on voit que les vecteurs $X_1, \dots, X_{\beta_\lambda}$ forment une famille libre et vérifient tous $\Delta X_i = \lambda X_i$. On en déduit que les vecteurs PX_i forment aussi une famille libre et vérifient tous $A(PX_i) = \lambda(PX_i)$. On a là une famille libre constituée de β_λ vecteurs propres de la matrice A associés à la valeur propre λ. Ainsi, la dimension de l'espace propre correspondant vérifie $\dim E_\lambda(A) = \alpha_\lambda \geq \beta_\lambda$. On conclut en se souvenant que l'inégalité réciproque est donnée par la proposition 3.8.

- ((ii).)⇒((iii).) : On remarque que si le polynôme caractéristique s'écrit $\chi_A(x) = (-1)^n \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (x-\lambda)^{\alpha_\lambda}$, son degré vérifie $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \alpha_\lambda$.
- ((iii).)⇒((i).) : Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on note $X_1^{(\lambda)}, \dots, X_{\alpha_\lambda}^{(\lambda)}$ une base de l'espace propre $E_\lambda(A)$. D'après la proposition 3.10, en regroupant tous les vecteurs $X_i^{(\lambda)}$, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $i \in \{1, \dots, \alpha_\lambda\}$, on obtient une famille libre de $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \alpha_\lambda = n$ vecteurs. La matrice, notée P, dont les colonnes sont ces vecteurs est alors une matrice carrée de taille n qui est inversible. On peut alors vérifier que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale avec pour coefficients diagonaux les valeurs propres λ écrites autant de fois que α_λ. La matrice A est donc diagonalisable, puisqu'on obtient (3.2). □

Remarque 3.15. En inspectant la preuve du théorème 3.14, on observe que si la matrice A est diagonalisable, alors dans l'écriture (3.2), les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont donnés par les valeurs propres de A, et la matrice P a pour colonnes les vecteurs propres de A associées. Il faut toutefois faire attention à l'ordre d'écriture des colonnes : la j-ième colonne de P est un vecteur propre associé à la valeur propre en j-ième position diagonale.

On peut déduire du théorème 3.14 une condition suffisante simple portant sur le spectre pour déterminer si une matrice est diagonalisable.

> **Corollaire 3.16.** *Pour qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ soit diagonalisable, il suffit que son spectre $\mathrm{Sp}(A)$ soit formé de n valeurs propres distinctes, ou de manière équivalente que son polynôme caractéristique possède n racines distinctes dans $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Si le spectre $\mathrm{Sp}(A)$ est formé de n valeurs propres distinctes, alors son cardinal est $\#\,\mathrm{Sp}(A) = n$, si bien que les inégalités dans (3.1) sont des égalités. Ainsi, $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \alpha_\lambda = n$, et on conclut grâce au théorème 3.14. □

Exemples 3.17. • On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On commence par calculer le polynôme caractéristique de cette matrice, soit

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} -x & 2 & -1 \\ 3 & -2-x & 0 \\ -2 & 2 & 1-x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-x & 2 & -1 \\ 1-x & -2-x & 0 \\ 1-x & 2 & 1-x \end{vmatrix}_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} \\
&= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2-x & 0 \\ 1 & 2 & 1-x \end{vmatrix} \\
&= (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4-x & 1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix}_{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1}} \\
&= (1-x) \begin{vmatrix} -4-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(-4-x)(2-x).
\end{aligned}$$

Les racines du polynôme caractéristique χ_A sont donc les réels -4, 1 et 2, et constituent le spectre de la matrice A. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-4, 1, 2\}$.

Comme la matrice est de taille 3 et qu'il y a trois valeurs propres distinctes, le corollaire 3.16 implique que la matrice A est diagonalisable. Pour la diagonaliser, on détermine des vecteurs propres associés à chacune

des valeurs propres. Pour cela, on résout successivement les trois systèmes linéaires $AX = -4X$, $AX = X$ et $AX = 2X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$. On note u, v, w les composantes de l'inconnue X.

- *Espace propre associé à la valeur propre* -4 : le système linéaire $AX = -4X$ s'écrit

$$\begin{cases} 2v - w = -4u \\ 3u - 2v = -4v \\ -2u + 2v + w = -4w \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -w & +4u & +2v & = & 0 \\ 5w & -2u & +2v & = & 0 \\ & 3u & +2v & = & 0 \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -w & +4u & +2v & = & 0 \\ & 18u & +12v & = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1 \\ & 3u & +2v & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -w & +2v & +4u & = & 0 \\ & 2v & +3u & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -w & & +u & = & 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & 2v & +3u & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} w = u \\ v = -\dfrac{3}{2}u. \end{cases}$$

Il en ressort que l'espace propre associé à la valeur propre -4 est donné par exemple par $E_{-4}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- *Espace propre associé à la valeur propre* 1 : le système linéaire $AX = X$ s'écrit

$$\begin{cases} 2v - w = u \\ 3u - 2v = v \\ -2u + 2v + w = w \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -u & +2v & -w & = & 0 \\ 3u & -3v & & = & 0 \\ -2u & +2v & & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -w & -u & +2v & = & 0 \\ & u & -v & = & 0 \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -w & & +v & = & 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ & u & -v & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} w = v \\ u = v. \end{cases}$$

Il en ressort que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est donné par exemple par $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- *Espace propre associé à la valeur propre* 2 : le système linéaire $AX = 2X$ s'écrit

$$\begin{cases} 2v - w = 2u \\ 3u - 2v = 2v \\ -2u + 2v + w = 2w \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2u & +2v & -w & = & 0 \\ 3u & -4v & & = & 0 \\ -2u & +2v & -w & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -w & -2u & +2v & = & 0 \\ & 3u & -4v & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -w & & -\frac{2}{3}v & = & 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2 \\ & 3u & -4v & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} w = -\frac{2}{3}v \\ u = \frac{4}{3}v. \end{cases}$$

Il en ressort que l'espace propre associé à la valeur propre 2 est donné par exemple par $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On introduit ensuite la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, qui est formée à partir de colonnes prises chacune dans l'espace propre associé à la valeur propre -4, 1 et 2, respectivement. On sait alors que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \textit{ i.e. } A = P\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Pour terminer l'étude, on peut calculer l'inverse de la matrice P, puisqu'elle apparaît dans la formule ci-dessus. Dans ce but, on applique l'algorithme du pivot à la matrice par blocs $\begin{pmatrix} P & I_3 \end{pmatrix}$, comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 9 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 5/2 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1/3 & -2/5 & 1/15 \\ 0 & 5/2 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{5}L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & -1/5 & 1/30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 0 & -1/6 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{5}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{6}L_3 \end{array}$$

La matrice par blocs obtenue à l'issue de l'algorithme est $\begin{pmatrix} I_3 & P^{-1} \end{pmatrix}$, si bien que finalement $P^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

- On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. On commence par calculer le polynôme caractéristique de cette matrice, soit

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ -2 & 2-x & 3 \\ 2 & -1 & -2-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ -1 & -2-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)\left((2-x)(-2-x)+3\right) = (1-x)(x^2-1) \\ &= -(x-1)^2(x+1).\end{aligned}$$

Les racines du polynôme caractéristique χ_A sont donc les réels -1 et 1, avec pour multiplicité 1 et 2, respectivement. Elles constituent le spectre de la matrice A. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

Comme la matrice est de taille 3 et qu'il n'y a deux valeurs propres distinctes, le corollaire 3.16 ne s'applique pas dans le cas présent, et il faut revenir au théorème 3.14 pour déterminer si la matrice A est diagonalisable. Cela revient ici à vérifier si l'espace propre associé à la valeur propre de multiplicité 2 est bien de dimension 2. Pour cela, on cherche les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres. Concrètement, on résout successivement les deux systèmes linéaires $AX = -X$ et $AX = X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$. On note u, v, w les composantes de l'inconnue X.

- *Espace propre associé à la valeur propre* -1 : le système linéaire $AX = -X$ s'écrit

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u = -u \\ -2u + 2v + 3w = -v \\ 2u - v - 2w = -w \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} 2u & & & = & 0 \\ -2u & +3v & +3w & = & 0 \\ 2u & -v & -w & = & 0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} u = 0 \\ w = -v. \end{cases}\end{aligned}$$

Il en ressort que l'espace propre associé à la valeur propre -1 est donné par exemple par $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- *Espace propre associé à la valeur propre* 1 : le système linéaire $AX = X$ s'écrit

$$\begin{aligned} &\begin{cases} u = u \\ -2u + 2v + 3w = v \\ 2u - v - 2w = w \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} -2u & +v & +3w & = & 0 \\ 2u & -v & -3w & = & 0 \end{cases} \\ \iff &\quad w = \frac{1}{3}(2u - v).\end{aligned}$$

Il en ressort que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est donné par exemple par $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On observe alors que la somme des dimensions des espaces propres est égale à $1 + 2 = 3$, donc le théorème 3.14 assure que la matrice A est diagonalisable. On introduit ensuite la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, formée à partir

de vecteurs colonnes engendrant les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1. On sait alors que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ i.e. } A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pour terminer l'étude, on peut calculer l'inverse de la matrice P, puisqu'elle apparaît dans la formule ci-dessus. Dans ce but, on applique l'algorithme du pivot à la matrice par blocs $\begin{pmatrix} P & I_3 \end{pmatrix}$, comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -2/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + \tfrac{1}{3}L_2$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & -2/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 + \tfrac{3}{2}L_3$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & -2/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + \tfrac{1}{3}L_2$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 3/2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \tfrac{3}{2}L_3 \end{array}$$

La matrice par blocs obtenue à l'issue de l'algorithme est $\begin{pmatrix} I_3 & P^{-1} \end{pmatrix}$, si bien que finalement $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarques 3.18. • Il existe des matrices qui ne sont pas diagonalisables. En effet, considérons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On voit facilement que son polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = (x-1)^2$, et donc que son spectre se réduit à la seule valeur propre 1, qui a pour multiplicité 2. Si la matrice A était diagonalisable, elle serait semblable à la seule matrice diagonale de taille 2 possible basée sur la valeur propre 1, c'est-à-dire la matrice identité I_2. Ainsi, il existerait une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = I_2$, soit encore $A = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, ce qui est faux puisque A n'est pas elle-même la matrice identité.

- Une matrice A est dite *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice triangulaire supérieure. On peut montrer que c'est le cas si le polynôme caractéristique de la matrice A peut s'écrire sous la forme scindée $\chi_A(x) = (-1)^n \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (x-\lambda)^{\beta_\lambda}$ —sans nécessairement que $\beta_\lambda = \alpha_\lambda$, la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre λ. En particulier, c'est toujours le cas quand on mène l'étude dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est-à-dire si l'on autorise des valeurs propres et vecteurs propres complexes. Ainsi, toute matrice carrée est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.

CHAPITRE / 4

Équations différentielles linéaires du second ordre

Le but de ce chapitre est l'étude des *équations différentielles* de la forme

$$ay'' + by' + cy = f, \tag{4.1}$$

où f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ (ensemble toujours égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) continue sur un intervalle ouvert I non vide de $\mathbb{R}$, et a, b, c sont trois nombres dans $\mathbb{K}$, non tous nuls. *Intégrer*, ou *résoudre*, l'équation différentielle (4.1), c'est déterminer toutes les fonctions $x \mapsto y(x)$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur I lorsque $a \neq 0$ (de classe $\mathscr{C}^1$ si $a = 0$ et $b \neq 0$, et continues si $a = b = 0$), telles que (4.1) soit satisfaite pour tout $x \in I$.

Si $a = 0$, l'étude est assez élémentaire. En effet :

- si $a = b = 0$, alors l'équation (4.1) se résume à $cy = f$, et possède pour unique solution la fonction $y = f/c$;
- si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors l'équation (4.1) devient $by' + cy = f$, et ses solutions sont les fonctions $y(x) = \left(\lambda + \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)}{b}\, \mathrm{e}^{ct/b}\, \mathrm{d}t\right) \mathrm{e}^{-cx/b}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque, et $x_0 \in I$ fixé.

Par conséquent, on se concentrera dans ce chapitre sur le cas où $a \neq 0$, c'est-à-dire le cas des équations du *second ordre*.

4.1 Généralités

4.1.1 Structure de l'ensemble des solutions

On associe à l'équation (4.1) l'équation différentielle *homogène* suivante :

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4.2}$$

obtenue en remplaçant par 0 la fonction f figurant dans le second membre. Le résultat suivant relie alors l'ensemble, noté $\mathcal{S}$, des solutions de l'équation différentielle (4.1) à l'ensemble, noté $\mathcal{S}_H$, des solutions de (4.2). Il est semblable au théorème 1.32 concernant les systèmes linéaires.

> **Théorème 4.1** (Structure de l'ensemble des solutions). *Soit y_0 une solution quelconque de l'équation différentielle (4.1), dite* solution particulière, *alors on a $\mathcal{S} = y_0 + \mathcal{S}_H$, c'est-à-dire que toute solution y de (4.1) s'écrit sous la forme $y = y_0 + y_H$, où y_H est une solution de (4.2).*

Démonstration. La preuve suit les mêmes lignes que celle du théorème 1.32. Soit y_0 une solution particulière, et soit y une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle I. Alors, y est solution de l'équation (4.1) si et seulement si on a sur l'intervalle I,

$$\begin{aligned} & ay'' + by' + cy = f \\ \iff\ & ay'' + by' + cy = ay_0'' + by_0' + cy_0 \\ \iff\ & ay'' - ay_0'' + by' - by_0' + cy - cy_0 = 0 \\ \iff\ & a(y - y_0)'' + b(y - y_0)' + c(y - y_0) = 0, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à dire que $y - y_0$ est solution de l'équation homogène (4.2). On a donc $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si $y - y_0 \in \mathcal{S}_H$. □

Le problème d'intégrer l'équation différentielle complète (4.1) peut alors se décomposer en deux étapes :

(i). résoudre l'équation homogène (4.2), voir la section 4.2 ;

(ii). trouver au moins une solution particulière de (4.1), voir la section 4.3.

