université
PARIS-SACLAY

FACULTÉ
DES SCIENCES
D'ORSAY

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

Licence 3 et Master 1 de mathématiques

Probabilités

Exercices corrigés

Arnaud Durand
Département de Mathématiques d'Orsay
arnaud.durand@universite-paris-saclay.fr

Avant-propos

Ce document rassemble des exercices de probabilités de niveau L3 et M1, classés par thème et accompagnés de leurs corrigés. Ces exercices ont été conçus pour des enseignements que j'ai assurés conjointement avec R. Cerf, C. Lacour, J.-F. Le Gall, S. Lemaire et E. Maurel-Segala entre 2008 et 2013.

Les simulations étaient à l'époque réalisées en Matlab.

Table des matières

I — Énoncés 3

1. Espaces de probabilités et dénombrement 3
2. Lois usuelles et changements de variables 13
3. Convergence presque sûre et lois des grands nombres 23
4. Fonctions caractéristiques et convergence en loi 31
5. Statistique, estimation et tests 41
6. Vecteurs gaussiens 49
7. Conditionnement, marches aléatoires et martingales 52
8. Chaînes de Markov 62
9. Processus de Poisson et mouvement brownien 72
10. Simulation et travaux pratiques 74

II — Corrigés 88

1. Espaces de probabilités et dénombrement 88
2. Lois usuelles et changements de variables 101
3. Convergence presque sûre et lois des grands nombres 115
4. Fonctions caractéristiques et convergence en loi 128
5. Statistique, estimation et tests 144
6. Vecteurs gaussiens 155
7. Conditionnement, marches aléatoires et martingales 159
8. Chaînes de Markov 176
9. Processus de Poisson et mouvement brownien 187
10. Simulation et travaux pratiques 191

1. Espaces de probabilités et dénombrement

Exercice 1.1 — Dés et tirages sans remise

L3 • corrigé, p. 88

On suppose les dés équilibrés, les lancers indépendants et, pour le tirage des jetons, $n \geq 3$.

1. Jean, Luc et Marc lancent chacun un dé.

a) Donner un espace de probabilité (Ω, A, P) associé à cette expérience aléatoire.

b) Soient $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ deux numéros différents. Calculer la probabilité qu'avec les trois dés, ils obtiennent :

i) deux fois le numéro i et une fois le numéro j.

ii) au moins deux numéros identiques

iii) 9 en additionnant les trois numéros obtenus.

2. Une personne lance trois dés identiques. L'espace de probabilité défini dans la question 1-a convient-il encore pour décrire cette expérience aléatoire ?

3. Jean prend au hasard un jeton dans un sac qui contient n jetons numérotés de 1 à n, puis passe le sac avec les jetons restants à Luc qui en prend un à son tour et le donne ensuite à Marc pour qu'il en choisisse un à son tour.

a) Munir l'espace $(\Omega = \{1, ..., n\}^3, \mathscr{P}(\Omega))$ d'une probabilité P qui rend compte de cette expérience.

b) Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Quelle est la probabilité que Marc tire le numéro k ?

c) Quelle est la probabilité que Marc obtienne un numéro supérieur à ceux de Jean et de Luc ?

Exercice 1.2 — Sondage à réponses aléatoires

L3 • corrigé, p. 88

Pour préserver l'anonymat des répondants à un sondage sur la consommation de drogues, on leur demande à chacun de lancer une pièce bien équilibrée puis de répondre

- "oui" si la pièce tombe sur "face"
- "oui" si la pièce tombe sur "pile" et qu'ils ont consommé de la drogue
- "non" si la pièce tombe sur "pile" et qu'ils n'ont pas consommé de drogue.

Le résultat du lancer de la pièce reste inconnu du sondeur.

1. Donner un espace de probabilité associé à l'expérience "interroger au hasard une personne selon cette technique de sondage".

2. Donner une expression de la probabilité qu'une personne tirée au hasard dans cette population réponde "oui" à ce sondage, en fonction de la proportion p d'individus dans la population ayant déjà consommé de la drogue.

3. Une personne a répondu "oui" au sondage, quelle est la probabilité qu'elle ait déjà consommé de la drogue ?

Exercice 1.3 — Anniversaires

L3 • corrigé, p. 88

On suppose 365 dates possibles, équiprobables et indépendantes entre les personnes.

1. Quelle est la probabilité que parmi r personnes, au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour ? On commencera par donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire.

2. Pour quelles valeurs de r cette probabilité dépasse-t-elle $1/2$?

Exercice 1.4 — Disposition de livres sur une étagère

L3 / M1 • corrigé, p. 88

Soit un entier $n \geq 2$. On suppose que n livres sont posés au hasard côte à côte sur une étagère et que, parmi ces livres, il y en a $k \in \{2, \dots, n\}$ qui sont de l'auteur M.

1. Proposer un codage de la disposition des livres de l'auteur M sur cette étagère qui n'utilise que des 0 et des 1.

2. Quelle est la probabilité pour que tous les livres de l'auteur M soient côte à côte ?
3. Soit $r \geq k$. Avec quelle probabilité tous les livres de l'auteur M sont-ils dans les r premiers livres de l'étagère ?
4. Soit $\ell \in \{k-2, \dots, n-2\}$. Quelle est la probabilité qu'il y ait ℓ livres entre le livre de l'auteur M qui se trouve le plus à gauche sur l'étagère et celui qui se trouve le plus à droite sur l'étagère ? Si $k = 2$, combien de livres est-il le plus probable de trouver entre les deux livres de l'auteur M sur l'étagère ?

Préciser aussi le cas $k = 1$ pour la question des livres consécutifs.

Exercice 1.5 — Crible, dérangements et occupation

L3 / M1 • corrigé, p. 88

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé.

1. Développer $\prod_{i=1}^{n}(1+b_i)$ en regroupant les termes par nombre de facteurs. En déduire la formule du crible
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$
2. En déduire la formule analogue pour le cardinal de l'union de n ensembles finis. Simplifier la formule probabiliste lorsque la probabilité d'une intersection ne dépend que du nombre d'événements intersectés.
3. Une permutation uniforme redistribue les n cadeaux de n personnes. Quelle est la probabilité qu'une personne fixée retrouve son cadeau ? Calculer le nombre D_n de permutations sans point fixe et la probabilité qu'aucune personne ne retrouve son cadeau. Quelle est sa limite ?
4. Déterminer la loi du nombre X_n de personnes retrouvant leur cadeau. Pour k fixé, déterminer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$.
5. On redistribue maintenant des cannes et des chapeaux par deux permutations uniformes indépendantes. Calculer la probabilité qu'aucune personne ne retrouve à la fois sa canne et son chapeau.
6. On place $m \geq 1$ boules indépendamment et uniformément dans $n \geq 1$ boîtes. Quelle est la probabilité qu'une boîte donnée soit vide ? Qu'au moins une boîte soit vide ? Que toutes soient occupées ? Déterminer l'espérance et la variance du nombre de boîtes vides.
7. Combien de mots de longueur $p \geq 4$ sur l'alphabet $\{A, C, G, T\}$ contiennent les quatre lettres ?
8. n voyageurs choisissent indépendamment un wagon parmi n, avec probabilités $p_1, \dots, p_n$. Calculer la probabilité qu'ils soient tous séparés et la maximiser.

Exercice 1.6 — Deux enfants : préciser le conditionnement

L3 / M1 • corrigé, p. 89

On suppose les sexes des enfants indépendants et équiprobables. Chaque information donnée ci-dessous désigne exactement l'événement par lequel on conditionne.

1. Une famille a deux enfants. Sachant qu'au moins l'un est un garçon, quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ? Sachant qu'au moins l'un est une fille, quelle est la probabilité que la famille ait aussi un garçon ?
2. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon sachant que le plus jeune est une fille ?
3. Plus généralement, le nombre N d'enfants vérifie $\mathbb{P}(N = i) = p_i$ pour $i \in \mathbb{N}$. Conditionnellement à N, les sexes restent indépendants et équiprobables. Calculer la probabilité d'un enfant unique sachant que la famille n'a aucune fille. Préciser le rôle de p_0.

Exercice 1.7 — Sexes des enfants et indépendance

L3 • corrigé, p. 89

Soit n un entier supérieur ou égal à deux. On suppose que toutes les repartitions des sexes des enfants d'une famille à n enfants sont équiprobables. Les deux événements :

- M : "la famille de n enfants a des enfants des deux sexes"
- F : "la famille de n enfants a au plus une fille"

sont-ils indépendants ?

Exercice 1.8 — Témoignages et formule de Bayes

L3 • corrigé, p. 89

Les réponses des deux témoins sont supposées indépendantes conditionnellement à la réalisation ou à la non-réalisation de l'événement.

Un juge interroge séparément deux témoins qui ne se connaissent pas afin de savoir si un événement a eu lieu. On supposera que

- chaque témoin a une probabilité p d'affirmer que l'événement a eu lieu alors que cet événement n'a pas eu lieu ;
- chaque témoin a une probabilité q d'affirmer que l'événement n'a pas eu lieu alors que cet événement a eu lieu.

On note a la probabilité que cet événement ait lieu et on suppose que $a, p, q \in]0, 1[$.

1. Donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire.

2. Calculer la probabilité que l'affirmation du premier témoin soit fausse. Les événements "l'affirmation du premier témoin est fausse" et "l'affirmation du deuxième témoin est fausse" sont-ils indépendants ?

3. Quelle est la probabilité que l'événement ait eu lieu si les deux témoins affirment qu'il a eu lieu ?

4. Quelle est la probabilité que l'événement ait eu lieu si au moins un des deux témoins affirme qu'il a eu lieu ?

Exercice 1.9 — Divisibilité et indicatrice d'Euler

L3 • corrigé, p. 90

Soit n un entier strictement positif. On choisit au hasard un des entiers 1, 2, ..., n.
Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note A_k l'événement "le nombre choisi est divisible par k".

1. Calculer la probabilité de l'événement A_k lorsque k divise n.

2. Soit $p_1, \dots, p_\ell$ des nombres premiers 2 à 2 distincts qui divisent n. Les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_\ell}$ forment-ils une famille d'événements indépendants ?

Exercice 1.10 — Parties de dés successives

L3 • corrigé, p. 90

Jean et Luc jouent au jeu de dés suivant : la personne qui commence la partie lance son dé. Elle gagne la partie si son adversaire obtient, en lançant à son tour son dé, un nombre plus petit ou égal au sien. Le joueur qui a gagné commence la partie suivante.

1. Décrire un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ associé à une partie du jeu.
2. Déterminer la probabilité p que le joueur qui a commencé une partie, gagne cette partie.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Jean et Luc font n parties. C'est Jean qui commence la première partie. On désigne par u_k la probabilité que Jean gagne la k-ème partie.
   Donner une relation de récurrence pour la suite (u_k), et en déduire la probabilité que Jean gagne la n-ème partie. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 1.11 — Paradoxe des deux lignes de bus

L3 • corrigé, p. 90

Tous les soirs une personne va en bus dîner à un restaurant qui se trouve dans le quartier Est de la ville ou bien dans un restaurant qui se trouve dans le quartier Ouest de la ville. Pour cela, il se rend à l'arrêt de bus qui se trouve devant chez lui à un instant aléatoire et prend le premier bus qui passe. Deux lignes de bus passent par cet arrêt de bus, l'une dessert le quartier Est et l'autre le quartier Ouest. Les bus d'une ligne passent à cet arrêt toutes les 15 minutes suivant un horaire fixé. Au bout d'une année, la personne s'aperçoit qu'elle n'est allée en moyenne que deux fois par mois dîner dans le quartier Est de la ville. Comment peut-on expliquer cela ?

Exercice 1.12 — Statistiques d'occupation des niveaux d'énergie

L3 • corrigé, p. 90

On considère un système de r particules pouvant être dans un des n niveaux d'énergie $e_1, \dots, e_n$. On définit l'espace des états du système comme l'ensemble des configurations distinguables. On fait l'hypothèse que chaque configuration distinguable est équiprobable. On considère les trois cas suivants :

(i) *Statistique de Maxwell-Boltzmann.* Les r particules sont localisées et donc distinguables.

(ii) *Statistique de Bose-Einstein.* Les r particules sont indistinguables.

(iii) *Statistique de Fermi-Dirac.* Les r particules sont indistinguables et il y a au plus une particule par niveau d'énergie (on suppose que $n \geq r$).

Exemples de configurations dans le cas de 3 particules et deux états d'énergie : les figures 1 et 2 représentent deux configurations identiques pour le modèle (*i*) et (*ii*). Les figures 1 et 3 représentent des configurations distinguables dans le modèle (i) mais indistinguables dans le modèle (ii). Aucune de ces configurations ne sont possibles dans le modèle (iii).

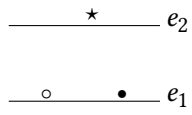


figure 1

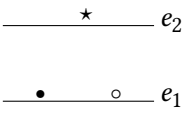


figure 2

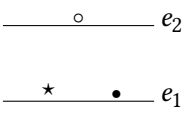


figure 3

1. Construire l'espace de probabilité correspondant à chacun des modèles (i), (ii), (iii).
2. L'état macroscopique du système est déterminé par les nombres r_i de particules dans l'état d'énergie e_i. On modélise l'espace des états macroscopiques par

$$\Omega_{ma} = \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n, \text{ t.q. } r_1 + \cdots + r_n = r\}.$$

   Munir Ω_{ma} de la probabilité naturelle dans chacun des cas (i), (ii), (iii). Que peut-on dire dans les cas (ii) et (iii) ?
3. On note $p_{r,n}(k)$ la probabilité qu'un niveau d'énergie donné contienne exactement k particules. Calculer $p_{r,n}(k)$ dans chacun des trois cas (i), (ii) et (iii).
4. Pour chacun des trois modèles (i), (ii) et (iii), donner la limite p_k de $p_{r,n}(k)$ lorsque n et r tendent vers l'infini et le nombre moyen r/n de particules par niveau d'énergie tend vers une quantité fixée $\lambda > 0$ (pour le cas (iii), on supposera que $\lambda \leq 1$). Vérifier que l'on a toujours $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.
5. Dans le modèle (i) puis dans le modèle (ii), déterminer le nombre de configurations distinguables dont au moins un niveau d'énergie est vide.

L'hypothèse que les particules sont distinguables est l'hypothèse usuelle en mécanique classique, l'hypothèse contraire apparait en mécanique quantique : le modèle (ii) est par exemple utilisé avec les photons alors que le modèle (iii) est utilisé avec les électrons, protons, neutrons ...

Application du modèle (i) : $r \geq 1$ messages sont répartis indépendamment et uniformément entre cinq secrétaires. Quelle est la probabilité que chacune reçoive au moins un message ? Retrouver également la probabilité d'un anniversaire commun parmi r personnes, dans le modèle de l'exercice 1.3.

Exercice 1.13 — Dénombrement de trois lancers de dés

M1 • corrigé, p. 91

On jette trois dés. Calculer la probabilité d'obtenir : au moins un six ; exactement un six ; au moins deux faces identiques ; au moins deux faces identiques et la somme des points paire.

Exercice 1.14 — Lancer de dé avec nombre de faces aléatoire

M1 • corrigé, p. 91

On lance un dé à 6 faces. On note X le résultat. On lance alors un dé à X faces. Soit Y le résultat obtenu.

1. Calculer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire les lois de X et de Y.

Exercice 1.15 — Carré d'une variable et loi du chi-deux

M1 • corrigé, p. 92

1. Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité f. Déterminer la fonction de répartition de X^2, puis sa densité.

2. En considérant le cas particulier où X suit une loi normale standard, déterminer la densité de la loi du χ^2 à un degré de liberté.

Exercice 1.16 — Loi zêta et indépendance des diviseurs premiers

M1 • corrigé, p. 92

Pour tout réel $s > 1$, posons $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}.$$

1. Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs. Pour tout $p \in \mathscr{P}$, notons $E_p = \{X \text{ est multiple de } p\}$. Montrer que les évènements E_p, pour $p \in \mathscr{P}$, sont indépendants. En déduire une interprétation probabiliste de la formule d'Euler

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

2. Un entier est dit sans facteur carré s'il n'est divisible par aucun carré parfait excepté 1. Montrer que

$$\mathbb{P}(X \text{ est sans facteur carré}) = \frac{1}{\zeta(2s)}.$$

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\operatorname{pgcd}(X, Y) = n) = \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)}.$$

Exercice 1.17 — La densité naturelle ne définit pas une tribu

M1 • corrigé, p. 93

On dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ admet une densité si $\operatorname{Card}(A \cap \{0, \dots, n\})/n$ admet une limite quand $n \to \infty$. Montrer que la collection des parties de $\mathbb{N}$ qui admettent une densité n'est pas une tribu.

Exercice 1.18 — Formules de Bayes et probabilités totales

M1 • corrigé, p. 93

Soient A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Soit $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une partition mesurable de l'espace, avec $\mathbb{P}(C_i) > 0$ pour tout i.

1. Exprimer $\mathbb{P}(B \mid A)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \mid B)$.

2. En déduire une expression de $\mathbb{P}(B \mid A)$ à partir de $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \mid B)$ et des $\mathbb{P}(A \mid C_i)$ et $\mathbb{P}(C_i)$.

Exercice 1.19 — Indépendance de familles et tribus engendrées

M1 • corrigé, p. 93

Considérons $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, muni de la tribu $\mathscr{F}$ de ses parties et de la probabilité uniforme. Trouver des familles G_1 et G_2 de $\mathscr{F}$ pour lesquelles les deux conditions suivantes sont réalisées simultanément :

(i). les événements A_1 et A_2 sont indépendants quels que soient $A_1 \in G_1$ et $A_2 \in G_2$;

(ii). les tribus $\sigma(G_1)$ et $\sigma(G_2)$ ne sont pas indépendantes.

Exercice 1.20 — Urne où les boules blanches deviennent rouges

L3 • corrigé, p. 93

Une urne contient initialement $b \geq 1$ boules blanches et $r \geq 1$ rouges, $a = b + r$. Une boule rouge tirée est remise ; une blanche est remplacée par une rouge. On note R_n l'événement « le n-ième tirage est rouge », $Y_i = \mathbf{1}_{R_i}$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Calculer $\mathbb{P}(R_1)$ et $\mathbb{P}(R_2)$.

2. Calculer la probabilité de R_n sachant que k blanches ont été tirées auparavant.

3. Justifier $\mathbb{P}(R_{n+1} \mid S_n = k) = (r + n - k)/a$, puis $\mathbb{P}(R_{n+1}) = (r + n - \mathbb{E}S_n)/a$.

4. En déduire une récurrence sur $\mathbb{E}S_n$, puis sur $\mathbb{P}(R_n)$, et une expression explicite de cette dernière.

5. Donner la loi du nombre X de tirages nécessaires pour obtenir la première rouge.

Exercice 1.21 — Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

L3 • corrigé, p. 94

On lance un dé équilibré $n \geq 1$ fois. Les événements A_{ij} d'égalité des résultats aux lancers $i < j$ sont-ils indépendants deux à deux ? Mutuellement ?

Exercice 1.22 — Deux victoires consécutives au tennis

L3 • corrigé, p. 94

Un enfant joue trois parties indépendantes contre ses parents en alternance. Ses probabilités de victoire contre sa mère et son père sont respectivement q et p, avec $p < q$. Pour maximiser la probabilité de deux victoires consécutives, contre qui doit-il commencer ?

Exercice 1.23 — Décodage de deux canaux bruités

L3 • corrigé, p. 94

Une source émet 0 avec probabilité $f = 0{,}6$. Un canal transforme 0 en 1 avec probabilité $a = 0{,}01$, et 1 en 0 avec probabilité $b = 0{,}02$. Quel symbole est le plus probable à la réception et quel est le taux d'erreur ? Deux canaux de mêmes caractéristiques sont indépendants conditionnellement au symbole émis. Déterminer la décision minimisant l'erreur pour chaque paire reçue, les probabilités conditionnelles d'erreur, le taux total d'erreur, et l'indépendance ou non des réceptions.

Exercice 1.24 — Tribu engendrée par une variable

L3 • corrigé, p. 94

Pour $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, montrer que $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ est la plus petite tribu sur Ω rendant X mesurable.

Exercice 1.25 — Dénombrement, lois et inégalités

L3 • corrigé, p. 94

1. Cinq dés équilibrés sont lancés. Donner un espace probabilisé et la probabilité d'obtenir deux six, deux trois et un quatre.
2. Une urne contient deux boules de chacune de trois couleurs. Les tirer sans remise : quelle est la probabilité que les deux boules de chaque couleur soient consécutives ?
3. Deux pannes indépendantes sont uniformes sur un tronçon de 100 km. Calculer la probabilité que la plus proche de l'entrée soit à moins de 10 km, puis, sachant cela, que les deux pannes soient distantes de plus de 60 km.
4. Pour deux exponentielles indépendantes de moyenne $t > 0$, donner la loi de leur différence en valeur absolue.
5. Montrer qu'une variable de carré intégrable est intégrable et rappeler Chebyshev. Avec moyenne 10 et variance 100, majorer $\mathbb{P}(X \geq 100)$.
6. Cinq incidents sont attribués indépendamment et uniformément à trois coursiers. Quelle est la probabilité qu'exactement trois incidents concernent un même coursier ?

Exercice 1.26 — Tirage uniforme et construction par pile ou face

L3 • corrigé, p. 94

Décrire les précautions permettant de modéliser par une loi uniforme le tirage d'une carte parmi 52, puis d'une personne dans une classe ou une ville. Que signifie « au hasard » ? Comment examiner cette hypothèse ? Ramener le tirage à celui d'un entier et construire ce dernier avec une pièce équilibrée.

Exercice 1.27 — Traduire les événements en ensembles

L3 • corrigé, p. 95

Pour trois événements A, B, C, exprimer les événements suivants et leurs complémentaires : seul A se produit ; A, C se produisent mais pas B ; les trois se produisent ; au moins un ; au moins deux ; au plus un ; aucun ; exactement deux ; au plus deux.

Exercice 1.28 — Opérations ensemblistes et additivité

L3 • corrigé, p. 95

Établir la distributivité $(\bigcup_i A_i) \cap B = \bigcup_i (A_i \cap B)$ et les lois de De Morgan. Les interpréter en termes d'événements. Démontrer l'additivité dénombrable d'une probabilité sur un espace dénombrable, définie par des masses. Donner la formule de la probabilité d'une réunion de trois événements.

Exercice 1.29 — Relations entre combinaisons de poker

L3 • corrigé, p. 95

Dans un jeu de 52 cartes, une main est un sous-ensemble uniforme de cinq cartes. Décrire les relations entre « contenir une paire », « contenir un brelan », « former une suite de cinq rangs » et « être de la même couleur », où couleur signifie l'une des quatre enseignes. Préciser les conventions. Les deux derniers événements sont-ils indépendants ?

Exercice 1.30 — Probabilités produits et épreuves répétées

L3 • corrigé, p. 95

Sur des ensembles dénombrables Ω_i munis de masses p_i, montrer que $p(x_1, \dots, x_n) = \prod_i p_i(x_i)$ définit une probabilité. Décrire les événements cylindriques et leurs probabilités, préciser quand ce modèle est pertinent et traiter le cas de masses uniformes. En particulier, montrer que $q^{\sum \omega_i}(1-q)^{n-\sum \omega_i}$ définit une loi sur $\{0,1\}^n$ et l'interpréter.

Exercice 1.31 — Association et probabilités conditionnelles

L3 • corrigé, p. 95

Donner des exemples d'association de deux événements et expliquer pourquoi une association ne suffit pas à établir une causalité. Pour $\mathbb{P}(A) > 0$ et $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, montrer l'équivalence de $\mathbb{P}(A \mid B) \leq \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B \mid A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \mid B^c) \geq \mathbb{P}(A)$. Interpréter aussi les inégalités inverses.

Exercice 1.32 — Origine d'une ampoule défectueuse

L3 • corrigé, p. 95

L'usine A produit deux fois plus d'ampoules que B. Les proportions défectueuses sont 20 % et 5 %. On tire uniformément une ampoule de la production totale. Décrire le modèle, calculer la probabilité d'une ampoule correcte et, sachant qu'elle est défectueuse, la probabilité qu'elle provienne de A.

Exercice 1.33 — Recherche infructueuse d'une lettre

L3 • corrigé, p. 96

Une lettre est dans l'une de trois piles équiprobables. Si elle est dans la pile i, un examen rapide la manque avec probabilité a_i. Après avoir examiné la première pile sans succès, calculer les probabilités de présence dans chacune des trois piles.

Exercice 1.34 — Vrai ou faux : indépendance d'événements

L3 • corrigé, p. 96

Justifier ou réfuter : des événements indépendants disjoints ont au moins une probabilité nulle ; un événement négligeable est indépendant et disjoint de tout événement ; pour $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, l'indépendance de A, B équivaut à $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B^c)$; si E est indépendant de F et de G, il est indépendant de $F \cup G$.

Exercice 1.35 — Rois et as dans une main de cinq cartes

L3 • corrigé, p. 96

Dans une main uniforme de cinq cartes parmi 52, calculer la probabilité des quatre as, puis d'exactement deux rois. Calculer la probabilité d'exactement trois rois sachant qu'il y en a au moins deux. Distinguer si nécessaire les catégories exactes du poker.

Exercice 1.36 — Deux six et deux trois

L3 • corrigé, p. 96

Quelle est la probabilité d'obtenir deux six et deux trois en lançant quatre dés équilibrés indépendants ?

Exercice 1.37 — Indépendance et variables constantes

L3 / M1 • corrigé, p. 96

Une variable aléatoire réelle peut-elle être indépendante d'elle-même ?

Exercice 1.38 — Deux tirages sans remise

L3 • corrigé, p. 96

Une urne contient $n \geq 2$ jetons numérotés de 1 à n. On effectue deux tirages uniformes sans remise, de résultats X_1, X_2. Déterminer les lois marginales et la loi du couple, discuter l'indépendance, puis déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

Exercice 1.39 — Indépendance et regroupement des événements

L3 • corrigé, p. 96

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables discrètes indépendantes. Montrer que les événements $\{X_j = x_j\}$ sont indépendants. Soient ensuite $A_1, \dots, A_m$ des événements indépendants et $(I_1, \dots, I_p)$ une partition de $\{1, \dots, m\}$. Montrer que les événements $B_k = \bigcap_{i \in I_k} A_i$ sont indépendants. En particulier, traiter $A_1 \cap A_2, A_3, \dots, A_m$.

Exercice 1.40 — Tribus boréliennes et probabilités à densité

L3 • corrigé, p. 97

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur Ω est une tribu.
2. Montrer que les demi-droites $]-\infty, a]$ engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Même question pour les demi-droites ouvertes ou les intervalles $]a, b]$.
3. Si $f \geq 0$ est borélienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\int f = 1$, montrer que $\mu(A) = \int_A f(x)dx$ définit une probabilité borélienne.

Exercice 1.41 — Mesurabilité des limites et des vecteurs

L3 • corrigé, p. 97

1. Montrer qu'une limite ponctuelle finie de variables aléatoires réelles est une variable aléatoire.
2. Si les images réciproques des intervalles ouverts par X sont mesurables, montrer qu'il en est de même de tous les boréliens.
3. Étendre cette propriété à un vecteur dont les coordonnées sont mesurables.

Exercice 1.42 — Partitions et identités ensemblistes

L3 • corrigé, p. 97

1. Montrer que $E_r = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \,:\, p + q = r\}$, $r \in \mathbb{N}$, partitionne $\mathbb{N}^2$.
2. Pour $E, F, G \subset \Omega$, établir les inclusions $E \cap F \subset E \subset E \cup F$, le renversement des inclusions par complémentaire, les deux distributivités, les décompositions $E \cup F = E \cup (F \cap E^c)$ et $F = (F \cap E) \cup (F \cap E^c)$, et les deux lois de De Morgan. Généraliser les identités qui s'y prêtent aux familles d'ensembles.
3. Étant donnés $A_1, \dots, A_n$, construire des B_i disjoints tels que $\bigcup_{i \leq m} B_i = \bigcup_{i \leq m} A_i$ pour tout m.
4. Montrer que les fibres non vides d'une application $f : E \to F$ partitionnent E.

Exercice 1.43 — Images réciproques et indicatrices

L3 • corrigé, p. 97

1. Pour $f : E \to F$, établir $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que l'image réciproque préserve unions, intersections et complémentaires, et que $f(f^{-1}(C)) \subset C$.
3. Caractériser $A \subset B$ par leurs indicatrices. Exprimer les indicatrices du complémentaire, de l'intersection, de l'union et du produit cartésien, puis, pour $C \subset F$, $\mathbf{1}_C \circ f$.

Exercice 1.44 — Comptages et sommes d'indicatrices

L3 • corrigé, p. 98

1. $n \geq 1$ joueurs participent à un tournoi par élimination directe, avec une exemption éventuelle à chaque tour. Combien de matchs sont joués ?
2. Durant septembre 2001, a_i jours ont vu passer i voitures au péage entre 7 h et 8 h. Exprimer la moyenne quotidienne en fonction des a_i.
3. Pour $E \subset \Omega$ finis, calculer $\sum_{x \in \Omega} \mathbf{1}_E(x)$.
4. Pour une fonction réelle f d'image finie F, établir $f = \sum_{a \in F} a \mathbf{1}_{f^{-1}(\{a\})}$.

Exercice 1.45 — Intervertir des sommes finies

L3 • corrigé, p. 98

Justifier la permutation des sommes d'une famille finie $(x_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$. Inverser ensuite les sommations dans

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} x_{ij}, \quad S_2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} x_{ij}, \quad S_3 = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=i}^{n} x_{ij}, \qquad 0 \leq m \leq n.$$

Exercice 1.46 — Arrangements, combinaisons et groupes étiquetés

L3 • corrigé, p. 98

1. Une surjection vers un ensemble de q éléments a toutes ses fibres de cardinal p. Calculer le cardinal de son domaine.
2. Dénombrer les arrangements de k éléments parmi n, puis les nombres à quatre chiffres tous distincts.
3. Dénombrer les parties à k éléments d'un ensemble de taille n, puis les mots binaires de longueur n contenant k uns.
4. Répartir n objets distincts en r groupes étiquetés de tailles fixées $n_1, \dots, n_r$, de somme n. Combien de répartitions existe-t-il ?

Exercice 1.47 — Identités binomiales par double comptage

L3 • corrigé, p. 98

1. Établir le binôme de Newton, en déduire le nombre de parties d'un ensemble fini et l'identité de Vandermonde.
2. Pour $|\Omega| = n$, calculer $\sum_{A \subset \Omega} |A|$.
3. Pour $0 \leq p \leq n$, montrer
$$\sum_{i=p}^{n} \binom{n+1}{i+1} = \sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} 2^{n-i}$$
en comptant les mots binaires de longueur $n+1$ contenant au moins $p+1$ uns.

Exercice 1.48 — Suites croissantes et compositions faibles

L3 • corrigé, p. 99

1. Dénombrer les suites strictement croissantes de longueur k dans $\{1, \dots, n\}$, puis les suites croissantes au sens large, à l'aide de $v_j = u_j + j - 1$.
2. Dénombrer les k-uplets d'entiers positifs ou nuls de somme n, en utilisant des séparateurs.
3. Décrire et dénombrer les répartitions de p prospectus identiques dans $b \geq 1$ boîtes.
4. Développer $(x_1 + \cdots + x_r)^n$ et compter les monômes distincts du développement.

Exercice 1.49 — Parties d'un ensemble dénombrable

M1 • corrigé, p. 99

Soit E un ensemble infini dénombrable. Montrer que $\mathscr{P}(E)$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1.50 — Loi d'une variable aléatoire

M1 • corrigé, p. 99

Soit $X : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathscr{E})$ une application mesurable. Vérifier que $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$, pour $A \in \mathscr{E}$, définit une probabilité sur $(E, \mathscr{E})$.

Exercice 1.51 — Indépendance et événements complémentaires

M1 • corrigé, p. 99

Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes : A et B sont indépendants ; A^c et B sont indépendants ; A et B^c sont indépendants ; A^c et B^c sont indépendants.

Exercice 1.52 — Critère fonctionnel d'indépendance

M1 • corrigé, p. 99

Pour deux variables aléatoires X, Y, montrer que leur indépendance équivaut à
$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$$
pour toutes fonctions mesurables bornées f, g. Vérifier les propriétés de classe monotone utilisées pour passer des indicatrices aux fonctions bornées.

Exercice 1.53 — Mesurabilité d'une suite de variables

M1 • corrigé, p. 99

Soient $X_n : (\Omega, \mathscr{F}) \to (E_n, \mathscr{E}_n)$ des applications mesurables. Montrer que $X : \omega \mapsto (X_n(\omega))_{n \geq 1}$ est mesurable dans le produit muni de la tribu produit. Montrer la réciproque.

Exercice 1.54 — Borne supérieure de fonctions continues

M1 • corrigé, p. 100

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions réelles continues sur un espace topologique E. Montrer que $f = \sup_{i\in I} f_i$, à valeurs étendues, est semi-continue inférieurement. Est-elle nécessairement continue ?

Exercice 1.55 — Tribu produit et ensemble de toutes les parties

M1 • corrigé, p. 100

Soit I un ensemble infini dénombrable et $\Omega = \{0,1\}^I$. La tribu produit $\mathscr{F} = \bigotimes_{i\in I} \mathscr{P}(\{0,1\})$ est-elle égale à $\mathscr{P}(\Omega)$?

2. Lois usuelles et changements de variables

Exercice 2.1 — Sondage sans remise

L3 • corrigé, p. 101

Dans la question de convergence, le nombre k d'individus interrogés reste fixé.

Pour une élection, une population de $N \geq 2$ individus a eu à choisir entre voter pour le candidat A ou le candidat B. On note m le nombre de personnes ayant voté pour A. On interroge au hasard k individus différents dans cette population ($1 \leq k \leq N$).

1. On désigne par $a_1, \dots, a_m$ les m personnes qui ont voté pour A. Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, on note X_i l'indicatrice de l'événement "la personne a_i est interrogée". Quelle est la loi de X_i ?
2. Soit $i, j \in \{1, \dots, m\}$ avec $i \neq j$. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ? Donner la matrice de covariance de $(X_1, \dots, X_m)$.
3. On pose $S = \sum_{i=1}^{m} X_i$. Quelle est la loi de S ?
4. Déterminer l'espérance de S, puis la variance de S.
5. Par quelle loi peut-on approcher la loi de S lorsque N et m tendent vers $+\infty$ de sorte que la proportion m/N d'individus votant A tende vers une constante $a \in [0, 1]$?
6. Commenter ce résultat.

Exercice 2.2 — Deux temps géométriques

L3 • corrigé, p. 101

On suppose $p \in (0, 1)$ et tous les lancers indépendants.

Jean et Luc lancent chacun une pièce de monnaie qui a une probabilité p de tomber sur "face" jusqu'à ce que chacun obtienne une fois "face". On note X le nombre de "pile" obtenus par Jean la première fois où sa pièce tombe sur "face" et Y le nombre de "pile" obtenus par Luc la première fois où sa pièce tombe sur "face"

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Déterminer la probabilité que Jean et Luc obtiennent "face" après le même nombre de lancers.
3. Déterminer les lois de $X + Y$ et de $\min(X, Y)$.

Exercice 2.3 — Cible circulaire et deux barèmes de score

L3 • corrigé, p. 101

Soit $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 100\}$. Une fléchette manque la cible avec probabilité p ; conditionnellement à une réussite, son point d'impact est uniforme sur D. Sur $\Omega = \mathbb{R}^2$, considérer

$$\mathscr{A} = \{A \cap D : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)\} \cup \{D^c \cup (A \cap D) : A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)\}.$$

Vérifier que c'est une tribu et définir la probabilité correspondante. Calculer la probabilité d'une réussite à moins de $t \in [0, 10]$ du centre, puis du bord. Le score est $X = 20 - \sqrt{x^2 + y^2}$ en cas de réussite et 0 sinon. Montrer sa mesurabilité et calculer sa fonction de répartition. Calculer aussi l'espérance du score.

On considère un second barème : le score vaut $S = 10 - \sqrt{x^2 + y^2}$ en cas de réussite et -10 en cas d'échec. Déterminer sa loi et son espérance. Décrire aussi un espace probabilisé équivalent dans lequel tous les échecs sont représentés par un seul point.

Exercice 2.4 — Absence de mémoire

L3 • corrigé, p. 102

1. Soit X une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant, pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbb{P}(X \geq k) > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq k + \ell \mid X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq \ell).$$

Déterminer sa loi et son espérance en fonction de $q = \mathbb{P}(X \geq 1)$, y compris lorsque $q = 0$.

2. Soit Y une variable réelle strictement positive presque sûrement, vérifiant pour tous $s,t>0$ tels que $\mathbb{P}(Y\geq s)>0$,

$$\mathbb{P}(Y\geq s+t\mid Y\geq s)=\mathbb{P}(Y\geq t).$$

Montrer que $Y_n=\lfloor 2^nY\rfloor$ vérifie la propriété discrète précédente. On note $q_n=\mathbb{P}(Y_n\geq 1)$.

3. Montrer que $q_n=q_{n+1}^2$ et que $0<q_0<1$. Exprimer q_n en fonction de q_0.

4. Pour $t>0$, montrer

$$\mathbb{P}(Y\leq t)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Y_n\leq\lfloor 2^nt\rfloor).$$

En déduire la loi et l'espérance de Y.

5. Pour $s\geq 0$, calculer $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}\mathbb{P}(Y\leq s+\varepsilon\mid Y>s)$. Interpréter l'absence de mémoire lorsque Y est une durée de fonctionnement.

6. Réciproquement, pour Y de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ de taux $\lambda>0$, déterminer les lois de $K=\lfloor Y\rfloor$ et $Z=Y-K$. Ces variables sont-elles indépendantes ?

7. Déterminer la limite en loi de Z lorsque $\lambda\downarrow 0$.

Exercice 2.5 — Médianes et écart absolu moyen

L3 • corrigé, p. 102

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace $(\Omega,\mathscr{A},P)$. On dit que m est une médiane pour X si $P(X<m)\leq\frac{1}{2}\leq P(X\leq m)$.

1. Soit $x_1,\dots,x_n$, n réels distincts ordonnés par ordre croissant. Déterminer les médianes de la loi uniforme sur l'ensemble $\{x_1,\dots,x_n\}$.

Supposons que X admette un moment d'ordre 1.

2. Montrer que si m est une médiane pour X alors pour tout $a\in\mathbb{R}$, $E(|X-a|)\geq E(|X-m|)$.

3. Montrer que si m_1 et m_2 sont deux médianes pour X alors $E(|X-m_1|)=E(|X-m_2|)$.

Supposons que X admette un moment d'ordre 2 fini.

4. Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}$, $E((X-a)^2)\geq\mathrm{Var}(X)$.

5. Montrer que $E(|X-m|)\leq\sigma(X)$ (où $\sigma(X)$ désigne l'écart-type de X).

En déduire aussi que $|\mathbb{E}X-m|\leq\sigma(X)$ pour toute médiane m lorsque $X\in L^2$.

Exercice 2.6 — Inégalité de Hoeffding

L3 • corrigé, p. 103

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $a\leq X\leq b$, pour deux réels $a<b$, et soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires de même loi que X. L'objectif de l'exercice est d'établir l'inégalité de Hoeffding suivante :

$$\forall\varepsilon>0\qquad\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\mathbb{E}(X)\right|\geq\varepsilon\right)\leq 2\exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right).\tag{1}$$

1. Soit Y une variable aléatoire telle que $0\leq Y\leq 1$ et $(Y_1,\dots,Y_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires de même loi que Y. Notons $\mu=\mathbb{E}[Y]$ et $\overline{Y}_n=(Y_1+\dots+Y_n)/n$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(\overline{Y}_n-\mu\geq\varepsilon)\leq\mathbb{E}[\exp(n\theta(\overline{Y}_n-(\mu+\varepsilon)))]$ pour tous $\varepsilon>0$ et $\theta>0$.

b) En déduire que $\mathbb{P}(\overline{Y}_n-\mu\geq\varepsilon)\leq\mathrm{e}^{n(\lambda(\theta)-\theta(\mu+\varepsilon))}$ pour tous $\varepsilon>0$ et $\theta>0$, où $\lambda(\theta)=\log\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta Y}]$.

c) Montrer que $\mathrm{Var}(Y)\leq 1/4$.

d) En calculant les deux premières dérivées de λ, montrer que $\lambda(\theta)\leq\theta\mu+\theta^2/8$ pour tout $\theta>0$.

e) En déduire que $\mathbb{P}(\overline{Y}_n-\mu\geq\varepsilon)\leq\exp(-2n\varepsilon^2)$ pour tout $\varepsilon>0$.

f) Montrer qu'on a aussi $\mathbb{P}(\overline{Y}_n-\mu\leq-\varepsilon)\leq\exp(-2n\varepsilon^2)$ pour tout $\varepsilon>0$.

2. En déduire l'inégalité de Hoeffding énoncée au début de cet exercice.

Appliquer aux indicatrices d'un événement : construire un intervalle de confiance de niveau au moins $1-\alpha$, l'évaluer pour 510 succès sur 1000, et déterminer n pour obtenir une longueur strictement inférieure à 0,01 au niveau 90%.

Exercice 2.7 — Loi uniforme sous le graphe d'une densité

L3 • corrigé, p. 103

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable d'intégrale finie non nulle.
Notons $D_\phi = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ y \leq \phi(x)\}$.

1. Soit $Z = (X,Y)$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur D_ϕ. Déterminer la loi de X.
2. Trouver des fonctions ϕ pour lesquelles X et Y sont indépendantes et des fonctions ϕ pour lesquelles X et Y ne sont pas indépendantes.
3. Soit W une variable aléatoire dont la loi a pour densité $f = \frac{\phi}{\int_{\mathbb{R}} \phi(u)du}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$ indépendante de W. Déterminer la loi de $(W, U\phi(W))$.

Exercice 2.8 — Tirage sans remise dans une population répartie en classes

L3 • corrigé, p. 104

Dans la question de convergence, le nombre k d'individus interrogés reste fixé.

Pour étudier une population de taille $N \geq 2$, on a défini $r \geq 2$ classes d'individus $C_1, \dots, C_r$ de sorte que chaque individu appartienne à une et une seule de ces classes. Posons $n_i = \mid C_i \mid$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$. On choisit au hasard $k \in \{1, \dots, N\}$ individus différents parmi cette population et on désigne par $X_{N,i}$ le nombre d'individus sélectionnés qui appartiennent à la classe C_i.

1. Déterminer la loi de $(X_{N,1}, \dots, X_{N,r})$.
2. Déterminer la loi des marginales.
3. Les variables aléatoires $X_{N,1}$ et $X_{N,2}$ sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $X_{N,1} + X_{N,2}$.
5. On fait tendre N vers $+\infty$ de sorte que les proportions d'individus appartenant à chaque classe C_i tendent vers un réel strictement positif noté p_i. Vers quelle loi converge la loi de $X_{N,1}$? Même question pour la loi de $(X_{N,1}, \dots, X_{N,r})$.

Exercice 2.9 — Durées de vie et renouvellements exponentiels

L3 • corrigé, p. 104

1. Un poste de radio fonctionne avec une pile de 3V. On note T la durée (en heures) de fonctionnement d'une telle pile de marque M. On suppose que T suit une loi exponentielle de taux $\lambda > 0$. Le poste de radio est mis en marche avec une pile neuve à l'instant 0. Lorsque le poste est en panne, on remplace la pile par une pile de la même marque. On note S_n la durée de fonctionnement du poste de radio si on dispose de n piles.
   a) Quelle est la loi de S_n (on explicitera les hypothèses faites) ?
   b) Soit $t > 0$. On note N_t le nombre de piles utilisées pendant les t premières heures de fonctionnement de la radio. Déterminer la loi de N_t.
2. On considère maintenant un poste de radio qui fonctionne avec 2 piles de 1,5V. On suppose que la loi de la durée de fonctionnement des piles de 1,5V de marque M est la loi exponentielle de taux $a > 0$.
   Quelle la loi de la durée de fonctionnement de ce poste de radio si on dispose de deux piles ?

Exercice 2.10 — Méthode de Box-Muller

L3 / M1 • corrigé, p. 104

Soit W une variable aléatoire de loi exponentielle de taux $1/2$ et V une variable aléatoire indépendante de W de loi uniforme sur l'intervalle $]0, 2\pi[$. On pose $X = \sqrt{W}\cos(V)$ et $Y = \sqrt{W}\sin(V)$.

1. Déterminer la loi de $\cos(V)$.
2. Déterminer la loi du couple (X,Y).
3. Quelles sont les lois des marginales X et Y ? Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Déterminer la loi de X/Y

Exercice 2.11 — Méthode de simulation par acceptation-rejet

L3 • corrigé, p. 104

Soit μ une loi de probabilité sur un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ et $D \in \mathscr{E}$ tel que $\mu(D) > 0$. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ un échantillon (c'est-à-dire une suite de variables aléatoires i.i.d.) de loi μ . Notons $T_D = \inf\{i \in \mathbb{N}^*,\ X_i \in D\}$.

1. Montrer que X_{T_D} est une variable aléatoire de loi $\mu_{|D}(\cdot) = \frac{\mu(\cdot\cap D)}{\mu(D)}$ indépendante de T_D.

2. Quelle est la loi de T_D ? Quelle est l'espérance de T_D ?

3. Déterminer la loi de X_{T_D} si μ est la loi uniforme sur un ensemble $A \in \mathscr{E}$ contenant D.

4. Soit Y une variable aléatoire prenant ses valeurs dans un intervalle compact $[a, b]$ et admettant une densité h bornée par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la simulation uniforme sous un graphe et ce qui précède, donner une méthode pour simuler une réalisation de la variable aléatoire Y.

Application numérique : écrire une fonction qui simule et trace n points uniformes sur $D = \{(x, y) : 1 < x < e,\ 0 < y < \log x\}$, puis une fonction qui renvoie seulement leurs abscisses. Quelle est la densité de ces abscisses ?

Exercice 2.12 — Lois gamma et bêta

L3 / M1 • corrigé, p. 105

Pour $a, b > 0$, on note $\Gamma(a, b)$ la loi de densité

$$f_{a,b}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{\{x>0\}}, \qquad \Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t}\, dt.$$

Le second paramètre est un taux.

1. Vérifier la normalisation. Calculer l'espérance et la variance.

2. Pour une variable réelle Z, montrer que $R_Z(z) = \mathbb{E}(e^{-zZ})$ est définie si $\mathbb{E}(e^{-\mathrm{Re}(z)Z}) < \infty$. Pour des variables indépendantes, montrer $R_{X+Y}(z) = R_X(z)R_Y(z)$ sur le domaine commun d'intégrabilité.

3. Calculer R_X pour $X \sim \Gamma(a, b)$; retrouver ses deux premiers moments. En déduire la loi d'une somme de variables gamma indépendantes de même taux, puis celle d'une somme de k exponentielles de taux λ.

4. Pour des variables indépendantes $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(c, \lambda)$, déterminer la loi du couple $(U, V) = (X + Y, X/(X + Y))$. Les variables U et V sont-elles indépendantes ? Calculer l'espérance et la variance de V.

5. Si $G_1, \dots, G_k$ sont indépendantes de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, déterminer les lois de G_1^2 et $\sum_{j=1}^k G_j^2$, en utilisant $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Déterminer aussi la loi de cX pour $c > 0$ et $X \sim \Gamma(a, b)$. Applications : les temps entre appels sont indépendants exponentiels de taux 0,5 par minute ; donner la loi du temps entre le premier et le dixième appel. Des piles ont des durées de vie indépendantes exponentielles de moyenne trois heures ; combien de piles, pile initiale comprise, faut-il pour couvrir neuf heures avec un risque de panne inférieur à 5% ?

Exercice 2.13 — Trois clients et deux guichets

L3 • corrigé, p. 105

Jean, Luc et Marc entrent en même temps dans une poste qui dispose de deux guichets. Jean et Luc utilisent les deux guichets qui sont libres au moment de leurs arrivées et Marc attend son tour. On note X, Y et Z les variables aléatoires décrivant le temps que met un guichetier pour régler les demandes de Jean, Luc et Marc respectivement. On supposera que ce sont des variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle de taux $a > 0$.

1. Quelle est la probabilité pour que Marc ne quitte pas la poste le dernier ?

2. Déterminer la loi du temps T passé par Marc à la poste ainsi que son espérance.

3. Déterminer la loi du temps W nécessaire pour que les trois personnes soient servies.

Exercice 2.14 — Points uniformes, statistiques d'ordre et espacements

L3 • corrigé, p. 105

On choisit au hasard n points dans l'intervalle $]0,1]$ et on considère ces points comme les réalisations de variables aléatoires $U_1,\dots,U_n$ indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, posons $I_i =](i-1)/r, i/r]$ et notons X_i le nombre de points appartenant à I_i.

a) Déterminer la loi du vecteur $\underline{X} = (X_1,\dots,X_r)$.

b) Déterminer la matrice de covariance du vecteur $\underline{X}$, c'est-à-dire la matrice $C = (c_{i,j})_{1\le i,j\le r}$ donnée par

$$\forall i,j \in \{1,\dots,r\} \qquad c_{i,j} = \mathrm{Cov}(X_i,X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])].$$

c) Pour tout k, par quelle loi peut-on approcher la loi de $(X_1,\dots,X_k)$ lorsque n et r tendent vers $+\infty$ de sorte que $n/r \to a > 0$?

2. Dans ce qui suit, $(y_{(1)},\dots,y_{(n)})$ désigne le réarrangement croissant d'un n-uplet $(y_1,\dots,y_n)$ de nombres réels.

a) Montrer que $\mathbb{P}(\exists\, 1 \le i < j \le n \ : \ U_i = U_j) = 0$.

b) Montrer que $(U_{(1)},\dots,U_{(n)})$ peut s'écrire sous la forme $(U_{\sigma(1)},\dots,U_{\sigma(n)})$ où σ est une permutation aléatoire de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. En déduire que $U_{(1)},\dots,U_{(n)}$ sont des variables aléatoires.

c) Déterminer la loi de la permutation aléatoire σ.

d) Montrer que la loi de $(U_{(1)},\dots,U_{(n)})$ admet la densité $f(x_1,\dots,x_n) = n!\,\mathbf{1}_{\{0\le x_1\le\dots\le x_n\le 1\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

e) En déduire la loi de $U_{(i)}$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$.

f) On pose $V_i = U_{(i)} - U_{(i-1)}$ pour tout $i \in \{2,\dots,n\}$. Montrer que les variables V_i ont même loi. Laquelle ?

Exercice 2.15 — Nombre de filles dans une famille

M1 • corrigé, p. 106

Le nombre X d'enfants par famille suit une loi géométrique $G(p)$ (*i.e.* $P(X = n) = q^{n-1}p$ pour $n \ge 1$, avec $q = 1-p$). Toutes les répartitions filles-garçons sont équiprobables. Quelle est la loi du nombre Y de filles par famille ? On pourra utiliser le fait que $(1-x)^{-r-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r}{n}x^n$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.16 — Minimum et écart de deux exponentielles

M1 • corrigé, p. 107

Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi exponentielle de taux α. On pose $M = \sup(X,Y)$ et $m = \inf(X,Y)$. Déterminer la loi jointe de $(m, M-m)$. En déduire que m et $M-m$ sont indépendantes.

Exercice 2.17 — Symétrie, signe et indépendance

M1 • corrigé, p. 107

Pour les questions de covariance, on suppose $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. On traitera aussi le cas $\mathbb{P}(X = 0) > 0$.

Soit X une v.a. réelle de loi symétrique (*i.e.* X et $-X$ ont même loi). Soit ε une v.a. indépendante de X telle que $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon = -1)$, pour p dans $]0,1[$.

1. Donner la loi de εX.

2. A quelle condition sur p, la covariance entre X et εX est-elle nulle ?

3. Soit $Y = \mathbf{1}_{\{X>0\}} - \mathbf{1}_{\{X<0\}}$. Donner la loi de Y, de XY. Calculer la covariance entre $|X|$ et Y. Ces deux v.a. sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.18 — Somme et mélange de lois uniformes

L3 • corrigé, p. 107

Soient X, Y, ε indépendantes, avec X, Y uniformes sur $[0,1]$ et $\varepsilon \sim \mathscr{B}(1,1/2)$. Déterminer les fonctions de répartition puis les lois de $Z = X + Y$ et de $T = X + \varepsilon Y$.

Exercice 2.19 — Loi uniforme sur un disque

L3 • corrigé, p. 107

Le couple (X,Y) est uniforme sur $D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$. Déterminer les lois marginales, leur indépendance éventuelle, puis la loi de $T = \sqrt{X^2+Y^2}$.

Déterminer également la loi jointe de (T, Θ), où $\Theta \in [0, 2\pi)$ est l'angle polaire, fixé égal à zéro à l'origine. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.20 — Géométriques, inverse et somme conditionnée

L3 • corrigé, p. 107

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}^*$, $q = 1 - p$, $0 < p < 1$, et $Y = 1/X$.

1. Donner l'espérance et la variance de X.

2. Déterminer les valeurs et la loi de Y, puis calculer son espérance.

3. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de même loi et $S_n = \sum_j X_j$, calculer l'espérance, la variance et la loi de S_n.

4. Pour $n \geq 2$, $k \geq n$ et $1 \leq m \leq k - n + 1$, déterminer $\mathbb{P}(X_1 = m \mid S_n = k)$. Traiter séparément $n = 1$.

Exercice 2.21 — Fiabilité et taux de défaillance discret

L3 • corrigé, p. 107

Soit T à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $R(n) = \mathbb{P}(T \geq n)$ et $h(n) = \mathbb{P}(T = n \mid T \geq n)$ lorsque $R(n) > 0$. Montrer $\mathbb{E}T = \sum_{n \geq 1} R(n)$, exprimer h avec R, puis déterminer la loi et l'espérance de T si $h(n) = \alpha \in (0, 1)$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2.22 — Combinaison de deux indicatrices

L3 • corrigé, p. 107

Pour deux événements A, B et $a, b \neq 0$, déterminer la loi de $X = a\mathbf{1}_A + b\mathbf{1}_B$. Examiner les cas disjoint et indépendant. Quelle est la loi de $\mathbf{1}_{\{U \leq c\}}$ pour U uniforme sur $[0, 1]$, $c \in (0, 1)$?

Exercice 2.23 — Différence de deux nombres de faces

L3 • corrigé, p. 108

Jean et Luc lancent chacun n fois une pièce équilibrée, tous les lancers étant indépendants. Soient X, Y leurs nombres de faces. Donner leurs lois, $\mathbb{P}(X = Y)$ et la loi de $X - Y$.

Exercice 2.24 — Cible circulaire et angle de Cauchy

L3 • corrigé, p. 108

Une fléchette manque une cible de rayon 10 avec probabilité p ; conditionnellement au succès, sa position est uniforme en aire. Le score est la distance au bord en cas de succès et le score -10 en cas d'échec. Décrire un espace, la loi du score et les coordonnées polaires (R, Θ), en attribuant un état-cimetière à l'échec. Déterminer la loi de $\tan \Theta$ conditionnellement au succès.

Exercice 2.25 — Queues, temps géométrique et succès répétés

L3 • corrigé, p. 108

Montrer pour $X \geq 0$ que $\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)dt$, et pour $X \in \mathbb{N}$ que $\mathbb{E}X = \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(X > j)$. Pour des épreuves indépendantes de probabilité de succès $p \in (0, 1]$, donner la loi et l'espérance du temps du premier, puis du k-ième succès.

Exercice 2.26 — Transformations d'une normale et rapport de normales

L3 • corrigé, p. 108

Pour X de densité $x \mapsto e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ sur $\mathbb{R}$, calculer sa moyenne et sa variance, puis la loi et les moments de $m + \sigma X$, $\sigma > 0$. Si Y est normale standard indépendante de X, déterminer la loi de Y/X et de son inverse.

Exercice 2.27 — Densité dans un secteur : covariance et indépendance

L3 • corrigé, p. 108

Soit (X, Y) de densité $4\pi^{-1}e^{-(x^2+y^2)}\mathbf{1}_{\{x \geq |y|\}}$. Vérifier la normalisation, calculer la covariance, étudier l'indépendance et donner la loi de $(X - Y, X + Y)$.

Exercice 2.28 — Loi image sur un espace dénombrable

L3 • corrigé, p. 108

Pour une application f d'un espace dénombrable probabilisé, montrer que $Q(x) = \mathbb{P}(f^{-1}(\{x\}))$ définit une probabilité sur $f(\Omega)$ et donner $Q(A)$. Appliquer ceci à une variable X de loi p et à $f(X)$. Interpréter l'image d'un tirage uniforme de personnes par une caractéristique telle que la nationalité, supposée définie sans ambiguïté.

Exercice 2.29 — Mêmes marginales, lois jointes différentes

L3 • corrigé, p. 108

Pour $a \in [0,1]$, la loi du couple $(X,Y) \in \{1,2,3\}^2$ est donnée, en lignes x et colonnes y, par $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ 1-a & 0 & a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les marginales et $\mathbb{P}(X=Y)$.

Exercice 2.30 — Loi jointe et images d'un couple discret

L3 • corrigé, p. 108

Le couple (X,Y) prend ses valeurs dans $\{-1,0,1\}\times\{-1,1\}$. Les masses pour $Y=-1$, selon $X=-1,0,1$, sont $1/12, 1/3, 1/12$; pour $Y=1$, elles sont $1/6, 1/6, 1/6$. Le tableau définit-il une probabilité ? Donner les marginales et les lois de $X+Y$, XY.

Exercice 2.31 — Deux lettres dans une pile

L3 • corrigé, p. 109

Deux lettres occupent deux positions uniformes distinctes dans une pile de $n \geq 2$ feuilles. Noter X_1 le nombre de feuilles ordinaires avant la première lettre, X_2 celui entre les deux lettres. Déterminer la loi jointe, les marginales, $\mathbb{P}(X_1 = X_2)$, la loi et l'interprétation de $Z = X_1 + X_2 + 2$, puis les modes.

Exercice 2.32 — Moments, symétrie et modes de la binomiale

L3 • corrigé, p. 109

Sous quelles hypothèses le nombre de garçons d'une famille de n enfants est-il binomial ? Pour $B \sim \mathscr{B}(n,p)$, établir $\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np(1-p)$. Étudier la symétrie et les modes de cette loi, en les illustrant par des diagrammes.

Exercice 2.33 — Binomiale rare et approximation de Poisson

L3 • corrigé, p. 109

Dans le modèle où les statuts de 100 individus sont indépendants, chacun est porteur d'un caractère avec probabilité 0,02. Calculer les probabilités de $0,1,2,3,4$ et d'au moins 5 porteurs, puis les comparer à l'approximation de Poisson.

Exercice 2.34 — Raisins dans les galettes et modes de Poisson

L3 • corrigé, p. 109

Sous un modèle de Poisson pour le nombre de raisins par galette, quelle moyenne faut-il pour qu'au moins 98 % des galettes contiennent un raisin ? Donner une autre interprétation du même calcul. Déterminer les modes d'une loi de Poisson.

Exercice 2.35 — Sauts de la fonction de répartition

L3 • corrigé, p. 109

Montrer que $\mathbb{P}(X<t) = \lim_n \mathbb{P}(X \leq t - 1/n)$ et exprimer $\mathbb{P}(X=t)$ avec la fonction de répartition F_X.

Exercice 2.36 — Maximum de tirages avec remise

L3 • corrigé, p. 109

Tirer $n \geq 1$ fois avec remise parmi les jetons $1,\dots,N$. Décrire l'espace uniforme, la probabilité que tous les tirages soient au plus k, la répartition et la loi du maximum M. Donner ses modes, tracer les masses pour $N=30$, $n=1,5$, puis déterminer le plus petit nombre de tirages assurant $\mathbb{P}(M > N/2) > p$, $p \in (0,1)$.

Pour deux dés indépendants équilibrés à six faces, donner explicitement les masses du maximum et déterminer si le minimum et le maximum sont indépendants.

Exercice 2.37 — Modélisation uniforme et deux lancers de pièce

L3 • corrigé, p. 110

Discuter le modèle uniforme pour un jour ou une date de naissance. Peut-on choisir le biais d'une pièce de façon que le nombre de faces obtenu en deux lancers indépendants soit uniforme sur $\{0,1,2\}$?

Exercice 2.38 — Agrégation multinomiale et événements rares

L3 • corrigé, p. 110

Pour un vecteur multinomial, donner la loi de la somme des coordonnées d'un sous-ensemble de catégories. Étudier ensuite la limite des nombres d'occurrences de d catégories rares, avec probabilités $p_{n,i}$ telles que $np_{n,i} \to \lambda_i > 0$, une catégorie supplémentaire regroupant tous les autres résultats.

Exercice 2.39 — Hypergéométrique multivariée et double paire

L3 • corrigé, p. 110

Une population de taille N est partagée en classes de tailles n_i. On tire uniformément k individus distincts. Donner la loi jointe des effectifs par classe, les marginales et la limite lorsque k est fixé et $n_i/N \to p_i$. Calculer aussi la probabilité d'une double paire dans une main de cinq cartes.

Exercice 2.40 — Temps du premier et du nième succès, avec troncature

L3 • corrigé, p. 110

Donner les répartitions d'une géométrique sur $\mathbb{N}^*$ et de sa version tronquée à $N+1$. Pour une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce de probabilité de pile $p \in (0,1)$, poser T_n le rang du n-ième pile et $X_N = \min(T_n, N+1)$. Calculer $\mathbb{P}(T_n > N)$, la loi de X_N et sa limite pour n fixé. Décrire les graphes pour $n = 1, 3$, $N = 10, 20, 50$. Pour la pièce équilibrée, calculer $\mathbb{P}(T_n \leq 2n)$.

Exercice 2.41 — Convolution et stabilité des lois discrètes

L3 / M1 • corrigé, p. 110

Soient X, Y indépendantes à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ et $\{0, \dots, m\}$, de masses p_i et q_j. Donner les lois de (X, Y) et $X + Y$. En déduire la stabilité par somme des lois binomiales de même paramètre de succès et des lois de Poisson. Généraliser à une famille finie de variables indépendantes.

Retrouver la stabilité de la loi de Poisson en calculant les fonctions caractéristiques de X, de Y et de $X + Y$.

Exercice 2.42 — Minimum de variables géométriques

L3 • corrigé, p. 111

Soient $G_1, \dots, G_d$ indépendantes, avec $\mathbb{P}(G_i = k) = (1 - r_i) r_i^{k-1}$ pour $k \geq 1$, où $0 \leq r_i < 1$. Déterminer la loi de leur minimum. Reprendre la question pour les variables censurées $X_i = \min(G_i - 1, N)$, à valeurs dans $\{0, \dots, N\}$.

Exercice 2.43 — Répartition entre plusieurs hôtels

L3 • corrigé, p. 111

Chacune de n personnes choisit, indépendamment des autres, l'un de $r \geq 1$ hôtels avec la même probabilité. On note X_i le nombre de personnes dans l'hôtel i. Déterminer les lois marginales, la loi du vecteur et l'indépendance éventuelle des coordonnées.

Exercice 2.44 — Naissances et systèmes de détection

L3 • corrigé, p. 111

1. On suppose les sexes de cinq nouveau-nés indépendants, avec probabilité 0,55 d'avoir un garçon à chaque naissance. Calculer la probabilité d'avoir exactement deux garçons.
2. Une cible est détectée par chacun de $n \geq 1$ systèmes, indépendamment, avec probabilité p. Calculer la probabilité que tous les systèmes, au moins un système, puis au moins deux systèmes détectent la cible.

Exercice 2.45 — Inégalité de Markov, intégrabilité et positivité

L3 • corrigé, p. 111

1. Pour une variable $X \geq 0$ et $a > 0$, montrer que $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}X/a$. En déduire ce que l'on peut dire d'une variable positive d'espérance nulle.
2. Si $a \leq X \leq b$ presque sûrement, montrer que X est intégrable et que $a \leq \mathbb{E}X \leq b$. Caractériser l'égalité $\mathbb{E}X = a$.
3. Montrer que $\mathbb{E}|X|^n < \infty$ implique $\mathbb{E}|X|^k < \infty$ pour $1 \leq k \leq n$.

Exercice 2.46 — Espérance de la somme de deux dés

L3 • corrigé, p. 111

Deux dés équilibrés sont lancés indépendamment. Déterminer l'espérance de leur somme S en utilisant sa loi.

Exercice 2.47 — Calculs de variance et de covariance

L3 / M1 • corrigé, p. 111

On suppose les variables aléatoires considérées de carré intégrable.

1. Vérifier $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$ et montrer que $(X - \mathbb{E}X)/\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ est centrée réduite lorsque $0 < \mathrm{Var}(X) < \infty$.
2. Vérifier $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$ et calculer $\mathrm{Var}(X \pm Y)$. Montrer que, pour $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) > 0$ équivaut à $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$.

3. Établir la formule de variance d'une somme finie de variables de carré intégrable.
4. Montrer que la matrice de covariance K d'un vecteur Z est symétrique positive et déterminer la matrice de covariance de AZ.

Exercice 2.48 — Inégalités de probabilité et saturation d'un détecteur

L3 • corrigé, p. 112

1. La production quotidienne $X \in \mathbb{N}$ d'une usine a pour espérance 50. Majorer $\mathbb{P}(X > 75)$. Améliorer la borne si l'écart-type vaut 5.
2. Le nombre Y de particules atteignant un détecteur pendant une durée fixée a pour espérance 100. Majorer $\mathbb{P}(Y > 1000)$, puis améliorer la borne si $\mathrm{Var}(Y) = 100$.
3. Pour $Y \sim \mathcal{P}(m)$ et $a > 1$, montrer $\mathbb{P}(Y > am) \leq \exp[-m(1 - a + a\log a)]$ par la méthode exponentielle. Appliquer à $m = 100, a = 10$.
4. Le détecteur ne peut maintenant compter que 140 particules. Reprendre les majorations précédentes pour $\mathbb{P}(Y > 140)$. Sous l'hypothèse $Y \sim \mathcal{P}(100)$, donner une approximation normale, avec et sans correction de continuité, et comparer à la probabilité exacte.

Exercice 2.49 — Densités usuelles et changement de variable

L3 • corrigé, p. 112

Vérifier la normalisation des densités uniforme, exponentielle et gaussienne. Établir la formule de changement de variable pour une transformation C^1 bijective dont la dérivée ne s'annule pas, puis pour une transformation dont le domaine se partage, à un ensemble fini près, en un nombre fini d'intervalles sur lesquels elle est de classe C^1 et de dérivée non nulle. En déduire la densité du carré d'une variable normale centrée réduite.

Exercice 2.50 — Fonctions de répartition et mélanges

L3 • corrigé, p. 112

1. Montrer que la fonction de répartition d'une probabilité sur $\mathbb{R}$ est croissante, continue à droite, et de limites 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer $\mu(\{a\}) = F(a) - F(a-)$.
2. Montrer qu'un mélange fini ou dénombrable de probabilités, avec des poids positifs de somme un, est une probabilité. Donner sa densité lorsque les composantes en ont une.
3. Calculer les fonctions de répartition de δ_a et de $\frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\mathcal{U}([0,1])$.

Exercice 2.51 — Transformations des lois exponentielle et normale

L3 • corrigé, p. 113

1. Soit X de loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$ de taux $a > 0$. Déterminer les lois de bX, pour $b \neq 0$, et de $\lfloor X \rfloor$. Déterminer la loi de $-\log U$ pour U uniforme sur $(0,1)$.
2. Si $\log Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$, déterminer la densité de Y.

Exercice 2.52 — Parties entière et fractionnaire d'une uniforme

L3 • corrigé, p. 113

Soit X uniforme sur $[0, N)$, avec $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = X - \lfloor X \rfloor$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois.

Exercice 2.53 — Mélange gaussien et vitesse de déplacement

L3 • corrigé, p. 113

On suppose que la vitesse d'une femme suit $\mathcal{N}(1{,}4; 0{,}4^2)$ et celle d'un homme $\mathcal{N}(1{,}6; 0{,}4^2)$, en mètres par seconde ; les moyennes sont respectivement 1,4 et 1,6, et les deux écarts-types valent 0,4. La population compte deux tiers de femmes. Pour la vitesse V d'une personne choisie uniformément, calculer $\mathbb{P}(V < 1{,}2)$, la probabilité conditionnelle qu'il s'agisse d'une femme sachant $V < 1{,}2$, puis la densité de V.

Exercice 2.54 — Construire une uniforme avec des bits indépendants

L3 • corrigé, p. 113

Soient (B_k) indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Montrer que $U = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} B_k$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 2.55 — Sommation par paquets et permutation des séries

L3 • corrigé, p. 113

1. Montrer que la somme d'une famille dénombrable de réels positifs est inchangée par une bijection de l'ensemble d'indices.
2. Pour $x_{ij} \geq 0$, montrer que la somme sur $\mathbb{N}^2$ égale les deux sommes itérées et la somme par diagonales $i+j=k$.
3. Si $\sum_i \sum_j |x_{ij}| < \infty$, montrer la sommabilité de la famille et l'égalité des sommes itérées signées. Étendre le premier point aux familles absolument sommables.

Exercice 2.56 — Calculs de familles sommables

L3 • corrigé, p. 114

1. Pour $|u|, |v| < 1$, étudier et sommer $(u^k v^\ell)_{k,\ell \geq 0}$.
2. Pour quels réels x la famille $\left(\binom{p+q}{p} x^{p+q}\right)_{p,q\geq 0}$ est-elle sommable ? Calculer sa somme.
3. Étudier $((-1/p)^q)_{p\geq 2, q\geq 2}$, puis la même famille avec $p \geq 1$.
4. Pour une suite réelle (u_p), pour $p, q \in \mathbb{N}$, poser $x_{p,q} = (-p)^q e^{-p} u_p / q!$. Montrer que la sommabilité équivaut à celle de (u_p) ; calculer la somme pour $u_p = x^p$, $|x| < 1$.
5. Montrer la sommabilité de $(x^n/n!)_{n\geq 0}$ pour tout réel x, puis $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour sa somme f.
6. Si $\sum_{k\geq 0} |k a_k| < \infty$, montrer $\sum_{k\geq 0} k a_k = \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq i+1} a_j$.

Exercice 2.57 — Corde de Bertrand à distance uniforme du centre

M1 • corrigé, p. 114

Dans le disque unité, on choisit uniformément la direction d'un rayon, puis uniformément sur ce rayon le milieu d'une corde orthogonale. Déterminer la loi de la longueur L de la corde et la probabilité qu'elle soit au moins égale à $\sqrt{3}$.

Exercice 2.58 — Équation multiplicative mesurable

M1 • corrigé, p. 114

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que $f(s+t) = f(s)f(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$. Déterminer f. Préciser les cas supplémentaires sur $[0, \infty)$ et le cas d'une fonction de survie d'une variable strictement positive finie.

3. Convergence presque sûre et lois des grands nombres

Exercice 3.1 — Queue d'une variable de carré intégrable

L3 • corrigé, p. 115

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $E(X^2)$ soit finie.
Montrer que $x^2 P(|X| \geq x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3.2 — Loi faible sous dépendance

L3 / M1 • corrigé, p. 115

Soit $X_0, X_1, X_2, \cdots$ une suite de variables aléatoires réelles possédant des variances finies. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On dit que la suite (X_n) satisfait à la loi faible des grands nombres si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P[|\frac{S_n - E(S_n)}{n}| \geq \varepsilon] = 0$.
Montrer que dans les deux cas suivants, la suite (X_n) satisfait la loi faible des grands nombres :

1. la suite $\{\mathrm{var}(X_n), n \geq 1\}$ est bornée et pour tout $n \geq 1$, X_n est indépendante de X_k lorsque $|n-k| > 1$.
2. la suite $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ est stationnaire à l'ordre deux, c'est-à-dire : pour tout n, $E(X_n) = E(X_0)$, et pour tout $(i,k) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{Cov}(X_{i+k}, X_i) = \mathrm{Cov}(X_k, X_0)$. De plus, elle vérifie $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}(X_n, X_0) = 0$.

Exercice 3.3 — Polynômes de Bernstein

L3 / M1 • corrigé, p. 115

(*Théorème de Weierstrass*)
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Soit $(X_i^{(x)})_{i\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $x \in [0,1]$. On pose $S_n^{(x)} = \sum_{i=1}^n X_i^{(x)}$ et $P_n(x) = E(f(\frac{S_n^{(x)}}{n}))$.

1. Montrer que $(P_n)_n$ converge uniformément vers f.
2. Expliciter la fonction P_n. En déduire que toute fonction continue sur un segment compact peut être approchée uniformément par des polynômes.

Exercice 3.4 — Une distance pour la convergence en probabilité

L3 • corrigé, p. 115

Soit X et X_n, pour $n \in \mathbb{N}$, des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose $\phi(x) = x/(x+1)$ pour tout $x \geq 0$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si et seulement si $\mathbb{E}[\phi(|X_n - X|)]$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3.5 — Problème du collectionneur de coupons

M1 • corrigé, p. 115

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(Y_{n,m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées uniformément dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Ainsi, pour tout entier $m \geq 1$, on peut dire que la variable $Y_{n,m}$ représente le choix d'un coupon parmi n possibles de façon uniforme et indépendante des choix effectués précédemment. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, notons alors

$$\tau_{n,k} = \inf\{m \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{Card}\{Y_{n,1}, \dots, Y_{n,m}\} = k\}$$

le temps mis pour collecter k coupons différents, et notons aussi $\tau_{n,0} = 0$. On s'intéresse au comportement asymptotique du temps $T_n = \tau_{n,n}$ mis pour obtenir tous les coupons possibles.

1. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, donner la loi de $X_{n,k} = \tau_{n,k} - \tau_{n,k-1}$. En déduire que, quand $n \to \infty$,

$$\mathbb{E}[T_n] \sim n \ln n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(T_n) = \mathrm{O}(n^2).$$

2. À l'aide de l'inégalité de Chebyshev, montrer que

$$\frac{T_n}{n \ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Exercice 3.6 — À propos du critère de Kolmogorov

M1 • corrigé, p. 116

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, X_n étant de loi

$$\mathbb{P}_{X_n} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(\delta_1+\delta_{-1}) + \frac{1}{2^{n+1}}(\delta_{2^n}+\delta_{-2^n}).$$

Soit $Y_n = \mathbf{1}_{\{|X_n|\leq 1\}}X_n$.

1. Calculer la variance de Y_n.
2. Montrer que la suite $n^{-1}\sum_{i=1}^n Y_i$ tend presque sûrement vers 0.
3. Calculer $\mathbb{P}(X_n \neq Y_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
4. En déduire $\mathbb{P}(\liminf_n\{X_n = Y_n\}) = 1$.
5. En déduire que la suite $n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ tend presque sûrement vers 0.
6. Montrer que $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}\mathbb{E}(X_n^2) = +\infty$.
7. Que peut-on en déduire au sujet du critère de Kolmogorov pour la loi forte des grands nombres ?

Exercice 3.7 — Loi des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund

M1 • corrigé, p. 117

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[|X_1|^p] < \infty$, avec $1 < p < 2$. Posons $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\text{p.s.} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{1/p}} = 0.$$

1. Comparer ce résultat à la loi forte des grands nombres usuelle.
2. Posons $Y_n = X_n\mathbf{1}_{\{|X_n|\leq n^{1/p}\}}$, puis $T_n = Y_1 + \ldots + Y_n$. Montrer que p.s. $Y_n = X_n$ pour tout n assez grand. En déduire qu'il suffit de montrer que
$$\text{p.s.} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^{1/p}} = 0.$$
3. Pour tout entier $m \geq 1$, montrer que
$$\mathrm{Var}\left(\frac{Y_m}{m^{1/p}}\right) \leq \sum_{n=1}^m \int_{(n-1)^{1/p}}^{n^{1/p}} \frac{2y}{m^{2/p}}\mathbb{P}(|X_1| > y)\mathrm{d}y.$$
Indication : On pourra utiliser le fait que pour toute variable aléatoire $Y \geq 0$ et tout réel $p > 0$,
$$\mathbb{E}[Y^p] = \int_0^\infty py^{p-1}\mathbb{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y.$$
4. En déduire que
$$\sum_{m=1}^\infty \mathrm{Var}\left(\frac{Y_m}{m^{1/p}}\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)^{1/p}}^{n^{1/p}} \sum_{m=n}^\infty \frac{2y}{m^{2/p}}\mathbb{P}(|X_1| > y)\mathrm{d}y.$$
5. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $y \in](n-1)^{1/p}, n^{1/p}]$,
$$\sum_{m=n}^\infty \frac{1}{m^{2/p}} \leq \frac{2py^{p-2}}{2-p}.$$
Indication : Commencer par traiter le cas où $n \geq 2$.
6. En déduire que
$$\sum_{m=1}^\infty \mathrm{Var}\left(\frac{Y_m}{m^{1/p}}\right) < \infty.$$

7. Posons $\mu_m = \mathbb{E}[Y_m]$ pour tout entier $m \geq 1$. Déduire de la question précédente et du lemme de Kronecker que

$$\text{p.s.} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{m=1}^{n} (Y_m - \mu_m) = 0.$$

Rappel : Le lemme de Kronecker assure que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de réels telle que la série $\sum_n x_n$ converge et toute suite $(b_n)_{n\geq 1}$ positive et croissante qui diverge vers l'infini, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} b_k x_k = 0.$$

8. Conclure, après avoir montré que pour tout entier $m \geq 1$,

$$|\mu_m| \leq m^{-1+1/p} \mathbb{E}\Big[|X_1|^p \mathbf{1}_{\{|X_1|>m^{1/p}\}}\Big].$$

Exercice 3.8 — Géométrie en grande dimension

M1 • corrigé, p. 118

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires distribuées de façon indépendante et uniforme sur $[-1, 1]$.