4.1.2 Principe de superposition

On mentionne ici un résultat élémentaire sur la somme des solutions de deux équations différentielles qui possèdent les mêmes coefficients.

Proposition 4.2 (Principe de superposition). *Soient y_1 et y_2 deux fonctions deux fois dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et vérifiant respectivement*

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1 \qquad \text{et} \qquad ay_2'' + by_2' + cy_2 = f_2$$

sur l'intervalle I, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ et f_1, f_2 deux fonctions définies sur I. Alors, leur somme $y = y_1 + y_2$ est une fonction deux fois dérivable sur I qui vérifie sur cet intervalle

$$ay'' + by' + cy = f_1 + f_2.$$

Remarque 4.3. En appliquant ce résultat avec $f_1 = f_2 = 0$, on voit en particulier que la somme de deux fonctions qui sont solution d'une même équation différentielle homogène est aussi solution de cette équation.

4.1.3 Passage par les fonctions à valeurs complexes

Dans une équation différentielle de la forme (4.1), si les coefficients a, b, c sont dans $\mathbb{R}$, et si la fonction f est à valeurs réelles, il est cohérent de chercher des solutions y à valeurs réelles également. Cependant, il est souvent commode de passer par l'intermédiaire de solutions à valeurs complexes, pour en déduire des solutions à valeurs réelles.

En effet, une fonction y définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs complexes peut s'écrire sous la forme $y = y_1 + \mathrm{i}y_2$, où y_1 et y_2 sont les fonctions à valeurs réelles définies par

$$y_1(x) = \Re(y(x)) \qquad \text{et} \qquad y_2(x) = \Im(y(x))$$

pour tout $x \in I$. De plus, la fonction y est dérivable sur I si et seulement si les fonctions y_1 et y_2 le sont, et on a alors $y' = y_1' + \mathrm{i}y_2'$, soit encore $y_1' = \Re(y')$ et $y_2' = \Im(y')$. De même, la fonction y est deux fois dérivable sur I si et seulement si les fonctions y_1 et y_2 le sont, et on a alors $y'' = y_1'' + \mathrm{i}y_2''$, soit encore $y_1'' = \Re(y'')$ et $y_2'' = \Im(y'')$. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 4.4. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si y est une fonction définie et deux fois dérivable sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui est solution de (4.1), alors les deux fonctions $\Re(y)$ et $\Im(y)$ sont deux fois dérivables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et sont solutions de (4.1) et de (4.2) respectivement.*

Démonstration. Il suffit de prendre la partie réelle et la partie imaginaire dans (4.1). En effet, par exemple, pour la partie réelle, on a

$$\Re(f) = \Re(ay'' + by' + cy) = a\Re(y'') + b\Re(y') + c\Re(y),$$

et on conclut en observant que $\Re(f) = f$ puisque f est à valeurs réelles, et que $\Re(y') = (\Re y)'$ et $\Re(y'') = (\Re y)''$. De même, pour la partie imaginaire,

$$\Im(f) = \Im(ay'' + by' + cy) = a\Im(y'') + b\Im(y') + c\Im(y),$$

et on conclut en observant que $\Im(f) = 0$ puisque f est à valeurs réelles, et que $\Im(y') = (\Im y)'$ et $\Im(y'') = (\Im y)''$. □

Remarque 4.5. En appliquant la proposition précédente avec $f = 0$, on voit en particulier que si y désigne une solution à valeurs complexes de l'équation homogène (4.2) dans laquelle $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $\Re y$ et $\Im y$ sont aussi solution de cette équation homogène.

On rappelle que pour les fonctions à valeurs complexes, les règles de dérivation usuelles (somme, produit, quotient, composition) restent valables. En particulier, dans le cas des équations différentielles telles que (4.1), il est utile de rappeler que pour tout nombre complexe $r \in \mathbb{C}$ et tout entier $n \geq 1$, on a $(\mathrm{e}^{rx})' = r\,\mathrm{e}^{rx}$ et

$(x^n \mathrm{e}^{rx})' = nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{rx} + rx^n\,\mathrm{e}^{rx}$. De plus, si $r = s + \mathrm{i}t$ avec $s, t \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{e}^{rx} = \mathrm{e}^{(s+\mathrm{i}t)x} = \mathrm{e}^{sx}(\cos(tx) + \mathrm{i}\sin(tx))$, soit encore

$$\Re(\mathrm{e}^{rx}) = \mathrm{e}^{sx}\cos(tx) \qquad \text{et} \qquad \Im(\mathrm{e}^{rx}) = \mathrm{e}^{sx}\sin(tx).$$

4.2 Résolution de l'équation homogène

Pour résoudre l'équation différentielle homogène (4.2), on commence par considérer l'*équation caractéristique* qui lui est associée, à savoir :

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{4.3}$$

La résolution de cette équation du second degré est traitée dans l'annexe A. Il y est indiqué qu'on considère le *discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$ et que :

- si $\Delta = 0$, alors il y a une unique solution, à savoir $r = -\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta \neq 0$, alors il y a deux solutions distinctes $-\dfrac{b-\delta}{2a}$ et $-\dfrac{b+\delta}{2a}$, où δ désigne un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$. De plus, si l'équation différentielle homogène (4.2) est à coefficients réels, c'est-à-dire si $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors $\Delta \in \mathbb{R}$ aussi. On peut choisir $\delta = \sqrt{\Delta}$ si $\Delta > 0$, et $\delta = \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$ si $\Delta < 0$.

À partir des solutions de l'équation caractéristique (4.3), on peut déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle homogène (4.2), en passant d'abord par les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, avant éventuellement de revenir aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ si les coefficients a, b, c sont réels.

4.2.1 Solutions complexes

Que les coefficients a, b, c de l'équation différentielle homogène soient réels ou complexes, on peut toujours les voir comme des nombres complexes, et donc chercher les solutions à valeurs complexes de l'équation.

Théorème 4.6. *On considère l'équation différentielle homogène (4.2) avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, et on note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique (4.3) associée, ainsi que $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.*

- *Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a pour unique solution $r = -\dfrac{b}{2a}$, et l'équation différentielle homogène admet pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme*

$$y(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)\,\mathrm{e}^{rx} \qquad \textit{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

- *Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation caractéristique a deux solutions distinctes $r_1 = -\dfrac{b-\delta}{2a}$ et $r_2 = -\dfrac{b+\delta}{2a}$, et l'équation différentielle homogène admet pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme*

$$y(x) = \lambda_1\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{r_2 x} \qquad \textit{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Remarques 4.7.
- Les solutions de l'équation différentielle homogène sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, c'est-à-dire que l'intervalle I considéré ci-dessus peut être étendu à $\mathbb{R}$: sur un intervalle plus petit, on prend les restrictions de ces solutions.
- Les solutions dépendent de deux paramètres complexes λ_1 et λ_2, l'ensemble des solutions constitue la *solution générale* de l'équation différentielle homogène.

Démonstration. Pour commencer, on vérifie que les solutions indiquées dans l'énoncé du théorème conviennent. Pour $r \in \mathbb{C}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ est deux fois dérivable et vérifie $y'(x) = r\,\mathrm{e}^{rx}$ et $y''(x) = r^2\,\mathrm{e}^{rx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est solution de l'équation différentielle homogène (4.2) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$ar^2\,\mathrm{e}^{rx} + br\,\mathrm{e}^{rx} + c\,\mathrm{e}^{rx} = 0.$$

En simplifiant par e^{rx} qui n'est jamais nul, cela revient à dire que r est solution de l'équation caractéristique (4.3).

Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes r_1 et r_2 données comme dans l'énoncé, ce qui fournit deux solutions $y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $y_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}$ à l'équation différentielle homogène.

Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une seule solution r aussi donnée comme dans l'énoncé, soit $r = -\dfrac{b}{2a}$, ce qui fournit une solution $y_1(x) = \mathrm{e}^{rx}$ à l'équation différentielle homogène. Montrons alors que la fonction définie par $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{rx}$ fournit une autre solution. Cette fonction est deux fois dérivable et vérifie $y_2'(x) = (1 + rx)\,\mathrm{e}^{rx}$ et $y_2''(x) = (2r + r^2 x)\,\mathrm{e}^{rx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que

$$\begin{aligned} a y_2''(x) + b y_2'(x) + c y_2(x) &= \big(a(2r + r^2 x) + b(1 + rx) + cx\big)\,\mathrm{e}^{rx} \\ &= \big((2ar + b) + x(ar^2 + br + c)\big)\,\mathrm{e}^{rx} = 0. \end{aligned}$$

La fonction y_2 est donc également solution de l'équation homogène.

Dans les deux cas, on obtient deux solutions y_1 et y_2 de l'équation homogène, et le principe de superposition (proposition 4.2) implique que toutes les fonctions $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, sont aussi solution.

Il convient désormais réciproquement de montrer que les fonctions de la forme précédente sont les seules solutions possibles. Soit r une solution de l'équation caractéristique et soit y une solution de l'équation différentielle homogène. On considère la fonction $z(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{-rx}$. Cette fonction est deux fois dérivable, et on a alors $y(x) = z(x)\,\mathrm{e}^{rx}$, puis $y'(x) = (z'(x) + rz(x))\,\mathrm{e}^{rx}$, et $y''(x) = (z''(x) + 2rz'(x) + r^2 z(x))\,\mathrm{e}^{rx}$. Comme y est solution de l'équation différentielle homogène, on en déduit que pour tout réel x,

$$\begin{aligned} 0 &= a y''(x) + b y'(x) + c y(x) \\ &= \big(a(z''(x) + 2rz'(x) + r^2 z(x)) + b(z'(x) + rz(x)) + cz(x)\big)\,\mathrm{e}^{rx} \\ &= \big(az''(x) + (2ar + b)z'(x) + (ar^2 + br + c)z(x)\big)\,\mathrm{e}^{rx} \\ &= (az''(x) + (2ar + b)z'(x))\,\mathrm{e}^{rx}\,. \end{aligned}$$

En simplifiant par e^{rx} qui n'est jamais nul, on voit que la fonction $\varphi = z'$ est solution de l'équation différentielle du *premier ordre*

$$\varphi' + \left(2r + \frac{b}{a}\right)\varphi = 0.$$

Si $\Delta = 0$, alors r est l'unique racine $-\dfrac{b}{2a}$, et l'équation différentielle ci-dessus se réduit à $\varphi' = 0$, ce qui donne une solution constante $\varphi(x) = \lambda_2$, avec $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ fixé, puis conduit à $z(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x$, avec aussi $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ fixé. On obtient alors comme attendu $y(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)\,\mathrm{e}^{rx}$.

Si $\Delta \neq 0$, l'équation différentielle ci-dessus admet pour solutions les fonctions de la forme $\varphi(x) = \lambda \exp\left(-\left(2r + \dfrac{b}{a}\right)x\right)$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé. Cela conduit par intégration à $z(x) = \lambda_1 \exp\left(-\left(2r + \dfrac{b}{a}\right)x\right) + \lambda_2$, où $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ désigne la constante qui se déduit de λ via la relation $\lambda = -\left(2r + \dfrac{b}{a}\right)\lambda_1$, et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ est une nouvelle constante indépendante des autres. Il s'ensuit que $y(x) = \lambda_1\,\mathrm{e}^{\tilde{r}x} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{rx}$. Ici, on a posé $\tilde{r} = -r - \dfrac{b}{a}$, qui est l'autre racine de l'équation caractéristique. Les solutions présentées dans l'énoncé du théorème sont donc bien les seules possibles. □

4.2.2 Solutions réelles

Quand les coefficients a, b, c de l'équation différentielle homogène sont réels, on préfère souvent rester *in fine* dans le domaine réel, et donc ne garder que les solutions à valeurs réelles de l'équation.

Théorème 4.8. *On considère l'équation différentielle homogène (4.2) avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, et on note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique (4.3) associée.*

- Régime critique : *Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a pour unique solution $r = -\dfrac{b}{2a}$, et l'équation différentielle homogène admet pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme*
$$y(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)\,\mathrm{e}^{rx} \qquad \text{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$
- Régime apériodique : *Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes $r_1 = -\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = -\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, et l'équation différentielle homogène admet pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme*
$$y(x) = \lambda_1\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{r_2 x} \qquad \text{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$
- Régime pseudo-périodique : *Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \rho + \mathrm{i}\omega$ et $r_2 = \rho - \mathrm{i}\omega$ distinctes, avec $\rho = -\dfrac{b}{2a}$ et $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2|a|} > 0$, et l'équation différentielle homogène admet pour solutions les fonctions sur $\mathbb{R}$ de la forme*
$$y(x) = \lambda_1\,\mathrm{e}^{\rho x}\cos(\omega x) + \lambda_2\,\mathrm{e}^{\rho x}\sin(\omega x) \qquad \text{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Remarques 4.9. On peut formuler les mêmes remarques que dans le cas complexe traité précédemment, à savoir :

- Les solutions de l'équation différentielle homogène sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, c'est-à-dire que l'intervalle I considéré ci-dessus peut être étendu à $\mathbb{R}$: sur un intervalle plus petit, on prend les restrictions de ces solutions.
- Les solutions dépendent de deux paramètres réels λ_1 et λ_2, l'ensemble des solutions constitue la *solution générale* de l'équation différentielle homogène.

Démonstration. Les coefficients a, b, c étant dans $\mathbb{R}$, on peut bien sûr les voir comme appartenant à $\mathbb{C}$, et donc appliquer le théorème 4.6. On utilise ensuite la proposition 4.4 pour déduire les solutions réelles des solutions complexes.

Dans les régimes critiques et apériodiques, soit pour $\Delta \geq 0$, on a $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, donc les exponentielles $\mathrm{e}^{rx}, \mathrm{e}^{r_1 x}, \mathrm{e}^{r_2 x}$ sont réelles, et prendre les parties réelles ou imaginaires des solutions complexes donnent des fonctions de la même forme, mais avec des constantes λ_1 et λ_2 réelles.

Dans le régime pseudo-périodique, soit pour $\Delta < 0$, on a $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, plus précisément $r_1 = \rho + \mathrm{i}\omega$ et $r_2 = \rho - \mathrm{i}\omega$, donc les exponentielles $\mathrm{e}^{r_1 x}$ et $\mathrm{e}^{r_2 x}$ sont complexes, et les solutions complexes s'écrivent pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda_1\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{r_2 x} \\ &= (\Re(\lambda_1) + \mathrm{i}\Im(\lambda_1))\,(\mathrm{e}^{\rho x}\cos(\omega x) + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\rho x}\sin(\omega x)) \\ &\qquad + (\Re(\lambda_2) + \mathrm{i}\Im(\lambda_2))\,(\mathrm{e}^{\rho x}\cos(\omega x) - \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\rho x}\sin(\omega x))\,. \end{aligned}$$

Leurs parties réelle et imaginaire s'écrivent donc respectivement

$$\begin{cases} \Re(y(x)) = (\Re(\lambda_1) + \Re(\lambda_2))\,\mathrm{e}^{\rho x}\cos(\omega x) + (\Im(\lambda_2) - \Im(\lambda_1))\,\mathrm{e}^{\rho x}\sin(\omega x) \\ \Im(y(x)) = (\Im(\lambda_1) + \Im(\lambda_2))\,\mathrm{e}^{\rho x}\cos(\omega x) + (\Re(\lambda_1) - \Re(\lambda_2))\,\mathrm{e}^{\rho x}\sin(\omega x). \end{cases}$$

On en déduit pour solutions réelles les combinaisons linéaires à coefficients réels des deux fonctions $\mathrm{e}^{\rho x}\cos(\omega x)$ et $\mathrm{e}^{\rho x}\sin(\omega x)$.

Pour montrer que ces solutions réelles sont les seules possibles, on observe que ce sont aussi des solutions complexes, et le théorème 4.6 indique qu'il ne peut y avoir de solutions qui ont une forme autre que celles énoncées ici. □

4.3 Recherche d'une solution particulière

On restreint la discussion au cas où le second membre de l'équation différentielle (4.1) est de la forme $f(x) = P(x)\ \mathrm{e}^{sx}$, où P est une fonction polynomiale de degré n. On rappelle que l'équation caractéristique correspondante est donnée par (4.3). Une solution de cette équation est aussi appellée *racine*. Pour une telle équation du second degré, la racine est qualifiée de *double* s'il n'y a pas d'autre racine, et de *simple* sinon.

Théorème 4.10. *Soient des scalaires $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$, et $s \in \mathbb{K}$, et soit P une fonction polynomiale non nulle à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors l'équation différentielle*

$$ay'' + by' + cy = P(x)\ \mathrm{e}^{sx} \tag{4.4}$$

possède une solution particulière de la forme :

- $y_0(x) = Q(x)\ \mathrm{e}^{sx}$ *si s n'est pas racine de l'équation caractéristique ;*
- $y_0(x) = xQ(x)\ \mathrm{e}^{sx}$ *si s est racine simple de l'équation caractéristique ;*
- $y_0(x) = x^2Q(x)\ \mathrm{e}^{sx}$ *si s est racine double de l'équation caractéristique.*

Ici, Q désigne une fonction polynomiale de même degré n que P.

Démonstration. Soit λ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction définie par $y_0(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^{sx}$ est alors deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$y_0' = (\lambda' + s\lambda)\,\mathrm{e}^{sx} \qquad \text{et} \qquad y_0'' = (\lambda'' + 2s\lambda' + s^2\lambda)\,\mathrm{e}^{sx}\,.$$

Ainsi, la fonction y_0 est solution de l'équation différentielle si et seulement si la fonction λ vérifie

$$\alpha\lambda'' + \beta\lambda' + \gamma\lambda = P, \tag{4.5}$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = 2as + b \\ \gamma = as^2 + bs + c. \end{cases}$$

On écrit $P(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$ le second membre de l'équation différentielle (4.5), et on suppose que λ est une fonction polynomiale de degré au plus $n+2$, soit $\lambda(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n+2}x^{n+2}$. On a donc

$$\lambda'(x) = \sum_{k=0}^{n+1}(k+1)a_{k+1}x^k \quad \text{et} \quad \lambda''(x) = \sum_{k=0}^{n}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k.$$

- On suppose que s n'est pas racine de l'équation caractéristique, ce qui signifie que $\gamma \neq 0$. Alors, λ est solution de l'équation différentielle (4.5) si et seulement si

$$\begin{cases} \gamma a_{n+2} = 0 \\ \beta(n+2)a_{n+2} + \gamma a_{n+1} = 0 \\ \alpha(k+2)(k+1)a_{k+2} + \beta(k+1)a_{k+1} + \gamma a_k = b_k, \end{cases}$$

  où la dernière condition est satisfaite pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \gamma & & & & & \\ \beta(n+2) & \gamma & & (0) & & \\ \alpha(n+2)(n+1) & \beta(n+1) & \gamma & & & \\ 0 & \alpha(n+1)n & \beta n & \gamma & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 2\alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_n \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est égal à $\gamma^{n+3} \neq 0$, donc la matrice est inversible. Le système correspondant est donc de Cramer, si bien qu'il admet une unique solution $a_{n+2}, a_{n+1}, a_n, \dots, a_0$. On observe en outre aisément que $a_{n+2} = a_{n+1} = 0$. Cela fournit une solution $\lambda = Q$ de l'équation différentielle (4.5), avec Q une fonction polynomiale de degré n. La fonction $y_0(x) = Q(x)\ \mathrm{e}^{sx}$ qui s'en déduit fournit donc une solution particulière à l'équation différentielle (4.4).

- On suppose que s est racine simple de l'équation caractéristique, ce qui signifie que $\gamma = 0$ et $\beta \neq 0$. Alors, λ est solution de l'équation différentielle (4.5) si et seulement si

$$\begin{cases} \beta(n+2)a_{n+2} = 0 \\ \alpha(k+2)(k+1)a_{k+2} + \beta(k+1)a_{k+1} = b_k, \end{cases}$$

où la dernière condition est satisfaite pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \beta(n+2) & & & & \\ \alpha(n+2)(n+1) & \beta(n+1) & & (0) & \\ 0 & \alpha(n+1)n & \beta n & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 2\alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_n \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est égal à $\beta^{n+2}(n+2)! \neq 0$, donc la matrice est inversible. Le système correspondant est donc de Cramer, si bien qu'il admet une unique solution $a_{n+2}, a_{n+1}, a_n, \dots, a_1$. On observe en outre aisément que $a_{n+2} = 0$ et que a_0 est arbitraire. En choisissant $a_0 = 0$, cela fournit une solution $\lambda(x) = xQ(x)$ de l'équation différentielle (4.5), avec Q une fonction polynomiale de degré n. La fonction $y_0(x) = xQ(x)\ \mathrm{e}^{sx}$ qui s'en déduit fournit donc une solution particulière à l'équation différentielle (4.4).

- On suppose que s est racine double de l'équation caractéristique, ce qui signifie que $\gamma = \beta = 0$. Alors, λ est solution de l'équation différentielle (4.5) si et seulement si pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$a_{k+2} = \frac{b_k}{\alpha(k+2)(k+1)}.$$

En outre, a_0 et a_1 sont arbitraires. En choisissant $a_0 = a_1 = 0$, cela fournit une solution $\lambda(x) = x^2Q(x)$ de l'équation différentielle (4.5), avec Q une fonction polynomiale de degré n. La fonction $y_0(x) = x^2Q(x)\ \mathrm{e}^{sx}$ qui s'en déduit fournit donc une solution particulière à l'équation différentielle (4.4). □

Remarques 4.11. • La preuve indique que pour déterminer la fonction polynomiale Q, on peut la déterminer en la cherchant sous la forme $Q(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$, en injectant cette expression dans l'équation différentielle, et en résolvant le système linéaire d'inconnues $c_0, \dots, c_n$ qui s'ensuit.

- Le théorème 4.10 permet de traiter le cas d'équations différentielles du type (4.4) à coefficients a, b, c réels et à second membre de la forme $P(x)\cos(sx)$ ou $P(x)\sin(sx)$, avec s réel et P à coefficients réels. En effet, de tels seconds membres sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $P(x)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}$. Ainsi, il suffit d'appliquer le résultat précédent avec ce second membre complexe, puis de prendre la partie réelle ou la partie imaginaire de la solution particulière obtenue.

- En utilisant le principe de superposition (proposition 4.2), on peut traiter le cas de seconds membres qui sont la somme de plusieurs fonctions de la forme $P(x)\ \mathrm{e}^{sx}$.

Exemples 4.12. • On veut résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$. L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$, et a pour racines les réels 1 et -2. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $y_H(x) = \lambda_1\ \mathrm{e}^{x} + \lambda_2\ \mathrm{e}^{-2x}$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (si on ne s'intéresse qu'aux solutions à valeurs réelles). Comme 2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, l'équation différentielle complète admet une solution particulière de la forme $y_0(x) = c_0\ \mathrm{e}^{2x}$. Cette fonction est solution si et seulement si pour tout réel x,

$$4c_0\ \mathrm{e}^{2x} + 2c_0\ \mathrm{e}^{2x} - 2c_0\ \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x},$$

ce qui donne $4c_0 = 1$. Ainsi, y_0 fournit une solution particulière pour $c_0 = \dfrac{1}{4}$. L'équation différentielle complète admet donc pour solutions les fonctions $y(x) = y_0(x) + y_H(x) = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \lambda_1\ \mathrm{e}^{x} + \lambda_2\ \mathrm{e}^{-2x}$, avec λ_1 et λ_2 deux nombres réels arbitraires.

- On veut maintenant résoudre $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-2x}$. L'équation homogène est la même que précédemment, et admet donc pour solutions les fonctions de la forme $y_H(x) = \lambda_1\,\mathrm{e}^{x} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{-2x}$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Cette fois-ci, comme -2 est racine simple de l'équation caractéristique, l'équation différentielle complète admet une solution particulière de la forme $y_0(x) = c_0\,x\,\mathrm{e}^{-2x}$. Cette fonction est solution si et seulement si pour tout réel x,

$$4c_0(x-1)\,\mathrm{e}^{-2x} + c_0(1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2c_0 x\,\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x},$$

  ce qui donne $-3c_0 = 1$. Ainsi, y_0 fournit une solution particulière pour $c_0 = -\dfrac{1}{3}$. L'équation différentielle complète admet donc pour solutions les fonctions qui sont de la forme $y(x) = y_0(x) + y_H(x) = -\dfrac{x}{3}\,\mathrm{e}^{-2x} + \lambda_1\,\mathrm{e}^{x} + \lambda_2\,\mathrm{e}^{-2x}$, avec λ_1 et λ_2 deux nombres réels arbitraires.

- *Oscillateur forcé :* On s'intéresse à l'équation différentielle d'origine physique $y'' + \omega_0^2 y = \sin(\omega x)$, avec $\omega_0, \omega > 0$ (cas d'un système masse force élastique ou d'un circuit LC, avec force ou potentiel extérieur). L'équation caractéristique a pour racines complexes conjuguées $\mathrm{i}\omega_0$ et $-\mathrm{i}\omega_0$, de sorte que l'équation différentielle homogène associée admet pour solutions réelles les fonctions de la forme $y_H(x) = \lambda_1 \cos(\omega_0 x) + \lambda_2 \sin(\omega_0 x)$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Pour déterminer une solution particulière de l'équation complète, on considère l'équation différentielle complexe $y'' + \omega_0^2 y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$.
  - Si $\omega \neq \omega_0$, elle admet une solution particulière de la forme $y_0(x) = c_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$, où c_0 vérifie $c_0(\omega_0^2 - \omega^2) = 1$. Sa partie imaginaire fournit une solution particulière à l'équation différentielle de départ. On a donc pour solution générale les fonctions de la forme $y(x) = \dfrac{\sin(\omega x)}{\omega_0^2 - \omega^2} + \lambda_1 \cos(\omega_0 x) + \lambda_2 \sin(\omega_0 x)$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
  - Si $\omega = \omega_0$, elle admet une solution particulière de la forme $y_0(x) = c_0\,x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}$, où c_0 vérifie $2c_0\mathrm{i}\omega_0 = 1$. Sa partie imaginaire fournit une solution particulière à l'équation différentielle de départ. On a donc pour solution générale les fonctions de la forme $y(x) = -\dfrac{x}{2\omega_0}\cos(\omega_0 x) + \lambda_1 \cos(\omega_0 x) + \lambda_2 \sin(\omega_0 x)$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. (Dans ce cas, on remarque que les solutions ne sont pas bornées et l'amplitude des oscillations tend vers l'infini. Cela se produit quand la pulsation d'excitation ω est égale à la pulsation propre ω_0 du système. C'est le phénomène de *résonance*.)