1. Désignons par $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ la convergence en probabilité. Montrer que

$$\frac{1}{n}\big(X_1^2 + \ldots + X_n^2\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{3},$$

2. Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner une interprétation géométrique de l'ensemble

$$A_{n,\varepsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}} < \|x\| < (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}} \right\},$$

3. Désignons par $\mathscr{L}^n$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathscr{L}^n\big(A_{n,\varepsilon} \cap [-1,1]^n\big) \sim 2^n \qquad \text{quand} \qquad n \to \infty.$$

Pourquoi peut-on affirmer qu'en grande dimension, un cube est presque entièrement rempli par le voisinage d'une sphère ?

Exercice 3.9 — Convergence positive et convergence dans L1

M1 • corrigé, p. 119

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles positives. On suppose que $\mathbb{E}[X_n] < \infty$ pour tout n. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X_∞ et si $(\mathbb{E}[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{E}[X_\infty] < \infty$, montrer alors que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X_∞ dans L^1.

Exercice 3.10 — Produits indépendants de moyenne un

M1 • corrigé, p. 119

Soit X une variable aléatoire positive, avec $\mathbb{E}[X] = 1$ et $\mathbb{P}(X \neq 1) > 0$.

1. Montrer que $q = \mathbb{E}[\sqrt{X}] < 1$.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées comme X. Montrer que

$$\text{p.s.} \qquad \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} X_i = 0.$$

Indication : On pourra considérer la série $\sum_n \sqrt{X_1 \cdots X_n}$ et appliquer le théorème de Beppo-Levi.

Exercice 3.11 — Loi faible des grands nombres pour les tableaux triangulaires

M1 • corrigé, p. 119

Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui diverge vers l'infini. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons une collection $X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et notons $\overline{X}_{n,k} = X_{n,k}\,\mathbf{1}_{\{|X_{n,k}|\leq b_n\}}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Supposons que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_{n,k}| > b_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big[\overline{X}_{n,k}^2\big] = 0. \tag{2}$$

1. En posant $S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$ et $a_n = \mathbb{E}[\overline{X}_{n,1}] + \ldots + \mathbb{E}[\overline{X}_{n,n}]$, montrer que

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(|X_1| > x) = o(1/x)$ quand $x \to \infty$. Posons $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $\mu_n = \mathbb{E}[X_1 \mathbf{1}_{\{|X_1|\le n\}}]$. À l'aide de la question précédente, on voudrait montrer que

$$\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

a) Montrer que la première condition énoncée dans la proposition de cet exercice est vérifiée pour $X_{n,k} = X_k$ et $b_n = n$. Dès lors, on pose comme précédemment $\overline{X}_{n,k} = X_{n,k}\mathbf{1}_{\{|X_{n,k}|\le b_n\}} = X_k \mathbf{1}_{\{|X_k|\le n\}}$.

b) Pour tout $p > 0$ et toute variable aléatoire $Y \ge 0$, montrer que $\mathbb{E}[Y^p] = \int_0^\infty p y^{p-1}\mathbb{P}(Y > y)\mathrm{d}y$.

c) En déduire que

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\overline{X}_{n,1}^2] \le \frac{1}{n}\int_0^n g(y)\mathrm{d}y \qquad \text{avec} \qquad g(y) = 2y\mathbb{P}(|X_1| > y).$$

d) Montrer que pour tout réel $A > 0$ et tout entier $n \ge A$,

$$\frac{1}{n}\int_0^n g(y)\mathrm{d}y \le \frac{A}{n}\sup_{[0,\infty[} g + \frac{n-A}{n}\sup_{[A,\infty[} g,$$

et en déduire que la seconde condition énoncée dans la proposition de cet exercice est vérifiée. Conclure.

3. *Application* : Loi faible des grands nombres, cas L^1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Posons $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $\mu = \mathbb{E}[X_1]$. Montrer que $S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$ quand $n \to \infty$.

Exercice 3.12 — Paradoxe de Saint-Petersbourg

L3 / M1 • corrigé, p. 119

Un joueur se rend au casino et, après avoir payé un droit d'entrée de y euros, joue au jeu suivant. Le croupier tire à pile ou face un certain nombre de fois avec une pièce de monnaie équilibrée. Si c'est au j-ième lancer que face apparaît pour la première fois, il donne 2^j euros au joueur.

1. On note X le gain brut du joueur à l'issue d'une partie. Donner la loi de X et montrer que $\mathbb{E}[X] = \infty$.

On suppose les lancers et les parties indépendants. Les gains ci-dessous sont bruts, avant déduction des droits d'entrée. On étudie leur ordre de grandeur après un grand nombre de parties.

2. Montrer que, pour tout entier $n \ge 1$, le gain brut du joueur au bout de n parties peut s'écrire $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, où $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_k = 2^j) = 2^{-j}$ pour tous entiers $j, k \in \mathbb{N}^*$.

3. Pour tout entier $n \ge 1$, posons $m_n = \log_2 n + u_n$, où $\log_2$ désigne le logarithme en base 2 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui diverge vers l'infini et qui est choisie de façon à ce que $m_n \ge 1$ soit entier quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les deux conditions de troncature de l'exercice 3.11 sont vérifiées pour $X_{n,k} = X_k$ et $b_n = 2^{m_n}$.

4. Calculer la valeur de $a_n = \mathbb{E}[\overline{X}_{n,1}] + \ldots + \mathbb{E}[\overline{X}_{n,n}]$, où $\overline{X}_{n,k} = X_k \mathbf{1}_{\{|X_k|\le b_n\}}$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

5. En choisissant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de façon appropriée et en utilisant l'exercice 3.11, montrer que

$$\frac{S_n}{n\log_2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Si le droit d'entrée par partie est y_n et si $y_n/\log_2 n \to c$, que devient $(S_n - ny_n)/(n\log_2 n)$ en probabilité ?

Retrouver cette limite directement en posant, pour $n \ge 2$, $X_j^{(n)} = X_j \mathbf{1}_{\{X_j \le n\log_2 n\}}$ et $S'_n = \sum_{j=1}^n X_j^{(n)}$. Calculer l'espérance et la variance de $S'_n/(n\log_2 n)$, ainsi que $\mathbb{P}(S_n \ne S'_n)$.

Exercice 3.13 — Limites supérieures et inférieures d'ensembles

L3 / M1 • corrigé, p. 121

Déterminer $\bigcup_{n\geq 1}[1/n,\infty)$, puis les limites inférieure et supérieure de la suite alternant deux ensembles B, C. Pour des suites $(A_n), (B_n)$, établir les relations entre limites, complémentaires, unions et intersections, ainsi que les identités correspondantes pour les indicatrices.

Exercice 3.14 — Loi zéro-un pour les sommes indépendantes

M1 • corrigé, p. 121

Soit X_i, une suite de variables aléatoires indépendantes. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que les événements suivants ont pour probabilité zéro ou un : $\left\{\lim_{n\to\infty} S_n = \infty\right\}$ et $\left\{\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty\right\}$.

Exercice 3.15 — Événements échangeables et loi du 0-1 de Hewitt-Savage

M1 • corrigé, p. 121

Notons S l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}^*$ de support fini, c'est-a-dire les bijections σ de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $\sigma(n) = n$ pour tout n suffisamment grand. À une telle permutation $\sigma \in S$, on peut naturellement associer l'application $f_\sigma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $f_\sigma((x_n)_{n\geq 1}) = (x_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

Considérons maintenant une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles. On rappelle que tout événement A qui appartient à la tribu engendrée par ces variables peut s'écrire sous la forme $A = \{(X_n)_{n\geq 1} \in B\}$, où B appartient à la tribu produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ (engendrée par les cylindres). On dit qu'un tel événement A est échangeable s'il admet une représentation par un ensemble B tel que, pour toute permutation $\sigma \in S$, on a $f_\sigma^{-1}(B) = B$, c'est-à-dire que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de réels,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}, \dots) \in B.$$

1. Montrer que tout événement appartenant à la tribu asymptotique est échangeable.
2. Montrer qu'un événement peut être échangeable sans nécessairement être asymptotique.
3. On suppose que les variables X_n sont indépendantes et identiquement distribuées. Montrer que tout événement échangeable A vérifie $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. C'est la loi du 0-1 de Hewitt-Savage.
4. En déduire la loi du 0-1 de Kolmogorov dans le cas de variables indépendantes et de même loi. Les deux théorèmes ont-ils les mêmes hypothèses ?

Exercice 3.16 — Intégrabilité, queues et loi forte

L3 / M1 • corrigé, p. 122

Soient (X_n) de même loi réelle. Montrer que $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ équivaut à $\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > n) < \infty$, puis que l'intégrabilité implique $X_n/n \to 0$ presque sûrement. Avec l'indépendance et $\mathbb{E}|X_1| = \infty$, montrer

$$\limsup_n |X_n|/n = \infty, \qquad \limsup_n |X_1 + \cdots + X_n|/n = \infty \quad \text{p.s.}$$

En déduire qu'une moyenne empirique indépendante qui converge presque sûrement vers une limite réelle a une loi commune intégrable et une limite constante.

Exercice 3.17 — Limite supérieure d'exponentielles non identiques

L3 / M1 • corrigé, p. 122

Soit $(T_k)_{k\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $k \geq 2$, T_k suit la loi exponentielle de taux $\ln(k)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(T_k \geq 1)$, ainsi que $\mathbb{P}(T_k \geq 1 + \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
2. En déduire, à l'aide du lemme de Borel-Cantelli, que

$$\text{p.s.} \qquad \limsup_{k\to\infty} T_k = 1.$$

Exercice 3.18 — Sommes gaussiennes et modes de convergence

L3 / M1 • corrigé, p. 122

Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes de loi gaussienne standard $N(0, 1)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Montrer que $\sqrt{2\pi}\mathbb{P}(X_0 > a) \sim a^{-1}\exp(-a^2/2)$ quand $a \to +\infty$.

2. Donner la loi de $S_n/\sqrt{n}$.
3. En déduire que si (a_n) est une suite de réels positifs telle que $a_n/\sqrt{n}$ tende vers $+\infty$ alors S_n/a_n converge vers 0 en probabilité. Peut-on conclure pour la convergence p.s. ? Montrer cependant que si $a_n = \sqrt{n}\log n$, alors S_n/a_n converge p.s. vers 0.
4. Montrer que $\limsup_n (2\log n)^{-1/2} X_n = 1$ p.s. et $\limsup_n (2\log n)^{-1/2}|X_n| = 1$ p.s.

Exercice 3.19 — Convergence des séries aléatoires

M1 • corrigé, p. 123

Soit X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des variables indépendantes.

1. On suppose que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\sum_n \mathrm{Var}(X_n) < \infty$. Rappeler pourquoi la série $\sum_n X_n$ converge presque sûrement.
2. Pour des signes indépendants équitables $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ et une suite réelle déterministe (a_n), montrer que $\sum_n a_n\varepsilon_n$ converge presque sûrement si et seulement si $\sum_n a_n^2 < \infty$, et absolument si et seulement si $\sum_n |a_n| < \infty$. Traiter en particulier $a_n = 1/n$.

   On suppose ensuite que $\mathbb{P}(X_n = n^{-\alpha}) = \mathbb{P}(X_n = -n^{-\alpha}) = 1/2$. Montrer que la série $\sum_n X_n$ converge p.s. si et seulement si $\alpha > 1/2$ et converge absolument p.s. si et seulement si $\alpha > 1$.
3. On suppose que les X_n sont centrées et de variance un. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a convergence p.s. de la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{\sin(n\pi t)}{n}.$$

Exercice 3.20 — Normalisation logarithmique et lemme de Kronecker

M1 • corrigé, p. 123

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Posons $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et, un réel $\varepsilon > 0$ étant fixé au préalable, $a_n = n^{1/2}(\ln n)^{1/2+\varepsilon}$ pour $n \geq 2$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} X_n/a_n$ converge presque sûrement. En déduire que
$$\text{p.s.} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n} = 0.$$

Exercice 3.21 — Série des carrés de variables gaussiennes

M1 • corrigé, p. 124

Soit X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, des variables gaussiennes indépendantes de moyenne μ_n et de variance σ_n^2.

1. Montrer que $\sum_n X_n^2$ converge dans L^1 si et seulement si $\sum_n(\mu_n^2 + \sigma_n^2) < \infty$.
2. On suppose $\mu_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer alors que si $\sum_n \sigma_n^2 = \infty$, on a p.s. $\sum_n X_n^2 = \infty$.

Exercice 3.22 — Séries de cubes de variables de Cauchy

M1 • corrigé, p. 124

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d. suivant la loi de Cauchy standard, de densité $1/(\pi(1+x^2))$, et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels non nuls convergeant vers zéro. Montrer que $\sum_n \varepsilon_n X_n^3$ converge p.s. si et seulement si $\sum_n |\varepsilon_n|^{1/3}$ converge.

Exercice 3.23 — Critères de convergence presque sûre

L3 / M1 • corrigé, p. 124

1. Caractériser $X_n \to X$ presque sûrement par les événements $\limsup_n\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}$. Montrer que la sommabilité de $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ pour chaque $\varepsilon > 0$ suffit. Cette condition est-elle nécessaire ? Considérer $X_n = C/n$, où C suit la loi de Cauchy standard.
2. Soient X_n des Bernoulli indépendantes de paramètres p_n. Caractériser la convergence vers zéro en probabilité et presque sûrement. Donner aussi une condition nécessaire et suffisante pour la convergence presque sûre vers une limite quelconque. Si $p_n = 1/n$, extraire une sous-suite convergeant presque sûrement.
3. Si des variables indépendantes X_n convergent presque sûrement vers une limite réelle X, montrer que celle-ci est constante presque sûrement et que $\sum_n \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$. Comparer C/n avec une suite indépendante (Y_n) telle que Y_n ait la même loi que C/n.

4. Montrer que la convergence dans L^1 implique celle en probabilité. Pour des variables Z_n telles que $\mathbb{P}(Z_n = n^3) = n^{-2}$ et $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - n^{-2}$, étudier les convergences presque sûre et dans L^1.
5. Si $a_n \geq 0$, $\sum_n a_n < \infty$ et $\sum_n \mathbb{P}(|W_{n+1} - W_n| > a_n) < \infty$, montrer que (W_n) converge presque sûrement dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.24 — Produits de Bernoulli voisines

L3 • corrigé, p. 125

Soient (X_n) indépendantes de loi $\mathscr{B}(1, p)$, $0 < p < 1$. Posons $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Calculer l'espérance et la variance de S_n, puis montrer sa loi faible des grands nombres.

Exercice 3.25 — Queues de Pareto et Borel-Cantelli

L3 • corrigé, p. 125

Énoncer les deux lemmes de Borel-Cantelli. Soient $\alpha > 1$ et (X_k) indépendantes de densité $(\alpha - 1)x^{-\alpha}\mathbf{1}_{\{x \geq 1\}}$. Calculer $\mathbb{P}(X_1 > x)$ pour $x \geq 1$ et montrer $\limsup_{k\to\infty} \log X_k / \log k = 1/(\alpha - 1)$ presque sûrement.

Exercice 3.26 — Suites construites à partir d'uniformes

M1 • corrigé, p. 125

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes uniformes sur $[0, 1]$ et $\alpha > 0$.

1. Poser $U_n = n^{-\alpha}/\sqrt{1 - X_n}$. Étudier les convergences en probabilité, dans L^1 et presque sûre de U_n vers zéro.
2. Poser $Y_n = X_n/(n + X_{n+1})$. Déterminer sa loi et son espérance. Les Y_n sont-elles indépendantes ? Et les Y_{2n} ? Étudier les limites presque sûres de Y_n et de $n^\alpha Y_n$ suivant α.

Exercice 3.27 — Maximum exponentiel : convergence presque sûre

M1 • corrigé, p. 126

Pour des X_i iid exponentielles de taux 1, poser $M_n = \max_{i\leq n} X_i / \log n$, $n \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(M_n < a)$. Montrer la sommabilité de ces probabilités si $a < 1$, puis, pour $a > 1$, utiliser la sous-suite n^k avec $k(a - 1) > 1$. En déduire $M_n \to 1$ p.s.

Exercice 3.28 — Convergences en probabilité : critères et contre-exemples

L3 • corrigé, p. 126

Montrer $L^2 \Rightarrow$ convergence en probabilité. Si $X_n \sim \mathscr{P}(\lambda_n)$, $\lambda_n \to 0$, montrer $X_n \to 0$ en probabilité. Examiner $\mathbb{P}(Y_n = n) = \mathbb{P}(Y_n = -n) = 1/(2n^2)$, $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - 1/n^2$.

Exercice 3.29 — Calcul continu en probabilité

L3 • corrigé, p. 126

Pour des variables à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, montrer que la convergence en probabilité équivaut à celle de chaque coordonnée. Montrer la stabilité par somme et par composition avec une fonction continue $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Exercice 3.30 — Suites de zéros dans un développement dyadique

L3 • corrigé, p. 126

Sur $(0, 1)$ muni de Lebesgue, écrire $\omega = \sum_{i\geq 1} 2^{-i} d_i$, avec la convention non terminante aux dyadiques. Poser $L_n = \max\{k \geq 0 : d_n = \cdots = d_{n+k-1} = 0\}$ et $e_n = 2^{n-1}(\omega - \sum_{i<n} 2^{-i} d_i)$.

1. Donner la loi de L_n et montrer $2^{-(L_n+1)} \leq e_n \leq 2^{-L_n}$.
2. Montrer $L_n \geq (1 + \varepsilon)\log_2 n$ seulement un nombre fini de fois p.s.
3. Poser $u_n = \lceil \log_2 n \rceil$, $n_1 = 2$, $n_{k+1} = n_k + u_{n_k}$. Montrer $\sum_{n\geq 2} 2^{-u_n}/u_n = \infty$ et que cette somme est au plus $\sum_k 2^{-u_{n_k}}$.
4. En déduire $L_n \geq \log_2 n$ infiniment souvent p.s., puis $e_n \leq 1/n$ infiniment souvent et $e_n \leq n^{-1-\varepsilon}$ seulement un nombre fini de fois. Conclure $\limsup L_n / \log_2 n = 1$ p.s.

Exercice 3.31 — Complétude de L1 et de L2

L3 • corrigé, p. 126

Les espaces L^1 et L^2 sont considérés modulo l'égalité presque sûre. Montrer que $\|X\|_1 = \mathbb{E}|X|$ est une norme et que L^1 est complet. Montrer que $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}(XY)$ est un produit scalaire réel sur L^2, que L^2 est complet, et que $\mathbb{E}|X| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2}$.

Exercice 3.32 — Limites supérieure et inférieure d'une suite indépendante

L3 • corrigé, p. 127

Soient (X_n) indépendantes de même loi réelle. Montrer que leurs limites supérieure et inférieure sont presque sûrement constantes dans $\overline{\mathbb{R}}$, et identifier ces constantes. En particulier, que se passe-t-il si la suite converge presque sûrement vers une limite réelle ?

En notant F la fonction de répartition commune et $M_n = \max_{1\le k\le n} X_k$, déterminer aussi la limite presque sûre de M_n. Si $b = \inf\{t \,:\, F(t) = 1\} < \infty$, montrer que $b \in \mathbb{R}$ et $F(b) = 1$; adopter $b = +\infty$ si cet ensemble est vide.

Exercice 3.33 — Fréquences et logarithme d'une vraisemblance

L3 • corrigé, p. 127

Une expérience à m issues de probabilités p_i est répétée indépendamment. Si $N_n(i)$ compte les occurrences de l'issue i, poser $T_n = \prod_i p_i^{N_n(i)}$. Déterminer la limite presque sûre de $n^{-1}\log T_n$, avec une convention explicite pour les catégories de probabilité nulle.

4. Fonctions caractéristiques et convergence en loi

Exercice 4.1 — Gaussienne de variance tendant vers zéro

L3 • corrigé, p. 128

Montrer que la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, centrée et de variance σ^2, converge étroitement vers δ_0 lorsque σ tend vers 0.

Exercice 4.2 — Convergence en loi vers une constante

L3 • corrigé, p. 128

Soit X_n, $n \in \mathbb{N}$ et X des variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité.
Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers une constante a si et seulement si $(X_n)_n$ converge en probabilité vers a.

Exercice 4.3 — Lemme de Scheffé et densités oscillantes

L3 • corrigé, p. 128

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n une variable aléatoire réelle ayant une densité f_n par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge vers une densité f en presque tout point.

1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|dx \to 0$.
   Indications : on pourra utiliser par exemple la décomposition $|a-b| = a+b-2\min(a,b)$.
2. Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers la loi de densité f.
3. Pour $n \geq 1$, soit μ_n une loi de densité $f_n(x) = (1-\cos(2\pi n x))\mathbf{1}_{\{x\in[0,1]\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
   La suite $(\mu_n)_n$ converge-t-elle étroitement ? Soit $x \in]0,1[$, la suite $(f_n(x))_n$ converge-t-elle ?

Exercice 4.4 — Lois de Laplace et de Cauchy

L3 / M1 • corrigé, p. 128

Soit X une variable aléatoire de loi de Laplace de paramètre 1, c'est-à-dire ayant pour densité $x \mapsto e^{-|x|}/2$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que X a pour fonction caractéristique $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.
2. Soit Y une variable aléatoire de loi de Cauchy de densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que Y a pour fonction caractéristique $t \mapsto e^{-|t|}$.
3. Soit Z une variable aléatoire indépendante de Y et de même loi. Pour $a > 0$ et $b > 0$ déterminer la loi de $aY + bZ$.
4. Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Y.
   Quelle est la loi de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$? Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas la loi des grands nombres ?

Exercice 4.5 — Convergence de couples

L3 • corrigé, p. 128

Soit $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de variables aléatoires qui convergent en loi respectivement vers les lois μ et ν.

1. Montrer que si pour tout n, X_n et Y_n sont indépendantes alors la suite des couples (X_n, Y_n) converge en loi.
2. Montrer que si $\nu = \delta_a$ avec $a \in \mathbb{R}$ alors la suite des couples (X_n, Y_n) converge en loi.

Exercice 4.6 — Un centrage incorrect dans le TCL

L3 • corrigé, p. 129

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de carré intégrable. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Que peut-on dire de la limite de $\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)$ si m est une constante différente de $\mathbb{E}[X_1]$?

Exercice 4.7 — Limite de Poisson et formule de Stirling

L3 • corrigé, p. 129

Pour $a > 0$, soit X_a une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$.

1. Déterminer la fonction caractéristique de X_a.
2. Montrer que $Z_a = \frac{1}{\sqrt{a}}(X_a - a)$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $a \to \infty$.

3. Pour $x > 0$, montrer que $\mathbb{P}(Z_n^- > x) \leq \min\{1, 1/x^2\}$. En déduire que la suite $(\mathbb{E}[Z_n^-])_n$ converge et calculer sa limite.

4. Calculer $\mathbb{E}[Z_n^-]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Retrouver à partir des questions précédentes la formule de Stirling.

En application, si S_n est la somme de n variables indépendantes de loi $\mathcal{P}(1)$, déterminer sa loi puis la limite de $e^{-n}\sum_{k=1}^{n} n^k/k!$.

Exercice 4.8 — Tableau de petits pas : limite gaussienne

L3 • corrigé, p. 129

Soit $a > 0$ et $(m_n)_n$ une suite de réels telle que nm_n tende vers une constante m.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $X_1^n, \dots, X_n^n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\{-\frac{a}{\sqrt{n}}, \frac{a}{\sqrt{n}}\}$ et de moyenne m_n. On pose $Y_n = X_1^n + \cdots + X_n^n$.
Montrer que $(Y_n)_n$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(m, a^2)$ de moyenne m et de variance a^2.

Exercice 4.9 — Théorème de Lindeberg-Feller

M1 • corrigé, p. 129

Pour tout entier $n \geq 1$, considérons des variables aléatoires centrées et indépendantes $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$. On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[X_{n,m}^2] = \sigma^2 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[X_{n,m}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,m}|>\varepsilon\}}] = 0.$$

Posons $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$. Le but de l'exercice est de prouver que

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

La loi limite est normale, centrée et de variance σ^2.

1. Montrer que ce résultat généralise le théorème central limite usuel.

2. Posons $\varphi_{n,m}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_{n,m}}]$. Montrer qu'il suffit de prouver que pour tout réel t,

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n} \varphi_{n,m}(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t^2\right).$$

3. À $t \in \mathbb{R}$ fixé, posons $z_{n,m} = \varphi_{n,m}(t)$ et $w_{n,m} = 1 - \sigma_{n,m}^2 t^2/2$, avec $\sigma_{n,m}^2 = \mathbb{E}[X_{n,m}^2]$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|e^{ix} - \left(1 + ix - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq \min\left\{\frac{|x|^3}{6}, x^2\right\}.$$

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|z_{n,m} - w_{n,m}| \leq \frac{\varepsilon|t|^3}{6}\mathbb{E}[X_{n,m}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,m}|\leq\varepsilon\}}] + t^2\mathbb{E}[X_{n,m}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,m}|>\varepsilon\}}],$$

puis que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} |z_{n,m} - w_{n,m}| = 0.$$

4. Montrer par récurrence sur n que pour tous nombres complexes $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ de module inférieur à un,

$$\left|\prod_{m=1}^{n} a_m - \prod_{m=1}^{n} b_m\right| \leq \sum_{m=1}^{n} |a_m - b_m|.$$

5. Montrer que $\max_{1\leq m\leq n} \sigma_{n,m}^2$ tend vers zéro quand $n \to \infty$. En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\prod_{m=1}^{n} \varphi_{n,m}(t) - \prod_{m=1}^{n}\left(1 - \frac{\sigma_{n,m}^2}{2}t^2\right)\right| = 0.$$

6. Montrer que, quand n tend vers l'infini,

$$\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{\sigma_{n,m}^2}{2}t^2\right)$$

converge vers une limite que l'on précisera, puis conclure.

Exercice 4.10 — Théorème de représentation de Skorokhod

M1 • corrigé, p. 131

Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ qui converge étroitement vers μ. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ et une variable aléatoire X tels que :

- pour tout $n\geq 1$, la loi de X_n est μ_n ;
- la loi de X est μ ;
- la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers X.

Notons $\Omega=]0,1[$, $\mathscr{F}=\mathrm{Bor}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur Ω. On note U la fonction identité sur $]0,1[$. Alors, U est une variable aléatoire uniforme sur $]0,1[$.

1. Soit ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Notons F_ν sa fonction de répartition, définie par $F_\nu(x)=\nu(]-\infty,x])$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On définit également $G_\nu :]0,1[\to\mathbb{R}$ par

$$\forall u\in]0,1[\qquad G_\nu(u)=\inf\{x\in\mathbb{R}\mid F_\nu(x)>u\}.$$

Vérifier que G_ν est bien définie, croissante et continue à droite. Montrer que $Y=G_\nu(U)$ a pour loi ν.

2. Conclure, après avoir montré que $\lim_{n\to\infty} G_{\mu_n}(u)=G_\mu(u)$ pour tout point de continuité u de G_μ.

Exercice 4.11 — Un couplage loi géométrique-loi exponentielle

M1 • corrigé, p. 132

Considérons deux réels strictement positifs a et b, ainsi qu'un vecteur aléatoire (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X=n \text{ et } Y\leq t)=b\int_0^t \frac{(ay)^n}{n!}\mathrm{e}^{-(a+b)y}\,\mathrm{d}y.$$

On rappelle la formule suivante, qui se démontre facilement par récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \int_0^\infty t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=n!.$$

1. Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X]$ pour toute fonction mesurable $h : \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ et tout entier $n\in\mathbb{N}$.

2. Déterminer $\mathbb{E}[Y/(X+1)]$.

3. Calculer $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X=n\}}|Y]$, ainsi que $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 4.12 — Attente d'un événement rare

M1 • corrigé, p. 133

Soit X_p une variable géométrique de paramètre p. Montrer que, quand p tend vers zéro, pX_p converge en loi vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 4.13 — Problème des anniversaires

M1 • corrigé, p. 133

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{1,\dots,N\}$, où N est un entier naturel non nul. Notons

$$T_N=\min\{n\in\mathbb{N}^*\mid X_n=X_m \text{ pour un } m<n\}.$$

Calculer $\mathbb{P}(T_N>n)$ pour tout entier $n\geq 1$ et interpréter cette probabilité quand $N=365$. Montrer que, quand N tend vers l'infini, $T_N/\sqrt{N}$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera. En déduire une approximation de $\mathbb{P}(T_{365}>22)$ et interpréter ce résultat.

Exercice 4.14 — Théorème de Glivenko-Cantelli

M1 • corrigé, p. 134

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F continue. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on note $X^n_{(k)}$ les statistiques d'ordre de $X_1, \dots, X_n$, c'est-à-dire le réarrangement de $X_1, \dots, X_n$ par ordre croissant. On définit $F_n(x)$ par

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X^n_{(1)} \\ k/n & \text{si } X^n_{(k)} \le x < X^n_{(k+1)} \text{ pour un } k \in \{1, \dots, n-1\} \\ 1 & \text{si } x \ge X^n_{(n)}. \end{cases}$$

1. Montrer que les $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux distinctes presque sûrement. Les statistiques d'ordre sont définies par le réarrangement croissant, y compris en cas d'égalité.
2. Montrer que les $F_n(x)$ sont des variables aléatoires.

On considère ensuite la mesure de probabilité aléatoire

$$\Gamma_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{X_j}.$$

3. Montrer que F_n est la fonction de répartition de Γ_n.

L'objectif de la fin de l'exercice est de montrer qu'avec probabilité un, la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} V_n = 0 \qquad \text{où} \qquad V_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|.$$

On commence par supposer que $F(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.

4. Quelle est la loi suivie par les variables X_n ? En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, avec probabilité un, $F_n(x)$ tend vers x quand $n \to \infty$.
5. Montrer que presque sûrement, la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers F.
6. Conclure, à l'aide d'un quadrillage fini de $[0,1]$ et de la croissance des fonctions F_n, pour le cas où $F(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.

On ne fait plus d'hypothèse sur la fonction F (autre que le fait qu'elle est continue). On pose $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \ge u\}$ pour tout $u \in (0,1)$.

7. Soit U une variable uniforme sur $(0,1)$. Quelle est la loi de $F^{-1}(U)$?
8. En déduire que V_n a même loi que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^{\text{unif}}(F(x)) - F(x)|,$$
où F_n^{unif} désigne la fonction F_n dans le cas où les variables X_n sont uniformes sur $[0,1]$, puis conclure.

Exercice 4.15 — Convergence des maxima

L3 / M1 • corrigé, p. 135

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables i.i.d. de fonction de répartition F et soit $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis la loi limite de :

1. $M_n/n^{1/\alpha}$, quand $F(x) = (1 - x^{-\alpha})\mathbf{1}_{\{x\ge 1\}}$ avec $\alpha > 0$;
2. $n^{1/\beta}M_n$, quand $F(x) = (1 - |x|^{\beta})\mathbf{1}_{\{-1\le x\le 0\}} + \mathbf{1}_{\{x>0\}}$ avec $\beta > 0$;
3. $M_n - \ln n$, quand $F(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x})\mathbf{1}_{\{x\ge 0\}}$.

Dans le dernier cas, montrer aussi que $M_n/\ln n \to 1$ en probabilité.

Exercice 4.16 — Fonctions caractéristiques et moments gaussiens

L3 / M1 • corrigé, p. 135

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, de la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ de taux $\lambda > 0$.
2. Trouver une relation entre la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite et sa dérivée. En déduire sa valeur.
3. En déduire les moments de la loi normale centrée réduite.

En déduire aussi les moments de la loi normale centrée $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$ de variance σ^2, pour $\sigma \geq 0$.

Exercice 4.17 — Moyenne d'une fonction caractéristique

M1 • corrigé, p. 136

Si f est une fonction caractéristique, montrer que $g(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(u)du$ en est également une, après avoir posé $g(0) = 1$.

Exercice 4.18 — Théorème de Slutsky par les fonctions caractéristiques

L3 / M1 • corrigé, p. 136

On note $\mathscr{N}(0,1)$ la loi normale centrée réduite.

1. Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en loi vers une variable aléatoire Y. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en probabilité vers une constante a. Pour toute variable aléatoire Z, on note φ_Z la fonction caractéristique de Z.
   a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer que, pour tout entier n et tout réel v,
   $$|e^{\mathrm{i}A_n v} - e^{\mathrm{i}av}| \leq |v|\varepsilon + 2\,\mathbf{1}_{\{|A_n - a|>\varepsilon\}}.$$
   b) Montrer que pour tous réels u et v,
   $$|\varphi_{(Y_n,A_n)}(u,v) - \varphi_Y(u)e^{\mathrm{i}av}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   c) En déduire le lemme de Slutsky, c'est-à-dire : $(Y_n, A_n) \xrightarrow{\mathscr{L}} (Y, a)$.
2. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $0 < \mathbb{E}(X_1^2) < \infty$.
   a) Étudier la convergence de $n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2$.
   b) Montrer que
   $$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1).$$

On définit le dernier quotient égal à zéro lorsque son dénominateur est nul.

Exercice 4.19 — Inversion de la transformée de Laplace par des lois de Poisson

M1 • corrigé, p. 136

1. On fixe $x > 0$. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre x. Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$?
2. Pour tout réel u, on note $[u]$ la partie entière de u. En utilisant la loi des grands nombres, montrer que la suite
   $$e^{-nx}\sum_{0\leq k\leq [ny]}\frac{(nx)^k}{k!}$$
   converge vers 1 si $y > x$ et vers 0 si $y < x$.
3. En utilisant le théorème central limite, montrer que la suite de la question précédente converge vers $1/2$ si $y = x$.

4. Soit X une variable aléatoire strictement positive telle que $\mathbb{E}[X^k] < \infty$ pour tout entier $k \geq 1$. On note L sa transformée de Laplace : $L(t) = \mathbb{E}[\exp(-tX)]$. Deduire des questions précédentes que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{0\leq k\leq [ny]} \frac{(-n)^k}{k!} L^{(k)}(n) = \mathbb{P}(X < y) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = y)$$

Exercice 4.20 — Convergence des lois discrètes et conservation de la masse

L3 / M1 • corrigé, p. 137

Soit E un ensemble dénombrable et (μ_n) une suite de probabilités sur E. On suppose que $\mu_n(\{x\}) \to p_x$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que $\sum_{x\in E} p_x \leq 1$. Donner un exemple où cette somme est strictement inférieure à 1.

2. Montrer que $\sum_x p_x = 1$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $F \subset E$ telle que $\mu_n(F) \geq 1-\varepsilon$ pour tout n.

3. Lorsque $\sum_x p_x = 1$, on note μ la probabilité de masses p_x. Montrer que $\{x : p_x > 0\}$ est inclus dans la limite inférieure des ensembles $\{x : \mu_n(\{x\}) > 0\}$, puis établir

$$\sum_{x\in E} |\mu_n(\{x\}) - p_x| \longrightarrow 0.$$

4. Soient maintenant X_n à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Si $X_n \Rightarrow X$, montrer que $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Z}) = 1$ et que $\mathbb{P}(X_n = j) \to \mathbb{P}(X = j)$ pour chaque $j \in \mathbb{Z}$.

5. En déduire que (X_n) converge en loi si et seulement si ses masses convergent ponctuellement vers une famille de somme 1. Montrer alors la convergence en variation de ses lois. Que se passe-t-il si $X_n = n$ presque sûrement ?

6. Cette convergence en loi impose-t-elle la convergence ponctuelle des densités lorsque les lois ont des densités par rapport à la mesure de Lebesgue ? Utiliser l'exemple de l'exercice 4.3.

Exercice 4.21 — Tension d'un couple et convergence des marginales

M1 • corrigé, p. 137

Soit $U_n = (X_n, Y_n)$, $n \geq 1$, des vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^2$ tels que les suites $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ convergent en loi. Notons $\mathbb{P}_{U_n}$ (resp. $\mathbb{P}_{X_n}$, $\mathbb{P}_{Y_n}$) la loi de U_n (resp. X_n, Y_n).

1. Montrer que la suite $(\mathbb{P}_{U_n})_{n\geq 1}$ est tendue. (Indication : considérer d'abord $(\mathbb{P}_{X_n})_{n\geq 1}$ et $(\mathbb{P}_{Y_n})_{n\geq 1}$.)

2. On suppose désormais que les fonctions caractéristiques de U_n convergent simplement dans $\mathbb{R}^2$ pour $n \to \infty$. Montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ converge en loi.

Exercice 4.22 — Tension et convergence des intégrales

L3 / M1 • corrigé, p. 137

Soit g une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que $|g(x)| \to \infty$ quand $|x| \to \infty$. Soit P une famille de mesures de probabilités vérifiant $\sup_{\mathbb{P}\in P} \int_{\mathbb{R}} |g| d\mathbb{P} < \infty$.

1. Montrer que P est tendue, et donc relativement compacte pour la convergence étroite.

2. On suppose g continue. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans P qui converge vers μ. Prouver que $\int_{\mathbb{R}} |g| d\mu < \infty$.

3. Soit f une fonction continue telle que $f = o(g)$ à l'infini. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_n$ tend vers $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$.

Application : si $X_n \Rightarrow X$, $\limsup_n \mathbb{E}|X_n|^r < \infty$ avec $r > 0$, et si f est continue avec $f(x) = o(|x|^r)$ à l'infini, montrer que $\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$, les espérances étant finies à partir d'un certain rang.

Exercice 4.23 — Dérivées d'une fonction caractéristique

M1 • corrigé, p. 138

Soit X une variable aléatoire réelle vérifiant $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ pour un entier $p \geq 1$. Montrer que sa fonction caractéristique φ est de classe C^p et que $\varphi^{(p)}(t) = \mathbb{E}[(\mathrm{i}X)^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}]$, puis que

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\mathbb{E}[(\mathrm{i}tX)^k]}{k!} + o(t^p) \qquad \text{quand} \qquad t \to 0.$$

En déduire que si X est une variable gaussienne standard, alors

$$\forall n \geq 1 \qquad \mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1.$$

Exercice 4.24 — Critère de Pólya

M1 • corrigé, p. 138

1. Montrer que la fonction $x \mapsto (1-\cos x)/(\pi x^2)$ est une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). On appelle parfois loi de Polya la mesure de probabilité admettant cette fonction pour densité. En déduire que pour toute variable aléatoire X, on a
$$\mathbb{E}[|X|] = 2\int_0^\infty \frac{1-\operatorname{Re}\varphi_X(t)}{\pi t^2}\,\mathrm{d}t,$$
où φ_X désigne la fonction caractéristique de X.
2. Supposons que X suive la loi de Polya. Montrer que $\varphi_X(t) = (1-|t|)^+$, où $x^+ = \max\{x, 0\}$ est la partie positive.
3. Soit φ une fonction réelle paire et positive, qui vaut un en zéro, qui est décroissante et convexe sur $]0,\infty[$ et qui vérifie enfin $\lim_0 \varphi = 1$ et $\lim_\infty \varphi = 0$. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité ν sur $]0,\infty[$ telle que
$$\varphi(t) = \int_0^\infty \left(1-\left|\frac{t}{s}\right|\right)^+ \nu(\mathrm{d}s).$$
4. Avec un peu de travail, on peut déduire du résultat de la question précédente le critère de Polya, selon lequel φ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Prouver ce résultat dans le cas particulier où φ est affine par morceaux.
5. Appliquer le critère de Polya pour montrer que $\exp(-|t|^\alpha)$ est une fonction caractéristique lorsque $0 < \alpha \leq 1$. Montrer que si $X_1, \ldots, X_n$ désignent des variables aléatoires indépendantes admettant toutes cette fonction pour fonction caractéristique, alors $(X_1 + \ldots + X_n)/n^{1/\alpha}$ suit la même loi que X_1.