4.4 Conditions initiales

Les équations différentielles de la forme (4.1) ont des ensembles de solutions paramétrés par deux constantes λ_1 et λ_2 comme vu précédemment. On peut montrer que la donnée de deux *conditions initiales* $y(x_0) = C$ et $y'(x_0) = C'$, pour $x_0 \in I$ fixé, détermine une solution unique.

> **Théorème 4.13.** *On suppose $a \neq 0$ et f continue sur l'intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $C, C' \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution y à l'équation différentielle (4.1) vérifiant $y(x_0) = C$ et $y'(x_0) = C'$.*

En pratique, on cherche d'abord toutes les solutions de l'équation (4.1). Celles-ci dépendent de deux paramètres λ_1 et λ_2. Ensuite, on détermine les valeurs des paramètres qui permettent de satisfaire les conditions initiales. Cela revient à résoudre un système de deux équations dont les inconnues sont les paramètres λ_1 et λ_2.

Exemple 4.14. On veut résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 1$ avec pour conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$. L'équation a pour solution générale les fonctions de la forme $y(x) = 1 + \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x)$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales impliquent que $1 + \lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$. La solution recherchée est donc la fonction $y(x) = 1 + \cos(x) + 3\sin(x)$.

Deuxième partie

Exercices corrigés

CHAPITRE / 5

Systèmes linéaires

5.1 Résolution et compatibilité

Exercice 5.1.

Pour chacun des deux systèmes linéaires ci-dessous, indiquez la première opération élémentaire que vous effectueriez en vue de les résoudre. Justifiez votre démarche en l'explicitant par une phrase.

a) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 12 \\ x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -4 \\ 5x_3 - x_4 = 7 \\ x_3 + 3x_4 = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 8x_3 = -4 \\ 2x_3 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$

Corrigé.

a) On peut faire $L_3 \leftrightarrow L_4$, afin d'utiliser le coefficient 1 comme pivot pour x_3, puis $L_4 \leftarrow L_4 - 5L_3$. On évite ainsi les fractions pendant l'élimination. Le système devient triangulaire.

b) Le système est déjà triangulaire. On peut normaliser le troisième pivot par $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$, ce qui donne $x_3 = 3/2$. La remontée, avec $x_4 = 1$, donne $x_2 = -16$, puis $x_1 = -107/2$.

Exercice 5.2.

Le système linéaire représenté en a) par sa matrice complète est-il compatible ? Le triplet $(3, 4, -2)$ est-il solution du système linéaire représenté en b) ?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \\ -7x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$

Corrigé.

a) Les trois pivots sont non nuls : le système est compatible et possède une unique solution. Par remontée, $x_3 = 0$, $x_2 = 1/2$ et $x_1 = -17/2$.

b) Pour $(x_1, x_2, x_3) = (3, 4, -2)$, les membres de gauche valent respectivement 7, 0 et 5. La troisième équation exige -7 : ce triplet n'est donc pas solution.

Exercice 5.3.

Résoudre les deux systèmes linéaires ci-dessous.

a) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7 \\ x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -6x_3 = -8 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$

Corrigé.

a) Les première et troisième équations donnent $x_1 = 8 + 3x_3$ et $x_2 = -2 - 5x_3$. La deuxième devient $12 + 5x_3 = 7$. Ainsi, $(x_1, x_2, x_3) = (5, 3, -1)$; substitution dans les trois équations : 8, 7, −2.

b) La première équation donne $x_3 = 4/3$, puis $x_2 = 1/3$, et enfin $3x_1 = -10/3$. L'unique solution est $(-10/9, 1/3, 4/3)$.

Exercice 5.4.

Trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des couples de réels (h, k) pour lequel le système linéaire ci-dessous peut être qualifié de compatible.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = h \\ -6x_1 + 3x_2 = k \end{cases}$$

Corrigé.

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ donne $0 = k + 3h$. La compatibilité équivaut à $k = -3h$, donc

$$\mathcal{S} = \{(h, -3h) \,:\, h \in \mathbb{R}\}.$$

Pour un tel couple, les solutions en (x_1, x_2) sont $(t, 2t - h)$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.5.

Déterminer une relation entre les réels g, h et k pour que le système linéaire représenté par la matrice complète ci-dessous soit compatible.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{pmatrix}$$

Corrigé.

La troisième ligne des coefficients est $-2L_1 - L_2$. L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 + L_2$ donne donc $0 = k + 2g + h$. Les deux premières équations ont des pivots non nuls : la condition nécessaire et suffisante est

$$2g + h + k = 0.$$

Exercice 5.6.

Déterminer l'ensemble de solutions du système linéaire représenté par la matrice complète ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Corrigé.

Posons $x_3 = t$. La deuxième ligne donne $x_2 = 3 - t$, et la première $x_1 = 3x_2 + 5t = 9 + 2t$. Ainsi,

$$\mathcal{S} = \{(9 + 2t, 3 - t, t) \,:\, t \in \mathbb{R}\} = (9, 3, 0) + \mathrm{Vect}((2, -1, 1)).$$

Exercice 5.7.

Déterminer l'ensemble de solutions du système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 2 \end{cases}$$

Corrigé.

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ donnent respectivement $3x_3 + x_4 = 3$ et $-3x_3 - x_4 = 2$. Leur somme est l'égalité impossible $0 = 5$. L'ensemble des solutions est vide.

Exercice 5.8.

Les systèmes linéaires représentés ci-dessous par leurs matrices complètes sont-ils compatibles ? Le cas échéant, étudier l'unicité de leurs solutions. Les symboles $\bullet$ et $*$ représentent respectivement un nombre appartenant à $\mathbb{R}$ et un nombre appartenant à $\mathbb{R}^*$.

a) $\begin{pmatrix} * & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & * & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & * & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & * & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} * & \bullet & \bullet \\ 0 & * & \bullet \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} * & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & * & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & * & \bullet \end{pmatrix}$

Corrigé.

La dernière colonne est toujours le second membre : elle ne correspond pas à une inconnue.

a) Compatible, avec deux pivots pour trois inconnues : une inconnue libre et une infinité de solutions.

b) Compatible, avec trois pivots pour quatre inconnues : x_1 est libre et il y a une infinité de solutions.

c) Incompatible : la dernière ligne signifie $0 = *$, avec $* \neq 0$.

d) Compatible, avec trois pivots pour quatre inconnues : x_2 est libre et il y a une infinité de solutions.

5.2 Écriture matricielle et espaces engendrés

Exercice 5.9.

Écrire les deux systèmes ci-dessous d'abord comme une équation vectorielle, puis comme une équation matricielle.

a) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 12 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 8 \\ 5x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$

Corrigé.

a) L'équation vectorielle et l'équation matricielle sont respectivement

$$x_1\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) De même,

$$x_1\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.10.

On pose $U = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soient $h \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$. Montrer que $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(U, V)$.

Corrigé.

On cherche α, β tels que $\alpha U + \beta V = (h,k)^t$, soit $2\alpha + 2\beta = h$ et $-\alpha + \beta = k$. On obtient

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \left(\frac{h}{4} - \frac{k}{2}\right) U + \left(\frac{h}{4} + \frac{k}{2}\right) V.$$

Cela prouve que $\mathrm{Vect}(U,V) = \mathbb{R}^2$; les coefficients sont uniques.

Exercice 5.11.

On pose $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer si le vecteur U appartient au plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs formés par les colonnes de A.

Corrigé.

L'appartenance demandée équivaut à l'existence de s, t tels que $3s - 5t = 0$, $-2s + 6t = 4$ et $s + t = 4$. Les deux premières équations donnent $t = 3/2$ et $s = 5/2$, qui vérifient la troisième. Ainsi $U = \frac{5}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_2$ appartient bien au plan engendré par les colonnes de A. Ces colonnes sont indépendantes, puisque le déterminant formé par leurs deux premières coordonnées vaut $8 \neq 0$.

Exercice 5.12.

Un ensemble de trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ peut-il engendrer $\mathbb{R}^4$? Justifier la réponse. Qu'en est-il de n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ si $n < m$?

Corrigé.

Non : trois vecteurs engendrent un espace de dimension au plus 3, qui ne peut donc être $\mathbb{R}^4$. Plus généralement, l'espace engendré par n vecteurs a dimension au plus n, strictement inférieure à m lorsque $n < m$.

Exercice 5.13.

On suppose que A est une matrice 4×3 et B un vecteur de $\mathbb{R}^4$ tel que l'équation $AX = B$ admette une solution unique. Que peut-on dire de la forme échelonnée de A ? Justifier la réponse.

Corrigé.

L'unicité implique que le système homogène $AX = 0$ a uniquement la solution nulle : sinon on pourrait ajouter à la solution donnée un vecteur non nul du noyau. Il y a donc un pivot dans chacune des trois colonnes de A. Une forme échelonnée a trois lignes non nulles, des pivots en positions $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, puis une ligne nulle. Dans la matrice augmentée, le second membre de cette dernière ligne est nul puisque le système est compatible.

5.3 Systèmes homogènes et structure des solutions

Exercice 5.14.

Décrire et comparer les ensembles de solutions des deux équations ci-dessous.

a) $x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0$

b) $x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2$

Corrigé.

a) En posant $x_2 = s$, $x_3 = t$, on trouve $\mathcal{S}_H = \{(-5s + 3t, s, t) \,:\, s, t \in \mathbb{R}\}$, un plan vectoriel.

b) On obtient $\mathcal{S} = (-2, 0, 0) + \mathcal{S}_H$. C'est un plan affine parallèle au précédent, distinct puisqu'il ne contient pas l'origine. Les deux plans sont disjoints.

Exercice 5.15.

On considère ci-dessous un système non homogène (S) et son système homogène associé (H). Donner une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions de ces systèmes. Trouver une relation entre les solutions de ces deux systèmes.

$$\text{(S)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 = -8 \end{cases} \qquad \text{(H)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Corrigé.

La différence des deux premières équations de (S) donne $x_1 - x_2 = 8$, équivalente à la troisième. En remplaçant dans la première, $x_2 = x_3 - 1$ et $x_1 = x_3 + 7$. Ainsi,

$$\mathcal{S} = \{(7 + t, -1 + t, t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathcal{S}_H = \{(t, t, t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

On a donc $\mathcal{S} = (7, -1, 0) + \mathcal{S}_H$: deux droites parallèles distinctes.

Exercice 5.16.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 21 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$. Trouver de tête au moins une solution non triviale de l'équation $AX = 0$.

Corrigé.

La deuxième colonne vaut trois fois la première. Par conséquent, $A(-3, 1)^t = 0$. Ce vecteur est non nul et convient. Toutes les solutions sont ses multiples.

Exercice 5.17.

Démonstration du théorème reliant les solutions d'un système non homogène aux solutions de son système homogène associé.

a) On suppose que P est une solution de $AX = B$. Soit V_h une solution quelconque de $AX = 0$ et soit $W = P + V_h$. Montrer que W est une solution de $AX = B$.

b) Soit W une solution quelconque de $AX = B$ et soit $V_h = W - P$. Montrer que V_h est solution de $AX = 0$.

c) Énoncer un théorème issu de ces considérations.

Corrigé.

a) $A(P + V_h) = AP + AV_h = B + 0 = B$.

b) $A(W - P) = AW - AP = B - B = 0$.

c) Si $AX = B$ possède une solution particulière P, alors l'ensemble de ses solutions est exactement $P + \ker A$. Si le système est incompatible, cet ensemble est vide et aucune telle écriture avec une solution particulière n'est possible.

5.4 Systèmes à coefficients complexes

On travaille sur $\mathbb{C}$, avec $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exercice 5.18.

Déterminer une base de solutions du système linéaire

$$\begin{cases} -x + (3-\mathrm{i})y + z = 0 \\ (-1-\mathrm{i})x + (4+2\mathrm{i})y + (1+\mathrm{i})z = 0 \\ \mathrm{i}x + (-1-3\mathrm{i})y - \mathrm{i}z = 0. \end{cases}$$

Corrigé.

La deuxième ligne est $(1+\mathrm{i})$ fois la première, et la troisième est $-\mathrm{i}$ fois la première. Le système se réduit donc à $x = (3-\mathrm{i})y + z$. Ses solutions sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3-\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{C}.$$

Les deux vecteurs affichés sont indépendants, comme le montrent leurs deuxième et troisième coordonnées, et constituent une base de solutions.

Exercice 5.19.

Déterminer les solutions (complexes) du système linéaire

$$\begin{cases} 2x + (-1+\mathrm{i})y = 1-\mathrm{i} \\ (2+\mathrm{i})x + (1-2\mathrm{i})y = 4+2\mathrm{i}. \end{cases}$$

Corrigé.

Le déterminant du système vaut

$$2(1-2\mathrm{i}) - (-1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) = 5-5\mathrm{i} \neq 0.$$

Le système possède donc une unique solution. Les formules de Cramer donnent

$$x = \frac{(1-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) - (-1+\mathrm{i})(4+2\mathrm{i})}{5-5\mathrm{i}} = 1, \quad y = \frac{2(4+2\mathrm{i}) - (2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{5-5\mathrm{i}} = \mathrm{i}.$$

Substitution : $2 + (-1+\mathrm{i})\mathrm{i} = 1-\mathrm{i}$ et $2 + \mathrm{i} + (1-2\mathrm{i})\mathrm{i} = 4+2\mathrm{i}$.

CHAPITRE / 6

Calcul matriciel

6.1 Produits et transposition

Exercice 6.1.

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{pmatrix}$. Trouver l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles on a la relation $AB = BA$.

Corrigé.

Le calcul donne

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & 18+3k \\ -4 & k-9 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -6-k & k-9 \end{pmatrix}.$$

L'égalité équivaut à $18 + 3k = 12$ et $-4 = -6 - k$, soit dans les deux cas $k = -2$. L'ensemble cherché est $\{-2\}$.

Exercice 6.2.

Soient les trois matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $AB = AC$, bien que $B \neq C$. Quelle propriété peut-on déduire concernant la matrice A ?

Corrigé.

On trouve $AB = AC = \begin{pmatrix} -21 & -21 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$. Pourtant, par exemple, $b_{11} = -1 \neq -3 = c_{11}$. Si A était inversible, multiplier $AB = AC$ à gauche par A^{-1} donnerait $B = C$. Ainsi A n'est pas inversible ; on vérifie aussi $\det A = 0$.

Exercice 6.3.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Construire une matrice carrée de taille 2, constituée de deux colonnes différentes et telle que $AB = 0$.

Corrigé.

L'équation $AX = 0$ se réduit à $x_1 = 2x_2$. Chaque colonne de B doit donc être un multiple de $(2, 1)^t$. Par exemple,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a deux colonnes différentes et vérifie $AB = 0$. Plus généralement, on peut prendre les colonnes $s(2, 1)^t$ et $t(2, 1)^t$ avec $s \neq t$.

Exercice 6.4.

On pose $U = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tU\,V$, ${}^tV\,U$, $U\,{}^tV$ et $V\,{}^tU$.

Corrigé.

Les deux premiers produits sont des scalaires : ${}^tUV = {}^tVU = -3a + 2b - 5c$. Les deux autres sont

$$U\,{}^tV = \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 2a & 2b & 2c \\ -5a & -5b & -5c \end{pmatrix}, \qquad V\,{}^tU = \begin{pmatrix} -3a & 2a & -5a \\ -3b & 2b & -5b \\ -3c & 2c & -5c \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.5.

Si U et V désignent deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, quelle relation existe-t-il entre ${}^tU\,V$ et ${}^tV\,U$? Quelle relation existe-t-il entre $U\,{}^tV$ et $V\,{}^tU$?

Corrigé.

On a ${}^tUV = \sum_{j=1}^n u_j v_j = {}^tVU$. En revanche, $U\,{}^tV$ et $V\,{}^tU$ ne sont pas nécessairement égaux : ils sont transposés l'un de l'autre, puisque ${}^t(U\,{}^tV) = V\,{}^tU$.

Exercice 6.6.

Soient A et B deux matrices carrées de taille 2. On note respectivement $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ les coefficients de ces matrices.

a) Montrer par un calcul explicite que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

b) Montrer que ce résultat se généralise à toutes dimensions entières : pour deux matrices A et B de tailles compatibles pour le produit, on a ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Corrigé.

a) Le produit AB est

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Sa transposée est précisément le produit $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, ce qui prouve l'identité.

b) Si A est de taille $m \times n$ et B de taille $n \times p$, alors, pour $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq m$,

$$({}^t(AB))_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^n ({}^tB)_{ik}({}^tA)_{kj} = ({}^tB\,{}^tA)_{ij}.$$

6.2 Inversion et résolution de systèmes

Exercice 6.7.

Déterminer, si elle existe, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Corrigé.

Appliquons à $(A \mid I_3)$ les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$. On obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -7 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Les pivots $1, 3, -14$ sont non nuls, donc A est inversible. La remontée donne

$$A^{-1} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -49 & -6 & 17 \\ -35 & 0 & 7 \\ 21 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Une vérification directe donne $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

Exercice 6.8.

Démontrer les théorèmes suivants.

a) Si A est une matrice inversible, alors son inverse A^{-1} l'est aussi et on a $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) Si A et B sont deux matrices carrées de taille n et inversibles, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

c) Si A est une matrice inversible, alors sa transposée ${}^tA$ l'est aussi et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Corrigé.

a) Les identités $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ montrent directement que A est l'inverse de A^{-1}.

b) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I_n$ et $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = I_n$. Cela prouve l'inversibilité et la formule.

c) En transposant $A^{-1}A = I_n$ et $AA^{-1} = I_n$, on obtient ${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = I_n$ et ${}^t(A^{-1})\,{}^tA = I_n$. D'où $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Exercice 6.9.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. D'après le cours, on sait que cette matrice est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. On suppose ici au contraire que $ad - bc = 0$.

a) Montrer que l'équation $AX = 0$ possède plusieurs solutions. (Commencer par le cas où $a = b = 0$.)

b) En déduire que la matrice A n'est pas inversible.

Corrigé.

a) Si $a = b = 0$ et $(c, d) \neq (0, 0)$, le vecteur non nul $(d, -c)^t$ est solution. Si les quatre coefficients sont nuls, tout vecteur est solution. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, le vecteur $(b, -a)^t$ est non nul et son image est $(0, cb - da)^t = 0$. Dans chaque cas, le noyau contient un vecteur non nul et tous ses multiples, en plus de 0.

b) Si A était inversible, $AX = 0$ impliquerait $X = A^{-1}0 = 0$. Le vecteur non nul trouvé ci-dessus contredit cette propriété : A n'est pas inversible.

Exercice 6.10.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer A^{-1} et en déduire la solution de chacune des équations $AX = B_i$, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

b) Résoudre ces quatre équations en utilisant la matrice complète par blocs $\begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix}$.

Corrigé.

a) $\det A = 12 - 10 = 2$, donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Les quatre solutions $A^{-1}B_i$ sont, dans l'ordre,

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

b) La matrice augmentée s'écrit

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 12 & 3 & -5 & 6 & 5 \end{array}\right).$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$, $L_2 \leftarrow L_2/2$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ donnent

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & -9 & 11 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 & -5 \end{array}\right).$$

On retrouve les quatre solutions simultanément.

Exercice 6.11.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ et on note I_3 la matrice identité de taille 3. À l'aide de la matrice complète par blocs $\begin{pmatrix} A & I_3 \end{pmatrix}$, déterminer si A est inversible et, le cas échéant, calculer son inverse A^{-1}.

Corrigé.

La matrice de l'énoncé n'est pas inversible. En effet, $C_1 - C_2 - C_3 = 0$, donc $A(1,-1,-1)^t = 0$ avec un vecteur non nul. Le calcul demandé avec la matrice augmentée le confirme. Après $L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Le bloc de gauche ne peut être transformé en I_3. Il n'existe donc pas de matrice A^{-1}.

Exercice 6.12.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note I_n la matrice identité de taille n et on note A_n la matrice carrée de taille n dont les coefficients sur la diagonale et en-dessous valent 1, et les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls. Ainsi, on a par exemple

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) En utilisant la matrice complète par blocs $\begin{pmatrix} A_n & I_n \end{pmatrix}$, déterminer l'inverse de la matrice A_n dans les cas où $n = 2$ et $n = 3$.

b) À l'aide de la question précédente, proposez une expression de l'inverse de la matrice A_n dans le cas général.

c) Vérifier l'exactitude de cette proposition.

Corrigé.

a) Pour $n = 2$, l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $n = 3$, appliquer d'abord $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) En général, A_n^{-1} a des 1 sur la diagonale, des -1 juste en dessous, et des zéros ailleurs.

c) Pour $y = A_n x$, on a $y_i = x_1 + \cdots + x_i$. On retrouve donc $x_1 = y_1$ et $x_i = y_i - y_{i-1}$ pour $i \geq 2$. La matrice proposée réalise exactement cette transformation inverse, dans les deux sens. On peut aussi appliquer $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ dans l'ordre $i = n, n-1, \dots, 2$ à la matrice augmentée.

Exercice 6.13.

En s'appuyant sur la stratégie développée dans l'exercice précédent, trouver l'inverse de la matrice carrée A de dimension n dont les coefficients $a_{i,j}$ sont donnés par $a_{i,j} = 0$ si $j > i$, et $a_{i,j} = i$ si $j \leq i$.

Corrigé.

Posons $D = \operatorname{diag}(1, 2, \dots, n)$ et notons A_n la matrice de l'exercice précédent. La matrice de cet exercice est DA_n. Son inverse est $A_n^{-1} D^{-1}$, donc

$$(A^{-1})_{ij} = \begin{cases} 1/i & j = i, \\ -1/(i-1) & j = i-1 \quad (i \geq 2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, $y_i = i(x_1 + \cdots + x_i)$ implique $x_1 = y_1$ et $x_i = y_i/i - y_{i-1}/(i-1)$. Cette formule inclut le cas $n = 1$.

6.3 Critères d'inversibilité et indépendance linéaire

Exercice 6.14.

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Justifier les réponses avec des arguments impliquant le moins de calculs possible.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 8 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Corrigé.

a) Oui : le déterminant vaut $-30 + 21 = -9$.

b) Non : la deuxième ligne vaut $-3/2$ fois la première.

c) Oui : la matrice est triangulaire, de diagonale $3, -4, -3$, sans coefficient nul.

d) Non : une ligne est nulle.

e) Non : une colonne est nulle.

f) Oui : $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$ donne $(0, -3, -18)$ sur la troisième ligne, puis $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{4} L_2$ donne $(0, 0, -63/4)$. Les trois pivots sont non nuls.

Exercice 6.15.

On qualifie de *triangulaire supérieure* toute matrice carrée dont les coefficients situés en-dessous de la diagonale sont nuls. À quelle condition une telle matrice est-elle inversible ?

Corrigé.

Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls : son déterminant est leur produit. De façon équivalente, on peut alors résoudre $AX = B$ par remontée pour tout B.

Exercice 6.16.

Une matrice dont deux lignes sont identiques peut-elle être inversible ? Justifier la réponse.

Corrigé.

Non. Si $L_i = L_j$ avec $i \neq j$, les composantes i et j de AX sont égales pour tout X. Il est donc impossible d'obtenir un second membre dont ces composantes diffèrent. Une matrice inversible permettrait au contraire de résoudre $AX = B$ pour tout B.

Exercice 6.17.

Soit A une matrice carrée de taille n telle que l'équation $AX = 0$ admette la solution triviale $X = 0$ comme unique solution. Sans chercher à utiliser A^{-1}, expliquer pourquoi l'équation $AX = B$ admet une solution quel que soit $B \in \mathbb{R}^n$.

Corrigé.

Dans une forme échelonnée de A, une colonne sans pivot donnerait une inconnue libre, donc une solution non nulle du système homogène. Il y a ainsi n pivots. Puisque A est carrée, chaque ligne a un pivot. Pour tout second membre, le système transformé est résoluble par remontée, ce qui prouve l'existence sans utiliser A^{-1}.

Exercice 6.18.

On considère $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le vecteur U appartient-il au sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs V_1, V_2 et V_3 ?

Corrigé.

Supposons $aV_1 + bV_2 + cV_3 = U$. Les trois premières coordonnées donnent successivement, après élimination de a, $8b + 12c = -10$ et $-3b - 4c = 1$. On en déduit $c = -11/2$, $b = 7$ et $a = -3/2$. Mais la quatrième coordonnée de cette combinaison vaut

$$3(-3/2) + 7 \cdot 7 + 5(-11/2) = 17 \neq 2.$$

Le système est incompatible et U n'appartient pas à l'espace engendré par V_1, V_2, V_3.

CHAPITRE / 7

Déterminants

7.1 Calcul et méthode du pivot

Exercice 7.1.

Calculer les déterminants suivants.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

Corrigé.

a) Le développement selon la première ligne donne $2(-5) - 3(24 - 25) - 4(4) = -23$.

b) Le même développement donne $5(21 - 20) + 2(10) + 4(-6) = 1$.

c) Développer selon la troisième ligne, puis selon la première ligne du mineur, donne

$$2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

d) Développer selon la deuxième ligne donne

$$-3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3(-24 - 34 + 60) = -6.$$

Exercice 7.2.

Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Corrigé.

Échangeons L_1 et L_4, puis appliquons $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$. En développant selon la première colonne, on trouve

$$\det A = -\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 \\ -12 & 1 & 16 \\ 4 & 6 & -10 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant de taille 3 vaut $3(-10-96) - 5(120-64) - 8(-72-4) = -318 - 280 + 608 = 10$. Donc $\det A = -10$.

Exercice 7.3.

Calculer par la méthode du pivot les déterminants $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 13 & -7 \end{vmatrix}$.

Corrigé.

Pour le premier déterminant, $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ donnent les lignes $(0, 1, -2)$ et $(0, 3, -3)$. Puis $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ donne $(0, 0, 3)$. Le déterminant est $1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$.

Pour le second, $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ donnent $(0, -18, 12)$ et $(0, 3, -1)$. Puis $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{6}L_2$ donne $(0, 0, 1)$. Le déterminant est $1 \cdot (-18) \cdot 1 = -18$.

Exercice 7.4.

En combinant les opérations sur les lignes et les développements suivant une rangée, calculer le déterminant $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Corrigé.

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4$ donne $(-3, 0, -2, 0)$ sur la troisième ligne. La dernière colonne n'a alors qu'un coefficient non nul :

$$D = 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3(8 - 6 + 36) = 114.$$

7.2 Opérations élémentaires et propriétés

Exercice 7.5.

Dans cet exercice, on présente six couples de matrices équivalentes par opérations sur les lignes. On suppose $k \neq 0$ dans les questions b) et e). Pour chaque couple de matrices, préciser l'opération élémentaire qui relie les deux matrices et décrire son effet sur leur déterminant.

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ kc & kd \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 + 3k & 6 + 4k \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 8 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & k & k \\ -3 & 8 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Corrigé.

a) $L_1 \leftrightarrow L_2$: changement de signe du déterminant.

b) $L_2 \leftarrow kL_2$: multiplication du déterminant par k.

c) $L_2 \leftarrow L_2 + kL_1$: déterminant inchangé.

d) $L_1 \leftarrow L_1 + kL_2$: déterminant inchangé.

e) $L_1 \leftarrow kL_1$: multiplication du déterminant par k.

f) $L_1 \leftrightarrow L_2$: changement de signe du déterminant.