Exercice 4.25 — Produits infinis et loi de Cantor

M1 • corrigé, p. 139

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, et soit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On suppose que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une v.a. notée S_∞. Montrer que S_∞ a pour fonction caractéristique $\prod_{n=1}^\infty \varphi_n(t)$, où $\varphi_n(t)$ désigne la fonction caractéristique de X_n.
2. En itérant l'identité $\sin t = 2\sin(t/2)\cos(t/2)$, montrer que $(\sin t)/t = \prod_{n=1}^\infty \cos(t/2^n)$. Retrouver ce résultat en appliquant la question précédente à une suite de v.a. convenablement choisie.
3. On suppose dans cette question que les v.a. X_n suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Alors, la variable $X = 2\sum_{n=1}^\infty X_n 3^{-n}$ suit la loi uniforme dans l'ensemble triadique de Cantor. Déterminer la fonction caractéristique φ de X. Montrer que φ prend des valeurs identiques aux réels de la forme $3^k\pi$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.26 — Somme de Poisson et amincissement

L3 / M1 • corrigé, p. 139

Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d., de fonction caractéristique φ, et $N \sim \mathscr{P}(a)$, $a > 0$, indépendante de la suite. Posons $S = \sum_{i=1}^N X_i$, somme nulle si $N = 0$.

1. Calculer les fonctions caractéristiques de N et de S.
2. Lorsque $X_i \sim \mathscr{B}(1,p)$, déterminer la loi de S, la fonction caractéristique de $(S, N-S)$ et décider si ses coordonnées sont indépendantes.

Application : le nombre d'œufs d'une ponte suit $\mathscr{P}(a)$. Conditionnellement à ce nombre, les éclosions sont indépendantes, de probabilité p chacune. Déterminer la loi du nombre de naissances, cette fois par sommation des probabilités conditionnelles.

Exercice 4.27 — Distance en variation et couplage binomiale-Poisson

L3 • corrigé, p. 139

Pour deux probabilités $P = (p_k)$ et $Q = (q_k)$ sur $\mathbb{N}$, on pose $D(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_k |p_k - q_k|$.

1. Justifier la convergence de la série ; montrer $|P(A) - Q(A)| \le D(P,Q)$ pour toute partie A et que l'égalité est atteinte en $A_0 = \{k : q_k \le p_k\}$. On pourra écrire $2|P(A) - Q(A)| = |\sum_{k\in A}(p_k - q_k)| + |\sum_{k\notin A}(p_k - q_k)|$.
2. En déduire $D(P,Q) = \sup_A |P(A) - Q(A)| = 1 - \sum_k \min(p_k, q_k)$.
3. Pour tout couplage (X,Y) de ces lois, montrer $D(P,Q) \le \mathbb{P}(X \neq Y)$.
4. Fixons $0 < \lambda < n$ et $h = \lambda/n$. Soient Y_i indépendantes de loi $\mathscr{P}(h)$. Donner la loi de leur somme. Montrer que $f(x) = 1 - (1-x)e^x$ est dans $[0,1]$ pour $x \in [0,1]$.
5. Prendre U_i indépendantes de loi $\mathscr{B}(1, f(h))$, indépendantes des Y_i, et poser $X_i = 0$ si $U_i = Y_i = 0$, $X_i = 1$ sinon. Donner les lois des X_i et de leur somme.
6. Calculer $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i)$ et la majorer par h^2 ; conclure que $D(\mathscr{B}(n, \lambda/n), \mathscr{P}(\lambda)) \le \lambda^2/n$. Que se passe-t-il pour $n \to \infty$ à λ fixé ?

Exercice 4.28 — Convergence en loi et théorème de Lévy

M1 • corrigé, p. 140

Définir la convergence en loi. Énoncer les deux implications du théorème de continuité de Lévy pour les fonctions caractéristiques.

Exercice 4.29 — La médiane d'une loi de Poisson entière

L3 • corrigé, p. 140

Pour $n \ge 1$ et $\lambda \ge 0$, poser $P_n(\lambda) = e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{n} \lambda^j/j!$.

1. Donner un équivalent de $u_n = e^{-n}n^n/n!$. Calculer P_n' et P_n'', et montrer $1 - P_n(\lambda) = \frac{1}{n!}\int_0^\lambda e^{-x}x^n\,dx$.
2. Établir $P_n(n-1) + P_n'(n-1) = P_{n-1}(n-1)$ et rappeler Taylor avec reste intégral sur $[n-1, n]$.
3. Montrer que $P_n(n)$ décroît strictement et que $P_{n-1}(n)$ croît strictement. Les montrer adjacentes, puis calculer leur limite grâce au TCL.
4. En déduire que l'entier n est l'unique médiane de $\mathscr{P}(n)$. Une assurance reçoit des primes d'un montant total $(1+\theta)ns$, dispose d'une réserve initiale fixe $R \ge 0$ et couvre un nombre $N_n \sim \mathscr{P}(n)$ de sinistres, chacun de coût fixe $s > 0$. Interpréter, lorsque $\theta = 0$, la limite de la probabilité de couvrir les dépenses à la fin de la période, lorsque $n \to \infty$.

Exercice 4.30 — Convergence des moments et détermination d'une loi

M1 • corrigé, p. 140

On note $\mathscr{N}(0,1)$ la loi normale centrée réduite.

1. Pour $|a| \le 1$, montrer que $f_a(x) = \mathbf{1}_{\{x>0\}}(1 + a\sin(2\pi\log x))e^{-(\log x)^2/2}/(x\sqrt{2\pi})$ est une densité. Calculer ses moments entiers et montrer que ceux-ci ne déterminent pas toujours la loi.
2. Donner un exemple de convergence en loi sans convergence des moments.
3. Montrer que la convergence en loi et une borne uniforme sur un moment absolu d'ordre $q > p$ impliquent la convergence des moments d'ordre entier p. Expliquer le rôle de cette borne.
4. Définir la tension d'une suite de probabilités sur $\mathbb{R}$ et démontrer son extraction séquentielle par les fonctions de répartition et une diagonale sur les rationnels.
5. Si tous les moments de X_n convergent vers ceux d'une loi déterminée par ses moments, montrer la convergence en loi correspondante.
6. Calculer $\mathbb{E}[s^X]$, pour $s > 0$, lorsque X est de Poisson ou gaussienne. Justifier que la loi normale est déterminée par ses moments.
7. Retrouver, par les moments, la convergence de $(X_n - n)/\sqrt{n}$ vers $\mathscr{N}(0,1)$ pour $X_n \sim \mathscr{P}(n)$.

Exercice 4.31 — Autorégression et série aléatoire

M1 • corrigé, p. 141

Soient (W_n) iid, $\mathbb{E}W_1 = 0$, $\mathbb{E}W_1^2 = 1$, $|\theta| < 1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Poser $X_0 = x_0$, $X_{n+1} = \theta X_n + W_{n+1}$.

1. Exprimer X_n en fonction des W_i, puis calculer sa variance.
2. Si W_1 est normale, donner la loi de X_n et sa limite en loi.
3. Poser $V_n = \theta^n x_0 + \sum_{i=1}^{n} \theta^{i-1} W_i$. Montrer $X_n \overset{d}{=} V_n$, calculer $\mathbb{E}(V_{n+p} - V_n)^2$ et établir la convergence de V_n dans L^2.
4. En déduire une convergence de X_n. Montrer que sa loi limite V vérifie $V \overset{d}{=} \theta V + W_0$, avec W_0 indépendant de V.
5. Écrire la relation entre les fonctions caractéristiques de V et W_1.
6. Identifier V lorsque $\theta = 1/2$ et W_1 est de Rademacher.

Exercice 4.32 — Changement de signe entre deux sommes

M1 • corrigé, p. 141

Soient X_i iid centrées de variance 1, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer la limite en loi de $(S_n/\sqrt{n}, (S_{2n} - S_n)/\sqrt{n})$ et la limite de $\mathbb{P}(S_n > 0, S_{2n} < 0)$.

Exercice 4.33 — Sommes de Cauchy et échec de la loi faible

L3 • corrigé, p. 141

Soient X_i iid de Cauchy d'échelle $a > 0$, de densité $a/[\pi(x^2 + a^2)]$, et $S_n = \sum X_i$. Étudier les convergences en loi et en probabilité de $S_n/\sqrt{n}$ et S_n/n^2. Calculer la loi de $S_{2n}/(2n) - S_n/n$, en déduire que S_n/n ne converge pas en probabilité. Y a-t-il contradiction avec la loi faible ?

Exercice 4.34 — Maximum à queue de puissance et loi de Fréchet

L3 • corrigé, p. 141

Supposer $x^\lambda \mathbb{P}(X_1 > x) \to \alpha > 0$ lorsque $x \to \infty$, avec $\lambda > 0$ et X_i iid. Montrer que $n^{-1/\lambda} \max_{i \le n} X_i$ converge vers la loi de répartition $e^{-\alpha x^{-\lambda}}$ pour $x > 0$, zéro sinon. Application numérique. Prendre comme seuil de calcul $d = 0{,}71$ microgramme par jour et par kilogramme, un poids de 70 kg, 365 jours, $\alpha = 3{,}54\,10^{-9}$ et $\lambda = 2{,}58$ pour une quantité annuelle en grammes. Sous l'approximation de queue, estimer la probabilité d'un dépassement dans des groupes de 225000 et 100 personnes, puis la taille pour atteindre 95 %.

Exercice 4.35 — Fonctions génératrices et moments factoriels

L3 • corrigé, p. 142

Pour $X \in \mathbb{N}$, étudier $G_X(s) = \mathbb{E}s^X$ sur $[-1, 1]$, ses dérivées sur $(-1, 1)$, ses valeurs dérivées en zéro et leurs limites quand $s \uparrow 1$. Montrer qu'elle caractérise la loi ; exprimer espérance et variance. Donner les fonctions génératrices de Bernoulli, binomiale et Poisson, et traiter les sommes indépendantes.

Exercice 4.36 — Distance d'un sommet à un axe

L3 • corrigé, p. 142

On choisit uniformément un sommet d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité. Montrer que sa distance X_n à l'axe des abscisses converge en loi et déterminer la densité limite.

Exercice 4.37 — Distance entre deux points uniformes

L3 • corrigé, p. 142

Soient X_n, Y_n indépendantes uniformes sur $\{1, \dots, n\}$. Déterminer la limite en loi de $|X_n - Y_n|/n$ et sa densité. Deux dépannages ont lieu à des positions indépendantes uniformes sur une autoroute de 112 km. Quelle est la probabilité que leurs positions soient distantes de plus de 70 km ?

Exercice 4.38 — Passage des fonctions lisses aux fonctions de répartition

L3 • corrigé, p. 142

On sait que $\mathbb{E}\varphi(Z_n) \to \mathbb{E}\varphi(G)$ pour toute fonction $\varphi \in C^3(\mathbb{R})$ bornée à dérivée troisième bornée, où G est une gaussienne non dégénérée. Déduire la convergence des fonctions de répartition en tout point. Expliquer pourquoi cette convergence est uniforme.

Exercice 4.39 — Approximation normale d'un chi-deux

L3 • corrigé, p. 142

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que, pour un grand nombre n de degrés de liberté, la fonction de répartition du χ^2_n est approchée par $t \mapsto \Phi((t-n)/\sqrt{2n})$.

Exercice 4.40 — Produit de Slutsky et variance estimée

L3 • corrigé, p. 142

Supposons $U_n \to u \in \mathbb{R}$ en probabilité et $Z_n \Rightarrow Z$, dont la fonction de répartition F est continue. Étudier la limite en loi de $U_n Z_n$, pour les trois signes de u, en encadrant les événements sur $\{|U_n - u| \leq \delta\}$. En déduire la normalité asymptotique de $\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)/T_n$ si les X_i sont indépendantes de même loi, de moyenne m et de variance $\sigma^2 \in (0,\infty)$, et $T_n \to \sigma$ en probabilité.

Exercice 4.41 — Approximation de l'identité par des gaussiennes

M1 • corrigé, p. 143

Soit g_σ la densité de la loi gaussienne centrée $\mathcal{N}(0,\sigma^2 I_d)$ de matrice de covariance $\sigma^2 I_d$, pour $\sigma > 0$. Pour toute fonction continue bornée φ sur $\mathbb{R}^d$, montrer $(g_\sigma * \varphi)(y) \to \varphi(y)$ pour tout y quand $\sigma \downarrow 0$.

5. Statistique, estimation et tests

Exercice 5.1 — Moyenne studentisée

L3 • corrigé, p. 144

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d de carré intégrable non constantes. On note m l'espérance des X_i et on pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$.

On définit le quotient suivant comme nul sur $\{V_n = 0\}$. Montrer que $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sqrt{V_n}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Application : Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ construire $A_n < B_n$ deux variables aléatoires définies à l'aide de $X_1, \dots, X_n$ telles que $P(m \in [A_n, B_n]) \to 1-\alpha$ (on dit que $[A_n,\ B_n]$ est un intervalle de confiance pour m de niveau de confiance asymptotique $1-\alpha$).

Exercice 5.2 — Consistance ponctuelle d'un histogramme

L3 • corrigé, p. 144

Soit $(X_k)_k$ une suite de v.a. réelles indépendantes et de loi μ définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que la loi μ admet une densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $(h_n)_n$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\omega \in \Omega$, on appelle *histogramme* des observations $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ pour la partition de $\mathbb{R}$ en intervalles de longueurs h_n, la fonction $\bar{f}_n(\omega, \cdot)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\bar{f}_n(\omega, x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i(\omega) \in [k_n(x)h_n, (k_n(x)+1)h_n[\}}$$

où $k_n(x)$ désigne l'unique entier k tel que $x \in [kh_n, (k+1)h_n[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose dans tout l'exercice que h_n tend vers 0 et que nh_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Donner une expression de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire $\bar{f}_n(\cdot, x)$ en fonction de f et h_n et x.
2. Montrer que $E(\bar{f}_n(\cdot, x))$ tend vers $f(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et que
$$\mathrm{Var}(\bar{f}_n(\cdot, x)) = \frac{1}{nh_n}(f(x) + o(1)).$$
3. En déduire que la suite $(\bar{f}_n(\cdot, x))_n$ tend vers $f(x)$ dans L^2.
4. On suppose de plus qu'il existe $\delta > 0$, $A > 0$ et $\alpha \in]0,1]$ tels que pour tout $y \in]x-\delta, x+\delta[$, $|f(x) - f(y)| \leq A|x-y|^\alpha$.
Trouver une suite $(h_n)_n$ tendant vers 0 de sorte que nh_n tende vers $+\infty$ et de sorte que la suite de terme général
$$n^{2\alpha/(2\alpha+1)} \mathbb{E}[(\bar{f}_n(x) - f(x))^2]$$
soit bornée.

Exercice 5.3 — Chaîne plane d'atomes

L3 • corrigé, p. 145

Une molécule formée d'une longue chaîne plane d'atomes identiques est modélisée ainsi : deux atomes consécutifs positionnés en A_i et A_{i+1} sont à une distance ϵ, la direction du vecteur $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble des directions possibles et indépendante des directions des autres vecteurs $\overrightarrow{A_jA_{j+1}}$.

1. Quelle est la loi approchée du vecteur $\overrightarrow{A_1A_n}$ où A_1 désigne la position du premier atome de la chaîne et A_n la position du dernier atome de la chaine ?
2. En déduire la loi approchée du carré de la distance entre le premier atome et le dernier atome de la chaîne.

Exercice 5.4 — Détection d'un signal gaussien

L3 • corrigé, p. 145

On suppose que le signal reçu par un radar est $X = \theta S + \epsilon$ où ϵ est une variable normale centrée de variance σ^2, de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$, $S > 0$ et où $\theta = 1$ si un objet volant est présent dans la zone couverte par le radar et $\theta = 0$ si aucun objet n'y est présent. Construire un test pour décider si un objet volant est dans la zone couverte par le radar au vu d'une observation de X de sorte que la probabilité de "fausse alarme" soit de α. On donnera aussi la puissance de ce test en fonction de S et de σ^2.

Donner une expression du seuil pour $0 < \alpha < 1/2$, puis les valeurs numériques pour $\alpha = 10^{-6}$ et $\alpha = 10^{-3}$.

Exercice 5.5 — Comparaison de deux proportions de guérison

L3 • corrigé, p. 145

On dispose de deux traitements médicaux A et B. On a obtenu 60 guérisons sur 100 cas pour le traitement A et 70 guérisons sur 100 cas pour le traitement B. On aimerait tester s'il y a une différence de résultats entre les deux traitements. Notons p_A (resp. p_B) la probabilité qu'un patient suivant le traitement A (resp. B) guérisse et notons $S_{n,A}$ (resp. $S_{n,B}$) le nombre d'individus guéris sur n individus qui suivent le traitement A (resp. B). On suppose $0 < p_A, p_B < 1$ et toutes les observations indépendantes, avec une même probabilité de guérison au sein de chaque groupe. On effectue un test de l'hypothèse $H_0 : p_A = p_B$ contre $H_1 : p_A \neq p_B$ au niveau 5%.

1. Par quelle loi peut-on approcher la loi de $\frac{1}{\sqrt{n}}(S_{n,A} - S_{n,B})$ sous l'hypothèse H_0 lorsque n est grand ?
2. On pose $U_n = \frac{1}{2n}(S_{n,A} + S_{n,B})$. Que peut-on dire de la loi de U_n lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On choisit comme zone de rejet de H_0 une zone de la forme :
$$\mathscr{R}_n = \{0 < U_n < 1, \quad |S_{n,A} - S_{n,B}| \geq q\sqrt{2nU_n(1-U_n)}\}$$
Comment choisir le réel q pour que $P_{H_0}(\mathscr{R}_n)$ tende vers 0.05 lorsque n tend vers $+\infty$?
4. Que peut-on dire de la puissance de ce test en une valeur de $p_B - p_A \neq 0$ fixée lorsque n tend vers $+\infty$?
5. Appliquer ce test aux données.

Exercice 5.6 — Test du chi-deux pour une proportion

L3 • corrigé, p. 145

1. Construire un test d'ajustement du χ^2 à la loi $p_0\delta_{x_0} + p_1\delta_{x_1}$ où x_0 et x_1 sont deux valeurs distinctes, p_0 et p_1 sont deux réels positifs de somme 1.
2. *Application :* Le bureau de la statistique du gouvernement du Quebec a dénombré 84579 nouveau-nés dans la province en 1986. De ce nombre, 43220 étaient des garçons et 41359 des filles. Tester si la probabilité d'avoir un garçon est la même que la probabilité d'avoir une fille.
3. Donner un intervalle de confiance pour la probabilité d'avoir une fille de niveau de confiance asymptotique 95%.

Exercice 5.7 — Répartition des observations entre habitats

L3 • corrigé, p. 146

Le couvert végétal du domaine vital d'un élan d'Amérique se composait de peuplements feuillus (25, 8% de la superficie du domaine vital), de peuplements mixtes (38% de la superficie), de peuplements résineux (25, 8% de la superficie) et d'un marécage (10, 4% de la superficie). Dans ce domaine, l'élan fut localisé à 511 reprises au cours de l'année. Sur 511 localisations, 118 se situaient dans les feuillus, 201 dans les peuplements mixtes, 110 dans les résineux et 82 dans le marécage.
L'élan fréquente-t-il indifféremment les quatre types de végétation de son domaine vital ?

On effectue le test dans le modèle de localisations indépendantes, avec pour hypothèse nulle des probabilités proportionnelles aux superficies.

Exercice 5.8 — Estimation d'un taux exponentiel

L3 • corrigé, p. 146

On suppose que la durée de vie des piles d'une fabrique donnée suit une loi exponentielle de taux $\theta > 0$ inconnu. On dispose de $n \geq 1$ piles neuves provenant de cette fabrique. On note $\tau_1, \ldots, \tau_n$ les durées de vie respectives de ces piles et on les supposera indépendantes. On note $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$.

1. Déterminer la loi de T_n.
2. Montrer que $(\frac{n}{T_n})_n$ converge en probabilité vers θ.
3. Montrer que $\sqrt{n}(\frac{\theta T_n}{n} - 1)$ converge en loi vers une loi que l'on déterminera.
4. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance 95% pour θ à l'aide de T_n.
5. Une entreprise a acheté un lot de 20 piles identiques ; le fabriquant garantit une durée de fonctionnement moyen de 10 heures pour ces piles. Si la durée de fonctionnement moyenne de ce lot est de 9 h 30, peut-on avec un risque de se tromper inférieur à 5 % remettre en cause l'affirmation du fabriquant ?
6. Dès que la pile de la pendule du hall d'une gare tombe en panne, elle est remplacée par une pile de la même marque. Soit $t > 0$. On note N_t le nombre de remplacements effectués pendant les t premières heures. Déterminer la loi de N_t.

Exercice 5.9 — Approximations binomiales et choix d'un effectif

M1 • corrigé, p. 146

On modélise les cueillettes par des tirages indépendants. Dans la dernière question, distinguer le calcul approché demandé par le TCL du minimum binomial exact.

Dans une forêt, les champignons non comestibles sont quatre fois plus nombreux que les champignons comestibles. On note F la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite, et F^{-1} sa réciproque.

1. On cueille au hasard 100 champignons. Quelle est la probabilité de trouver un nombre de champignons comestibles compris entre 15 et 25 ? Calculer une valeur approchée de cette valeur sachant que $F(1.25) = 0.894$.
2. Parmi les champignons comestibles, un dixième sont des cèpes. Quelle est la probabilité que sur les 100 champignons cueillis, au moins trois soient des cèpes ? On donne $e^{-2} = 0.135$.
3. Déterminer le nombre minimal de champignons n qu'il faut cueillir pour, avec une probabilite de se tromper inférieure a 0.05, le nombre de champignons comestibles soit compris entre $0.15n$ et $0.25n$? On donne $F^{-1}(0.975) = 1.96$.

Exercice 5.10 — Limite multinomiale et statistique du chi-deux

L3 / M1 • corrigé, p. 146

On note $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ la loi gaussienne centrée de matrice de covariance Σ. On suppose $k \geq 2$. Pour cet exercice, il est commode d'identifier $\mathbb{R}^k$ aux matrices-colonnes de taille k. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi portée par $\{1, 2, \dots, k\}$. On suppose $p_i = \mathbb{P}(X_1 = i) > 0$ pour tout i. Notons $N_{n,i} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_j = i\}}$ et $p_i = \mathbb{P}(X_1 = i)$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, puis $N_n = (N_{n,1}, \dots, N_{n,k})$.

1. Donner la loi de N_n.
2. On note $\xrightarrow{\mathscr{L}}$ la convergence en loi. Montrer que

$$\begin{pmatrix} \frac{N_{n,1} - np_1}{\sqrt{np_1}} \\ \vdots \\ \frac{N_{n,k} - np_k}{\sqrt{np_k}} \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} N(0, \mathrm{I}_k - X^t X),$$

   où I_k est la matrice identité de taille k et X est un vecteur-colonne que l'on déterminera. Montrer que $\Gamma = \mathrm{I}_k - X^t X$ est la matrice d'un projecteur orthogonal, dont on précisera l'image et le noyau.
3. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q de taille k telle que $QX = e$, avec $e = {}^t(0, \dots, 0, 1)$, puis que

$$Q\begin{pmatrix} \frac{N_{n,1} - np_1}{\sqrt{np_1}} \\ \vdots \\ \frac{N_{n,k} - np_k}{\sqrt{np_k}} \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} N(0, \mathrm{I}_k - e^t e).$$

4. On considère

$$T_n = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_{n,i} - np_i)^2}{np_i}.$$

Montrer que T_n converge en loi vers $\chi^2(k-1)$. Indication : On pourra s'intéresser au carré de la norme euclidienne du vecteur

$$Q\begin{pmatrix} \frac{N_{n,1}-np_1}{\sqrt{np_1}} \\ \vdots \\ \frac{N_{n,k}-np_k}{\sqrt{np_k}} \end{pmatrix}.$$

Ce résultat est très utilisé en statistiques : il permet d'établir le *test du* χ^2 qui est mis en oeuvre pour savoir si un échantillon i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ suit une loi donnée à l'avance. Son usage est très répandu en biologie.

Montrer aussi que le vecteur $\hat{p}_n = N_n/n$ converge en probabilité vers p, et déterminer la limite en loi de $\sqrt{n}(\hat{p}_n - p)$. Expliciter la covariance pour un dé équilibré.

Exercice 5.11 — Méthode delta

M1 • corrigé, p. 147

Un vecteur $m \in \mathbb{R}^d$ et une matrice carrée Γ de taille d étant donnés, notons $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $\sqrt{n}(X_n - m)$ converge en loi vers la loi gaussienne centrée $N(0,\Gamma)$ de matrice de covariance Γ. Montrer que pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ différentiable au point m, $\sqrt{n}(f(X_n) - f(m))$ converge en loi vers $N(0, J_f(m)\Gamma^t J_f(m))$ où $J_f(m)$ est la matrice jacobienne de f au point m.

Exercice 5.12 — Comparaison de trois magasins

L3 • corrigé, p. 148

Le nombre de vols observés en une année dans trois magasins A, B, C est respectivement 38, 25, 27. Que peut-on conclure sur une éventuelle différence d'exposition ? Préciser le modèle et effectuer un test au seuil de 5%.

Exercice 5.13 — Composition d'un jury

L3 • corrigé, p. 148

Parmi 200 jurés désignés, 100 sont d'origine mexicaine, alors que cette catégorie représente 60% des personnes éligibles. Sous un modèle de désignations indépendantes à probabilité 0,6, quelle est la loi de cet effectif ? Tester au seuil de 5% une sous-représentation. Discuter ce que le test permet de conclure.

Exercice 5.14 — Sondage électoral et test unilatéral

L3 • corrigé, p. 148

Un sondage est modélisé par $X_1, \dots, X_n$ indépendantes Bernoulli de paramètre p, proportion d'intentions de vote pour A, et $\hat{p}_n = n^{-1}\sum_i X_i$.

1. Critiquer le modèle et déterminer le comportement de $\hat{p}_n$.
2. Pour $1/2 < p < 1$, montrer $\mathbb{P}(\hat{p}_n > 1/2) < 1$ et sa convergence vers 1.
3. Déterminer la limite en loi de $\sqrt{n}(\hat{p}_n - p)$ et proposer une approximation normale de $\mathbb{P}(\hat{p}_n < 1/2)$, en précisant sa portée.
4. Construire un test de niveau asymptotique 5% de $p = 1/2$ contre $p > 1/2$. Avec $n = 400$ et $\hat{p}_n = 0{,}52$, peut-on conclure au seuil choisi à une majorité pour A ?

Exercice 5.15 — Limite normale de la médiane empirique

L3 • corrigé, p. 148

On note $\mathcal{N}(0,1)$ la loi normale centrée réduite. Soient $X_1, \dots, X_{2n-1}$ indépendantes uniformes sur $[0,1]$ et $X_{(n)}$ leur médiane. Fixons $t > 0$ et prenons n assez grand pour que $t/\sqrt{8n} < 1/2$. Posons $a_n = 1/2 + t/\sqrt{8n}$, puis $Y_i = \mathbf{1}_{\{X_i \leq a_n\}} - \mathbf{1}_{\{X_i > a_n\}}$, $\varepsilon_i = \mathbf{1}_{\{X_i \leq 1/2\}} - \mathbf{1}_{\{X_i > 1/2\}}$, $S = \sum_i Y_i$ et $\tilde{S} = \sum_i \varepsilon_i$.

1. Montrer $\mathbb{P}(S \geq 0) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leq a_n)$.
2. Donner la limite de $\tilde{S}/\sqrt{2n-1}$.
3. Montrer que $(S - \tilde{S})/2$ est binomiale de paramètres $2n-1, t/\sqrt{8n}$.
4. En déduire $(S - \tilde{S})/\sqrt{2n-1} \to t$ en probabilité, puis la limite en loi de $S/\sqrt{2n-1}$.
5. Conclure que $\sqrt{8n}(X_{(n)} - 1/2) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$, en traitant aussi $t \leq 0$.

Exercice 5.16 — Réserve d'une assurance et approximation normale

L3 • corrigé, p. 148

Les nombres annuels de décès sont indépendants, de loi de Poisson de moyenne k. Chaque décès coûte s euros et les cotisations annuelles totales valent $ks(1+\theta)$, avec $\theta > 0$. Une réserve initiale R est disponible.

1. Montrer que la somme de Poisson indépendantes est de Poisson, de paramètre la somme des paramètres. Donner la loi des décès et le coût cumulé sur cinq ans.
2. Déterminer par approximation normale une réserve assurant une probabilité d'au moins 0,99 de couvrir le coût *au terme des cinq ans*.
3. Application : $N = 1000$ assurés, $s = 500$, $k = 10$, $\theta = 0{,}1$. Calculer la cotisation par assuré et la réserve approchée. Sans réserve, combien faut-il d'assurés si $k = N/100$?

Exercice 5.17 — Fiabilité d'un montage série-parallèle

L3 • corrigé, p. 149

Quatre composants indépendants ont des durées T_i de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ de taux $\lambda > 0$. Les composants 1 et 2 sont en série avec le montage parallèle de 3 et 4. Exprimer la durée D du système, calculer sa loi, son espérance et sa variance. À partir de n durées indépendantes, construire un intervalle de confiance asymptotique à 90 % pour λ.

Exercice 5.18 — Estimation avec censure aux premières pannes

L3 • corrigé, p. 149

Soient $\tau_1, \dots, \tau_n$ iid exponentielles de moyenne 2θ, $\theta > 0$, et $T_1 < \cdots < T_n$ leurs statistiques d'ordre. Poser $T_0 = 0$, $Y_i = T_i - T_{i-1}$ et, pour $1 \le r < n$, $S_r = T_1 + \cdots + T_{r-1} + (n-r+1)T_r$. Déterminer la densité jointe des T_i, les lois et l'indépendance des Y_i. Montrer la convergence en probabilité de $S_r/(2r)$ vers θ lorsque $r \to \infty$, établir la loi $S_r/\theta \sim \chi^2_{2r}$ et la limite en loi de $\sqrt{r}(S_r/(2r) - \theta)$.

Exercice 5.19 — Tests et intervalle pour une moyenne normale

L3 • corrigé, p. 149

Un échantillon iid suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de moyenne m et de variance σ^2, avec $\sigma > 0$ connue. Montrer que le maximum de vraisemblance est la moyenne empirique, donner sa loi, construire les tests de $m = 0$ contre $m = \mu > 0$ puis contre $m \neq 0$, au niveau α. Étudier la puissance du test unilatéral. Construire l'intervalle de confiance de niveau $1-\alpha$. Application : $101, 103, 99, 102, 101$, $\sigma = 1$, tester $m = 100$ au niveau 0,005 et donner l'intervalle à 99,5 %.

Exercice 5.20 — Estimation du taux d'un processus d'appels

L3 • corrigé, p. 149

Les inter-arrivées, y compris le temps jusqu'au premier appel, sont iid exponentielles de taux θ. Pour la date T_n du n-ième appel, poser $\hat{\theta}_n = n/T_n$. Montrer sa consistance forte, calculer son biais pour $n \ge 2$ et démontrer la convergence dans L^2.

Exercice 5.21 — Test exact d'une durée exponentielle

L3 • corrigé, p. 149

Les dix durées d'appels, en secondes, sont $27, 23, 192, 45, 306, 116, 121, 411, 77, 274$. Sous un modèle iid exponentiel, tester au niveau 5 % l'hypothèse de moyenne 180 secondes, à partir de la somme des observations.

Exercice 5.22 — Fréquence de pile et maximum de vraisemblance

L3 • corrigé, p. 150

On lance 20 fois une pièce équilibrée et on note X la fréquence de pile. Donner sa loi, $\mathbb{P}(X > 1/2)$, $\mathbb{P}(0{,}4 \le X \le 0{,}6)$ et le plus petit $a > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X - 1/2| \le a) > 0{,}95$. Interpréter une observation de cinq piles. Sans supposer la pièce équilibrée, déterminer le maximum de vraisemblance du paramètre q à partir d'un total s de piles et tracer la vraisemblance pour $s = 5$.

Exercice 5.23 — Capture-recapture et maximum de vraisemblance

L3 • corrigé, p. 150

Une population fermée de N grenouilles contient m individus marqués. On recapture un sous-ensemble uniforme de taille n et on observe $X = i$ individus marqués. Donner la loi de X et estimer N par maximum de vraisemblance pour $i \ge 1$. Examiner $i = m = n$, puis $m = 20, n = 10, i = 2$. Décrire les graphes de la vraisemblance et de la loi obtenue.

Exercice 5.24 — Distinguer deux proportions avec deux cents observations

L3 • corrigé, p. 150

On observe $S \sim \mathcal{B}(200, p)$ et l'on veut distinguer $H_0 : p = 0{,}02$ de $H_1 : p = 0{,}08$. Construire un test dont les deux risques d'erreur sont de l'ordre de 2%.

Exercice 5.25 — Test sur la transmission d'un phénotype

L3 • corrigé, p. 150

On observe le nombre X d'individus présentant un phénotype parmi 50 croisements indépendants. Selon le modèle, sa probabilité vaut $3/4$ ou $9/16$. Construire un test permettant de distinguer ces deux modèles.

Exercice 5.26 — Une pièce est-elle équilibrée ?

L3 • corrigé, p. 150

Une pièce a donné face 7 fois en 10 lancers indépendants. On teste $H_0 : p = 1/2$ contre $H_1 : p > 1/2$, où p est la probabilité de face. Donner la loi du nombre Z de faces, construire un test de niveau 6%, préciser son niveau exact et conclure pour l'observation. Calculer la probabilité de ne pas rejeter H_0 lorsque $p = 0{,}6$, puis $p = 0{,}7$.

Exercice 5.27 — Monotonie et puissance d'un test binomial

L3 • corrigé, p. 151

Soit $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $p \mapsto \mathbb{P}_p(S_n \geq k)$ est croissante. Construire le test de $H_0 : p \leq 0{,}02$ contre $H_1 : p > 0{,}02$ de niveau α, fondé sur les grandes valeurs de S_n, et montrer que sa puissance est croissante. Pour $\alpha = 0{,}05$, calculer le seuil et les puissances en $p = 0{,}04$ et $p = 0{,}10$, lorsque $n = 100$, puis $n = 200$.

Exercice 5.28 — Inversion des tests et intervalle binomial exact

L3 • corrigé, p. 151

Soit $S \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que l'ensemble des p non rejetés par le test bilatéral à queues de probabilités $\alpha/2$ est un intervalle. Pour $n = 100$ et $S = 4$, calculer l'intervalle exact à 95% et examiner l'arrondi $]0{,}011; 0{,}10[$.

Exercice 5.29 — Proportions rares et approximation de Poisson

L3 • corrigé, p. 151

1. Parmi 1000 individus tirés indépendamment, un est porteur d'une anomalie. Tester $p = 0{,}02$ contre $p = 0{,}01$ au niveau 5% et proposer un intervalle de confiance à 95% par l'approximation de Poisson.
2. Parmi 10000 individus, quatre sont porteurs d'un virus. Donner les intervalles de confiance obtenus par cette approximation aux niveaux 95% et 99%.

Exercice 5.30 — Précision d'un sondage par Bienaymé–Tchebychev

L3 • corrigé, p. 151

Un sondage indépendant avec remise donne 52% de réponses favorables parmi 1000 personnes. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev, donner un intervalle de confiance de niveau au moins 95% pour la proportion p. Déterminer une taille d'échantillon garantissant une précision de 1%. Préciser le sens donné au mot précision.

Exercice 5.31 — Contrôle du poids de paquets

L3 • corrigé, p. 152

Le poids mesuré d'un paquet suit la loi normale $\mathcal{N}(m+10, 10^2)$, de moyenne $m+10$ et d'écart-type 10 grammes, les 10 grammes supplémentaires correspondant à l'emballage. Tester $H_0 : m = 1000$ contre $H_1 : m < 1000$ au niveau 5% avec une pesée. Calculer le risque de non-rejet si $m = 990$ et conclure pour une pesée de 1000 g. Reprendre avec quatre pesées indépendantes 1000, 990, 1010, 1000 g. Le test reste-t-il valable pour $H_0 : m \geq 1000$?

Exercice 5.32 — Contrôle de précision d'un dosage

L3 • corrigé, p. 152

Les dosages indépendants X_i suivent la loi normale $\mathcal{N}(5, \sigma^2)$ de moyenne 5 et de variance $\sigma^2 > 0$. Posons $S_n^2 = n^{-1}\sum_i (X_i - 5)^2$.

1. Déterminer la loi de nS_n^2/σ^2 et celle de nS_n^2/σ_0^2 lorsque $\sigma_0 > \sigma$.
2. Construire le test de $\sigma = 0{,}05$ contre $\sigma > 0{,}05$ au niveau 5%.
3. Conclure pour les sept observations $5{,}04; 5{,}13; 5{,}07; 5; 5{,}08; 4{,}99; 5{,}11$, puis pour $n = 100$ et $S_{100}^2 = 0{,}003$.
4. Le même test convient-il pour l'hypothèse $\sigma \leq 0{,}05$?

Exercice 5.33 — Droite des moindres carrés d'un nuage de points

L3 • corrigé, p. 152

On choisit uniformément l'un des n points (x_i, y_i) d'un nuage et on note (X, Y) ses coordonnées. Déterminer la droite de régression de Y en X. Interpréter géométriquement et minimiser $S(a,b) = \sum_i (y_i - a x_i - b)^2$. Traiter aussi le cas où tous les x_i sont égaux.

Exercice 5.34 — Consistance des estimateurs usuels

L3 • corrigé, p. 152

Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables indépendantes de même loi, de carré intégrable, de moyenne m et de variance σ^2. On note $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer l'espérance et la limite presque sûre de $V_n = n^{-1}\sum_i (X_i - \overline{X}_n)^2$. Pour $n \geq 2$, montrer que $S_n^2 = (n-1)^{-1}\sum_i (X_i - \overline{X}_n)^2$ est sans biais et consistant pour la variance, puis que S_n est consistant pour l'écart-type.
2. Montrer qu'un estimateur asymptotiquement sans biais dont la variance tend vers zéro est consistant.
3. Si $Y_n \to \theta$ et $Z_n \to \lambda$ en probabilité, montrer la consistance de leur somme et de leur produit. Si $\theta \neq 0$, traiter $1/Y_n$, en précisant sa définition lorsque $Y_n = 0$.

Exercice 5.35 — Places assises dans deux trains

L3 • corrigé, p. 153

Chacun de 1600 voyageurs choisit indépendamment l'un de deux trains, avec probabilités égales. Combien de places faut-il dans chaque train pour que la probabilité qu'un voyageur au moins reste debout soit inférieure à 0,003 ? Donner une approximation normale et vérifier le seuil exact.

Exercice 5.36 — Sondage avant un référendum

L3 • corrigé, p. 153

Un échantillon indépendant de 10000 personnes donne 4903 intentions de vote oui et 5097 non. Évaluer, par un test unilatéral, la force de l'indication en faveur du non. Peut-on en déduire la probabilité que la prédiction de victoire du non soit fausse ?