Dans b) et e), l'hypothèse $k \neq 0$ garantit que l'opération est réversible. La formule sur le déterminant reste vraie pour $k = 0$, mais il ne s'agit alors plus d'une opération élémentaire préservant l'équivalence par lignes.

Exercice 7.6.

Calculer les déterminants des matrices élémentaires $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé.

Les deux matrices sont triangulaires inférieures avec trois coefficients diagonaux égaux à 1. Leurs déterminants valent donc 1, quel que soit k.

Exercice 7.7.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice $5A$. La relation $\det(5A) = 5\det(A)$ est-elle vraie ?

Corrigé.

On a $5A = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$, $\det A = 2$ et $\det(5A) = 150 - 100 = 50$. Ainsi, $\det(5A) = 25 \det A$, et non $5 \det A = 10$.

Exercice 7.8.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et soit k un scalaire. Exprimer $\det(kA)$ en fonction de k et $\det(A)$.

Corrigé.

Directement, $\det(kA) = (ka)(kd) - (kb)(kc) = k^2(ad - bc) = k^2 \det A$. En taille n, le facteur serait k^n, par multilinéarité selon les lignes.

Exercice 7.9.

Chacune des quatre relations ci-dessous illustre une propriété des déterminants. Énoncer cette propriété.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

Corrigé.

a) L'échange des deux premières lignes change le signe du déterminant. Le signe moins est indispensable dans l'égalité de l'énoncé.

b) Multiplier la première ligne par 2 multiplie le déterminant par 2.

c) L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ne change pas le déterminant.

d) L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ ne change pas le déterminant.

Exercice 7.10.

Calculer les déterminants suivants.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Corrigé.

Posons $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

a) Soustraire la première ligne à la deuxième, puis sortir le facteur 2 de la deuxième ligne, donne $2D$.

b) Soustraire la deuxième ligne à la première donne D.

Si une expression développée est souhaitée, $D = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$.

Exercice 7.11.

Montrer que si la matrice A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Corrigé.

De $AA^{-1} = I_n$ et de la multiplicativité du déterminant, on déduit $\det A \det(A^{-1}) = 1$. Puisque A est inversible, $\det A \neq 0$, et la division donne la formule annoncée.

Exercice 7.12.

Soient A et B deux matrices carrées de taille 4 telles que $\det(A) = -1$ et $\det(B) = 2$. Calculer

a) $\det(AB)$

b) $\det(B^5)$

c) $\det(2A)$

d) $\det({}^tA\,A)$

e) $\det(B^{-1}AB)$

Corrigé.

a) $\det(AB) = \det A \det B = -2$.

b) $\det(B^5) = (\det B)^5 = 32$.

c) $\det(2A) = 2^4 \det A = -16$.

d) $\det({}^tAA) = \det({}^tA) \det A = (\det A)^2 = 1$.

e) $\det B = 2 \neq 0$ assure que B^{-1} existe. Alors $\det(B^{-1}AB) = \frac{1}{2}(-1)2 = -1$.

7.3 Déterminant et inversibilité

Exercice 7.13.

Étudier l'inversibilité des matrices suivantes à l'aide de leur déterminant.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Corrigé.

a) Le développement selon la première ligne donne $5(-9+10)-5=0$. La matrice n'est pas inversible. On peut confirmer avec le vecteur non nul $(1,-3,5)^t$ de son noyau.

b) Remplaçons L_4 par $L_4+L_2=(1,0,0,4)$; la première ligne est alors le double de la quatrième. Le déterminant est nul et la matrice n'est pas inversible.

CHAPITRE / 8

Nombres complexes et polynômes

8.1 Racines carrées et factorisation

Exercice 8.1.

Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$. En déduire une racine carrée de $2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$, c'est-à-dire un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Corrigé.

Le module vaut $\sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$, et un argument est $\pi/3$, puisque le nombre s'écrit $4(\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3))$. Tous ses arguments sont $\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Une racine carrée est donc

$$\delta = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

On vérifie $(\sqrt{3} + \mathrm{i})^2 = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$; l'autre racine est $-\delta$.

Exercice 8.2.

Déterminer les racines du polynôme $P(z) = z^3 - 3\mathrm{i}z^2 - (3 + \mathrm{i})z + (2\mathrm{i} - 2)$.

Corrigé.

On remarque $P(-1) = 0$. La division par $z + 1$ donne

$$P(z) = (z + 1)\big(z^2 - (1 + 3\mathrm{i})z - 2 + 2\mathrm{i}\big).$$

Le discriminant du facteur quadratique est $-2\mathrm{i} = (1 - \mathrm{i})^2$. Ses racines sont $(1 + 3\mathrm{i} \pm (1 - \mathrm{i}))/2$, soit $1 + \mathrm{i}$ et $2\mathrm{i}$. Finalement,

$$P(z) = (z + 1)(z - 1 - \mathrm{i})(z - 2\mathrm{i}),$$

et les trois racines sont $-1, 1 + \mathrm{i}, 2\mathrm{i}$.

Exercice 8.3.

a) Déterminer une racine carrée de $5 + 12\mathrm{i}$.

b) Déterminer les racines du polynôme $P(z) = z^3 + (1 + \sqrt{5})z^2 + (-3\mathrm{i} + \sqrt{5})z - 3\mathrm{i}$. (*Indication* : Penser à utiliser à un moment opportun le résultat de la question précédente.)

Corrigé.

a) $(3 + 2\mathrm{i})^2 = 9 - 4 + 12\mathrm{i} = 5 + 12\mathrm{i}$; une racine carrée est $3 + 2\mathrm{i}$.

b) On constate $P(-1) = 0$ et

$$P(z) = (z + 1)(z^2 + \sqrt{5}\,z - 3\mathrm{i}).$$

Le discriminant du facteur quadratique est $5 + 12\mathrm{i}$, dont une racine carrée vient d'être trouvée. Les trois racines sont donc

$$-1, \qquad \frac{-\sqrt{5} + 3 + 2\mathrm{i}}{2}, \qquad \frac{-\sqrt{5} - 3 - 2\mathrm{i}}{2}.$$

CHAPITRE / 9

Valeurs propres et diagonalisation

9.1 Vecteurs propres et espaces propres

Exercice 9.1.

Le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$? Si oui, déterminer la valeur propre associée.

Corrigé.

Le calcul donne $AX = (5, 13, 1)^t$. Si $AX = \lambda X$, la première coordonnée imposerait $\lambda = 5$, mais la deuxième serait alors -10, et non 13. Le vecteur X n'est pas un vecteur propre de A.

Exercice 9.2.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A sont 1, 2 et 3. Déterminer une base de vecteurs propres de A.

Corrigé.

La résolution de $(A - \lambda I_3)X = 0$ donne

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En détail, pour $\lambda = 1$, les équations donnent $y = 5z$, $x = -3z$; pour $\lambda = 2$, elles donnent $y = -2z$, $x = 2z$; pour $\lambda = 3$, elles donnent $y = -z$, $x = z$. Chacun des trois vecteurs affichés est non nul. Ils sont indépendants car associés à trois valeurs propres distinctes, et forment donc une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres. Le déterminant de la matrice de ces colonnes vaut -2.

Exercice 9.3.

Trouver, sans effectuer de calculs mais en justifiant, une valeur propre ainsi que deux vecteurs propres linéairement indépendants de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Corrigé.

Les trois colonnes sont identiques. Les différences des premier et deuxième vecteurs de la base canonique, et des premier et troisième, sont donc annulées par A. Ainsi 0 est valeur propre, avec les deux vecteurs propres indépendants $(1, -1, 0)^t$ et $(1, 0, -1)^t$. L'espace propre associé est le plan $x + y + z = 0$. La direction $(1, 1, 1)^t$ donne par ailleurs la valeur propre 6.

Exercice 9.4.

Soit A une matrice carrée de taille n. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier les réponses.

a) S'il existe un vecteur X tel que $AX = \lambda X$, alors λ est valeur propre de A.

b) La matrice A est non inversible si et seulement si 0 est valeur propre de A.

c) Un scalaire λ est valeur propre de A si et seulement si l'équation $(A - \lambda I_n)X = 0$ admet une solution non nulle, où I_n désigne la matrice identité de taille n.

d) Il peut être difficile de trouver un vecteur propre de A, mais il est en revanche facile de vérifier qu'un vecteur donné est bien vecteur propre de A.

e) Pour trouver les valeurs propres de A, il suffit de réduire A à une forme échelonnée.

f) S'il existe un scalaire λ tel que $AX = \lambda X$, alors X est vecteur propre de A.

g) Deux vecteurs propres X_1 et X_2 linéairement indépendants sont toujours associés à deux valeurs propres distinctes.

h) Les valeurs propres d'une matrice carrée quelconque se lisent sur sa diagonale.

Corrigé.

a) Faux : $X = 0$ vérifie $AX = \lambda X$ pour tout λ, même si λ n'est pas valeur propre. Par exemple, $A = I_n$ et $\lambda = 0$.

b) Vrai : la non-inversibilité équivaut à l'existence d'un vecteur non nul du noyau, donc d'un vecteur propre pour 0.

c) Vrai : c'est exactement $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$.

d) C'est une observation pratique : pour un candidat non nul X, il suffit de calculer AX et de vérifier sa proportionnalité à X. Cela ne constitue pas un théorème de complexité ; la recherche et la vérification sont deux tâches différentes.

e) Faux : les opérations sur les lignes ne préservent pas les valeurs propres. Par exemple, $\mathrm{diag}(2, 3)$ se réduit à I_2, alors que leurs spectres sont $\{2, 3\}$ et $\{1\}$.

f) Faux : il manque $X \neq 0$; le vecteur nul n'est jamais un vecteur propre.

g) Faux : pour $A = I_2$, les deux vecteurs de la base canonique sont indépendants et associés à la même valeur propre 1.

h) Faux : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres $1, -1$, bien que sa diagonale soit nulle. La lecture sur la diagonale est valable pour une matrice triangulaire.

9.2 Puissances et polynôme caractéristique

Exercice 9.5.

Soient U et V deux vecteurs propres d'une matrice A, respectivement associés aux valeurs propres λ et μ, et soient c_1 et c_2 deux scalaires. On pose $X_k = c_1\lambda^k U + c_2\mu^k V$, avec $k \in \mathbb{N}$, en convenant que $\lambda^0 = \mu^0 = 1$, y compris si une valeur propre est nulle.

a) Quelle est par définition l'expression de X_{k+1} ?

b) Calculer AX_k à partir de la définition de X_k et montrer que $AX_k = X_{k+1}$. (*Remarque* : Ce calcul montre donc que la suite (X_k) définie ci-dessus vérifie la relation de récurrence linéaire $X_{k+1} = AX_k$, pour $k \in \mathbb{N}$.)

Corrigé.

a) Par définition, $X_{k+1} = c_1\lambda^{k+1}U + c_2\mu^{k+1}V$.

b) Par linéarité et par les relations propres,

$$AX_k = c_1\lambda^k AU + c_2\mu^k AV = c_1\lambda^{k+1}U + c_2\mu^{k+1}V = X_{k+1}.$$

Pour $k = 0$, on lit $X_0 = c_1U + c_2V$, conformément à la convention indiquée dans l'énoncé.

Exercice 9.6.

Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres réelles des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Corrigé.

On adopte la convention du cours $\chi_A(t) = \det(A - tI)$.

$$\chi_A(t) = (9-t)(5-t) + 4 = t^2 - 14t + 49 = (t-7)^2.$$

La seule valeur propre de A est 7, de multiplicité algébrique 2.

Pour B, on développe selon la première ligne, puis on utilise la triangularité du mineur :

$$\chi_B(t) = (3-t)\begin{vmatrix} 1-t & 4 \\ 0 & 4-t \end{vmatrix} = (3-t)(1-t)(4-t).$$

Ses valeurs propres réelles sont $1, 3, 4$, toutes simples.

Exercice 9.7.

Soit A une matrice carrée de taille n. On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que toutes ses racines complexes sont réelles.

a) Montrer que $\det(A - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de A, écrites autant de fois dans cette liste que leur multiplicité.

b) En déduire que $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$. (*Remarque* : Ce résultat peut se généraliser à toute matrice réelle en tenant compte des racines complexes du polynôme caractéristique de A.)

Corrigé.

a) Par hypothèse, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. Son degré est n et son coefficient dominant est $(-1)^n$. Avec les racines répétées selon leur multiplicité,

$$\chi_A(t) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n}(t - \lambda_j) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda_j - t).$$

b) En prenant $t = 0$, on obtient $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$. Pour une matrice réelle quelconque, on applique exactement le même raisonnement dans $\mathbb{C}$, où le polynôme caractéristique est toujours scindé. Les racines non réelles sont alors prises en compte, avec leurs multiplicités.

9.3 Diagonalisation sur le corps des complexes

On travaille sur $\mathbb{C}$, avec $\mathrm{i}^2 = -1$.

Exercice 9.8.

On admet que les valeurs propres de la matrice $N = \begin{pmatrix} 7-3\mathrm{i} & 5+\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ -2+8\mathrm{i} & -2+2\mathrm{i} & -4-\mathrm{i} \\ -4+6\mathrm{i} & -5+5\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}$ sont égales à $-1-2\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$ et $3-\mathrm{i}$.

a) La matrice N est-elle diagonalisable ? Justifier la réponse.

b) Déterminer une base du sous-espace propre relatif à la valeur propre $3-\mathrm{i}$.