Exercice 5.37 — Intervalle de confiance après cent lancers

L3 • corrigé, p. 153

Une pièce donne pile 40 fois en 100 lancers indépendants. Construire un intervalle de confiance pour p de niveau au moins 90% par Hoeffding, puis un intervalle de niveau approché 90% par approximation normale. Que peut-on en dire sur l'équilibre de la pièce ?

Exercice 5.38 — Estimation d'un taux de retard

L3 • corrigé, p. 153

Des retards quotidiens indépendants suivent approximativement une loi exponentielle de taux λ. Sur 400 jours, leur moyenne vaut 10 minutes. Donner un intervalle de confiance de niveau approximativement 98% pour λ.

Exercice 5.39 — Test d'un générateur de chiffres

L3 • corrigé, p. 153

En 1000 tirages supposés indépendants, les chiffres $1, 2, \ldots, 9, 0$ ont les effectifs

$$87, 103, 90, 110, 81, 108, 85, 123, 90, 123.$$

Tester l'uniformité au niveau 5%.

Exercice 5.40 — Croisements de pois et transmission de caractères

L3 • corrigé, p. 154

Les effectifs de croisements sont

	pourpre	rouge
pollen allongé	1528	117
pollen rond	106	381

.

Sous le modèle mendélien décrit, chaque caractère dominant a probabilité 3/4. Tester le modèle de transmission indépendante des deux caractères, puis examiner séparément les proportions marginales de 3/4. Préciser ce que permettent d'affirmer ces tests.

Exercice 5.41 — Comparaison unilatérale de deux proportions

L3 • corrigé, p. 154

Dans un échantillon, 115 hommes sur 645 et 95 femmes sur 355 présentent une pathologie. En supposant deux échantillons binomiaux indépendants, tester au niveau 5% $H_0 : p_F \leq p_H$ contre $H_1 : p_F > p_H$.

Exercice 5.42 — Indépendance du défaut et de la division de production

L3 • corrigé, p. 154

Les 1000 pièces défectueuses se répartissent ainsi :

	A	B	C	D
1	31	70	40	114
2	50	130	86	130
3	35	129	65	120

.

Tester au niveau 5% l'indépendance du type de défaut et de la division, dans le modèle multinomial.

Exercice 5.43 — Degrés de liberté et hypothèse plus précise

L3 • corrigé, p. 154

Montrer $F_{\chi^2_d}(t) > F_{\chi^2_{d+1}}(t)$ pour $t > 0$. Un échantillon de taille 1000, à valeurs dans $\{0, \dots, 4\}$, a pour moyenne 2. Un test du chi-deux a rejeté à 5% l'hypothèse d'une loi $\mathscr{B}(4, p)$ avec p inconnu. Rejettera-t-on nécessairement l'hypothèse $\mathscr{B}(4, 1/2)$?

6. Vecteurs gaussiens

Exercice 6.1 — Couple gaussien corrélé

L3 / M1 • corrigé, p. 155

On suppose $-1 < \rho < 1$.

Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires admettant une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right),$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ et trouver les densités marginales de X_1 et X_2. Calculer les moyennes, variances et la covariance. À quelle condition X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
2. On introduit les coordonnées polaires (R, Φ) du couple (X_1, X_2) : $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ et $\Phi \in [0, 2\pi[$ est définie par

$$\cos\Phi = \frac{X_1}{R} \text{ et } \sin\Phi = \frac{X_2}{R} \text{ si } R > 0, \Phi = 0 \text{ si } R = 0.$$

   Déterminer la densité du couple (R, Φ), puis celle de Φ.
3. Déterminer la densité de R lorsque $\rho = 0$. Que peut-on dire des variables aléatoires R et Φ dans ce cas ?

En déduire les marginales, la covariance et la condition d'indépendance d'un couple de densité $g(x, y) = \sqrt{1-\rho^2}\exp(-(x^2 - 2\rho xy + y^2)/2)/(2\pi)$.

Exercice 6.2 — Somme et différence gaussiennes

L3 • corrigé, p. 155

Soit $\rho \in [-1, 1]$. Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien d'espérance 0 et de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer la loi du vecteur $W = (X + Y, X - Y)$ et les lois des marginales $X + Y$ et $X - Y$.

Exercice 6.3 — Matrices de covariance

L3 • corrigé, p. 155

Soit $\Gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle.

1. A quelles conditions sur a, b, c et d, la matrice Γ est-elle la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire ?
2. On suppose que la matrice Γ est la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire.
   Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
   a) Construire à l'aide des variables aléatoires X et Y un vecteur aléatoire Z de matrice de covariance Γ.
   b) A quelles conditions sur a, b, c et d, le vecteur Z admet-il une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$?
   c) A quelles conditions sur a, b, c et d, les marginales de Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 6.4 — Représentation et densité d'un vecteur gaussien

L3 / M1 • corrigé, p. 155

Soit $m \in \mathbb{R}^d$ et Σ une matrice carrée de taille d et de rang p. Soit X un vecteur gaussien de moyenne m et de matrice de covariance Σ, de loi $N(m, \Sigma)$. Montrer qu'il existe une matrice A de taille $d \times p$ et de rang p telle que $AY + m$ ait même loi que X, où Y est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance I_p, de loi $N(0, I_p)$. Calculer la densité de X lorsqu'elle existe.

Plus généralement, pour une matrice réelle B de taille $q \times d$ et $b \in \mathbb{R}^q$, montrer que $BX + b$ est gaussien et donner sa moyenne et sa covariance. En déduire la loi de chaque coordonnée de X.

Exercice 6.5 — Diagonaliser une covariance gaussienne

M1 • corrigé, p. 156

Soit X un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trouver un endomorphisme U de $\mathbb{R}^3$ tel que les composantes de $Y = UX$ soient indépendantes. Donner la loi de Y.

Exercice 6.6 — Somme et différence de vecteurs gaussiens

M1 • corrigé, p. 156

Soit X et Y deux vecteurs gaussiens indépendants centrés et de même loi dans $\mathbb{R}^d$. Montrer que $Z = X - Y$ et $Z' = X + Y$ sont gaussiens, indépendants et de même loi.

Exercice 6.7 — Gaussiennes et sphères de grande dimension

L3 • corrigé, p. 156

Soient $Y_1, \dots, Y_n$ indépendantes de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ et $X_n = (Y_1, \dots, Y_n)/(\sum_i Y_i^2)^{1/2}$.

1. Montrer que X_n est uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
2. Si Z_n est uniforme sur la sphère de rayon $\sqrt{n}$, montrer que ses p premières coordonnées convergent en loi vers la loi gaussienne centrée $\mathcal{N}_p(0, I_p)$ de matrice de covariance I_p pour tout p fixé.

Exercice 6.8 — Rayon gaussien et théorème central limite

L3 • corrigé, p. 157

Soient X, Y indépendantes normales standard et $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Écrire la densité du couple et montrer que Z^2 suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2)$ de taux $1/2$. Déterminer la fonction de répartition, la moyenne et la variance de Z. Pour $X_1, \dots, X_{2n}$ indépendantes normales standard et $Z_j = \sqrt{X_{2j-1}^2 + X_{2j}^2}$, déterminer β pour que $n^{-1/2}(\sum_{j=1}^n Z_j - n\beta)$ converge en loi vers une variable réelle, et préciser cette limite.

Exercice 6.9 — Régression gaussienne et applications

L3 • corrigé, p. 157

Soit $(Y, X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien centré. On suppose que la matrice de covariance Γ de $X = (X_1, \dots, X_n)^{\mathsf{T}}$ est inversible et l'on pose $u_j = \mathbb{E}(YX_j)$.

1. Déterminer l'unique vecteur $\hat{a}$ qui minimise $\mathbb{E}(Y - \langle a, X\rangle)^2$.
2. Montrer que le résidu $Z = Y - \langle \hat{a}, X\rangle$ est indépendant de X. Déterminer sa variance et sa loi.
3. Appliquer les résultats précédents à $Y = Y_1$, $X = (Y_2, Y_3)^{\mathsf{T}}$ lorsque la covariance de (Y_1, Y_2, Y_3) est successivement

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3/2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Dans le premier cas, déterminer K pour que la règle de rejet $|Z| > K$ ait une probabilité de rejet égale à 5% sous le modèle considéré.

Exercice 6.10 — Calculs gaussiens et conditionnement

M1 • corrigé, p. 157

Le vecteur gaussien (X, Y) a pour moyenne $(1, 0)$ et pour covariance $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Soit S, indépendante du vecteur, exponentielle de taux $1/2$. Déterminer les lois de $2 + 2X - Y$ et de $(X-1)^2 + (Y - X + 1)^2 + S$, puis $\mathbb{E}[X \mid Y]$ et $\mathbb{E}[SX \mid Y]$.

Exercice 6.11 — Marginales gaussiennes sans vecteur gaussien

L3 • corrigé, p. 157

Soient X normale centrée réduite, de loi $\mathcal{N}(0,1)$, et Z de Rademacher, indépendantes. Poser $Y = ZX$. Déterminer la loi de Y, $\mathrm{Cov}(X, Y)$, l'indépendance de X, Y et le caractère gaussien du vecteur.

Exercice 6.12 — Caractérisation de la loi normale par moyenne et dispersion

L3 • corrigé, p. 157

Soient $n \geq 2$ et $X_1, \dots, X_n$ iid de carré intégrable, $S_n = \sum X_i$, $V_n = \sum X_i^2 - S_n^2/n$.

1. Dans le cas gaussien, réduire au cas centré réduit et utiliser les projections sur $\mathbb{R}(1, \dots, 1)$ et son orthogonal pour montrer l'indépendance de S_n, V_n.
2. Réciproquement, supposer cette indépendance, d'abord avec moyenne zéro et variance 1. Calculer $\mathbb{E}V_n$, puis $\mathbb{E}[V_n e^{itS_n}]$ de deux manières. En déduire une équation différentielle pour la fonction caractéristique φ, la résoudre puis traiter le cas général.

Exercice 6.13 — Somme, différence et produit de normales

L3 • corrigé, p. 158

Soient X, Y normales indépendantes. Donner la condition d'indépendance de $X+Y$ et $X-Y$. Si X, Y sont centrées réduites, calculer les fonctions caractéristiques de $X^2/2$ et $(X^2 - Y^2)/2$, puis représenter cette dernière variable comme produit de deux normales centrées réduites indépendantes.

Exercice 6.14 — Espérance du maximum de normales

L3 • corrigé, p. 158

Établir $e^x = \max_{t \in \mathbb{R}} \{e^t + (x-t)e^t\}$, puis Jensen pour l'exponentielle. Pour des variables intégrables $X_1, \dots, X_N$, poser $Z = \max_i X_i$ et $\varphi(\lambda) = \log \max_i \mathbb{E}e^{\lambda X_i}$. Montrer

$$\mathbb{E}Z \leq \inf_{\lambda > 0} \frac{\varphi(\lambda) + \log N}{\lambda}.$$

En déduire $\mathbb{E}Z \leq \sqrt{2 \log N}$ si toutes les X_i sont normales centrées réduites, sans hypothèse d'indépendance.

Exercice 6.15 — Une transformation normale non indépendante

L3 • corrigé, p. 158

Pour X normale centrée réduite, de loi $\mathcal{N}(0,1)$, et $\alpha > 0$, poser $Y = X$ si $|X| \leq \alpha$, $Y = -X$ sinon. Donner la loi de Y, sa covariance avec X, déterminer si cette covariance peut s'annuler et étudier l'indépendance.

Exercice 6.16 — Convolution de deux densités gaussiennes

L3 • corrigé, p. 158

Soient X, Y indépendantes, de lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, de moyennes m_1, m_2 et de variances $\sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$. Montrer par convolution que leur somme suit $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

7. Conditionnement, marches aléatoires et martingales

Exercice 7.1 — Problème des allumettes de Banach

M1 • corrigé, p. 159

Un fumeur a dans chacune de ses poches une boîte contenant n allumettes. À chaque fois qu'il a besoin d'une allumette, il la prend dans l'une ou l'autre boîte avec probabilité $1/2$, indépendamment des choix précédents. Soit X_n le nombre d'allumettes restant dans une boîte quand le fumeur s'aperçoit *pour la première fois* que l'autre boîte est vide.

1. Donner la loi de X_n.
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X_n]$.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}[X_n]$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 7.2 — Changements de signe d'une marche aléatoire

M1 • corrigé, p. 159

On considère le jeu de pile ou face équilibré de longueur $2n+1$. On désigne par $X_1, \dots, X_{2n+1}$ les résultats indépendants des lancers, codés par $+1$ et -1 et on note $S_m = X_1 + \cdots + X_m$, pour $m \in \{1, \dots, 2n+1\}$, la marche aléatoire correspondante, avec $S_0 = 0$. On dit qu'un changement de signe arrive au temps m si S_{m-1} et S_{m+1} sont de signe opposé. On note $\mathscr{E}_{n,r}$ l'événement "il y a exactement r changements de signe avant le temps $2n+1$". On veut montrer que la probabilité de $\mathscr{E}_{n,r}$ est égale à $2p_{2n+1,2r+1}$, où

$$p_{m,k} = \mathbb{P}(S_m = k) = 2^{-m}\binom{m}{\frac{k+m}{2}}.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,r}) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,r} \mid S_1 = 1)$. En déduire que l'on peut se ramener à la probabilité de croiser exactement r fois la droite horizontale d'ordonnée -1 avant le temps $2n$.
2. On s'intéresse d'abord au cas où $r = 0$. Soit $k \geq 0$. En utilisant le principe de réflexion, compter le nombre de chemins reliant $(0,0)$ à $(2n, 2k)$ en touchant la droite horizontale d'ordonnée -2. En déduire que

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 2k \text{ et la marche n'atteint pas le niveau } -2 \text{ avant l'instant } 2n) = p_{2n,2k} - p_{2n,2k+4}.$$

3. En déduire la probabilité que la marche n'atteigne pas le niveau -2. Conclure pour le cas $r = 0$.
4. On s'intéresse maintenant au cas où $r = 1$. Soit $v \in \{1, \dots, n\}$. En utilisant le cas précédent, montrer que le nombre de chemins de longueur $2n - 2v$ partant de $(2v, -2)$ et ne croisant pas le niveau -1 est égal au nombre de chemins de $(2v, -2)$ à $(2n+1, -3)$.
5. Conclure pour le cas $r = 1$.
6. Conclure dans le cas général à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 7.3 — Variation quadratique d'une martingale

M1 • corrigé, p. 161

Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale sur $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ de carré intégrable, c'est-à-dire telle que $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$ pour tout $n \geq 0$.

1. Posons $\langle M\rangle_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$,

$$\langle M\rangle_{n+1} = \langle M\rangle_n + \mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2 | \mathscr{F}_n].$$

   Montrer que le processus $(\langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ est croissant et prévisible (i.e. $\langle M\rangle_n$ est $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$) et que $(M_n^2 - \langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ un processus prévisible tel que $A_0 = 0$ presque sûrement. Montrer que, si $(M_n^2 - A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, alors $\langle M\rangle_n = A_n$ presque sûrement pour tout $n \geq 0$.
3. Soit $(C_n)_{n\geq 1}$ un processus prévisible borné. On rappelle que le processus $((C\cdot M)_n)_{n\geq 0}$ défini par $(C\cdot M)_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$(C\cdot M)_n = \sum_{k=1}^{n} C_k(M_k - M_{k-1})$$

est une martingale. Pour tout entier $n \geq 0$, exprimer $\langle C \cdot M \rangle_n$ en fonction de $\langle M \rangle$.

4. Soit T un temps d'arrêt. On rappelle que le processus M^T défini par $M_n^T = M_{T \wedge n}$ pour tout $n \geq 0$ est une martingale. Montrer que $\langle M^T \rangle_n = \langle M \rangle_{T \wedge n}$ presque sûrement pour tout $n \geq 0$.

Exercice 7.4 — Dénombrement des chemins et réflexion

M1 • corrigé, p. 162

Les niveaux a et b sont des entiers.

On considère un jeu de pile ou face équilibré de longueur n, on note $X_1, \dots, X_n \in \{-1, +1\}$ les résultats des n lancers, et on pose

$$\forall k \in \{1 \dots n\} \qquad S_k = X_1 + \cdots + X_k \,.$$

On note $N_{n,x}$ le nombre de chemins allant de $(0,0)$ à (n,x), c'est-à-dire tels que $S_n = x$.

1. Calculer $N_{n,x}$ pour tout x entier et n entier strictement positif.
2. Soit $a > 0, b > 0$. Quel est le nombre de chemins $(S_1, \dots, S_n)$ tels que $S_1 > -b, \dots, S_{n-1} > -b, S_n = a$?
3. Soit $b > a > 0$. Quel est le nombre de chemins $(S_1, \dots, S_n)$ tels que $S_1 < b, \dots, S_{n-1} < b, S_n = a$?

Exercice 7.5 — Maximum et premier passage d'une marche

M1 • corrigé, p. 162

On considère un jeu de pile ou face équilibré de longueur n, on note $X_1, \dots, X_n \in \{-1, +1\}$ les résultats des n lancers, et on pose

$$\forall k \in \{1 \dots n\} \qquad S_k = X_1 + \cdots + X_k \,.$$

1. Posons $S_0 = 0$. Soient k, r deux entiers tels que $r \geq 0$ et $k \leq r$. Montrer que

$$\mathbb{P}\big(S_n = k,\ \max\{S_0, S_1, \dots, S_n\} \geq r\big) = p_{n,2r-k} = \mathbb{P}(S_n = 2r - k).$$

2. En déduire, pour $r \geq 0$, la probabilité

$$\mathbb{P}\big(\max\{S_0, S_1, \dots, S_n\} = r\big) \,.$$

3. Pour un entier $r \geq 1$, on dit que la marche passe pour la première fois en r au temps n si

$$S_1 < r, \dots, S_{n-1} < r, \quad S_n = r \,.$$

Calculer la probabilité de cet événement.

Exercice 7.6 — Marche duale et dernier passage

M1 • corrigé, p. 162

On considère un jeu de pile ou face équilibré de longueur $n > 0$, on note $X_1, \dots, X_n \in \{-1, +1\}$ les résultats des n lancers, et on pose $S_0 = 0$ et

$$\forall k \in \{1 \dots n\} \qquad S_k = X_1 + \cdots + X_k.$$

En inversant l'ordre des $+1$ et -1 qui forment la marche aléatoire, on forme une nouvelle marche aléatoire. Elle s'appelle marche aléatoire duale et est définie par $S_k^* = X_1^* + \cdots + X_k^*$, pour $k = 1, \dots, n$, où

$$X_1^* = X_n \qquad X_2^* = X_{n-1} \qquad \dots \qquad X_n^* = X_1.$$

1. Exprimer S_k^* en fonction des S_j.
2. Exprimer l'évènement $\{\forall j \in \{0, \dots, n-1\} \quad S_n > S_j\}$ en fonction des S_k^*. En déduire la probabilité pour que S_n soit strictement positif et que la marche atteigne le niveau S_n pour la première fois au temps n.
3. Soit un entier $r > 0$. Exprimer l'évènement $\{S_n > 0, S_n > S_1, \dots, S_n > S_{n-1}, S_n = r\}$ en fonction des S_k^*. En déduire sa probabilité.

Exercice 7.7 — Oscillation de la marche simple

L3 / M1 • corrigé, p. 163

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathbb{P}(X_i=-1)=\mathbb{P}(X_i=1)=1/2$. On note $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$. Soit

$$A=\{\limsup S_n=+\infty\} \qquad \text{et} \qquad B=\{\liminf S_n=-\infty\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(A)=0$ ou 1.

2. Montrer que $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)$.

3. Supposons que $\mathbb{P}(A)=0$.

a) Montrer que la suite $(S_n)_n$ est bornée p.s.

b) Montrer que $\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}[\sup_n|S_n|<k]=1$.

c) Calculer la loi de S_n.

d) Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout n et tout k,

$$\mathbb{P}[|S_n|<k]\leq\frac{Ck}{\sqrt{n}}.$$

e) En déduire que $\mathbb{P}(A)=1$.

4. Calculer $\mathbb{P}(S_n=0$ infiniment souvent).

Retrouver les oscillations de la marche équitable par le TCL et la loi zéro-un, en montrant $\limsup S_n/\sqrt{n}\geq 1$ et $\liminf S_n/\sqrt{n}\leq -1$ presque sûrement. Pour une marche de pas ±1 avec $\mathbb{P}(X_i=1)=p\neq 1/2$, calculer $\mathbb{P}(S_{2n}=0)$ et montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de retours à zéro. Plus généralement, pour des accroissements iid centrés de variance $\sigma^2>0$, montrer que $S_n/\sqrt{n}$ ne converge pas en probabilité.

Exercice 7.8 — Indépendance conditionnelle

M1 • corrigé, p. 163

On dit que deux variables aléatoires X et Y sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathcal{G}]=\mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathcal{G}=\{\emptyset,\Omega\}$? Si $\mathcal{G}=\mathcal{F}$?

2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z $\mathcal{G}$-mesurable positive, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z]=\mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]],$$

et aussi à : pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable positive,

$$\mathbb{E}[g(Y)|\sigma(\mathcal{G},\sigma(X))]=\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

Exercice 7.9 — Deux conditionnements réciproques

M1 • corrigé, p. 163

Soit $(\Omega,A,\mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X,Y deux éléments de $L^2(\Omega,A,\mathbb{P})$, tels que

$$\mathbb{E}[X|Y]=Y \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[Y|X]=X$$

Montrer que $X=Y$ p.s.

Exercice 7.10 — Contraction conditionnelle d'une norme L^p

M1 • corrigé, p. 164

Soit $p\geq 1$ et soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $\|X\|_p=(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}<+\infty$ et $\|Y\|_p<+\infty$.

1. Montrer que $\|X+Y\|_p\geq\|X+\mathbb{E}[Y|X]\|_p$.

2. En déduire que, si X et Y sont indépendantes, alors $\|X+Y\|_p\geq\|X+\mathbb{E}(Y)\|_p$.

Exercice 7.11 — Conditionner en présence d'une information indépendante

M1 • corrigé, p. 164

1. Soit Y une variable aléatoire réelle intégrable définie sur l'espace probabilisé (Ω, A, P). Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux sous-tribus de A. Soit $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$. On suppose que les tribus $\sigma(\sigma(Y), \mathscr{B}_1)$ et $\mathscr{B}_2$ sont indépendantes. Montrer que
$$\mathbb{E}[Y|\mathscr{B}] = \mathbb{E}[Y|\mathscr{B}_1]$$

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, intégrables et i.i.d. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

2. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{E}[X_i|S_n] = \mathbb{E}[X_1|S_n]$.
3. Calculer $\mathbb{E}[X_1|S_n]$.
4. En déduire $\mathbb{E}[X_1|S_n, S_{n+1}, \dots]$.

Exercice 7.12 — Densités conditionnelles et mélange gamma

M1 • corrigé, p. 164

Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dont la loi admet une densité $p(x, y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

1. Exprimer $\mathbb{E}[h(X, Y)|Y]$ pour toute fonction borélienne positive h sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.
2. On se place dans le cas $n = m = 1$. On suppose que la loi de Y est la loi Gamma de paramètres $(2, \lambda)$ avec $\lambda > 0$, dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ est $\lambda^2 y e^{-\lambda y}$, et que la loi conditionnelle de X sachant Y est la loi uniforme sur $[0, Y]$ c'est-à-dire que pour toute fonction h borélienne positive, $\mathbb{E}[h(X)|Y] = Y^{-1}\int_0^Y h(x)dx$. Montrer que X et $Y - X$ sont deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de taux λ.

Exercice 7.13 — Moyenne conditionnelle gaussienne

M1 • corrigé, p. 165

Soient M et X deux variables aléatoires réelles. On fixe $\sigma \geq 0$ et l'on suppose que M est de loi gaussienne et que, pour tout t réel $\mathbb{E}(e^{\mathrm{i}tX}|M) = \exp(\mathrm{i}tM - (\sigma^2 t^2/2))$.

1. Montrer que (X, M) est un vecteur gaussien.
2. Montrer que $X - M$ est indépendant de M.
3. Calculer $\mathbb{E}[X|M]$.
4. Calculer $\mathbb{E}[M|X]$.

Exercice 7.14 — Fonctions harmoniques et martingales

M1 • corrigé, p. 165

Une fonction continue $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $r > 0$,
$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.$$

Soit $r > 0$ et $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. Pour $n \geq 1$, on pose $X_n = U_1 + \cdots + U_n$. Montrer que, si f est harmonique, $(f(X_n))_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 1}$ où $\mathscr{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 7.15 — Deux transformations de martingales

M1 • corrigé, p. 166

On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$.

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction convexe, et soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ (i.e. X_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable pour tout n), tel que $\mathbb{E}[\phi(X_n)] < \infty$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, alors $(\phi(X_n))_{n\geq 0}$ est une sous-martingale. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale et si ϕ est croissante, alors $(\phi(X_n))_{n\geq 0}$ est une sous-martingale.

2. On dit qu'un processus $(H_n)_{n\geq 1}$ est prévisible si H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté et $(H_n)_{n\geq 1}$ un processus prévisible et borné. On pose $(H \cdot X)_0 = 0$ et

$$\forall n \geq 1 \qquad (H \cdot X)_n = H_1(X_1 - X_0) + H_2(X_2 - X_1) + \ldots + H_n(X_n - X_{n-1}).$$

Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, alors $((H \cdot X)_n)_{n\geq 0}$ est aussi une martingale. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sur-martingale (respectivement sous-martingale), et si $H_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, $((H \cdot X)_n)_{n\geq 0}$ est une sur-martingale (respectivement sous-martingale).

Exercice 7.16 — Loi du logarithme itéré

M1 • corrigé, p. 166

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On pose $h(x) = (2x \log\log x)^{1/2}$ pour $x \geq \mathrm{e}$. Le but de l'exercice est de montrer que presque sûrement on a $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{h(n)} \leq 1$.

1. Pour tous $\theta > 0$ et $c > 0$, montrer que $\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq \mathrm{e}^{-\theta c}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta S_n}\right]$ puis que $\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2n}}$.

2. Soit $K > 1$. Pour $n > 1 + 1/\log K$, majorer la quantité $\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1})\right)$ et montrer que $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{h(n)} \leq K$. presque sûrement. Conclure.

Exercice 7.17 — Inégalité maximale pour les sur-martingales positives

M1 • corrigé, p. 167

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une surmartingale positive sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que si T est un temps d'arrêt, alors $(X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une surmartingale. (*Indication :* poser $H_n = \mathbf{1}_{\{T\geq n\}}$ et étudier le processus $((H \cdot X)_n)_{n\geq 0}$.)

2. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} X_n > a\right) \leq \dfrac{\mathbb{E}[X_0]}{a}$.

Exercice 7.18 — Théorème de Rademacher

M1 • corrigé, p. 167

L'objectif de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne s'écrit comme une constante plus l'intégrale indéfinie d'une fonction mesurable bornée. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$, à valeurs dans cet intervalle, et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad Z_n = 2^n(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X).$$

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable positive. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ pour tout $n \geq 0$).

3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, limite presque sûre et dans L^1 de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée telle que $Z = g(X)$.

4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable positive. En déduire que

$$\text{p.s.} \qquad Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u.$$

Exercice 7.19 — Urne de Pólya : loi limite, diffusion et simulation

L3 / M1 • corrigé, p. 169

On suppose $a, b \in \mathbb{N}^*$. À l'instant 1, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 2. On répète ce procédé. Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = Y_n/(N_0 + n - 1)$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. Soit $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathscr{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n | \mathscr{F}_n)$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.
2. *Cas $a = b = 1$.* Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, Y_n suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. En déduire la loi de U.
3. *Cas général.* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(n+N_0-1)(n+N_0)\dots(n+N_0+k-2)}.$$

   Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 1}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.
4. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). En déduire qu'on a caractérisé la loi de U. *Remarque :* La loi de U est la loi $\beta(a, b)$, de densité $B(a, b)^{-1} u^{a-1}(1-u)^{b-1} \mathbf{1}_{\{u\in[0,1]\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Deux prolongements.

5. Dans le cas $a = 2, b = 1$, déterminer explicitement la loi de Y_n. Dans un modèle de diffusion où chaque nouvel informé rencontre uniformément l'un des informés et adopte sa version, deux personnes possèdent initialement la version I_1 et une la version I_2. Déterminer la limite de la probabilité qu'il y ait au moins deux fois plus de personnes possédant I_1 que I_2. Discuter l'égalité exacte.
6. Pour $a = b = 1$, écrire `Polya(k)` qui retourne $(Y_1, \dots, Y_k)$. Écrire ensuite `EchantillonPolya(k,n)` pour simuler n réalisations indépendantes de Y_k. Représenter la loi empirique et la comparer à la loi théorique pour $k = 10$, puis $k = 15$, avec $n = 1000$.

Exercice 7.20 — Contre-exemples de convergence des martingales

M1 • corrigé, p. 170

1. *Un exemple de martingale qui converge presque sûrement mais n'est pas bornée dans L^1.* On considère une famille $(Y_n, \varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout n, la loi de Y_n est

$$\frac{1}{2}\left(\delta_{a_n} + \delta_{-a_n}\right),$$

   où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs fixée, et la loi de ε_n est

$$\frac{1}{n^2}\delta_1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\delta_0.$$

   On définit, pour tout $n \geq 1$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_1, \varepsilon_1, \dots, Y_n, \varepsilon_n)$ et $M_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k Y_k$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 1}$ et qu'elle converge presque sûrement. Montrer qu'on peut choisir $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que cette martingale ne soit pas bornée dans L^1.
2. *Un exemple de martingale qui tend presque sûrement vers $+\infty$.* On considère $(\xi_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(\xi_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(\xi_n = \frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

   On pose $M_n = \xi_2 + \dots + \xi_n$ pour $n \geq 2$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 2}$ est une martingale telle que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} +\infty$.

Exercice 7.21 — Conditionnement par une somme positive

M1 • corrigé, p. 171

Soit X et Y deux variables aléatoires positives indépendantes de même loi de densité p par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,\infty[$. On note $S = X + Y$. Soit f une fonction mesurable positive sur $[0,\infty[$. Déterminer en fonction de p et de f la fonction g telle que

$$E[f(X) \mid S] = g(S).$$

Expliciter la formule dans le cas où X et Y suivent la loi exponentielle de taux λ.

Exercice 7.22 — Crochet, convergence et Borel-Cantelli conditionnel

M1 • corrigé, p. 171

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale sur $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ de carré intégrable, c'est-à-dire telle que $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ pour tout $n \geq 0$, et vérifiant $X_0 = 0$. On rappelle que X_n^2 se décompose de manière unique sous la forme $X_n^2 = M_n + A_n$, où $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et $(A_n)_{n\geq 0}$ est un processus croissant prévisible . On impose $A_0 = M_0 = 0$. De plus, on a

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \big(\mathbb{E}[X_k^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}] - X_{k-1}^2\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}].$$

1. On note A_∞ la limite de $(A_n)_{n\geq 0}$. Montrer que
$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\geq 0} |X_n|^2\right] \leq 4\mathbb{E}[A_\infty].$$
2. Montrer que presque sûrement, si $A_\infty < \infty$, alors $(X_n)_{n\geq 0}$ converge vers une valeur finie.
3. Soit f une fonction croissante bornée inférieurement par 1 et telle que $\int_0^\infty f(t)^{-2}\,\mathrm{d}t < \infty$. Montrer que presque sûrement, si $A_\infty = \infty$, alors $X_n = \mathrm{o}(f(A_n))$ quand $n \to \infty$. *Indication* : On pourra poser $H_n = f(A_n)^{-1}$, puis appliquer le résultat de la question précédente à la martingale $H \cdot X$, et enfin appliquer le lemme de Kronecker (si $\sum_n u_n$ converge et $b_n \uparrow \infty$, alors $\sum_{k=1}^n b_k u_k = \mathrm{o}(b_n)$).
4. *Application (généralisation du lemme de Borel-Cantelli)* : Soit une suite d'événements $B_n \in \mathscr{F}_n$. On note $p_n = \mathbb{P}(B_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$. Montrer que presque sûrement,
$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{m=1}^{n} \mathbf{1}_{B_m} \sim \sum_{m=1}^{n} p_m \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$
Indication : On pourra appliquer ce qui précède à la martingale définie par $X_0 = 0$ et $X_n - X_{n-1} = \mathbf{1}_{B_n} - \mathbb{P}(B_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$

Exercice 7.23 — Inégalité de Lévy et maximum d'une marche symétrique

L3 • corrigé, p. 171

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Une variable réelle X est symétrique si X et $-X$ ont la même loi. Pour une variable entière, cela équivaut à $\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}(X = -m)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

1. Pour une variable à valeurs ± 1 de paramètre p, caractériser la symétrie. Montrer qu'une variable symétrique intégrable est centrée et que zéro est une médiane.
2. Montrer que la différence de deux variables i.i.d. est symétrique et qu'une somme de variables indépendantes symétriques est symétrique.
3. Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes symétriques, $S_k = \sum_{j\leq k} X_j$ et $x \geq 0$. Posons $\Omega_k = \{\max_{j<k} S_j \leq x, S_k > x\}$ (avec $\Omega_1 = \{X_1 > x\}$). Montrer que $\{S_n - S_k \geq 0\} \cap \Omega_k \subset \{S_n > x\} \cap \Omega_k$, et que sa probabilité est au moins $\mathbb{P}(\Omega_k)/2$. En utilisant la réunion disjointe des Ω_k, en déduire $\mathbb{P}(\max_{k\leq n} S_k > x) \leq 2\mathbb{P}(S_n > x)$.
4. Supposons maintenant les variables i.i.d., de variance $\sigma^2 \in (0,\infty)$. Pour $y > 0$, montrer $\{S_n > x+y\} \cap \Omega_k \cap \{X_k \leq y\} \subset \{S_n - S_k > 0\} \cap \Omega_k$, dont la probabilité est au plus $\mathbb{P}(\Omega_k)/2$. En déduire
$$\mathbb{P}(S_n > x + y) - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j > y) \leq \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(\max_{k\leq n} S_k > x).$$

5. Prouver $\mathbb{P}(X_1 > y) \le y^{-2}\mathbb{E}[X_1^2 \mathbf{1}_{\{X_1>y\}}]$, puis $n\mathbb{P}(X_1 > \theta\sqrt{n}) \to 0$ pour tout $\theta > 0$.
6. Appliquer le TCL et les encadrements précédents pour obtenir, pour $\lambda \ge 0$,
$$\mathbb{P}\Big(\max_{k\le n} S_k > \lambda\sigma\sqrt{n}\Big) \longrightarrow 2(1-\Phi(\lambda)).$$
Que vaut la limite si $\lambda < 0$?

Dans le cas particulier de variables X_j indépendantes normales centrées réduites, de loi $\mathcal{N}(0,1)$, justifier aussi l'égalité exacte $\mathbb{P}(S_n > \lambda\sqrt{n}) = 1-\Phi(\lambda)$ et retrouver la limite du maximum.

Exercice 7.24 — Retours à zéro et inversion de Fourier

M1 • corrigé, p. 171

Soient X_i indépendantes avec $\mathbb{P}(X_i = 1) = p \in (0,1)$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = q = 1-p$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de S_n. Calculer $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ et un équivalent. Étudier le nombre de retours à zéro dans le cas biaisé.
2. Poser $N_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{S_k=0\}}$. Justifier la mesurabilité de $N_\infty = \lim N_n$ et exprimer son espérance. La calculer, y compris pour $p = 1/2$.
3. Calculer $f(t) = \mathbb{E}e^{itX_1}$ et φ_{S_n}. Étudier leur comportement limite et la convergence en loi de S_n.
4. Démontrer $\mathbb{P}(S_n = 0) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^n\,dt$. Relier $\mathbb{E}N_\infty$ à la limite, lorsque $r \uparrow 1$, de $(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}(1-rf(t))^{-1}\,dt$.

Exercice 7.25 — Maximum d'une marche à sauts supérieurs bornés

M1 • corrigé, p. 172

Soient (X_n) iid à valeurs entières, avec $X_n \le 1$, $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, $m = \mathbb{E}X_1 < 0$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) > 0$. Poser $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, $W = \sup_{n\ge 0} S_n$, $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}e^{\lambda X_1}$ pour $\lambda \ge 0$.

1. Étudier la convexité de ψ, sa dérivée à droite en zéro et ses zéros ; montrer qu'il existe un unique zéro strictement positif λ_0.
2. Montrer que $Z_n = e^{\lambda_0 S_n}$ est une martingale. Étudier sa convergence p.s. et dans L^1.
3. Arrêter cette martingale au premier passage T_k au niveau $k \ge 1$. Déterminer $\mathbb{P}(T_k < \infty)$ et la loi de W.
4. Application à $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p < 1/2$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1) = q$: probabilité de ne jamais atteindre un entier strictement positif.

Exercice 7.26 — Conditionnement par le rayon d'un disque

M1 • corrigé, p. 172

Le vecteur (X,Y) est uniforme sur le disque unité. Poser $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$. Calculer sa densité puis, pour toute fonction mesurable positive h, exprimer $\mathbb{E}[h(X) \mid Z]$.

Exercice 7.27 — Support conditionnel d'une variable positive

M1 • corrigé, p. 172

Soit $X \ge 0$ et $\mathscr{B}$ une sous-tribu. Montrer $\{X > 0\} \subset \{\mathbb{E}[X \mid \mathscr{B}] > 0\}$ à un ensemble négligeable près. Si $A \in \mathscr{B}$ contient $\{X > 0\}$ p.s., montrer $\{\mathbb{E}[X \mid \mathscr{B}] > 0\} \subset A$ p.s.

Exercice 7.28 — Martingale exponentielle et temps de passage

M1 • corrigé, p. 172

Soient X_i indépendantes de carré intégrable et $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $M_0 = 0$. On utilise la filtration naturelle $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1,\dots,X_n)$, avec $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing,\Omega\}$.

1. Montrer que M est une martingale exactement si tous les X_i sont centrés. Sous cette condition, montrer que $M_n^2 - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2$ est une martingale.
2. On conserve le centrage et on suppose désormais les X_i iid, entières, $X_i \le 1$, $\mathbb{P}(X_i = 1) > 0$. Pour $\lambda > 0$, poser $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}e^{\lambda X_1}$ et $Z_n = e^{\lambda M_n - n\psi(\lambda)}$. Montrer que Z est une martingale, $\psi(\lambda) > 0$, et que $Z_n \to 0$ p.s. sans convergence dans L^1.
3. Pour $b \in \mathbb{N}$, poser $\tau_b = \inf\{n \ge 0 \,:\, M_n = b\}$. Utiliser la martingale positive $b - M_{n\wedge\tau_b}$ pour montrer $\tau_b < \infty$ p.s.
4. Montrer $\mathbb{E}e^{-\psi(\lambda)\tau_b} = e^{-\lambda b}$. Expliciter $\mathbb{E}e^{-\alpha\tau_b}$ pour des sauts équitables ± 1.