Corrigé.

a) Oui, sur $\mathbb{C}$: N est de taille 3 et possède trois valeurs propres distinctes. Son polynôme caractéristique, avec la convention du cours, est

$$\chi_N(t) = (-1-2\mathrm{i}-t)(1+\mathrm{i}-t)(3-\mathrm{i}-t).$$

b) La résolution de $(N-(3-\mathrm{i})I_3)X = 0$ conduit à $x = 0$ et $y = -(1+\mathrm{i})z/2$. Pour le voir sans divisions compliquées, L_2+2L_1 donne $(6+4\mathrm{i})x+(5+5\mathrm{i})y+5\mathrm{i}z = 0$, tandis que L_3+L_1 donne $4\mathrm{i}x+6\mathrm{i}y+(-3+3\mathrm{i})z = 0$; l'élimination conduit aux relations annoncées. On peut aussi réduire directement la matrice à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (1+\mathrm{i})/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une base de l'espace propre est donc constituée du vecteur $(0, -1-\mathrm{i}, 2)^t$. La substitution directe dans $NX = (3-\mathrm{i})X$ vérifie ce résultat.

CHAPITRE / 10

Équations différentielles

10.1 Équations linéaires du premier ordre et raccordement

Exercice 10.1.

On considère l'équation

$$ty' - (1+t)y = -t^2. \tag{10.1}$$

a) Si y désigne une solution de (10.1), alors que vaut $y(0)$?

b) Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$.

c) Existe-t-il des solutions y telles que $y(0) = 1$? Si oui, les expliciter.

Corrigé.

a) Pour toute solution définie en 0, l'équation évaluée en 0 donne $-y(0) = 0$, donc $y(0) = 0$.

b) Sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, on divise par t : $y' - (1 + 1/t)y = -t$. Une solution particulière est $y_p(t) = t$, et les solutions homogènes sont $Ct\,\mathrm{e}^t$. Les solutions de part et d'autre de zéro sont donc $t + C_- t\,\mathrm{e}^t$ et $t + C_+ t\,\mathrm{e}^t$.

Elles tendent toutes vers 0 en zéro. Pour les raccorder en une solution dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut toutefois que les dérivées à gauche et à droite coïncident, c'est-à-dire $1 + C_- = 1 + C_+$. Ainsi $C_- = C_+ = C$, et toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ sont

$$y(t) = t + Ct\,\mathrm{e}^t, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Elles sont en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$ et vérifient aussi l'équation en zéro. La seule donnée $y(0) = 0$ ne détermine donc pas une solution unique, car le coefficient de y' s'annule en ce point.

c) Non : l'équation impose nécessairement $y(0) = 0$.

10.2 Équation de Riccati

Exercice 10.2.

On se propose de déterminer toutes les solutions réelles, ainsi que leurs intervalles maximaux de définition contenus dans $]0, \infty[$, de l'équation différentielle

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2. \tag{10.2}$$

a) Déterminer $a \in]0, \infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (10.2).

b) Montrer que le changement de fonction inconnue $y(x) = y_0(x) - \dfrac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (10.2) en l'équation différentielle

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \tag{10.3}$$

c) Intégrer (10.3) sur $]0, \infty[$. Conclure.

Corrigé.

a) Pour $y(x) = ax$, le membre de gauche vaut $a - a - a^2x^2 = -a^2x^2$. Il faut donc $a^2 = 9$, et la condition $a > 0$ impose $a = 3$. Ainsi $y_0(x) = 3x$.

b) Sur un intervalle où $z \neq 0$, on pose $y = 3x - 1/z$. On a $y' = 3 + z'/z^2$ et

$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2 + \frac{z' + (6x + 1/x)z - 1}{z^2}.$$

L'équation initiale équivaut donc à $z' + (6x + 1/x)z = 1$.

c) Sur $]0, +\infty[$, un facteur intégrant est $x\,\mathrm{e}^{3x^2}$. Ainsi

$$(x\,\mathrm{e}^{3x^2}\,z)' = x\,\mathrm{e}^{3x^2}, \qquad z(x) = \frac{1 + C\,\mathrm{e}^{-3x^2}}{6x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Outre la solution $y_0(x) = 3x$, on obtient

$$y_C(x) = 3x - \frac{6x}{1 + C\,\mathrm{e}^{-3x^2}} = 3x\frac{C\,\mathrm{e}^{-3x^2} - 1}{C\,\mathrm{e}^{-3x^2} + 1}.$$

Si $C \geq -1$, le dénominateur ne s'annule pas pour $x > 0$: l'intervalle maximal est $]0, +\infty[$. Pour $C = -1$, l'annulation en $x = 0$ ne change pas cette conclusion, puisque 0 est exclu du domaine de l'équation.

Si $C < -1$, le dénominateur s'annule en un unique point $a_C = \sqrt{\log(-C)/3} > 0$. Les deux intervalles maximaux sont alors $]0, a_C[$ et $]a_C, +\infty[$. La solution diverge à l'approche de a_C : aucune prolongation à travers ce point n'est possible.

Enfin, ces solutions sont exhaustives. En effet, si une solution rencontre y_0 en un point strictement positif, l'unicité locale pour $y' = y/x + y^2 - 9x^2$ impose qu'elle coïncide avec y_0 sur son intervalle. Sinon, $y - y_0$ ne s'annule jamais et le changement $z = -1/(y - y_0)$ est valable. Le choix $C = 0$ redonne en particulier la solution $y = -3x$.

10.3 Équations linéaires du second ordre

Exercice 10.3.

Résoudre l'équation $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$.

Corrigé.

L'équation caractéristique est $(r - 1)(r - 2) = 0$. Les solutions homogènes sont $A\,\mathrm{e}^x + B\,\mathrm{e}^{2x}$. Comme 1 est racine simple, cherchons une solution particulière $ax\,\mathrm{e}^x$. Substitution donne $-a\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$, donc $a = -1$. Toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ sont

$$y(x) = A\,\mathrm{e}^x + B\,\mathrm{e}^{2x} - x\,\mathrm{e}^x\,.$$

Exercice 10.4.

On considère l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 2x + 1$.

a) Déterminer la solution générale de cette équation.

b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 0$ et la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$. Étudier les variations de f.

Corrigé.

a) Les racines caractéristiques sont 1 et -2. Pour une solution particulière $ax+b$, on obtient $a-2(ax+b) = 2x+1$, donc $a = -1$, $b = -1$. Ainsi
$$y(x) = A\,\mathrm{e}^{x} + B\,\mathrm{e}^{-2x} - x - 1.$$

b) Pour qu'il y ait une asymptote oblique en $+\infty$, il faut et il suffit que $A = 0$. La condition $f(0) = 0$ impose alors $B = 1$. La solution est $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} - x - 1$, avec asymptote $y = -x - 1$ en $+\infty$; sa courbe reste au-dessus de cette droite. Comme $f'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x} - 1 < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, de $+\infty$ lorsque $x \to -\infty$ à $-\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 10.5.

On considère l'équation $y'' + 2y' + 2y = t\,\mathrm{e}^{2t}$.

a) Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver ensuite la solution telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Corrigé.

a) L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$ a pour racines $-1 \pm \mathrm{i}$. La solution homogène réelle est $\mathrm{e}^{-t}(A\cos t + B\sin t)$. Pour la solution particulière, posons $y_p(t) = (at + b)\,\mathrm{e}^{2t}$. Alors
$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = \mathrm{e}^{2t}\big(10at + 6a + 10b\big).$$
On obtient $a = 1/10$, $b = -3/50$, donc
$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}(A\cos t + B\sin t) + \left(\frac{t}{10} - \frac{3}{50}\right)\mathrm{e}^{2t}.$$

b) Les conditions initiales donnent $A - 3/50 = 1$ et $B - A - 1/50 = 0$. Par conséquent $A = 53/50$, $B = 27/25$, et
$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{50}(53\cos t + 54\sin t) + \frac{\mathrm{e}^{2t}}{50}(5t - 3).$$
La substitution vérifie l'équation, ainsi que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Troisième partie

Annexes

Détermination des racines d'un polynôme

Les résultats présentés dans le chapitre 3, en particulier la proposition 3.4, montrent que la détermination du spectre d'une matrice carrée A passe par la recherche des racines de son polynôme caractéristique χ_A. Il est donc utile de présenter les méthodes usuelles à appliquer lors de la recherche des racines d'un polynôme.

Le polynôme caractéristique d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$, qui peut désigner l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. On peut donc toujours considérer qu'un tel polynôme est à coefficients dans $\mathbb{C}$, chercher ses racines dans $\mathbb{C}$, et *a posteriori* ne retenir éventuellement que les racines appartenant à $\mathbb{R}$ dans le cas où on avait $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Le cas des polynômes de degré 1 à coefficients dans $\mathbb{C}$ est élémentaire. Un tel polynôme s'écrit $P(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. Ce polynôme possède une unique racine, qui est $-b/a$. On suppose donc dans ce qui suit que les polynômes à étudier sont de degré supérieur ou égal à 2.

A.1 Polynômes de degré 2

Un polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$. On considère alors le *discriminant* du polynôme, défini par $\Delta = b^2 - 4ac$. Il y a alors deux cas possibles :

- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme P possède une unique racine, à savoir $-\dfrac{b}{2a}$, et sa forme factorisée est $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.
- Si $\Delta \neq 0$, alors on note δ un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$, le polynôme P possède deux racines distinctes $-\dfrac{b-\delta}{2a}$ et $-\dfrac{b+\delta}{2a}$, et sa forme factorisée est $P(x) = a\left(x + \dfrac{b-\delta}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b+\delta}{2a}\right)$.

Dans le cas d'un polynôme à coefficients a, b, c réels, le discriminant Δ est un nombre réel lui aussi. Si $\Delta > 0$, on peut choisir $\delta = \sqrt{\Delta}$. Et si $\Delta < 0$, on peut prendre $\delta = \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$.

Si le polynôme est à coefficients a, b, c complexes, le discriminant Δ peut être un nombre complexe également. S'il est non nul, pour trouver δ convenable, on écrit Δ sous sa forme exponentielle $\Delta = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho\cos(\theta) + \mathrm{i}\rho\sin(\theta)$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \,]-\pi, \pi]$, puis on prend par exemple $\delta = \sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$.

Exemples A.1.
- Le polynôme $P(x) = 2x^2 - 4x + 2$ a un discriminant nul, et a donc pour unique racine 1. Sa forme factorisée est $P(x) = 2(x-1)^2$.
- Le polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$. On peut donc choisir $\delta = \mathrm{i}\sqrt{3}$. Les racines sont alors $-\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, et la forme factorisée est $P(x) = \left(x + \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)$.
- Le polynôme $P(x) = x^2 + \mathrm{i}$ a pour discriminant $\Delta = -4\mathrm{i} = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$. On peut donc choisir $\delta = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = (1-\mathrm{i})\sqrt{2}$. Les racines du polynôme sont alors $-(1-\mathrm{i})\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $(1-\mathrm{i})\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et la forme factorisée est donnée par $P(x) = \left(x + (1-\mathrm{i})\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - (1-\mathrm{i})\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

A.2 Polynômes de degré au moins 3

Exposer des méthodes générales dans le cas d'un polynôme P de degré $n \geq 3$ est franchement plus délicat. On se contente donc de mentionner la méthode heuristique consistant à chercher des racines dites *évidentes* du

polynôme. Concrètement, on teste si des entiers petits en valeur absolue, par exemple $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, *etc.*, en sont racines.

Si on trouve de la sorte une valeur x_0 telle que $P(x_0) = 0$, alors on sait qu'il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ pour tout x. Pour déterminer les coefficients de ce nouveau polynôme Q, on peut l'écrire sous la forme $Q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, puis développer le produit $(x - x_0)Q(x)$, et enfin identifier deux à deux les termes de même degré du produit ainsi calculé et du polynôme $P(x)$ pour trouver des relations permettant de déduire les coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$.

Si le polynôme Q est de degré 2, on peut déterminer ses racines grâce à la méthode de la section A.1. Sinon, on peut chercher une racine évidente de Q et poursuivre de la même manière, à condition d'en trouver une à chaque étape. Cette méthode ne garantit pas qu'on atteigne un facteur de degré 2 : par exemple, $x^3 - 2$ n'a aucune racine entière. L'échec de la recherche de racines évidentes ne signifie donc pas que le polynôme n'a pas de racines.

Exemple A.2. On considère le polynôme $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x - 4$. On remarque que 2 est une racine évidente en calculant facilement $P(2) = 0$. On cherche donc un polynôme Q de degré 2 tel que $P(x) = (x-2)Q(x)$. En cherchant Q sous la forme $Q(x) = ax^2 + bx + c$, en développant le produit, puis en identifiant les deux membres, on obtient que pour tout x,

$$3x^3 - 7x^2 + 4x - 4 = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c.$$

On peut alors identifier les termes de même degré, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} a = 3 \\ b - 2a = -7 \\ c - 2b = 4 \\ -2c = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 2. \end{cases}$$

On en déduit que $Q(x) = 3x^2 - x + 2$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = -23$. En prenant $\delta = \mathrm{i}\sqrt{23}$, on en déduit que les racines de Q sont données par $\dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{23}}{6}$ et $\dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{23}}{6}$. Finalement, le polynôme P admet pour racines les nombres 2, $\dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{23}}{6}$ et $\dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{23}}{6}$, et sa forme factorisée est donnée par $P(x) = 3(x - 2)\left(x - \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{23}}{6}\right)\left(x - \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{23}}{6}\right)$.