Exercice 7.29 — Premier retour d'une marche simple

L3 • corrigé, p. 173

Pour une marche $S_0 = 0$ à sauts indépendants ± 1 de probabilités $p, q = 1-p$, poser $T = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$, $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ et $F(s) = \sum_{n\geq 0} u_n s^n$. Calculer F, établir l'équation de renouvellement avec $G_T(s) = \mathbb{E}[s^T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}]$, en déduire la probabilité de retour, sa loi et l'espérance dans le cas $p = q = 1/2$.

Exercice 7.30 — Arrêt borné d'une somme et passage d'un seuil

L3 • corrigé, p. 173

Soient X_i iid intégrables de moyenne m, $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, $S_0 = 0$, $T = \inf\{k \geq 1 : S_k \geq a\}$, $a > 0$, et $N_n = T \wedge n$. Montrer $\mathbb{E}S_{N_n} = m\mathbb{E}N_n$ par une décomposition en indicatrices. Pour des X_i uniformes sur $(0,1)$ et $0 < a \leq 1$, calculer les limites de $\mathbb{E}N_n$ et $\mathbb{E}S_{N_n}$.

Exercice 7.31 — Choix aléatoire d'une pièce

L3 • corrigé, p. 173

Un dé équilibré choisit une pièce parmi six. La pièce i donne pile avec probabilité p_i. On lance deux fois la pièce choisie, indépendamment conditionnellement à son numéro Z, et on note X_1, X_2 les indicatrices de pile. Montrer que X_1, X_2 sont indépendantes si et seulement si tous les p_i sont égaux. On pourra étudier $g_r(x) = \sum_{i=1}^r x_i^2 - r^{-1}(\sum_{i=1}^r x_i)^2$.

Exercice 7.32 — Mélange de deux populations

L3 • corrigé, p. 173

Deux populations présentent des proportions $p_1 > p_2$ d'individus de grande taille. On choisit la première avec probabilité $q \in (0,1)$, puis on tire deux individus avec remise dans la population choisie. Modéliser l'expérience ; calculer la probabilité que le premier individu soit grand, la loi du nombre d'individus grands, la probabilité que le second soit grand sachant que le premier l'est, et la probabilité d'avoir choisi la première population sachant que les deux individus sont grands.

Exercice 7.33 — Lecture d'une loi jointe discrète

L3 • corrigé, p. 173

1. Pour $\alpha \in [0,1]$, la loi de $(X,Y) \in \{0,1,2\} \times \{0,1\}$ est donnée par

$y \backslash x$	0	1	2
0	$1/4$	0	$1/4$
1	$\alpha/2$	$(1-\alpha)/2$	0

Déterminer les marginales et les lois conditionnelles de X sachant Y.

2. Plus généralement, écrire les lois conditionnelles à partir de $p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$, $p_{i\bullet} = \sum_j p_{ij}$ et $p_{\bullet j} = \sum_i p_{ij}$.

Exercice 7.34 — Sommes et conditionnement des lois usuelles

L3 / M1 • corrigé, p. 173

1. Soient $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$ indépendantes. Déterminer la loi de X sachant $X+Y$.

2. Même question pour $X \sim \mathcal{P}(a)$ et $Y \sim \mathcal{P}(b)$ indépendantes.

3. Si $(X_1,X_2,X_3) \sim \mathcal{M}(n;p_1,p_2,p_3)$, déterminer la loi de X_1 et celle de (X_2,X_3) sachant X_1.

Dans le cas des lois de Poisson, calculer aussi $\mathbb{E}[X \mid X+Y]$.
Dans le cas multinomial, calculer aussi $\mathbb{E}[X_2 \mid X_1]$.

Exercice 7.35 — Calculs d'espérance conditionnelle

L3 • corrigé, p. 174

1. Pour $X, Y \in L^2$, établir $\mathbb{E}\mathbb{E}(Y \mid X) = \mathbb{E}Y$. Montrer que l'indépendance implique $\mathbb{E}(Y \mid X) = \mathbb{E}Y$, puis que cette dernière égalité implique $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

2. Pour U, V indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0,1)$, poser $X = U - V, Y = U + V$. Calculer leur covariance et $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

3. Pour $g(X) \in L^2$, montrer $\mathbb{E}(Yg(X) \mid X) = g(X)\mathbb{E}(Y \mid X)$.

Exercice 7.36 — Régression affine et meilleure prédiction

L3 • corrigé, p. 174

Soient $Y \in L^2$ et un vecteur $X \in (L^2)^d$ de covariance inversible K. Montrer que la meilleure approximation de Y par une fonction affine de X est $\mathbb{E}Y + c^{\mathsf{T}} K^{-1}(X - \mathbb{E}X)$, où $c_j = \operatorname{Cov}(X_j, Y)$. Comparer son erreur quadratique avec celle de l'espérance conditionnelle.

Exercice 7.37 — Tribus indépendantes et information commune

L3 • corrigé, p. 174

Soient $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux tribus indépendantes. Montrer que tout événement de leur intersection a probabilité zéro ou un. En déduire que si une variable réelle X est indépendante de $f(X)$, où f est borélienne à valeurs réelles, alors $f(X)$ est presque sûrement constante.

Exercice 7.38 — Regroupement de variables indépendantes

L3 • corrigé, p. 174

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de variables aléatoires indépendantes. Si $I_1, \dots, I_n$ partitionnent I, montrer que les tribus $\sigma(X_i \,:\, i \in I_k)$ sont indépendantes.

Exercice 7.39 — Ruine et maximum d'une marche à dérive négative

L3 • corrigé, p. 175

À l'instant n, une compagnie reçoit une prime $p > 0$ et verse pX_n, où les $X_n \in \mathbb{N}$ sont indépendantes, de même loi intégrable. Avec un capital initial $c \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_{c,p} = \inf\{n \geq 1 \,:\, c/p + n - S_n < 0\}$. Montrer que $f_p(c) = \mathbb{P}(T_{c,p} < \infty)$ décroît en c et vaut un si $\mathbb{E}X_1 > 1$. Si $\mathbb{E}X_1 < 1$, montrer que $M = \sup_{n \geq 0}(S_n - n)$ est fini presque sûrement, que $M \overset{\mathcal{L}}{=} (M + X - 1)^+$ pour une copie X indépendante, et que $f_p(c) = \mathbb{P}(M > c/p)$.

Exercice 7.40 — Deux définitions d'un temps d'arrêt discret

M1 • corrigé, p. 175

Pour une filtration $(\mathcal{F}_n)$ et $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, montrer que les conditions $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout n et $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout n sont équivalentes. Montrer aussi $\{T = \infty\} \in \mathcal{F}_\infty$, où $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$.

Exercice 7.41 — Espérance d'une martingale

M1 • corrigé, p. 175

Soit $(M_n, \mathcal{F}_n)$ une martingale intégrable. Montrer que, pour $m \geq n$, $\mathbb{E}(M_m \mid \mathcal{F}_n) = M_n$, et en déduire que son espérance est constante.

Exercice 7.42 — Tribu au temps d'arrêt

M1 • corrigé, p. 175

Soit T un temps d'arrêt à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Posons $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$ et

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty \,:\, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \text{ pour tout } n\}.$$

Montrer que $\mathcal{F}_T$ est une tribu. Si T est identiquement égal à un entier m, montrer que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_m$.

8. Chaînes de Markov

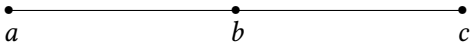
Exercice 8.1 — Fonctions d'une chaîne de Markov

M1 • corrigé, p. 176

Cet exercice a pour but d'étudier si une fonction d'une chaîne de Markov est encore une chaîne de Markov.

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E dénombrable, de matrice de transition P et de loi initiale μ. Soit $\psi : E \to F$ une application *bijective*. Montrer que, si $Y_n = \psi(X_n)$, alors $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur F dont on déterminera la matrice de transition et la loi initiale.

2. On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire sur la figure suivante :



Il s'agit de la chaîne qui à chaque transition se déplace d'un sommet à l'un des sommets contigus, choisi au hasard. On prend pour loi initiale la loi stationnaire $(1/4, 1/2, 1/4)$ sur (a, b, c). Soit ψ l'application, à valeurs dans $F = \{0, 1\}$, définie par $\psi(a) = 0, \psi(b) = \psi(c) = 1$. On pose $\psi(X_n) = Y_n$. Montrer que, pour $n \geq 1$, l'on a

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 | Y_n = 1, Y_{n-1} = 0) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 | Y_n = 1) = \frac{1}{2}\frac{\mathbb{P}(X_n = b)}{\mathbb{P}(X_n = b) + \mathbb{P}(X_n = c)}.$$

En déduire que le processus $(Y_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une chaîne de Markov. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 8.2 — Algorithme de Metropolis

M1 • corrigé, p. 176

Cet exercice montre comment on peut construire une chaîne de Markov ayant une probabilité stationnaire fixée à l'avance. Soit E un ensemble d'états fini et P une matrice de transition sur E symétrique et irréductible. Soit π une probabilité sur E telle que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. On définit sur E une nouvelle matrice de transition Q par

$$Q(x, y) = \begin{cases} \alpha(x, y)P(x, y) & \text{si } x \neq y, \\ 1 - \sum_{z\neq x} Q(x, z) & \text{si } y = x, \end{cases} \qquad \text{où} \quad \alpha(x, y) = \min\left(\frac{\pi(y)}{\pi(x)}, 1\right).$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q.

1. Montrer que la loi π est réversible pour Q et donc invariante.

2. Montrer que Q est irréductible.

3. On suppose que π n'est pas la distribution uniforme (sinon $Q = P$). On note M l'ensemble des états $x \in E$ tels que $\pi(x) = \max_{y\in E} \pi(y)$.

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in M$ tel que $P(x_0, y) > 0$ pour un certain $y \notin M$. En déduire que $Q(x_0, z) < P(x_0, z)$ pour un $z \in E$ au moins. Que peut-on dire de $Q(x_0, x_0)$?

b) Montrer que Q est apériodique (même si P ne l'était pas).

c) Que peut-on en déduire sur la loi de X_n ?

4. On définit l'algorithme suivant :

Initialisation : donner la valeur de X_1
Pour i *de 1 à* $n-1$
- simuler V *selon une loi* $P(X_i, .)$
- simuler U *uniforme sur* $[0, 1]$ *indépendante de* V
- si $U \leq \alpha(X_i, V)$ *alors poser* $X_{i+1} = V$ *sinon poser* $X_{i+1} = X_i$

Montrer que cet algorithme permet de simuler des variables $X_1, \ldots, X_n$ de transition Q.

Commentaire : En prenant n grand, cet algorithme est en réalité utilisé pour simuler approximativement une variable aléatoire de loi π, en particulier lorsque cette probabilité n'est connue qu'à une constante de proportionnalité près.

Exercice 8.3 — Processus de renouvellement

L3 / M1 • corrigé, p. 176

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi ν, une mesure de probabilité sur $[0,\infty[$ telle que $\nu(]0,\infty[) > 0$. Posons $T_0 = 0$, ainsi que $T_n = X_1 + \ldots + X_n$ pour tout entier $n \geq 1$, puis

$$\forall t \geq 0 \qquad N(t) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid T_n \leq t\}.$$

1. À quelle condition sur ν le processus $(N(t))_{t\geq 0}$ est-il un processus de Poisson ?
2. Montrer que $(N(t))_{t\geq 0}$ est honnête, *i.e.* vérifie $\mathbb{P}(N(t) < \infty) = 1$ pour tout t.
3. Étudier le comportement asymptotique de $N(t)/t$ quand $t \to \infty$.
4. Pour $n \geq 1$, notons F_n la fonction de répartition de T_n. Pour $t \geq 0$, exprimer la loi de $N(t)$ en fonction des F_n.
5. On appelle fonction de renouvellement la fonction m définie par $m(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que $m = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$ et que m est l'unique solution borélienne localement bornée de l'équation intégrale, dite de renouvellement,
$$m(t) = \int_{[0,t]} (1 + m(t-x))\nu(\mathrm{d}x).$$

Interpréter T_n et $N(t)$ et préciser pourquoi $N(t) \to \infty$ presque sûrement.

Exercice 8.4 — Chauffage à deux régimes

M1 • corrigé, p. 177

Le chauffage d'une maison individuelle est composé d'un chauffage de base et d'un chauffage d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, dans l'état 2 si les deux chauffages fonctionnent. Si un jour on est dans l'état 1, on estime que le lendemain on est encore dans l'état 1 avec une probabilté $1/2$. Si on est dans l'état 2, le lendemain la maison sera chaude et on pourra passer à l'état 1 avec probabilité $3/4$. Soit X_n l'état du système au jour n.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer la matrice de transition P.
2. Soit $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1), n \geq 0$. Déterminer une relation de recurrence entre p_n et p_{n+1}.
3. Sachant qu'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant.
4. Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec probabilité $3/5$, alors tous les jours, on a encore une probabilité $3/5$ d'être dans l'état 1.
5. Chaque journée dans l'état 1 coûte 2 euros, dans l'état 2 coûte 4 euros et chaque transition de 1 à 2 ou de 2 à 1 coûte 1 euro. Calculer le coût moyen dans la situation précédente.

On suppose que les probabilités de transition indiquées restent valables conditionnellement à tout le passé : elles ne dépendent que de l'état courant.

Exercice 8.5 — Maximum successif des faces d'un dé

M1 • corrigé, p. 177

Soit ξ_n le résultat du n-ième jet d'un dé équilibré. On suppose les lancers indépendants. On pose pour tout $n \geq 1$, $X_n = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition P, ainsi que P^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 8.6 — Martingale associée au générateur d'une chaîne

M1 • corrigé, p. 177

Soit S un ensemble dénombrable. On note $\mathscr{H}$ l'espace vectoriel des applications bornées de S dans $\mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans S de fonction de transition $Q = (Q(i,j))_{(i,j)\in S}$. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire $A : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}$ tel que, pour tout $f \in \mathscr{H}$, la suite $(M_n^f)_{n\geq 0}$ définie par

$$M_0^f = f(X_0) \qquad \text{et} \qquad M_n^f = f(X_n) - \sum_{i=0}^{n-1} A(f)(X_i) \qquad \text{pour} \qquad n \geq 1$$

soit une martingale pour la filtration naturelle de $(X_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 8.7 — Décomposition au premier passage

M1 • corrigé, p. 177

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'état E et de matrice de transition P. Pour $x, y \in E$, on note $T_y = \inf\{n > 0, X_n = y\}$ et $\rho(x, y) = \mathbb{P}_x(T_y < \infty)$. Montrer les relations suivantes :

1. $P^n(x, y) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_x(T_y = m)P^{n-m}(y, y)$ pour $n \geq 1$.
2. Si a est un état absorbant, $\mathbb{P}_x(X_n = a) = \mathbb{P}_x(T_a \leq n)$ pour $n \geq 1$.
3. $\mathbb{P}_x(T_y = n + 1) = \sum_{z\neq y} P(x, z)\mathbb{P}_z(T_y = n)$ pour $n \geq 1$.
4. $\rho_{xy} = P(x, y) + \sum_{z\neq y} P(x, z)\rho_{zy}$.

Exercice 8.8 — Maximum d'une marche et écart au maximum

M1 • corrigé, p. 178

Soit $p \in]0, 1[$ et X_i des variables aléatoires indépendantes vérifiant

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1).$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $M_n = \max\{S_0, \dots, S_n\}$.

1. $(M_n)_{n\geq 0}$ est-elle une chaîne de Markov ?
2. On définit maintenant $Y_n = M_n - S_n$ pour tout $n \geq 0$. Etablir une relation entre Y_{n+1} et Y_n. En déduire que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ et donner sa matrice de transition Q.
3. La chaîne $(Y_n)_{n\geq 0}$ est-elle irréductible ?
4. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ admet une mesure réversible λ (avec $\lambda(0) = 1$) et déterminer λ. On rappelle qu'une mesure μ sur $\mathbb{N}$ est réversible pour la chaîne $(Y_n)_{n\geq 0}$ de transition Q si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mu(x)Q(x, y) = \mu(y)Q(y, x)\,.$$

Exercice 8.9 — Modèle de Wright-Fisher et absorption

M1 • corrigé, p. 178

Soit $N \geq 1$ un entier et Q la matrice de transition sur $S = \{0, \dots, N\}$ définie par

$$Q(i, j) = \binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans S de fonction de transition Q.

1. Classifier les états de $(X_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que pour tout $k \in S$, $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_k$ et que la limite $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ existe $\mathbb{P}_k$-presque sûrement. Déterminer la loi de X_∞ sous $\mathbb{P}_k$.

Exercice 8.10 — File d'attente à service constant

L3 / M1 • corrigé, p. 178

On étudie une file d'attente à un guichet où le temps de service d'un client est constant et pris comme unité de temps. On note ξ_n le nombre de clients arrivant pendant la n-ième période de temps. On suppose que les variables ξ_n, pour $n \geq 1$, sont indépendantes et identiquement distribuées de loi μ et que $\mathbb{E}[\xi_1] < \infty$. Un client arrivant dans cette période ne peut être servi avant l'instant $n + 1$, même si personne ne se trouvait au guichet quand il est arrivé. On note X_n le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant n et l'on suppose X_0 indépendante de la suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène et déterminer sa matrice de transition.
2. Montrer, en utilisant la loi forte des grands nombres, que si $\mathbb{E}(\xi_1) > 1$, alors $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$.
3. Montrer que si $\mathbb{E}(\xi_1) < 1$, l'état 0 est récurrent et que la file est vide infiniment souvent presque sûrement, quel que soit son état initial fini.

Exercice 8.11 — Classes d'une chaîne à neuf états

M1 • corrigé, p. 178

On considère la matrice de Markov suivante :

$$P = ((P(i,j))_{(i,j)\in E^2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

L'espace d'état est $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et les $*$ sont des coefficients non nuls. Trouver les états absorbants, transitoires et les classes de récurrence.

Exercice 8.12 — Probabilité invariante sur quatre états

M1 • corrigé, p. 178

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que la chaîne est irréductible et trouver la probabilité invariante. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} X_k^2.$$

Exercice 8.13 — Chaîne de naissance et mort

M1 • corrigé, p. 179

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à espace d'états $\mathbb{N}$ et de matrice de transition Q telle que

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $p_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$, $p_i > 0$, $q_i > 0$ et $p_i + r_i + q_i = 1$ pour $i \geq 1$. Une telle chaîne est appelée chaîne de naissance et de mort. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose

$$\tau_i = \inf\{n \geq 0 \mid X_n = i\} \qquad \text{et} \qquad T_i = \inf\{n > 0 \mid X_n = i\}.$$

De plus, étant donnés trois états a, x et b tels que $a \leq x \leq b$ avec $a < b$, on pose

$$u(x) = \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_b) \qquad \text{et} \qquad \gamma(x) = \begin{cases} \frac{q_1 \cdots q_x}{p_1 \cdots p_x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la chaîne est irréductible.
2. Établir une relation entre $u(x+1) - u(x)$ et $u(x) - u(x-1)$ pour $a < x < b$. Calculer en fonction de $\gamma(a), \dots, \gamma(b-1)$ la valeur de $u(a) - u(a+1)$ et en déduire que

$$u(x) = \frac{\gamma(x) + \dots + \gamma(b-1)}{\gamma(a) + \dots + \gamma(b-1)}$$

pour $a \leq x \leq b$. Traiter le cas particulier où $p_x = q_x$ pour tout $x > 0$.

3. Déterminer $\mathbb{P}_1(T_0 = \infty)$ et montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_{x=0}^{\infty} \gamma(x) = \infty$.
4. Montrer que la chaîne admet une mesure réversible ζ (avec $\zeta(0) = 1$) et déterminer ζ. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne admette une mesure de probabilité invariante. En déduire que la chaîne est récurrente positive si et seulement si

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x} < \infty.$$

5. On considère le cas où $p_i = p > 0$ pour tout $i \geq 0$ et $q_i = q > 0$ pour tout $i \geq 1$ avec $p + q \leq 1$. Calculer $\mathbb{P}_i(\tau_0 < \infty)$, classifier la chaîne suivant les valeurs de p, q, puis calculer $\mathbb{E}_i(T_i)$ lorsque $p < q$.

Exercice 8.14 — Urne d'Ehrenfest

M1 • corrigé, p. 180

Pour un entier $m \geq 1$, un ensemble de m boules, numérotées $1, \ldots, m$, est réparti dans deux boîtes. L'état X_n du système est spécifié par le nombre de boules dans la première boîte, si bien que l'espace d'états est $E = \{0, 1, \ldots, m\}$. A chaque étape on tire un numéro entre 1 et m (selon la loi uniforme et indépendamment des tirages précédents) et on change de boîte la boule portant ce numéro.

1. Trouver la matrice de transition P de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$.
2. La chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est-elle irréductible ? Apériodique ?
3. Déterminer la mesure de probabilité invariante. Commenter ce résultat.

Exercice 8.15 — Propriété de Markov forte et théorème ergodique

M1 • corrigé, p. 180

On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable E, et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ sa filtration naturelle.

1. Soit T un temps d'arrêt et f une fonction mesurable positive. Montrer la propriété de Markov forte :

$$\forall x \in E \qquad \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} f(X_T, X_{T+1}, \ldots)|\mathcal{F}_T] = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \mathbb{E}_{X_T}[f(X_0, X_1, \ldots)].$$

On suppose maintenant que la chaîne est récurrente positive et irréductible, et on note μ sa probabilité invariante. Soit f une fonction mesurable positive telle que $\int_E f d\mu < \infty$, et x un point de E. On définit les instants du n-ième retour en x par récurrence : $T_0 = 0$, $T_{n+1} = \inf\{k > T_n \ : \ X_k = x\}$. On note $N_x(n)$ le nombre de retours en x effectués par la chaîne avant l'instant n. On pose aussi pour tout $k \geq 0$,

$$Z_k(f) = \sum_{n=T_k}^{T_{k+1}-1} f(X_n).$$

2. Montrer que les T_n sont des temps d'arrêt finis p.s.
3. En utilisant la propriété de Markov forte, montrer que les $Z_k(f)$ sont des variables indépendantes et de même loi. Calculer $\mathbb{E}_x(Z_0(f))$ en fonction de $\int_E f d\mu$.
4. Montrer que $\mathbb{P}_x$-p.s.

$$\frac{1}{N_x(n)} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu(x)} \int_E f d\mu.$$

5. En déduire le théorème ergodique :

$$\mathbb{P}_x\text{-p.s.} \qquad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f d\mu.$$

Exercice 8.16 — Immigration et disparition de particules

M1 • corrigé, p. 180

On suppose $\lambda > 0$.

On note X_n le nombre de particules présentes à l'instant n dans un volume donné V. On suppose que, pendant l'intervalle de temps $[n, n+1[$, chacune des X_n particules a une probabilité $p = 1 - q$, $0 < p < 1$ de quitter V et

que, pendant ce même intervalle, un nombre aléatoire de particules suivant une loi de Poisson de paramètre λ entre dans V. On suppose que les différents phénomènes aléatoires ainsi considérés sont indépendants les uns des autres.

1. a) Calculer $\mathbb{E}(e^{itX_1}|X_0 = x)$.

b) On suppose que X_0 suit une loi de Poisson de paramètre θ, notée μ_θ. Quelle est la fonction caractéristique de X_1 ? Montrer que, pour une valeur de θ convenable, μ_θ est une probabilité invariante.

2. Montrer que la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est donnée par

$$Q(x,y) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x\wedge y} \binom{x}{k} q^k (1-q)^{x-k} \frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!}.$$

En déduire que cette chaîne est irréductible et donc récurrente positive.

3. Quelle est la limite de $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$ lorsque n tend vers l'infini ? Et de $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2$?

Exercice 8.17 — Équation de Poisson et variance asymptotique

M1 • corrigé, p. 180

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E dénombrable, irreductible récurrente positive, de matrice de transition Q et de probabilité invariante π. Pour toute fonction h définie sur E, on pose $< h, \pi >= \sum_{x\in E} h(x)\pi(x)$. Soit f une fonction bornée sur E telle que $< f, \pi >= 0$. On suppose qu'il existe une fonction bornée g vérifiant $(I-Q)g = f$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n f(X_k)$. On souhaite étudier le comportement asymptotique de $n^{-1}\mathbb{E}(S_n^2)$.

1. Quelle est la limite de $n^{-1}\mathbb{E}(S_n)$ pour $n \to \infty$?

2. Montrer qu'on a la décomposition $S_n = M_n + Z_n$ où

$$M_0 = 0, \quad M_n = \sum_{k=1}^n U_k, \quad U_k = g(X_k) - Qg(X_{k-1}), \quad Z_n = g(X_0) - Qg(X_n).$$

3. Montrer que $\mathbb{E}(U_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$ où $\mathcal{F}$ est la filtration canonique du processus $(X_n)_{n\geq 0}$. En déduire que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et que $\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^n U_k^2)$.

4. Montrer que $\mathbb{E}(g(X_{k+1})Qg(X_k)) = \mathbb{E}((Qg)^2(X_k))$. En déduire que

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} g(X_{k+1})Qg(X_k)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} < (Qg)^2, \pi > .$$

5. On pose $\Sigma^2 =< g^2 - (Qg)^2, \pi >$. Montrer que $n^{-1}\mathbb{E}(M_n^2)$ tend vers Σ^2 quand n tend vers l'infini.

6. Montrer que $n^{-1}\mathbb{E}(S_n^2)$ tend vers Σ^2 quand n tend vers l'infini.

Exercice 8.18 — Processus de Galton-Watson

M1 • corrigé, p. 181

Soit $(p_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels positifs ou nuls telle que $0 < p_0 < 1$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$. Le processus de Galton-Watson modélise la situation suivante : au temps 0, on a une particule qui au temps 1 va se subdiviser aléatoirement en k particules, $k \geq 0$, avec une probabilité p_k. Et ainsi de suite pour chacune des particules créées, chacune se subdivisant indépendamment des autres. On note Z_n le nombre de particules au temps n. On pose $f(s) = \sum_{k\geq 0} p_k s^k$, $m = \sum_{k\geq 0} k p_k < \infty$ et $T_0 = \inf\{n \geq 0, Z_n = 0\}$.

1. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, une sous-martingale ou une sur-martingale suivant les valeurs de m. Que peut-on dire de $W_n = Z_n/m^n$?

2. On suppose $m < 1$. Montrer que Z_n tend presque sûrement vers 0.

3. On suppose $m = 1$. Montrer que Z_n tend presque sûrement vers une variable aléatoire Z_∞ finie presque sûrement. Classifier les états de la chaîne de Markov $(Z_n)_{n\geq 0}$. En déduire que $Z_\infty = 0$ p.s.

4. On suppose $m > 1$ et on note q l'unique solution de $f(s) = s$ dans $]0,1[$. Montrer que $Y_n = q^{Z_n}$ est une martingale. Montrer que $q = \mathbb{P}(T_0 < \infty)$.

Exercice 8.19 — Marches sur un cercle et fuite vers l'infini

M1 • corrigé, p. 181

Marche sur un cercle. Dans tout le problème, on fixe un entier $n \geq 2$ et on dispose $n+1$ points numérotés de 0 à n sur un cercle (les points 0 et n sont situés côte à côte). Une particule saute d'un point à un autre de la façon suivante. À chaque étape et quel que soit le point où se trouve la particule, elle a une probabilité $1/2$ de se déplacer vers chacun des deux points adjacents.

1. Soit E un espace fini et soit P une matrice de transition sur E, qui est bistochastique, i.e., elle vérifie
$$\forall y \in E \qquad \sum_{x \in E} P(x,y) = 1.$$
Montrer que P admet une mesure de probabilité invariante, que l'on précisera.
2. Posons $X_0 = 0$ et pour $k \geq 1$, soit X_k le numéro du point occupé par la particule après le k-ième saut. Montrer que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.
3. Quelle est la matrice de transition P de la chaîne $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$?
4. Cette matrice est-elle récurrente ?
5. Cette matrice est-elle périodique ?
6. Lorsque la chaîne est apériodique, quelle est la limite de $\mathbb{P}(X_k = j)$ quand k tend vers l'infini ?
7. Soit Q la matrice extraite de P définie par $Q = (P_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$. Montrer que l'inverse de la matrice $I - Q$ (où I est la matrice identité) est la matrice M donnée par
$$\forall i,j \in \{1,\dots,n-1\} \qquad M_{i,j} = \frac{2}{n}\min\{i,j\}(n - \max\{i,j\}).$$
8. Pour tout k différent de 0 ou n, on note $A_{k,n}$ la probabilité pour que partant du point k, le point n soit atteint avant le point 0. On définit les vecteurs suivants :
$$A = (A_{k,n})_{k\in\{1,\dots,n-1\}} \qquad R = (P_{k,n})_{k\in\{1,\dots,n-1\}}.$$
Montrer que l'on a la relation $(I - Q)A = R$.
9. En déduire la valeur de $A_{k,n}$ pour $k \in \{1,\dots,n-1\}$.
10. Quelle est la probabilité pour qu'à son premier retour en 0, la particule ait fait un tour complet du cercle ? (c'est-à-dire qu'elle revienne par le point n si elle est partie par le point 1, ou vice versa). *Indication* : Considérer un état fictif, et se ramener à une chaîne à $n+2$ états.
11. Deux joueurs Paul et Pierre effectuent une suite de parties de pile ou face équilibrées. Après chaque partie, le perdant donne un euro au vainqueur. Le jeu cesse lorsque l'un des joueurs est ruiné. La fortune initiale de Paul est a, celle de Pierre est b, avec $a,b \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité pour que Paul ruine Pierre ?

Fuite vers l'infini. On considère la probabilité de transition Q sur $\mathbb{Z}$ définie par :

- si $x \geq 1$, $Q(x,x-1) = 1/2$ et $Q(x,x+1) = Q(x,x+2) = 1/4$;
- si $x \geq 1$ et si $y - x \notin \{-1,1,2\}$, alors $Q(x,y) = 0$;
- $Q(0,1) = Q(0,-1) = 1/2$;
- si $x \leq -1$, alors $Q(x,y) = Q(-x,-y)$ pour $y \in \mathbb{Z}$.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de matrice de transition Q. Notons $\mathbb{P}_x$ la loi de la chaîne de Markov partant de $X_0 = x$ et $\mathbb{E}_x$ l'espérance sous $\mathbb{P}_x$.

12. Montrer que
$$\mathbb{P}_x(\forall n \geq 1 \; |X_{n+1} - X_n| \geq 1) = 1.$$
13. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, calculer en fonction de X_n
$$\mathbb{E}_x[\exp(-\varepsilon|X_{n+1}|) \mid \mathscr{F}_n].$$

14. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(\exp(\alpha n - \varepsilon|X_n|))_{n\geq 0}$$

soit une $\mathbb{P}_x$-surmartingale pour tout x dans $\mathbb{Z}$.

15. Montrer que $\exp(\alpha n - \varepsilon|X_n|)$ converge p.s. sous la loi $\mathbb{P}_x$.

16. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{P}_x\Big(\liminf_{n\to\infty} |X_n| = +\infty\Big) = 1.$$

17. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{P}_x\Big(\Big\{\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty\Big\} \cup \Big\{\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty\Big\}\Big) = 1.$$

18. Si f est une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{Z} \qquad Q(f)(x) = \mathbb{E}_x[f(X_1)].$$

Déterminer les réels β tels que la fonction $f(x) = \exp(\beta x)$ vérifie

$$\forall x \geq 1 \qquad Q(f)(x) = f(x).$$

19. Soit $w : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$w(x) = \mathbf{1}_{\{x\geq 0\}} \exp(-\alpha_0 x) + \mathbf{1}_{\{x<0\}}(2 - \exp(\alpha_0 x)).$$

Montrer qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que l'on ait $Q(w)(x) = w(x)$ pour tout x dans $\mathbb{Z}$.

20. Calculer $\mathbb{P}_x(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty)$.

21. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $T = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \leq a\}$. Soit $x > a$. Montrer que $(w(X_{n\wedge T}))_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_x$.

22. En déduire $\mathbb{P}_x(T < \infty)$.

23. On dit qu'une fonction s est Q-excessive si $Q(s) \leq s$. Donner la valeur de

$$\inf\{s(x), s \text{ fonction } Q\text{-excessive et positive avec } s(a) = 1\}.$$

Exercice 8.20 — Construction d'une chaîne par itération aléatoire

M1 • corrigé, p. 182

Soient S un ensemble dénombrable, $(G, \mathcal{G})$ un ensemble mesurable, $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(G, \mathcal{G})$ et $\phi : S \times G \to S$ une application mesurable. On définit une suite de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans S par $X_0 = x \in S$ et $X_{n+1} = \phi(X_n, Z_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa fonction de transition.

Exercice 8.21 — Pannes et réparations

M1 • corrigé, p. 182

On considère une machine qui, en début de journée, peut être en état de marche (état 1) ou en état de panne (état 0). On suppose que si la machine est en panne au début du n-ième jour, elle a une probabilité p d'être en état de marche au début du $(n+1)$-ième jour ; si la machine est en état de marche au début du n-ième jour, elle a une probabilité q d'être en panne au début du $(n+1)$-ième jour. On note X_n la variable aléatoire égale à l'état de la machine au n-ième jour. On note $\nu(0) = \mathbb{P}(X_0 = 0)$ et $\nu(1) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1 - \nu(0)$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dont on déterminera la matrice de transition P. Calculer $\mathbb{P}(X_1 \neq X_2)$.

2. Montrer que $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = (1 - p - q)\mathbb{P}(X_n = 0) + q$. En déduire $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 1)$ par récurrence sur n. Que se passe-t-il lorsque $p = q = 0$?

3. On suppose que $0 < p, q < 1$. Montrer que $\mathbb{P}(X_n = 0) \to q/(p+q)$ et $\mathbb{P}(X_n = 1) \to p/(p+q)$ quand $n \to \infty$. Que se passe-t-il lorsque $\nu(0) = q/(p+q)$?

4. Calculer P^n.

On suppose que les probabilités de transition indiquées restent valables conditionnellement à tout le passé : elles ne dépendent que de l'état courant.

Exercice 8.22 — Récurrence d'une file d'attente discrète

M1 • corrigé, p. 182

Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi notée γ. On suppose dans tout l'exercice que $\gamma(0) > 0$ et qu'il existe un entier $j \geq 2$ tel que $\gamma(j) > 0$. Soit aussi p un entier positif. On définit par récurrence une suite de v.a. $Y_0, Y_1, \ldots$ en posant $Y_0 = p$ et, pour tout entier $n \geq 0$,

$$Y_{n+1} = (Y_n + \xi_{n+1} - 1)^+,$$

où $(\cdot)^+$ désigne simplement la partie positive.

1. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ dont la fonction de transition est caractérisée par :
$$\begin{cases} Q(0,0) = \gamma(0) + \gamma(1) & \\ Q(0,j) = \gamma(j+1) & \text{pour } j \geq 1 \\ Q(i, i+j-1) = \gamma(j) & \text{pour } i \geq 1 \text{ et } j \geq 0. \end{cases}$$
2. Montrer que la chaîne est irréductible.
3. Dans cette question seulement on suppose que $\gamma(j) = 0$ si $j \geq 3$ (et donc $\gamma(2) > 0$). Montrer que la chaîne admet une mesure réversible que l'on déterminera. Montrer qu'elle est récurrente si $\gamma(2) < \gamma(0)$, et donner son comportement asymptotique dans ce cas.
4. On revient au cas général, et on note
$$m = \sum_{k=0}^{\infty} k\gamma(k).$$
On définit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $Z_0 = p$ et
$$\forall n \geq 1 \qquad Z_n = p + \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - 1).$$
Montrer que $Y_n \geq Z_n$ pour tout entier $n \geq 0$, p.s. En déduire que si $m > 1$, on a $Y_n \to +\infty$ quand $n \to \infty$, p.s., et tous les états de la chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont transitoires.
5. On note $T = \inf\{n \geq 0 \mid Z_n = 0\}$. Montrer que $Y_n = Z_n$ pour tout $n \leq T$, p.s. En déduire que si $m \leq 1$ tous les états de la chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont récurrents.

Exercice 8.23 — Temps d'attente de succès consécutifs

M1 • corrigé, p. 183

On lance une pièce indépendante à chaque instant, avec probabilité $p \in (0,1)$ de pile, et $q = 1 - p$. Soit $X_0 = 0$ et X_n le nombre de piles consécutifs terminant les n premiers lancers.

1. Déterminer la matrice de transition, les classes, périodes et mesures invariantes de (X_n). Étudier sa récurrence.
2. Pour $N \geq 1$, poser $T_N = \inf\{n \geq 0 \,:\, X_n = N\}$. Montrer que T_N est fini et intégrable puis calculer $\mathbb{E}_x T_N$ pour $0 \leq x \leq N$.
3. Déterminer la fréquence asymptotique des instants terminant au moins N piles consécutifs.

Exercice 8.24 — Marche sur les trois racines de l'unité

L3 • corrigé, p. 184

Sur $\{0,1,2\}$ modulo 3, une particule augmente son état de 1 avec probabilité $p \in (0,1)$, le diminue de 1 sinon. Écrire la récurrence matricielle du vecteur colonne des probabilités d'état ; diagonaliser sur $\mathbb{C}$ et déterminer leurs limites.

Exercice 8.25 — Branchement avec immigration : récurrence

M1 • corrigé, p. 184

Soient μ, ν des lois sur $\mathbb{N}$, de moyennes finies m_μ, m_ν, avec $\mu(0), \mu(1), \nu(0), \nu(1) > 0$. Toutes les variables $\xi_{n,k} \sim \mu$ et $\eta_n \sim \nu$ sont indépendantes. Poser $X_0 = \eta_0$ et $X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} \xi_{n,k} + \eta_{n+1}$.

1. Montrer qu'une chaîne irréductible transitoire sur $\mathbb{N}$ tend vers l'infini p.s.
2. Donner le noyau de X et montrer l'irréductibilité.
3. Calculer la récurrence des espérances ; si $m_\mu < 1$, montrer leur bornitude et en déduire la récurrence de la chaîne.

Exercice 8.26 — Marche à quatre états et temps de retour

L3 • corrigé, p. 184

Une chaîne sur $\{1,2,3,4\}$ a pour matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Écrire les simulateurs d'un pas, de n pas, et de la loi empirique au temps n à partir de m trajectoires. Comparer les probabilités d'être en 1 après 100 pas, à partir de chaque état, sur 5000 trajectoires. Simuler le premier temps de retour à l'état initial, comparer les inverses des moyennes de 5000 temps de retour à la loi limite, puis tracer la répartition empirique du temps de retour en 1.

Exercice 8.27 — Marche réfléchie sur les entiers naturels

L3 • corrigé, p. 185

Depuis $i \geq 1$, une chaîne recule avec probabilité $1/2 < p < 1$ et avance avec probabilité $1-p$; depuis zéro elle reste avec probabilité p et passe à 1 sinon. Simuler un pas, la position après n pas depuis zéro, puis ses probabilités empiriques aux états $0, \dots, 9$. Comparer pour $p = 0{,}6$, $0{,}65$, $0{,}7$ à une loi géométrique. Simuler le premier retour en zéro, comparer son espérance à la probabilité limite de zéro et étudier le cas $p = 1/2$.

Exercice 8.28 — Marche réfléchie sans maintien en zéro

M1 • corrigé, p. 185

Une chaîne sur $\mathbb{N}$ a pour transitions $P(k,k+1) = p$, $P(k,k-1) = 1-p$ pour $k \geq 1$ et $P(0,1) = 1$, avec $0 < p < 1$. Montrer qu'elle est récurrente positive pour $p < 1/2$, récurrente nulle pour $p = 1/2$ et transitoire pour $p > 1/2$.

Exercice 8.29 — Mesurabilité des sommes sur les excursions

M1 • corrigé, p. 186

Pour une chaîne récurrente partant de x, soient $T_0 = 0$ et $T_{k+1} = \inf\{n > T_k : X_n = x\}$. Posons $Z_j(f) = \sum_{n=T_j}^{T_{j+1}-1} f(X_n)$ pour une fonction mesurable f. Montrer que $Z_0(f), \dots, Z_{k-1}(f)$ sont $\mathscr{F}_{T_k}$-mesurables.

On donne à $Z_j(f)$ la valeur zéro sur $\{T_{j+1} = \infty\}$.

Exercice 8.30 — Accessibilité, fermeture et communication

M1 • corrigé, p. 186

Soit P une matrice de transition sur un ensemble fini ou dénombrable E. On dit que y est accessible depuis x s'il existe $n \geq 0$ avec $P^n(x,y) > 0$.

1. Montrer qu'un ensemble C est fermé si et seulement si $P(x,y) = 0$ pour tous $x \in C$, $y \notin C$. En déduire que $\{x\}$ est fermé si et seulement si $P(x,x) = 1$.
2. Montrer que tout état est accessible depuis tout autre si et seulement si les seuls ensembles fermés sont $\varnothing$ et E.
3. Montrer que la communication, définie par l'accessibilité dans les deux sens, est une relation d'équivalence.

9. Processus de Poisson et mouvement brownien

Exercice 9.1 — Superposition et amincissement

M1 • corrigé, p. 187

1. Soient $(N(t))_{t\geq 0}$ et $(N'(t))_{t\geq 0}$ deux processus de Poisson indépendants d'intensités respectives λ et λ'. Déterminer la loi du processus $(N(t)+N'(t))_{t\geq 0}$.
2. Soient $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p, et $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ indépendant de ces variables. Déterminer la loi du processus $(N'(t))_{t\geq 0}$ défini par

$$\forall t \geq 0 \qquad N'(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n.$$

Exercice 9.2 — Processus de Poisson composé

M1 • corrigé, p. 187

Soient $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ et $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi μ et indépendantes de $(N(t))_{t\geq 0}$. On dit que le processus $(Z(t))_{t\geq 0}$ défini par

$$\forall t \geq 0 \qquad Z(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \zeta_n$$

est un processus de Poisson composé d'intensité λ et de loi de gain μ.

1. Montrer que les accroissements de $(Z(t))_{t\geq 0}$ sont indépendants et stationnaires, c'est-à-dire que :
   - pour tous $0 \leq t_1 < \ldots < t_k$, les variables aléatoires $Z(t_2)-Z(t_1), \ldots, Z(t_k)-Z(t_{k-1})$ sont indépendantes ;
   - pour tous $0 \leq s < t$, la loi de la variable aléatoire $Z(t)-Z(s)$ ne dépend que de $t-s$.
2. Quelle est la loi de $Z(t)$, à t fixé ?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur μ pour que $(Z(t))_{t\geq 0}$ soit un processus de Poisson, en autorisant ici une intensité nulle.

Exercice 9.3 — Temps résiduel d'un processus de Poisson

M1 • corrigé, p. 188

Considérons un processus de Poisson $N = (N(t))_{t\geq 0}$ d'intensité $\lambda > 0$ et notons $(T_n)_{n\geq 1}$ la suite de ses instants d'arrivée, qui sont définis par

$$\forall n \geq 1 \qquad T_n = \inf\{t \geq 0 \mid N(t) = n\}.$$

Considérons alors le processus $E = (E(t))_{t\geq 0}$ défini par $E(t) = T_{N(t)+1} - t$ pour tout réel $t \geq 0$. De plus, pour tous réels $t \geq 0$ et $x \geq 0$, posons $\varphi(t,x) = \mathbb{P}(E(t) > x)$.

1. Que représente le processus E ?
2. Soient $t, x \in [0, \infty[$. Montrer que

$$\mathbb{P}(E(t) > x \mid T_1) = \mathbf{1}_{\{T_1 > t+x\}} + \varphi(t - T_1, x)\, \mathbf{1}_{\{T_1 \leq t\}}.$$

3. En déduire que

$$\varphi(t,x) = \mathrm{e}^{-\lambda(t+x)} + \int_0^t \varphi(t-u,x)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u.$$

4. Déterminer $\varphi(t,x)$ en résolvant cette équation intégrale.
5. Quelle est la loi de $E(t)$? Commenter.

Dans les produits avec $\mathbf{1}_{\{T_1 \leq t\}}$, on prolonge $\varphi(u,x)$ par zéro pour $u < 0$.

Exercice 9.4 — Le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle

M1 • corrigé, p. 189

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Soient a et b tels que $0 \leq a < b$. On pose, pour $n \geq 0$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{2^n} \left(B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}\right)^2.$$

Calculer la moyenne et la variance de X_n puis trouver la limite p.s. de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$. En déduire que p.s., la fonction $t \mapsto B_t$ n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est à variation finie sur l'intervalle $[a, b]$ si les sommes

$$\sum_{i=1}^{p} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

sont bornées indépendamment de p et de la subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = b$.

Exercice 9.5 — Invariance par isométrie du mouvement brownien

M1 • corrigé, p. 189

Considérons des mouvements browniens indépendants $(B_t^{(1)})_{t\geq 0}, \ldots, (B_t^{(d)})_{t\geq 0}$ et notons $B_t = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})$ pour tout $t \geq 0$. On dit que $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien en dimension d. Soit ψ une isométrie de $\mathbb{R}^d$ telle que $\psi(0) = 0$. Montrer que $(\psi(B_t))_{t\geq 0}$ est aussi un mouvement brownien en dimension d.

Exercice 9.6 — L'ensemble des zéros du mouvement brownien

M1 • corrigé, p. 189

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, dans une version dont toutes les trajectoires sont continues et partent de zéro.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \Omega \times \mathbb{R}^+ & \to & \{0,1\} \\ & & (\omega, t) & \mapsto & \mathbf{1}_{\{B_t(\omega)=0\}} \end{array}$$

est mesurable lorsque l'on munit $\Omega \times \mathbb{R}^+$ de la tribu $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$. *Indication :* on pourra considérer les ensembles de la forme $E_{a,b} = \{\omega \in \Omega \mid \forall t \in]a, b[, B_t(\omega) \neq 0\}$, pour tous $0 \leq a < b$, et montrer qu'ils sont dans $\mathscr{F}$.

2. Soit $\mathscr{Z} = \{t \geq 0 \mid B_t = 0\}$, l'ensemble des zéros du mouvement brownien. Montrer que p.s. $\mathscr{Z}$ est fermé, non borné et de mesure de Lebesgue nulle.

3. *Question subsidiaire :* Montrer que p.s. $\mathscr{Z}$ est sans point isolé. *Indication :* on pourra considérer les temps d'arrêt $d_q = \inf\{t \geq q \mid B_t = 0\}$ pour $q \in \mathbb{Q}^+$.

Exercice 9.7 — Poissonisation de points uniformes

M1 • corrigé, p. 190

On place M points indépendants uniformes sur $[0, 1]$, avec M indépendant des positions. Pour des boréliens disjoints $A, B \subset [0, 1]$, noter N_A, N_B les nombres de points correspondants.

1. Déterminer les lois et l'indépendance des comptes lorsque $M = m$ est fixé.

2. Reprendre avec $M \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

10. Simulation et travaux pratiques

Exercice 10.1 — Simulation d'un mélange

L3 • corrigé, p. 191

Soit μ une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$, dont la densité f par rapport à la mesure de Lebesgue est définie par

$$f : x \mapsto \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\mathbf{1}_{\{x>0\}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\mathbf{1}_{\{x>0\}} + e^{-(x-2)}\mathbf{1}_{\{x>2\}}\right)$$

1. Expliquer comment simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi μ.
2. Ecrire une fonction `simul.m` qui simule une réalisation d'un n-échantillon de loi μ. Cette fonction aura comme paramètre d'entrée n la taille de l'échantillon et comme paramètre de sortie un vecteur de taille n contenant le résultat de la simulation.
3. Utiliser la fonction `simul.m` pour simuler la réalisation d'un échantillon de taille $n = 5000$ de loi μ. Donner une représentation graphique de la mesure empirique de la réalisation de cet échantillon à l'aide d'un histogramme.

Exercice 10.2 — File à durées de service mélangées

L3 • corrigé, p. 191

On modélise l'évolution d'une file d'attente devant un guichet de la façon suivante :

- On suppose que les clients arrivent indépendamment les uns des autres devant le guichet. Le temps qui sépare l'arrivée de deux clients successifs est modélisé par des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de même taux noté γ. On posera X_n le temps qui sépare l'arrivée du $(n-1)$-ième client de l'arrivée du n-ième client.
- Un client qui arrive se met au bout de la file d'attente. S'il n'y a pas de file d'attente, le client est automatiquement servi. Sinon, il attend que toutes les personnes devant lui dans la file d'attente soient servies. Le premier qui arrive est servi immédiatement.
- A ce guichet, on distinguera trois types de demandes auxquels doit répondre le guichetier. La durée d'execution (en minutes) de ses trois types de tâches est modélisée par des variables aléatoires indépendantes. On considérera que la durée d'execution des deux premiers types de tâches suivent des lois exponentielles d'espérance respectivement 4 et 3. La durée d'execution de la troisième tâche suit la loi de densité $x \mapsto e^{-(x-2)}\mathbf{1}_{\{x>2\}}$. On supposera que la proportion de personnes demandant l'execution d'une de ces trois tâches est la même pour chacune des trois tâches. On note D_n le temps que met le guichetier à répondre à la demande de la n-ième personne. On supposera que les variables aléatoires D_n sont indépendantes entre elles et indépendantes des variables aléatoires $(X_i)_i$.

1. On se propose d'estimer l'espérance notée m_{10} qui sépare l'arrivée du 10-ième client de son départ du guichet. De façon générale pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note W_n le temps qui sépare l'arrivée du n-ième client de son départ du guichet (on l'appellera pour simplifier temps de passage du n-ième client) . W_n peut être calculé par récurrence comme suit :
$$\begin{aligned} W_1 &= D_1 \\ W_n &= D_n + \max(W_{n-1} - X_n, 0) \text{ pour tout } n \geq 2 \end{aligned}$$
   a) Justifier l'expression récursive de W_n.
   b) Ecrire une fonction `passage.m` qui simule le temps de passage des n premiers clients. Cette fonction aura comme paramètres d'entrée l'entier n et le paramètre γ de la loi du temps qui sépare deux arrivées successives de clients dans la file. Elle retournera un vecteur de taille n contenant les résultats de la simulation.
   Remarque : si vous n'arrivez pas à simuler les variables aléatoires D_n telles qu'elles sont décrites dans l'énoncé, faites l'exercice avec des variables aléatoires D_n indépendantes de loi exponentielle de taux 0.3.
   c) On pose $\gamma = 1/5$. Donner une estimation de m_{10} en simulant 5000 réalisations de W_{10} (on donnera le résultat sous forme d'un intervalle de confiance de niveau de confiance approximativement 98% et on justifiera en détail sa démarche). On notera θ_N la variable aléatoire qui permet d'estimer m_{10} à l'aide N simulations de W_{10}.

On note Q_n le temps d'attente du n-ième client dans la file avant de commencer à être servi.

2. Donner une expression de Q_n en fonction de W_n, puis une expression récursive pour Q_n (ne faisant pas intervenir W_n).

3. Ecrire une fonction `attente.m` qui simule le temps d'attente et le temps de passage des n premiers clients. Cette fonction aura comme paramètres d'entrée l'entier n et le paramètre γ de la loi du temps qui sépare deux arrivées successives de clients dans la file. Elle retournera deux vecteurs de taille n contenant les résultats de la simulation.

4. Estimation de m_{10} lorsque $\gamma = 1/5$ par une autre méthode.

a) Expliquer comment estimer m_{10} à l'aide de l'observation de N simulations de Q_{10}. On notera η_N l'estimateur obtenu.

b) représenter sur un même graphique une réalisation de $k \mapsto \theta_k$ et la réalisation associée de $k \mapsto \eta_k$ sur $\{1, \dots, 1000\}$.

c) On note $V(\theta_k)$ et $V(\eta_k)$ l'estimation de respectivement $E((\theta_k - m_{10})^2)$ et $E((\eta_k - m_{10})^2)$ calculée à partir de k simulations de W_{10} et Q_{10} respectivement.
Representer sur un même graphique une réalisation de $k \mapsto V(\theta_k)$ et de $k \mapsto V(\eta_k)$ sur $\{1, \dots, 1000\}$. Qu'observe-t-on ? Que peut-on dire théoriquement sur ces deux méthodes d'estimation de m_{10}.

5. Etude du comportement asymptotique de Q_n.

a) Simuler le temps d'attente des 100 premiers clients et tracer les résultats obtenus en fonction du numéro du client pour $\gamma = 1/5$ puis pour $\gamma = 1$.

b) Pour $\gamma = 1/5$, simuler 1000 réalisations du temps d'attente du 50-ième client en conservant à chaque fois le temps d'attente des 5-ième et 40-ième clients. Représenter sur le même graphique les fonctions de répartition empirique des 1000 réalisations de Q_5, de Q_{40} et de Q_{50}.

c) Reprendre la question précédente avec $\gamma = 1$.

d) Commenter les graphiques obtenus et notamment expliquer quels renseignements nous apportent ces courbes sur le comportement asymptotique de Q_n. Que peut-on dire de la probabilité que le n-ième client soit servi immédiatement lorsque n est grand ? Si nécessaire, vous pouvez effectuer des simulations pour d'autres valeurs du paramètre γ afin d'étayer vos observations.

e) Etudier graphiquement l'évolution de la proportion de personnes qui sont servies immédiatement parmi les n premières personnes qui arrivent, en fonction de n. Qu'observez-vous ?

Exercice 10.3 — Simulation exponentielle et répartition empirique

L3 • corrigé, p. 192

1. Rappelez le principe de la méthode de simulation par inversion de la fonction de répartition. Application : Écrivez une fonction `simulexp`(a, n) qui simule un n-échantillon de variables aléatoires suivant la loi exponentielle de taux a.

2. Écrivez une fonction `repempexp`(a, n) qui :

- simule un n-échantillon de variables aléatoires suivant la loi exponentielle de taux a ;
- trace la fonction de répartition empirique de cet échantillon ;
- trace sur le même graphique la fonction de répartition de la loi exponentielle de taux a.

Utilisez cette fonction pour plusieurs valeurs de a et des valeurs suffisamment grandes de n. Quel phénomène observez-vous ? Comment justifier cette observation au regard des résultats vus en cours ? Imprimez le graphique obtenu pour $a = 1$ et une valeur de n convenablement choisie. Commentez.

Exercice 10.4 — Sommes exponentielles : loi forte et TCL

L3 • corrigé, p. 192

Considérons une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de taux a et pour tout entier $k \geq 1$, notons $T_k = X_1 + \dots + X_k$. On rappelle que T_k suit la loi gamma $\Gamma(k, a)$ de

forme k et de taux a.

1. En vous appuyant sur la fonction `simulexp`, écrivez une fonction `simulsumexp`(a, k, n) qui construit une matrice de taille $n \times k$ dont chacune des n lignes est une réalisation du vecteur $(T_1, \dots, T_k)$.
2. Écrivez une fonction `graphsumexp`(a, k, n) qui trace sur un même graphique n réalisations de la suite finie aléatoire $(T_i/i)_{1 \leq i \leq k}$. Testez cette fonction pour plusieurs valeurs de a lorsque $k = 500$ et $n = 10$. Quel phénomène observez-vous ? Comment justifier cette observation ? Imprimez votre graphique pour $a = 0.2$, $k = 1000$ et $n = 10$.

Désignons par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour tout réel t, on peut obtenir une valeur numérique approchée de $\Phi(t)$ en appelant la fonction `normcdf`$(t, 0, 1)$.

3. Écrivez une fonction `repempgamma`(a, k, n) qui trace la fonction de répartition empirique d'un n-échantillon de même loi que celle de $Z_k = (aT_k - k)/\sqrt{k}$.
4. Écrivez une fonction `repempgammaconv`(a) qui trace sur un même graphique la fonction de répartition empirique d'un 1000-échantillon de même loi que celle de Z_k pour $k = 3$, $k = 40$ et $k = 60$, ainsi que la fonction Φ. Testez cette fonction pour plusieurs valeurs de a. Quel phénomène observez-vous ? Comment justifier cette observation ? Imprimez votre graphique pour $a = 0.2$ et commentez.

Exercice 10.5 — Simulation d'un processus de Poisson

L3 • corrigé, p. 193

Les instants T_k sont les sommes successives de variables indépendantes exponentielles de taux $a > 0$.

Pour tout réel $t \geq 0$, notons

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}}.$$

On appelle processus de comptage, la fonction aléatoire $t \mapsto N_t$.

1. Si T_k désigne, pour tout k, l'instant d'arrivée du k-ième client à un magasin, que représente N_t ?
2. Montrer que, presque sûrement, la fonction $t \mapsto N_t(\omega)$ est constante par morceaux.
3. Écrivez une fonction `comptage`(a, T) qui simule une réalisation de la trajectoire du processus $(N_t)_{t \geq 0}$ sur l'intervalle $[0, T]$, trace cette trajectoire et retourne la valeur de N_T obtenue.
4. À l'aide de la fonction `comptage`, tracez sur un même graphique trois réalisations du processus $(N_t)_{t \geq 0}$ entre les instants 0 et 1000 pour $a = 0.2$ (imprimez la figure obtenue), puis recommencez pour une autre valeur de a. Qu'observez-vous ?
5. Écrivez une variante de la fonction `comptage`(a, T), que vous appellerez `comptagen`(a, T, n) qui simule n réalisations du processus $(N_t)_{t \geq 0}$ sur l'intervalle $[0, T]$ et retourne un vecteur contenant les n réalisations de N_T obtenues mais ne fait aucun tracé.
6. Écrivez une fonction `mesempcomptage`(a, T, n) qui appelle `comptagen`(a, T, n), calcule la moyenne et la variance du n-échantillon renvoyé par cette dernière fonction et représente sa mesure empirique sur un graphique.

On peut montrer que la loi de N_T est une loi de Poisson dont le paramètre, que l'on notera $\alpha(a, T)$, dépend de a et de T.

7. Essayez la fonction `mesempcomptage`(a, T, n) avec plusieurs valeurs de a et T et des valeurs suffisamment grandes de n. En utilisant vos observations, proposez une expression pour $\alpha(a, T)$ (justifiez votre choix en donnant les observations qui vous ont conduit à cette expression).
8. Pour vérifier votre conjecture, modifiez votre fonction `mesempcomptage` pour qu'elle superpose au graphe de la mesure empirique celui de la distribution de Poisson de paramètre $\alpha(a, T)$. On représentera ces distributions sur $\{0, \dots, p_{max}\}$, où p_{max} désigne un entier tel que $\mathbb{P}(N_T \geq p_{max}) \leq 0.1$, que l'on déterminera grâce à l'inégalité de Tchebychev. Imprimez votre graphique pour $a = 0.2$, $T = 10$ et $n = 1000$ et commentez vos graphes.

On suppose maintenant qu'une caisse unique, initialement vide, sert les clients dans leur ordre d'arrivée. Les services sont indépendants des arrivées, indépendants entre eux et exponentiels de taux $b > 0$. Écrire une fonction `filecaisse(a,b,T)` qui simule et trace le nombre F_t de clients présents, service compris. Comparer $a = 0{,}2$ avec $b = 0{,}15$ et $b = 0{,}25$ sur $[0, 1000]$. Conjecturer le comportement à long terme selon les valeurs de a et b.

Exercice 10.6 — Consommation cumulée et Poisson composé

L3 • corrigé, p. 194

Afin de mieux gérer son stock, le responsable d'une station service cherche à avoir une idée de l'allure de la fonction V_t qui donne le volume de carburant débité jusqu'à l'instant t. Dans ce but, il fait l'hypothèse que les durées séparant les instants d'arrivée de deux clients successifs sont des variables indépendantes de même loi exponentielle de taux a. De plus, il suppose que le volume de carburant acheté par chaque client suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne μ et de variance σ^2 et que les volumes achetés sont indépendants d'un client à l'autre et indépendants de tous les temps inter-arrivées. On suppose $a > 0$ et $\sigma > 0$.

1. Notons T_k la date d'arrivée du client k, $T_0 = 0$, et $N_t = \max\{k \geq 0 \,:\, T_k \leq t\}$. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$,

$$V_t = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}} = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,$$

   où $(Y_k)_{k\geq 1}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes distribuées selon la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et indépendantes de la suite $(T_k)_k$.

2. Expliquez comment simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ en utilisant la fonction `randn` de Matlab.

3. Écrivez une fonction `station`$(a, mu, sigma, T)$ qui simule une réalisation de la fonction aléatoire $(V_t)_{t\geq 0}$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$, trace la trajectoire obtenue et retourne la valeur de V_T. Lancez cette fonction pour $T = 50$, $a = 0.2$ et pour des valeurs réalistes des paramètres μ et σ. Imprimez votre tracé.

4. Écrivez une variante de la fonction `station`, appelée `moystation`$(a, mu, sigma, T, n)$, qui simule n réalisations de $(V_t)_{t\geq 0}$ sur l'intervalle $[0, T]$ et retourne la moyenne des n valeurs de V_T obtenues. Utilisez la fonction `moystation` pour avoir une idée de la valeur de l'espérance de V_T en fonction des paramètres a, μ, σ et T. Expliquez comment on peut utiliser les simulations pour avoir une idée de la valeur de l'espérance de V_T, donnez votre conjecture et les observations qui vous ont permis de faire cette conjecture.

5. Déterminez de façon théorique l'expression de $\mathbb{E}[V_T]$.

Exercice 10.7 — Convolution et moyennes de dés

L3 • corrigé, p. 195

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, 1, \dots, r_1\}$ et $\{0, 1, \dots, r_2\}$. Déterminer la loi de $X + Y$.

2. Soit a et b deux entiers. Notons X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{a, a+1, \dots, a+r_1\}$ et $\{b, b+1, \dots, b+r_2\}$. Montrer que la fonction `conv` de Matlab permet d'obtenir facilement les coefficients de la loi de $X + Y$.

3. Ecrire un programme `loideuxdes.m` utilisant la fonction `conv` pour représenter la loi de la somme des nombres obtenus en lançant deux dés.

4. Ecrire une fonction `loisomme.m` qui détermine les coefficients de la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de même loi à valeurs dans $\{a, a+1, \dots, a+r\}$. *Indications :* La fonction aura pour paramètres d'entrée : n, a et un vecteur $p = [p_0, \dots, p_r]$ de sorte que $p_i = \mathbb{P}(X_1 = a + i)$ pour tout i. Elle aura deux paramètres de sortie : un vecteur `val` contenant la liste des valeurs possibles pour S_n et un vecteur `prob` contenant les coefficients de la loi de S_n de sorte que `prob(i)`$= \mathbb{P}(S_n =$`val(i)`$)$ pour tout i.

5. Soit M_n la moyenne de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de même loi à valeurs dans $\{a, a+1, \dots, a+r\}$. Écrire une fonction `graphloimoyenne.m` qui trace l'un en dessous de l'autre le diagramme en bâtons de la loi de M_n et le graphe de sa fonction de répartition. *Indication :* On pourra utiliser la fonction `subplot` pour subdiviser la fenêtre graphique et faire deux figures l'une en dessous de l'autre.

6. Utiliser la fonction précédente pour visualiser la loi et la fonction de répartition de la moyenne des nombres obtenus en lançant 3 dés, 10 dés, 50 dés, puis 100 dés. Qu'observez-vous ? Y-a-t-il un résultat du cours permettant d'expliquer ce que vous observez ?

Rappel : Simulations d'expériences aléatoires.

Pour effectuer des simulations sur ordinateur, il faut résoudre un problème apparemment insoluble : imiter le hasard à l'aide d'une machine parfaitement déterministe. On a besoin d'une fonction `rand` qui a les propriétés suivantes :

(i). un appel à la fonction `rand` donne une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$;

(ii). les appels successifs à la fonction `rand` fournissent une réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$.

Ce problème a été contourné en utilisant des algorithmes déterministes qui génèrent des suites de nombres appelés *nombres pseudo-aléatoires* ayant des caractéristiques proches des suites de nombres aléatoires. En pratique, la fonction `rand` d'un logiciel est un algorithme déterministe qui fournit une liste de nombres $(u_n)_n$ dans $[0,1]$ par un procédé le plus souvent récursif de la forme $u_{n+1} = f(u_n, \dots, u_{n-k})$ pour un certain k fixé, visant à reproduire, pour des tailles d'échantillon adaptées, le comportement de n points tirés au hasard dans $]0,1[$. Un tel procédé est appelé un *générateur de nombres pseudo-aléatoires*.

Un tel générateur de nombres pseudo-aléatoires a besoin d'un vecteur $(u_0, \dots, u_k)$ pour l'initialisation de la récurrence. On appelle ce vecteur la graine (*seed* en anglais) du générateur. Pour une même valeur de la graine, c'est la même suite de nombres qui sera donnée par la fonction `rand`. L'initialisation doit être faite une seule fois au début de la simulation, et non à chaque appel du générateur. Fixer la graine permet de reproduire le même calcul.

Pour travailler, on supposera que la fonction `rand` de Matlab est idéale dans le sens qu'elle vérifie les deux propriétés précédentes.

Exercice 10.8 — Simuler une uniforme sur un intervalle

L3 • corrigé, p. 195

Expliquer comment on peut procéder pour simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur un intervalle $]a,b[$.

Exercice 10.9 — Nuages uniformes et covariances empiriques

L3 • corrigé, p. 195

1. Ecrire une fonction qui représente n points tirés au hasard dans le carré $[0,1]^2$ et affiche la proportion u_n de points qui sont à une distance inférieure à 1 de l'origine, le centre de gravité g_n du nuage de points obtenus et la matrice de dispersion des points c_n (la matrice de dispersion des points s'obtient avec la fonction `cov` appliquée à une matrice dont chaque ligne est un point).
2. Lancer plusieurs fois cette fonction avec $n = 500$ et comparer les valeurs de u_n, g_n et c_n obtenues. Les valeurs obtenues de u_n et les coefficients de g_n et c_n sont des réalisations de variables aléatoires . Que peut-on dire du comportement de ces variables aléatoires lorsque n tend vers $+\infty$ (Justifiez en détail votre réponse) ?
3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Posons $V = (X, \frac{1}{2}(X+Y))$. Ecrire une fonction qui représente n réalisations du vecteur aléatoire V et affiche le centre de gravité g_n du nuage de points obtenus et la matrice de dispersion des points c_n. Reprendre la question précédente avec cette nouvelle fonction.
4. Reprendre la question précédente avec $V = (X, \frac{1}{2}(X-Y+1))$.

Exercice 10.10 — Moments d'une mesure empirique

L3 • corrigé, p. 196

On note $\overline{\mu}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$ la mesure empirique. Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer la fonction de répartition, l'espérance et la variance de la loi $\bar{\mu}_n(\omega, \cdot)$.

Exercice 10.11 — Simulation de dés et loi forte

L3 • corrigé, p. 196

1. Soit k un entier strictement positif. L'instruction `floor(k*rand)` simule une réalisation d'une variable aléatoire X. Quelle est la loi de X ?
2. Ecrire un programme qui simule le lancer de n dés et trace le diagramme en bâtons de la mesure empirique des n nombres obtenus.
3. Lancer le programme deux fois avec $n = 50$ et deux fois avec $n = 1000$. Qu'observez-vous ? Y-a-t-il un résultat du cours permettant d'expliquer ce que vous observez ?
4. Ecrire un programme qui simule le lancer de $n = 5000$ dés et qui trace la fonction qui à k associe la moyenne des chiffres obtenus avec les k premiers dés. Lancer le programme trois fois de suite en faisant en sorte que les trois tracés se fassent sur la même figure.
   Indications : on pourra utiliser la fonction `cumsum` pour faire le calcul et on pourra mettre l'instruction `hold on` après l'instruction qui effectue le tracé afin que le prochain tracé se superpose sur la même figure.
   Qu'observez-vous ? Y-a-t-il un résultat du cours permettant d'expliquer ce que vous observez ?

Exercice 10.12 — Simulation de Poisson par inversion discrète

L3 • corrigé, p. 196

1. Ecrire une fonction `dpoisson.m` qui calcule les coefficients de la loi de Poisson de paramètre $a > 0$ entre 0 et un entier n : la fonction retournera un vecteur p tel que $p(i+1) = P(X = i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.
2. Comme il n'est pas possible de représenter l'ensemble du diagramme en bâtons d'une loi sur $\mathbb{N}$ utiliser l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev pour déterminer un intervalle $[0, N_a]$ tel que $P(X > N_a) \leq 0.05$.
3. Ecrire un programme qui représente le diagramme en bâtons de la loi de Poisson de paramètre $a = 1.5$ et $a = 5$ restreint à l'intervalle $[0, N_a]$.
4. Soit $\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i \delta_{\{i\}}$ une loi sur $\mathbb{N}$, avec $p_i > 0$ pour tout $i \geq 0$. Supposons que l'application c définie sur $\mathbb{N}^*$ par $c(i+1) = \frac{p_{i+1}}{p_i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ est donnée par une expression analytique.
   Montrer que l'algorithme suivant simule une réalisation d'une variable aléatoire de loi μ :

   $p \leftarrow p_0$
   $Z \leftarrow 0$
   $q \leftarrow p_0$
   $U \leftarrow$ `rand`
   `Tant que` $U > q$
   $Z \leftarrow Z + 1$
   $p \leftarrow c(Z)p$
   $q \leftarrow q + p$
   `FinTantque`
   `Retourner` Z

5. En utilisant l'algorithme précédent, écrire une fonction Matlab qui permet de simuler n réalisations d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $a > 0$.
6. Compléter le programme de la question 3, afin qu'il simule un n-échantillon de loi de Poisson de paramètre $a > 0$ et qu'il représente sur un même graphique la loi empirique de cet échantillon et la loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$. Lancer votre programme avec $n = 1000$, $a = 1$, puis $a = 5$.

Exercice 10.13 — Amincissement d'une loi de Poisson

L3 • corrigé, p. 196

On modélise le nombre d'abonnés à un journal qui vont sur le site web du journal dans une journée par une variable aléatoire Z de loi de Poisson de paramètre a indépendamment du nombre de personnes venues les autres jours. On suppose que chaque personne qui va sur ce site a une probabilité p de télécharger au moins un fichier. On note W le nombre d'abonnés qui téléchargent au moins un fichier en une journée. On suppose les décisions de téléchargement indépendantes entre abonnés, entre jours et des nombres de visiteurs.

1. Ecrire un programme qui
   - simule le nombre de personnes (notées $z_1, \dots, z_n$) qui vont pendant n jours consécutifs consulter le site web en distinguant ceux (notés $w_1, \dots, w_n$) qui téléchargent au moins un fichier.
   - affiche les moyennes et les écarts-types de $(z_1, \dots, z_n)$ et de $(w_1, \dots, w_n)$.
   - représente le diagramme en bâtons de la mesure empirique $(w_1, \dots, w_n)$.
   - compare ce diagramme avec le diagramme en bâtons d'une loi de Poisson dont on choisira le paramètre.
2. Lancer votre programme avec $n = 1000$, $a = 20$ et $p = 0.2$ puis $a = 10$ et $p = 0.5$. Emettre une conjecture sur la loi de W.

Exercice 10.14 — Tracer une fonction de répartition empirique

L3 • corrigé, p. 197

On note $F_n(t) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_j \le t\}}$ et $\bar{F}_n = F_n$. Rappelons qu'il existe une permutation aléatoire σ de $\{1, \dots, n\}$ telle que $X_{\sigma(1)} \le \dots \le X_{\sigma(n)}$.
Quelle est la valeur de $\bar{F}_n(\cdot, t)$ si $t < X_{(1)}$? Si $X_{(i-1)} < t < X_{(i)}$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$? Si $t \ge X_{(n)}$?
En utilisant la fonction `sort` qui permet d'ordonner les éléments d'un vecteur par ordre croissant, expliquer comment obtenir dans Matlab le tracé de la fonction de répartition empirique d'une réalisation d'un n-échantillon.

Exercice 10.15 — Maximum de trois uniformes : répartition et histogramme

L3 • corrigé, p. 197

1. L'instruction suivante `max(rand(3,1))` donne une réalisation d'une variable aléatoire Y. Donner l'expression de la fonction de répartition et de la densité de la loi de Y.
2. Ecrire un programme `simulMax.m` qui
   - demande à l'utilisateur le nombre n de simulations à effectuer
   - simule un échantillon de n variables aléatoires de même loi que Y.
   - trace sur un même graphique la fonction de répartition de la loi de Y et la fonction de répartition empirique des observations du n-échantillon.
3. Lancer ce programme deux fois pour $n = 50$, puis deux fois pour $n = 1000$. Qu'observez-vous ? Y-a-t-il un résultat du cours permettant d'expliquer ce que vous observez ?

Rappel : Représentation des observations par un histogramme.

On appelle *histogramme* des observations $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ pour une partition $I = \{I_j,\ j \in \mathcal{J}\}$, du support de la loi μ, la fonction $\bar{f}_n(\omega, \cdot)$ constante sur chaque élément de la partition et dont la valeur sur I_k vaut

$$\frac{1}{n\lambda(I_k)} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_j(\omega) \in I_k\}} \text{ pour tout } k \in \mathcal{J}.$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

4. Compléter le programme `simulMax.m` afin qu'il affiche sur une autre figure la densité de Y et l'histogramme de la réalisation du n-échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$ pour une partition en 10 intervalles de même longueur.
   Indication : on pourra utiliser la fonction `hist` afin de déterminer le nombre d'observations contenues dans chaque intervalle de la partition, puis la fonction `stairs` ou `bar` pour représenter l'histogramme.
5. Lancer le programme avec $n = 100$ puis $n = 5000$.
6. Changer le nombre de classes de l'histogramme de sorte d'avoir un histogramme qui permette de mieux visualiser la densité de l'échantillon.
7. Proposer une règle empirique pour choisir le nombre de classes de l'histogramme en fonction de la taille de l'échantillon simulé, afin d'avoir une bonne visualisation de la densité de l'échantillon simulé.

Exercice 10.16 — Normalisation d'un histogramme

L3 • corrigé, p. 197

Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables indépendantes de même loi μ sur $\mathbb{R}$. Pour une partition de $\mathbb{R}$ en classes I_k de longueurs $h_k > 0$, poser $N_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \in I_k\}}$ et $\bar{f}_n(x) = \sum_k N_k \mathbf{1}_{\{x\in I_k\}}/(nh_k)$. Que vaut $\int_{\mathbb{R}} \bar{f}_n(\omega, x)dx$? Vers quoi tend la v.a. $\int_{I_k} \bar{f}_n(\cdot, x)dx$ lorsque n tend vers $+\infty$? Faire le lien entre ces résultats et ceux établis dans l'exercice 5.2.

Exercice 10.17 — Simulation de la loi de Laplace

L3 • corrigé, p. 198

La loi de Laplace de paramètre $a > 0$ est la loi sur $\mathbb{R}$ qui a pour densité $g_a : x \mapsto ae^{-a|x|}/2$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Écrire une fonction `rexpo.m` qui simule n réalisations d'une variable aléatoire de loi exponentielle de taux a en utilisant la méthode de simulation par inversion de la fonction de répartition.
2. On dit qu'une variable aléatoire ε suit la loi de Rademacher si $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. En s'inspirant par exemple de la méthode de simulation d'un lancer de dé, écrire une fonction `rRademacher.m` qui simule n réalisations d'une variable aléatoire suivant la loi de Rademacher.
3. Montrer que si X est une variable aléatoire exponentielle de taux $a > 0$ et si ε est une variable aléatoire de Rademacher indépendante de X, alors εX suit la loi de Laplace de paramètre a.
4. À l'aide de cette observation, écrire une fonction `rlaplace.m` qui simule n réalisations d'une variable aléatoire de loi de Laplace de paramètre a.
5. Ecrire un programme `represLap.m` qui :
   - simule un n-échantillon $(Z_1, \dots, Z_n)$ de loi de Laplace de paramètre 1,
   - trace sur un même graphique la fonction de répartition empirique des valeurs de l'échantillon obtenu ainsi que la fonction de répartition de la loi de Laplace de paramètre 1,
   - trace la densité de la loi de Laplace de paramètre 1 sur une seconde figure,
   - construit à l'aide de cet n-échantillon, n points $(Z_1, W_1), \dots, (Z_n, W_n)$ indépendants dont la loi est uniforme sur le domaine $D_{g_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < g_1(x)\}$.
   - trace ces points sur la figure contenant le tracé de la densité.

Exercice 10.18 — Simulation gaussienne par rejet

L3 • corrigé, p. 198

Notons f la densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ et $g_1(x) = e^{-|x|}/2$ la densité de Laplace de paramètre un.

1. Montrer qu'il existe une constante $c \geq 1$ telle que $f \leq cg_1$.
2. Ecrire un programme `acceptRej.m` qui trace sur une même figure les graphes de f et cg_1.
3. Ecrire une fonction `rdomain.m` qui simule un point tiré aléatoirement dans le domaine $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < f(x)\}$ en utilisant la méthode d'acceptation-rejet : la fonction `rdomain.m` retournera les coordonnées du point obtenu ainsi que le nombre de points qu'il a fallu générer dans le domaine D_{g_1} pour l'obtenir.
   Indications : la méthode d'acceptation-rejet repose sur la proposition suivante

   Proposition. *Soit μ une loi de probabilité et D un ensemble mesurable avec $\mu(D) > 0$. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ un échantillon de variables aléatoires de loi μ. Notons $T_D = \inf\{i \geq 1 | X_i \in D\}$. Alors X_{T_D} est une variable aléatoire de loi $\mu_D = \frac{\mu(.\cap D)}{\mu(D)}$.*

4. Compléter le programme `acceptRej.m` afin qu'il :
   - simule n points tirés aléatoirement dans le domaine D_f,
   - représente ces points sur la même figure,
   - affiche la fonction de répartition empirique des abscisses de ces points sur une autre figure.
   - affiche le nombre moyen de points qu'il a fallu générer dans le domaine D_{g_1} pour obtenir ces n points tirés aléatoirement dans le domaine D_f.

5. A quelle courbe doit-on comparer la courbe de la fonction de répartition empirique des abscisses de ces points ? Tester votre programme.
6. En simplifiant les différentes étapes de programmation proposées précédemment, écrire un algorithme qui simule uniquement une réalisation d'une v.a. de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ par la méthode d'acceptation-rejet.

Exercice 10.19 — Simuler une marche simple

L3 • corrigé, p. 199

On considère la marche simple $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, avec des incréments indépendants équitables ± 1.