Le groupe symétrique

B.1 Préliminaires

On renvoie à la définition 2.1 pour la notion de permutation et de groupe symétrique. On rappelle qu'il est courant de présenter une permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, appartenant donc au groupe symétrique de degré n, sous la forme matricielle (2.1), soit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Cela permet d'écrire rapidement la composée $\sigma \circ \sigma'$ de deux permutations, plus communément appelée de leur *produit*, noté $\sigma\sigma'$. De même, l'application réciproque σ^{-1} d'une permutation, aussi appelée son *inverse*, s'obtient simplement : échanger les deux lignes de la matrice, puis réarranger les colonnes par ordre croissant selon la première ligne.

En regardant si les deux éléments des colonnes sont identiques ou non, on peut aussi déterminer facilement le *support* d'une permutation σ, défini comme l'ensemble des entiers qu'elle ne laisse pas fixes :

$$\operatorname{supp}(\sigma) = \{x \in \{1, \dots, n\} \mid \sigma(x) \neq x\}.$$

Deux permutations sont qualifiées de *disjointes* si leurs supports sont des ensembles disjoints, c'est-à-dire n'ayant aucun élément en commun. On peut alors montrer que deux permutations disjointes σ et σ' *commutent* : leur produit (pour la composition) effectué dans un ordre ou dans l'autre conduit aux mêmes permutations, soit $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$.

Exemple B.1. La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ admet pour support l'ensemble $\{1, 2, 4\}$ et pour inverse la permutation $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

B.2 Décomposition en produit de cycles

Parmi les permutations, certaines ont une forme particulière et servent de briques élémentaires permettant d'engendrer toutes les autres.

Définition B.2 (Cycle). Soit un entier $n \geq 2$. Pour tout $p \in \{2, \dots, n\}$, on appelle *p-cycle* (ou *cycle de longueur p*) de $\{1, \dots, n\}$ toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ telle qu'il existe p entiers distincts $x_1, \dots, x_p \in \{1, \dots, n\}$ vérifiant

$$\operatorname{supp}(\sigma) = \{x_1, \dots, x_p\} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \sigma(x_1) = x_2 \\ \sigma(x_2) = x_3 \\ \quad\vdots \\ \sigma(x_{p-1}) = x_p \\ \sigma(x_p) = x_1. \end{cases}$$

Un tel p-cycle est noté $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \end{pmatrix}$, mais peut aussi se noter $\sigma = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_p & x_1 \end{pmatrix}$, *etc.*

Proposition B.3. *Toute permutation distincte de l'application identité se décompose de manière unique, à l'ordre des facteurs près, comme un produit de cycles disjoints.*

Démonstration. Soit σ une permutation de $\{1, \dots, n\}$. Pour tout élément x de cet ensemble, on note $\mathcal{O}(x)$ l'ensemble des images de x par toutes les itérées (ses composées avec elle-même) successives de σ et de son inverse :

$$\mathcal{O}(x) = \left\{\sigma^k(x),\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Cet ensemble s'appelle l'*orbite* de x sous l'action de σ.

On observe que pour deux éléments quelconques x et x', les orbites $\mathcal{O}(x)$ et $\mathcal{O}(x')$ sont soit disjointes, soit égales. (En effet, si elles ont un élément en commun, alors celui-ci s'écrit à la fois $\sigma^k(x)$ et $\sigma^{k'}(x')$, de sorte que $x' = \sigma^{k-k'}(x)$, ce qui implique finalement qu'un élement appartient à $\mathcal{O}(x)$ si et seulement si il appartient à $\mathcal{O}(x')$.)

On considère maintenant toutes les orbites $\mathcal{O}(x)$ contenant au moins deux éléments. Elles sont au nombre de r, avec $r \geq 1$ (sinon la permutation serait l'identité), et on les représente par des éléments $x_1, \dots, x_r$ tels que les orbites associées $\mathcal{O}(x_i)$ sont disjoints. Pour tout indice i, l'ensemble $\mathcal{O}(x_i)$ est fini, donc il existe un entier $p_i \geq 2$ minimal pour lequel $\sigma^{p_i}(x_i) = x_i$. Ainsi, $\mathcal{O}(x_i)$ est en fait l'ensemble constitué de $x_i, \sigma(x_i), \dots, \sigma^{p_i-1}(x_i)$, et il s'agit du support du p_i-cycle $\sigma_i = \begin{pmatrix} x_i & \sigma(x_i) & \cdots & \sigma^{p_i-1}(x_i) \end{pmatrix}$.

Comme leurs supports $\mathcal{O}(x_i)$ sont disjoints, les cycles σ_i commutent. Leur produit, considéré dans n'importe quel ordre, donnera donc toujours la même permutation, et cette permutation est en fait σ.

En effet, si x est un élément tel que $\mathcal{O}(x) = \{x\}$, alors x est un point fixe de σ et n'appartient au support d'aucun cycle σ_i, donc est également fixé par chacun d'entre eux. On a donc $\sigma(x) = x = \sigma_1 \cdots \sigma_r(x)$. Si au contraire x appartient à un des ensembles $\mathcal{O}(x_i)$, alors $x = \sigma^k(x_i)$ pour un entier $k \in \{0, \dots, p_i - 1\}$, et x est fixé par les cycles autres que σ_i puisqu'il n'appartient pas à leurs supports. Ainsi, $\sigma_1 \cdots \sigma_r(x) = \sigma_i(x) = \sigma_i\sigma^k(x_i) = \sigma^{k+1}(x_i) = \sigma\sigma^k(x_i) = \sigma(x)$. On a donc bien $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r$.

Pour montrer l'unicité, supposons que σ s'écrive sous la forme $\sigma_1 \cdots \sigma_r$ et sous la forme $\varsigma_1 \cdots \varsigma_s$, comme produit de cycles disjoints. Considérons un élément x du support de σ. Les supports des cycles σ_i sont disjoints et leur union redonne le support de σ, donc il existe un unique entier i tel que $x \in \operatorname{supp}(\sigma_i)$. Quitte à échanger l'ordre des cycles, on peut supposer que $i = 1$. Ainsi, $x \in \operatorname{supp}(\sigma_1)$. Pour la même raison, on a également $x \in \operatorname{supp}(\varsigma_1)$. On en déduit que $\sigma(x) = \sigma_1(x) = \varsigma_1(x)$. Par récurrence sur $k \geq 1$, on voit alors que $\sigma^k(x) = \sigma_1^k(x) = \varsigma_1^k(x)$. Cela implique que les cycles σ_1 et ς_1 sont égaux, et leur support commun est l'orbite $\mathcal{O}(x)$. De proche en proche, on montre alors que $r = s$ et les cycles σ_i et ς_j s'identifient deux à deux. □

B.3 Décomposition en produit de transpositions

Définition B.4 (Transposition)**.** Soit un entier $n \geq 2$. On appelle transposition de $\{1, \dots, n\}$ tout cycle de longueur 2 de cet ensemble.

Proposition B.5. *Soient deux entiers $n \geq 2$ et $p \in \{2, \dots, n\}$. Tout cycle de longueur p de $\{1, \dots, n\}$ se décompose comme un produit de transpositions.*

Démonstration. Il suffit d'observer que le p-cycle se décompose ainsi :

$$(x_1 \ \cdots \ x_p) = (x_1\ x_2)(x_2\ x_3) \cdots (x_{p-1}\ x_p).$$

□

Exemples B.6. • La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est le produit des cycles $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}$. On observe aussi qu'elle fixe l'élément 2. En outre, le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ est égal au produit $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}$. Finalement, la permutation σ s'écrit comme le produit de transpositions $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}$.

- Si la décomposition en produit de cycles disjoints est unique (à l'ordre près des facteurs), celle en produit de transpositions ne l'est pas nécessairement. En effet, par exemple, le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est égal au produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, mais aussi à $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$.

La conséquence des propositions B.3 et B.5 est que toute permutation peut s'écrire comme le produit (autrement dit, la composée) d'un certain nombre de transpositions, voir l'énoncé ci-dessous. Ainsi, réarranger un ensemble fini peut se faire au moyen d'échanges successifs d'éléments deux à deux.

Théorème B.7. *Soit un entier $n \geq 2$. Toute permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ se décompose comme un produit de transpositions. Ainsi, le groupe symétrique de degré n est engendré par les transpositions.*

Démonstration. Tout d'abord, le cas de l'application identité se règle en observant qu'il s'agit du produit de la transposition $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ avec elle-même. Ensuite, si la permutation considérée n'est pas l'identité, la proposition B.3 garantit qu'elle se décompose comme un produit de cycles, et la proposition B.5 montre que chacun de ces cycles se décompose ensuite comme un produit de transpositions. □

B.4 Signature

On rappelle que la notion de signature $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation σ a été introduite par la définition 2.2 en passant par le nombre d'inversions. On ajoute à cette définition le point de vocabulaire suivant.

Définition B.8. Soit un entier $n \geq 2$. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est qualifiée de *paire* si sa signature vérifie $\varepsilon(\sigma) = 1$, et d'*impaire* si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

La notion de signature est aussi liée au nombre de transpositions qui permettent de décomposer une permutation. La décomposition d'une permutation en produit de transpositions n'étant pas unique (voir l'exemple ci-dessus), ce nombre de transpositions ne l'est pas non plus. Cependant, le résultat suivant indique que deux décompositions quelconques font intervenir des nombres de transpositions ayant toujours la même parité, et que cette parité correspond à celle de la permutation considérée.

Théorème B.9. *Soit un entier $n \geq 1$. La signature est l'unique application du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ qui attribue la valeur -1 à toute transposition, et qui vérifie $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour tous $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$.*

Démonstration. La transposition qui échange i et j, avec $i < j$, possède $2(j - i) - 1$ inversions : le couple (i, j) et les couples (i, k), (k, j) pour $i < k < j$. Ce nombre est impair, donc sa signature vaut -1.

Pour montrer que la signature d'un produit de deux permutations est le produit de leurs signatures, on considère le polynôme P en n indéterminées qui est défini par

$$P(X_1, \dots, X_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i).$$

On montre que pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le polynôme P pris sur les indéterminées $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}$ est, au signe près, identique au polynôme P de départ. Plus précisément, on a

$$P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) P(X_1, \dots, X_n).$$

En effet, on commence par observer que $P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ est le produit des deux blocs suivants :

$$\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} (X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)}) \qquad \text{et} \qquad \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \sigma(j) < \sigma(i)}} (X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)}).$$

Comme la permutation σ est une bijection, on peut procéder aux changements d'indices $i' = \sigma(i)$ et $j' = \sigma(j)$, et le premier bloc vérifie

$$\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} (X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)}) = \prod_{\substack{1 \leq i' < j' \leq n \\ \sigma^{-1}(i') < \sigma^{-1}(j')}} (X_{j'} - X_{i'}).$$

On prend ensuite soin de remplacer chaque facteur du second bloc par son opposé, de façon à retrouver la forme du polynôme initial. Comme les couples d'indices du second bloc correspondent aux inversions de la permutation σ, cela revient à multiplier par -1 autant de fois que le nombre d'inversions :

$$\prod_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ \sigma(j)<\sigma(i)}} (X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)}) = (-1)^{N(\sigma)} \prod_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ \sigma(j)<\sigma(i)}} (X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)}).$$

On fait alors appel à la définition de la signature, et on procède aux changements d'indices $i' = \sigma(j)$ et $j' = \sigma(i)$, de sorte que

$$(-1)^{N(\sigma)} \prod_{\substack{1\leq i<j\leq n\\ \sigma(j)<\sigma(i)}} (X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)}) = \varepsilon(\sigma) \prod_{\substack{1\leq i'<j'\leq n\\ \sigma^{-1}(j')<\sigma^{-1}(i')}} (X_{j'} - X_{i'}).$$

On obtient le résultat attendu en multipliant les nouvelles expressions obtenues pour chacun des deux blocs.

Par conséquent, si σ et σ' désignent deux permutations dans $\mathfrak{S}_n$, on peut faire le changement d'indéterminée $Y_i = X_{\sigma(i)}$ pour tout entier i, et écrire

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma\sigma')P(X_1,\dots,X_n) &= P(X_{\sigma\sigma'(1)},\dots,X_{\sigma\sigma'(n)}) = P(Y_{\sigma'(1)},\dots,Y_{\sigma'(n)})\\ &= \varepsilon(\sigma')P(Y_1,\dots,Y_n) = \varepsilon(\sigma')P(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})\\ &= \varepsilon(\sigma')\varepsilon(\sigma)P(X_1,\dots,X_n).\end{aligned}$$

On conclut que $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Il reste à établir l'unicité de la signature ε pour ces propriétés. Soit η une application du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1,1\}$ qui attribue la valeur -1 aux transpositions, et qui vérifie $\eta(\sigma\sigma') = \eta(\sigma)\eta(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'. Si $n = 1$, la multiplicativité impose $\eta(\mathrm{id}) = 1$, d'où l'unicité. Si $n \geq 2$, on sait par le théorème B.7 que toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ s'écrit comme un produit de transpositions $\tau_1 \cdots \tau_p$. On a alors $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1 \cdots \tau_p) = \varepsilon(\tau_1) \cdots \varepsilon(\tau_p) = (-1)^p$, et de même $\eta(\sigma) = (-1)^p$. Par conséquent, $\varepsilon(\sigma) = \eta(\sigma)$ pour toute permutation σ. □

Corollaire B.10. *Soient deux entiers tels que $2 \leq p \leq n$. La signature d'un cycle de longueur p de $\{1,\dots,n\}$ est égale à $(-1)^{p-1}$.*

Démonstration. On sait qu'un p-cycle $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme produit de $p-1$ transpositions : $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} x_{p-1} & x_p \end{pmatrix}$. On conclut grâce au théorème B.9. □