1. Ecrire une fonction `simulmarch.m` qui simule N réalisations des $n+1$ premiers pas $(S_0, \dots, S_n)$ de la marche et retourne une matrice contenant dans chaque colonne une réalisation de la marche.
2. Représenter sur un même graphique 30 réalisations de $k \mapsto S_k$ sur l'intervalle $[0, 500]$.
3. Qu'observez-vous ? Que peut-on dire de la dispersion des valeurs de S_n en fonction de n ?

Exercice 10.20 — TCL pour une marche simulée

L3 • corrigé, p. 199

On considère la marche simple $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, avec des incréments indépendants équitables ± 1. Etudier par simulations l'évolution de la loi de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ lorsque n augmente.
Indications : on pourra représenter sur un même graphique la fonction de répartition empirique d'un 1000-échantillon de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 200$, puis tracer sur une autre figure un histogramme du 1000-échantillon de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ pour $n = 200$.

Exercice 10.21 — Maximum et temps d'occupation d'une marche

L3 • corrigé, p. 199

On considère la marche simple $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, avec des incréments indépendants équitables ± 1. On pose $M_n = \max(0, S_1, \dots, S_n)$ et $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{S_i > 0\}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Que représente T_n ?
2. Compléter la fonction `simulmarch.m` afin qu'elle retourne aussi les réalisations de $(M_n)_n$ et de $(T_n)_n$ associées aux marches aléatoires simulées.
3. Representer sur une même figure 20 réalisations de $n \mapsto \frac{M_n}{\sqrt{n}}$ et de $n \mapsto T_n$. Puis étudier par simulations l'évolution des lois de $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$ et T_n lorsque n augmente.

Exercice 10.22 — Sondage sans remise et intervalles garantis

L3 • corrigé, p. 199

Une population de $N = 10000$ personnes contient N_A votes pour A, N_B pour B, et $N - N_A - N_B$ votes blancs. Poser $p_A = N_A/N$, $p_B = N_B/N$. En cas d'égalité dans un sondage, on désigne le gagnant par un tirage à pile ou face indépendant.

1. Écrire une fonction `sondage` qui simule le sondage de $n < N$ individus (distincts) tirés au hasard dans cette population et retourne le nombre S_A (respectivement S_B) de personnes sondées ayant décidé de voter pour A (respectivement pour B). *Indications :* On pourra noter 1 un bulletin pour A, 0 un bulletin blanc et -1 un bulletin pour B.
2. On suppose que $n = 100$, $N_A = 4180$ et $N_B = 4620$. Utiliser la fonction `sondage` pour simuler 5 fois le sondage de n personnes dans cette population. Afficher les estimations des pourcentages de votes pour A, de votes pour B et de votes blancs obtenues avec chacun de ces cinq sondages. Commenter les résultats.
3. On appelle *intervalle de confiance pour p_A de niveau de confiance α*, un intervalle aléatoire $[g(S_A), d(S_A)]$ tel que $\mathbb{P}(p_A \in [g(S_A), d(S_A)]) \geq \alpha$. Construire un intervalle de confiance de niveau de confiance supérieur ou égal à α en utilisant l'inégalité de Chebyshev. *Indications :* On pourra chercher $g(S_A)$ tel que $\mathbb{P}(p_A < g(S_A)) \leq (1-\alpha)/2$ et $d(S_A)$ tel que $\mathbb{P}(p_A > d(S_A)) \leq (1-\alpha)/2$.
4. Compléter la fonction `sondage` pour qu'elle donne les réalisations des bornes des intervalles de confiance pour p_A et p_B de niveau de confiance α associé au résultat du sondage.

5. Simuler 5 sondages et comparer les intervalles de confiance pour p_A et p_B de niveau de confiance 90% associés à chacun des 5 sondages. *Indication :* Pour comparer les intervalles de confiance, on pourra représenter les intervalles de confiance pour le i-ème sondage comme un segment horizontal placé à la hauteur i sur une même figure.

6. Simuler 5000 fois un sondage de n personnes dans cette population. Utiliser les résultats de ces 5000 sondages pour avoir une représentation graphique approchée des lois de $\frac{1}{n}S_A$ et de $\frac{1}{n}S_B$. Donner la moyenne et la variance empirique de chaque échantillon représenté. Donner à l'aide des résultats de ces 5000 sondages une estimation de la probabilité de se tromper en déclarant gagnant le candidat qui a le plus de voix à la suite du sondage de n personnes (on donnera un intervalle de confiance de niveau de confiance supérieur ou égal à 90% en utilisant l'inégalité de Hoeffding, voir l'exercice 2.6).

7. Étudier l'influence des votes blancs sur la probabilité de se tromper en déclarant gagnant le candidat qui a le plus de voix à la suite du sondage de n personnes par simulations : on pourra par exemple simuler 5000 sondages de 100 personnes dans les cas suivants :

- $N_A = 4370$ et $N_B = 4830$,
- $N_A = 2780$ et $N_B = 3220$,
- $N_A = 3960$ et $N_B = 4840$,
- $N_A = 4140$ et $N_B = 5060$.

Commenter les résultats obtenus et notamment l'influence des votes blancs (on pourra essayer d'autres valeurs des paramètres pour en étudier l'effet sur les résultats).

Exercice 10.23 — Simulation par inversion

L3 • corrigé, p. 201

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose pour $u \in]0,1[$,

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq u\}.$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $u \in]0,1[$, $F^{-1}(u) \leq t$ si et seulement si $F(t) \geq u$. En déduire la loi de $Y = F^{-1}(U)$.

2. Déterminer la fonction F^{-1} dans les deux situations suivantes :

a) F est la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ de taux $\lambda > 0$.

b) F est la fonction de répartition de la loi $\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta_{e_i}$ où $e_1, ..., e_n$ sont des réels distincts ordonnés par ordre croissant et où $p_1, \dots, p_n$ sont des réels strictement positifs de somme 1.

3. Soit μ une probabilité sur un ensemble fini quelconque $\mathscr{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, posons $q_i = \sum_{j=1}^{i} \mu(\{e_j\})$.
On suppose que l'on dispose d'une fonction `rand` qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) un appel à la fonction `rand` donne une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$.

(ii) les appels successifs à la fonction `rand` fournissent une réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $(0,1)$.

Montrer que l'algorithme ci-dessous permet de simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi μ et déterminer le nombre moyen de comparaisons effectué pas cet algorithme :

$u \leftarrow$ `rand`
$i \leftarrow 1$
`Tant que` $u > q_i$
$i \leftarrow i + 1$
`FinTantque`
$X \leftarrow e_i$

Comment numéroter les éléments de l'ensemble $\mathscr{E}$ pour minimiser le nombre moyen de comparaisons ?

Exercice 10.24 — Simulation d'une loi de Poisson par produits

M1 • corrigé, p. 201

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $\lambda > 0$, on pose

$$Y = \min\{n \geq 0, \quad X_1 \dots X_{n+1} \leq e^{-\lambda}\}.$$

1. Quelle est la loi de $-\ln(X_1)$?
2. Montrer que la densité de $\sum_{i=1}^{n}(-\ln(X_i))$ est $x \mapsto \mathbf{1}_{\{x>0\}}e^{-x}x^{n-1}/(n-1)!$.
3. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
4. Expliquer en quoi ce résultat permet de simuler par ordinateur une variable aléatoire de loi de Poisson.

Exercice 10.25 — Simulation d'un temps géométrique

L3 • corrigé, p. 201

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose

$$Y = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = 1\}.$$

1. Exprimer la loi de Y en fonction de p. En déduire un algorithme permettant de simuler cette loi et le programmer en Matlab.
2. Écrire un programme qui représente le diagramme en bâtons de la loi précédente sur un intervalle choisi de façon pertinente.

Exercice 10.26 — Inversion sur un intervalle borné

L3 • corrigé, p. 201

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 2 \\ \frac{a}{(1+x)^2} & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur $a \in \mathbb{R}$ s'agit-il d'une densité ? On suppose désormais que a a cette valeur. Soit μ la loi de densité f.
2. Calculer la fonction de répartition de μ.
3. Écrire une fonction intitulée `simulinversion`, prenant en argument un entier n et renvoyant la simulation **par la méthode d'inversion de la fonction de répartition** d'un n-échantillon de variables aléatoires de loi μ.
4. Tester la fonction `simulinversion` pour $n = 1000$ de la façon suivante : tracer sur un même graphe la fonction de répartition empirique d'un n-échantillon obtenu avec `simulinversion` et la fonction de répartition théorique de la loi μ. Qu'observez-vous ? Quelle en est la justification ?

Exercice 10.27 — Loi binomiale négative et limite de Poisson

L3 • corrigé, p. 201

Soient $m \geq 1$ un entier et $p \in (0,1]$. Paul pêche et aime les truites : il veut en pêcher m. Il s'installe au bord d'une rivière et commence à pêcher. Chaque fois qu'un poisson mord à l'hameçon, il y a une probabilité p pour que ce soit une truite (indépendamment de ce qui s'est passé avant). Il continue à pêcher jusqu'à obtenir ses m truites puis il s'arrête. Soit X le nombre total de poissons pêchés en tout (truites et autres).

1. Écrire une fonction `nbrepoissons` qui prend en entrée deux variables m et p et simule X. (On pourra par exemple exprimer X en fonction d'une suite de variable de loi de Bernoulli comme c'était le cas pour la loi géométrique.)
2. Prouver que
$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}.$$
3. Paul veut 10 truites et pêche dans une rivière où $p = 1/3$. Illustrer votre simulation en représentant sur un même graphe le diagramme en bâtons de la loi de X et le diagramme en bâton de la mesure empirique d'un

n-échantillon de variable de même loi que X. (On pourra choisir $n = 1000$ et représenter les diagrammes sur l'intervalle $[10, 65]$.)

4. On s'intéresse maintenant à Y le nombre de poissons pêchés par Paul qui ne sont pas des truites. Quelle est la loi de Y ? On fixe un réel positif λ et on choisit p sous la forme $p_m = m/(m + \lambda)$. Vers quelle loi connue converge la loi de Y lorsque m tend vers $+\infty$? Illustrer cette convergence au moyen d'un graphique comparant la mesure empirique de Y pour de grandes valeurs de m et le diagramme en bâtons de la loi limite. (On pourra choisir $m = 30$, $\lambda = 5$ et $n = 1000$, et représenter les diagrammes sur l'intervalle $[0, 16]$.)

Exercice 10.28 — Acceptation entre deux lois triangulaires

L3 • corrigé, p. 202

Les suites (X_i) et (Y_i) sont indépendantes, chacune i.i.d., et $\alpha = \mathbb{P}(Y_1 \leq X_1) \in (0, 1)$. Posons $T = \inf\{i \geq 1 \,:\, Y_i \leq X_i\}$ et $Z = X_T$.

1. Donner la loi de T.
2. Supposons $f_X(x) = 2(1 - x)\mathbf{1}_{\{x\in[0,1]\}}$ et $f_Y(y) = 2y\mathbf{1}_{\{y\in[0,1]\}}$. Écrire un algorithme de simulation de Z utilisant seulement des uniformes indépendantes ; calculer α et la loi de Z.

Exercice 10.29 — Simuler plusieurs lois avec une seule uniforme

M1 • corrigé, p. 202

Soit U uniforme sur $[0, 1]$. Construire à partir de U une exponentielle de taux 1, une Bernoulli de paramètre p_1, puis une autre de paramètre $p_2 > p_1$. Peut-on rendre les deux Bernoulli indépendantes ?

Exercice 10.30 — Barrage hydroélectrique et simulation

L3 • corrigé, p. 202

On cherche à modéliser l'évolution de la quantité d'eau dans un barrage hydro-électrique en fonction du temps. Pour simplifier, on considère un modèle d'évolution temporelle discrète, l'unité de temps étant la journée. On note C la capacité maximale du barrage (l'eau reçue lorsque le barrage est plein est perdue). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on modélise :

- la quantité d'eau reçue par le barrage durant la n-ième journée (c'est-à-dire pendant la période $]n - 1, n[$) par une variable aléatoire X_n de loi lognormale $\mathcal{LN}(m_X, \sigma_X^2)$
- la demande en eau pendant la n-ième journée par une variable aléatoire Y_n de loi lognormale $\mathcal{LN}(m_Y, \sigma_Y^2)$.

Toutes les variables sont exprimées en millions de m^3. Dans tout l'exercice, on prendra $C = 10$ millions de m^3. On fera les hypothèses supplémentaires suivantes :

- On supposera que seule l'eau du barrage présente au début de la n-ième journée (c'est-à-dire à l'instant $n - 1$) peut être utilisée pour satisfaire la demande de la n-ième journée.
- On supposera que l'ensemble des variables aléatoires X_n et Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$ constitue une famille de variables aléatoires indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la quantité d'eau dans le barrage au début de la $(n + 1)$-ième journée (c'est-à-dire à l'instant n).
Rappel : Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Une variable aléatoire U suit la loi lognormale $\mathcal{LN}(m, \sigma^2)$ si $\log(U)$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de moyenne m et de variance σ^2. L'espérance d'une telle variable aléatoire est $\exp(m + \frac{1}{2}\sigma^2)$ et sa variance est $\exp(2m + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)$.

1. Ecrire une fonction `rlognorm.m` qui simule un n-échantillon de variables aléatoires de loi log-normale $\mathcal{LN}(m, \sigma^2)$. Pour simuler un échantillon de variables aléatoires de loi normale, vous utiliserez la fonction `randn` de Matlab : `randn`$(1, k)$ retourne un vecteur ligne contenant une réalisation d'un k-échantillon de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
   Rappel : une fonction est un fichier texte dont le nom a pour extension `.m` et qui commence par la ligne
   `function` [*res1*,...,*resn*]=*nomdelafonction*(*var1*,...,*vars*)
   suivie de lignes de commentaires décrivant la fonction puis d'une suite d'instructions définissant les valeurs des variables *res1*,...,*resn* :
   - *nomdelafonction* doit être le même que le nom du fichier (sans l'extension `.m`)

- *var1*,...,*vars* sont les paramètres d'entrée de la fonction
- *res1*,...,*resn* sont les paramètres de sortie.

2. On note W la quantité d'eau demandée en une journée, qui excède la capacité du barrage. Ecrire un programme qui simule un échantillon de taille 5000 de W, lorsque $m_Y = 0.1$ et $\sigma_Y = 1$, puis donne un intervalle de confiance pour l'espérance de W, de niveau de confiance asymptotique 95%, construit à partir de cet échantillon. Lancer ce programme une fois et noter l'intervalle de confiance obtenu.

3. Donner une expression récursive de Z_{n+1} en fonction de Z_n et des éléments des suites $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$.

4. Ecrire une fonction `niveau.m` qui retourne la quantité d'eau dans le barrage pendant les n premiers jours. Elle aura comme paramètres d'entrée : n, Z_0, C et les paramètres des lois de X_1 et de Y_1. Elle aura comme variables de sortie : le vecteur $Z = [Z_0, \dots, Z_{n-1}]$ contenant la quantité d'eau dans le barrage au début des n premières journées et le vecteur $Y = [Y_1, \dots, Y_n]$ correspondant à la demande en eau au cours des n premières journées.

5. On note T_n le nombre de jours où l'usine hydro-électrique ne peut satisfaire entièrement à la demande parmi les n premiers jours et Q_n le nombre de fois où le barrage est plein en début de journée au cours des n premiers jours. En utilisant la fonction `niveau.m`, écrire un programme qui simule trois réalisations de $n \mapsto T_n$ et de $n \mapsto Q_n$ sur l'ensemble $\{1, \dots, 10000\}$ et trace, sur une première figure les trois réalisations correspondantes de $n \mapsto \frac{T_n}{n}$ et sur une deuxième figure, les trois réalisations correspondantes de $n \mapsto \frac{Q_n}{n}$. Lancer ce programme avec $m_X = m_Y = 0.1$, $\sigma_X = 0.8$, $\sigma_Y = 1$ et $Z_0 = 5$. Qu'observe-t-on ?

6. Ecrire un programme qui, avec les mêmes valeurs des paramètres que précédemment,

- effectue 4000 simulations de $n \mapsto Z_n$ sur $\{0, \dots, 100\}$ en appelant la fonction `niveau.m` et conserve les résultats sous forme de matrices,
- représente sur une même figure la fonction de répartition empirique des 4000 réalisations de Z_2, Z_5, Z_{50} et Z_{100}.
- donne un intervalle de confiance, de niveau de confiance supérieur ou égal à 95%, pour la probabilité que le barrage soit plein le centième jour, à l'aide de ces simulations.
- donne un intervalle de confiance de niveau de confiance supérieur ou égal à 95%, pour la probabilité que l'usine ne puisse satisfaire totalement la demande le centième jour, à l'aide de ces simulations.
- donne aussi un intervalle de confiance de niveau supérieur ou égal à 95% pour l'espérance du nombre de jours où l'usine n'a pu satisfaire totalement la demande, au cours des 100 premiers jours.

Lancer une fois ce programme. Commenter vos courbes. La loi de Z_n est-elle discrète, continue ou ni l'une, ni l'autre ? Quelles informations peut-on tirer de ces courbes, en ce qui concerne le comportement asymptotique de Z_n ?

7. Relancer les programmes des questions 5 et 6 en changeant les valeurs des paramètres suivants :

a) une fois en changeant $Z_0 = 5$ en $Z_0 = 8$.

b) une fois en changeant $\sigma_Y = 1$ en $\sigma_Y = 0.6$.

Comparer vos différentes courbes et intervalles de confiance afin d'en tirer des informations sur le comportement asymptotique de Z_n, $\frac{Q_n}{n}$ et $\frac{T_n}{n}$ et de voir l'influence des valeurs des paramètres sur ces comportements asymptotiques.

Exercice 10.31 — Simulations discrètes en tableaux

L3 • corrigé, p. 203

Écrire des fonctions `bern`, `bino`, `geom`, `poiss` simulant respectivement des lois de Bernoulli, binomiale, géométrique sur $\mathbb{N}^*$ et Poisson. Les fonctions doivent accepter, après leurs paramètres de loi, zéro, un ou deux paramètres de taille : sortie scalaire, ligne de longueur m ou tableau $m \times n$. Utiliser la méthode directe pour les trois premières lois et l'inversion pour Poisson.

Exercice 10.32 — Lois discrètes et représentations empiriques

L3 • corrigé, p. 204

Tracer les diagrammes en bâtons et les fonctions de répartition des lois binomiale, géométrique et Poisson. Pour les supports infinis, choisir une fenêtre contenant une proportion prescrite de la masse. Comparer $\mathscr{B}(N, \lambda/N)$ à $\mathscr{P}(\lambda)$. Écrire ensuite les fonctions simulant un échantillon de chacune de ces lois et traçant sa loi empirique puis sa répartition empirique.

Exercice 10.33 — Illustrer loi forte et théorème central limite

L3 • corrigé, p. 205

Écrire un programme traçant les moyennes successives d'un échantillon iid, puis un programme simulant de nombreuses moyennes centrées $S_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)$ et comparant les répartitions empiriques de S_n et $\sqrt{n}S_n$ à leurs limites.

Exercice 10.34 — Répartition et histogramme de lois continues

L3 • corrigé, p. 205

Simuler un échantillon de loi normale $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne μ et de variance σ^2, tracer sa répartition empirique et un histogramme. Reprendre pour une exponentielle de taux $\lambda > 0$ en utilisant l'inversion. Discuter le choix des fonctions d'histogramme.

Exercice 10.35 — Rejet dans un disque et pour une loi bêta

L3 • corrigé, p. 206

Simuler une uniforme dans le disque unité par rejet et tracer le nuage. Pour $a, b > 0$, on considère la densité bêta $f_{a,b}(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1}/B(a,b)$ sur $(0,1)$. Déterminer les paramètres pour lesquels elle est bornée. Montrer que la première coordonnée d'un point uniforme sous son graphe a cette densité. Pour $a, b > 1$, construire un simulateur par rejet.

Exercice 10.36 — Simulation du trajet d'un bus

L3 • corrigé, p. 206

Un bus parcourt les arrêts A, B, C. Il transporte $b_0 \in \{0, \dots, 40\}$ passagers à son arrivée en A ; b_0 est un paramètre fixé du modèle. Chaque trajet entre arrêts dure $10 + 10U$ minutes avec $U \sim \mathrm{Beta}(2,1,1)$, indépendamment du reste. À chaque arrêt, le nombre de personnes attendant est de Poisson de moyenne 20, indépendamment des autres arrêts et des décisions de descente. Chaque passager descend avec probabilité 0,3, indépendamment ; on fait ensuite monter les personnes dans la limite de 40 passagers. L'arrêt dure 0,1 fois le maximum des nombres de montées et de descentes. Définir et simuler le temps entre l'arrivée en A et l'arrivée en C, puis le nombre de personnes refusées. Représenter leurs lois empiriques sur 1000 simulations. Pour les simulations, choisir $b_0 = 0$ puis $b_0 = 20$ et comparer.

Exercice 10.37 — Comparer une binomiale standardisée à la loi normale

L3 • corrigé, p. 207

Tracer la fonction de répartition de $(S - 30)/\sqrt{21}$, où $S \sim \mathscr{B}(100, 0{,}3)$, et celle de la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0,1)$. Faire varier n, p dans la binomiale standardisée et commenter.

1. Espaces de probabilités et dénombrement

Exercice 1.1 — Dés et tirages sans remise

L3 • énoncé, p. 3

On suppose les dés équilibrés, les lancers indépendants et $n \geq 3$. On prend $\Omega = \{1, \dots, 6\}^3$, muni de la probabilité uniforme. Les trois probabilités sont $3/216 = 1/72$, $1 - 6 \cdot 5 \cdot 4/216 = 4/9$ et $25/216$: pour la dernière, les solutions positives de $x + y + z = 9$ sont au nombre de $\binom{8}{2} - 3\binom{2}{2} = 25$. Même pour des dés identiques, on peut repérer les lancers ou les positions : cet espace convient. Les triplets non ordonnés ne sont en revanche pas équiprobables. Pour les jetons, chaque triplet de valeurs distinctes a masse $1/[n(n-1)(n-2)]$, les autres masse nulle. Par symétrie, Marc reçoit k avec probabilité $1/n$ et le plus grand des trois numéros avec probabilité $1/3$.

Exercice 1.2 — Sondage à réponses aléatoires

L3 • énoncé, p. 3

Notons I la population de taille N et $D \subset I$ les personnes ayant déjà consommé, avec $|D|/N = p$. On prend $\Omega = I \times \{\text{pile}, \text{face}\}$, muni de la loi uniforme : l'individu est tiré uniformément et la pièce lui est indépendante. Si A désigne la réponse oui,

$$A = (I \times \{\text{face}\}) \cup (D \times \{\text{pile}\}), \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{1+p}{2}.$$

L'événement $D \times \{\text{pile}, \text{face}\}$ est inclus dans A. Bayes donne donc $\mathbb{P}(\text{consommation} \mid A) = 2p/(1+p)$.

Exercice 1.3 — Anniversaires

L3 • énoncé, p. 3

Dans le modèle de 365 jours équiprobables et de dates indépendantes, on utilise $\{1, \dots, 365\}^r$ avec la probabilité uniforme. Pour $r \leq 365$, la probabilité recherchée vaut

$$1 - \prod_{j=0}^{r-1} \left(1 - \frac{j}{365}\right).$$

Elle vaut 1 pour $r > 365$. Le produit décroît avec r, donc la probabilité recherchée croît. Pour $r = 22$ et $r = 23$, cette probabilité vaut respectivement environ 0,4757 et 0,5073. La probabilité dépasse donc $1/2$ exactement pour $r \geq 23$.

Exercice 1.4 — Disposition de livres sur une étagère

L3 / M1 • énoncé, p. 3

1. Coder par 1 la présence d'un livre de l'auteur et par 0 les autres positions. Les mots de longueur n contenant k uns sont équiprobables : chacun provient de $k!(n-k)!$ permutations des livres distincts. Leur nombre est $\binom{n}{k}$.
2. Le bloc de k livres peut commencer en $n - k + 1$ positions, donc la probabilité vaut $(n-k+1)/\binom{n}{k}$.
3. Pour $k \leq r \leq n$, les positions favorables sont les parties de taille k de $\{1, \dots, r\}$, d'où $\binom{r}{k}/\binom{n}{k}$. Pour $r \geq n$, la probabilité est un.
4. Si ℓ livres séparent les deux extrêmes, la première position peut prendre $n - \ell - 1$ valeurs ; les $k - 2$ autres livres de l'auteur occupent des positions choisies parmi les ℓ places intermédiaires. La probabilité est donc

$$\frac{(n-\ell-1)\binom{\ell}{k-2}}{\binom{n}{k}}, \qquad k-2 \leq \ell \leq n-2.$$

   Pour $k = 2$, elle décroît avec ℓ : le cas le plus probable est $\ell = 0$. Si l'on traite aussi $k = 3$, elle est proportionnelle à $\ell(n-1-\ell)$, maximale aux entiers les plus proches de $(n-1)/2$.

Pour $k = 1$, le regroupement est automatique : sa probabilité vaut un.

Exercice 1.5 — Crible, dérangements et occupation

L3 / M1 • énoncé, p. 4

Si r des événements A_i se produisent, la somme alternée des indicatrices de leurs intersections vaut $\sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1}\binom{r}{k} = 1$ pour $r > 0$, et 0 sinon. L'intégration donne le crible ; la sommation sur un ensemble fini

donne sa version en cardinalité. Si les probabilités d'intersections dépendent seulement de k, on regroupe les $\binom{n}{k}$ termes égaux. Dans une permutation uniforme, la probabilité que k points prescrits soient fixes est $(n-k)!/n!$. Le nombre de dérangements est donc $D_n = n!\sum_{j=0}^{n}(-1)^j/j!$. Un individu retrouve son objet avec probabilité $1/n$; aucun ne le retrouve avec probabilité $D_n/n! \to e^{-1}$. Si X est le nombre de points fixes,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}\frac{D_{n-k}}{n!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!} \longrightarrow \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Pour les cannes et les chapeaux, on suppose les deux permutations uniformes indépendantes. « Chacun se trompe d'au moins un des deux objets » signifie qu'aucun individu ne retrouve les deux. Le crible donne

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{(n-k)!}{n!}\right)^2.$$

Enfin, si les m boules choisissent indépendamment une des n boîtes avec probabilité $1/n$, la probabilité que toutes les boîtes soient occupées est $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(1-k/n)^m$, par crible sur les boîtes vides.

Le développement utilisé au départ est $\prod_i(1+b_i) = 1+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1<\cdots<i_k} b_{i_1}\cdots b_{i_k}$. On choisit, dans chaque facteur, soit 1, soit b_i. Pour les boîtes, une boîte donnée est vide avec probabilité $a = (1-1/n)^m$. Le nombre V de boîtes vides a pour espérance na. Pour $n \geq 2$, deux boîtes fixées sont vides avec probabilité $b = (1-2/n)^m$, donc $\operatorname{Var} V = na(1-a) + n(n-1)(b-a^2)$. Pour $n = 1$, $V = 0$. Le crible appliqué aux lettres absentes donne $4^p - 4\cdot 3^p + 6\cdot 2^p - 4$ mots contenant les quatre lettres. Enfin, la probabilité que les voyageurs soient tous séparés vaut $n!\prod_i p_i$. L'inégalité arithmético-géométrique la majore par $n!/n^n$, avec égalité exactement lorsque tous les p_i valent $1/n$.

Exercice 1.6 — Deux enfants : préciser le conditionnement

L3 / M1 • énoncé, p. 4

1. Les quatre couples ordonnés de sexes ont chacun probabilité $1/4$. Parmi les trois comportant au moins un garçon, un seul comporte deux garçons : la probabilité est $1/3$. Parmi les trois comportant au moins une fille, deux comportent aussi un garçon : la probabilité est $2/3$.
2. L'indépendance donne $1/2$.
3. Conditionnellement à $N = i$, la probabilité de n'avoir aucune fille est 2^{-i}. Par la formule de Bayes et celle des probabilités totales, la probabilité cherchée vaut

$$\frac{p_1/2}{\sum_{i=0}^{\infty} p_i 2^{-i}}.$$

Le dénominateur est strictement positif. Une famille sans enfant n'a aucune fille : le terme p_0 doit donc être conservé. Si l'on conditionne aussi par $N \geq 1$, il faut le retirer du dénominateur.

Exercice 1.7 — Sexes des enfants et indépendance

L3 • énoncé, p. 4

Dans l'espace uniforme $\{0,1\}^n$, on a $\mathbb{P}(M) = 1-2^{1-n}$, $\mathbb{P}(F) = (n+1)/2^n$ et $\mathbb{P}(M\cap F) = n/2^n$: l'intersection correspond exactement à une fille. L'indépendance équivaut donc à

$$n = (n+1)(1-2^{1-n}), \qquad \text{soit} \qquad 2^{n-1} = n+1.$$

Pour $n \geq 2$, la fonction $2^{n-1} - n - 1$ est strictement croissante (sa différence entre deux entiers successifs est $2^{n-1} - 1 > 0$) et s'annule en $n = 3$. Les deux événements sont donc indépendants exactement pour trois enfants.

Exercice 1.8 — Témoignages et formule de Bayes

L3 • énoncé, p. 5

Par hypothèse, les réponses des deux témoins sont indépendantes conditionnellement à la réalisation ou à la non-réalisation de l'événement H. On peut prendre $\Omega = \{0,1\}^3$, dont les coordonnées sont $\mathbf{1}_H$ et les deux réponses, avec les probabilités conditionnelles spécifiées. Si F_i est l'événement « le témoin i se trompe », alors $\mathbb{P}(F_i) = aq + (1-a)p$ et

$$\mathbb{P}(F_1\cap F_2) - \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = a(1-a)(p-q)^2.$$

Les erreurs sont donc indépendantes exactement si $p = q$. Bayes donne

$$\mathbb{P}(H \mid \text{deux oui}) = \frac{a(1-q)^2}{a(1-q)^2 + (1-a)p^2}, \qquad \mathbb{P}(H \mid \text{au moins un oui}) = \frac{a(1-q^2)}{a(1-q^2) + (1-a)(2p-p^2)}.$$

Exercice 1.9 — Divisibilité et indicatrice d'Euler

L3 • énoncé, p. 5

On munit $\{1,\dots,n\}$ de la loi uniforme et on définit A_k par la divisibilité par k. Si $k \mid n$, il y a n/k multiples de k, donc $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$. Pour toute sous-famille de nombres premiers distincts divisant n, leur produit q divise aussi n, et l'intersection des événements correspond à la divisibilité par q. Ainsi

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_{p_j}\Big) = \frac{1}{\prod_{j\in J} p_j} = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_{p_j}).$$

C'est l'indépendance de la famille. Le fait arithmétique utilisé est : si p et q sont premiers entre eux et $p \mid aq$, alors $p \mid a$.

Exercice 1.10 — Parties de dés successives

L3 • énoncé, p. 5

On suppose les dés équilibrés et tous les lancers indépendants. Une partie se modélise sur $\{1,\dots,6\}^2$ muni de la loi uniforme, les coordonnées suivant l'ordre des lancers. Le premier joueur gagne lorsque la seconde valeur est inférieure ou égale à la première, d'où

$$p = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} i = \frac{7}{12}.$$

Jean commence la première partie, donc $u_1 = p$. Conditionner par le gagnant précédent donne

$$u_n = p u_{n-1} + (1-p)(1-u_{n-1}), \qquad u_n - \tfrac{1}{2} = (2p-1)(u_{n-1} - \tfrac{1}{2}).$$

Par récurrence, $u_n = \frac{1}{2}[1 + (2p-1)^n] = \frac{1}{2}(1 + 6^{-n})$. Son avantage est strictement positif à tout rang fini et décroît vers zéro.

Exercice 1.11 — Paradoxe des deux lignes de bus

L3 • énoncé, p. 5

Notons $\tau \in (0, 15)$ le temps, en minutes, qui sépare le passage d'un bus de la ligne Ouest de celui du prochain bus de la ligne Est. On modélise les instants d'arrivée, mesurés depuis le dernier passage d'un bus de la ligne Ouest, par des variables T_n indépendantes et uniformes sur $[0, 15)$. La personne prend la ligne Est lorsque $T_n \le \tau$, à des événements de probabilité nulle près. La probabilité correspondante est donc $p = \tau/15$. Le nombre N de repas pris dans le quartier Est en 365 jours suit la loi $\mathcal{B}(365, p)$; ainsi

$$\mathbb{E}N = 365p, \qquad \operatorname{Var}(N) = 365p(1-p).$$

Pour $\tau = 1$, on obtient $\mathbb{E}N = 365/15 \simeq 24{,}3$ et un écart-type d'environ 4,8 repas. Un décalage d'une minute entre les deux lignes explique donc une fréquence d'environ deux repas par mois dans le quartier Est, bien que les deux lignes passent aussi souvent l'une que l'autre.

Exercice 1.12 — Statistiques d'occupation des niveaux d'énergie

L3 • énoncé, p. 5

1. Dans le modèle (i), on prend $\Omega = \{1,\dots,n\}^r$ avec la loi uniforme : chaque coordonnée donne le niveau d'une particule étiquetée. Dans le modèle (ii), on prend les vecteurs $(r_1,\dots,r_n) \in \mathbb{N}^n$ de somme r, uniformément. Ils sont au nombre de $\binom{n+r-1}{n-1}$, par la méthode des séparateurs. Dans le modèle (iii), on choisit uniformément un sous-ensemble de r niveaux parmi n, soit $\binom{n}{r}$ possibilités. Chaque espace est muni de la tribu de toutes ses parties.

2. Pour $r_1 + \cdots + r_n = r$, la masse macroscopique vaut respectivement

$$\frac{r!}{r_1!\cdots r_n!}\, n^{-r}, \qquad \binom{n+r-1}{n-1}^{-1}, \qquad \binom{n}{r}^{-1} \mathbf{1}_{\{r_i \in \{0,1\}\ \forall i\}}.$$

   Les deux derniers modèles sont uniformes sur leurs configurations admissibles, contrairement au premier en général.

3. Pour $0 \le k \le r$, la première loi est $\mathscr{B}(r, 1/n)$, donc

$$p_{r,n}(k) = \binom{r}{k} n^{-k}(1-1/n)^{r-k}.$$

Dans le modèle (ii), pour $n \ge 2$, fixer $r_1 = k$ laisse $r-k$ particules à répartir dans $n-1$ niveaux, d'où

$$p_{r,n}(k) = \frac{\binom{n+r-k-2}{n-2}}{\binom{n+r-1}{n-1}}.$$

Dans le modèle (iii), la loi est Bernoulli de paramètre r/n. Si $n = 1$, l'unique niveau contient les r particules et la loi est ponctuelle en r.

4. Pour k fixé et $r/n \to \lambda$, le premier modèle donne $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$. Dans le deuxième,

$$p_{r,n}(k) = \frac{(n-1)r(r-1)\cdots(r-k+1)}{(n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+r-k-1)} \longrightarrow \frac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}}.$$

Le troisième donne les masses $1-\lambda$ et λ en zéro et un. On reconnaît une loi de Poisson, une loi géométrique sur $\mathbb{N}$, et une loi de Bernoulli. Leurs masses somment à un, par les séries exponentielle et géométrique dans les deux premiers cas.

5. Pour le modèle (i), si A_i signifie que le niveau i est vide, l'intersection de k tels événements contient $(n-k)^r$ configurations. Le crible donne

$$\#\bigcup_i A_i = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)^r.$$

Dans le modèle (ii), les configurations sans niveau vide sont les compositions strictement positives de r en n parts, au nombre de $\binom{r-1}{n-1}$ si $r \ge n$, et zéro sinon. Le nombre demandé vaut donc

$$\binom{n+r-1}{n-1} - \binom{r-1}{n-1},$$

avec la convention que le second terme est nul pour $r < n$. Ici $r \ge 1$; si $r = 0$, toute configuration a tous ses niveaux vides.

Pour les cinq secrétaires, le complémentaire de la dernière question donne $\sum_{j=0}^{5}(-1)^j\binom{5}{j}((5-j)/5)^r$. Pour les anniversaires, les personnes jouent le rôle des particules et les jours celui des cases : le résultat est $1 - \prod_{j=0}^{r-1}(1 - j/365)$ si $r \le 365$, et 1 sinon.

Exercice 1.13 — Dénombrement de trois lancers de dés

M1 • énoncé, p. 6

On suppose les dés équilibrés et les lancers indépendants. Il y a $6^3 = 216$ résultats équiprobables. Les trois premières probabilités sont

$$1-(5/6)^3 = \frac{91}{216}, \qquad \frac{3\cdot 5^2}{6^3} = \frac{25}{72}, \qquad 1 - \frac{6\cdot 5\cdot 4}{6^3} = \frac{4}{9}.$$

Pour la dernière, l'application $(x,y,z) \mapsto (7-x, 7-y, 7-z)$ conserve la présence de faces répétées et échange la parité de la somme. La moitié des 96 résultats avec répétition ont donc une somme paire : la probabilité vaut $48/216 = 2/9$.

Exercice 1.14 — Lancer de dé avec nombre de faces aléatoire

M1 • énoncé, p. 6

On suppose les dés équilibrés, et le second lancer indépendant du premier conditionnellement au nombre de faces. Pour $1 \le \ell \le k \le 6$,

$$\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = \ell \mid X = k) = \frac{1}{6k},$$

et la masse est nulle ailleurs. La première marginale est uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$; pour $1 \le \ell \le 6$, la seconde est $\mathbb{P}(Y = \ell) = \frac{1}{6}\sum_{k=\ell}^{6} k^{-1}$.

Exercice 1.15 — Carré d'une variable et loi du chi-deux

M1 • énoncé, p. 6

Pour $t < 0$, $F_{X^2}(t) = 0$. Pour $t \geq 0$,

$$F_{X^2}(t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f(x)dx.$$

Le changement de variable sur chaque demi-axe donne la densité $[f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})]/(2\sqrt{t})$ pour $t > 0$, nulle pour $t < 0$. Sa valeur en zéro est arbitraire. Pour la normale standard, on obtient $e^{-t/2}\mathbf{1}_{\{t\in(0,\infty)\}}/\sqrt{2\pi t}$, la densité du χ^2_1.

Exercice 1.16 — Loi zêta et indépendance des diviseurs premiers

M1 • énoncé, p. 7

1. Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \dots, p_k \in \mathscr{P}$ deux à deux distincts, les entiers $p_1, \dots, p_k$ divisent tous X si et seulement si leur produit divise X, de sorte que

$$\mathbb{P}(E_{p_1} \cap \dots \cap E_{p_k}) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = mp_1 \dots p_k) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{m=1}^{\infty} (mp_1 \dots p_k)^{-s} = (p_1 \dots p_k)^{-s}.$$

En prenant $k = 1$, on obtient en particulier $\mathbb{P}(E_{p_1}) = p_1^{-s}$ et ce résultat reste bien entendu vrai pour $p_2, \dots, p_k$ à la place de p_1. Il en résulte que $\mathbb{P}(E_{p_1} \cap \dots \cap E_{p_k}) = \mathbb{P}(E_{p_1}) \dots \mathbb{P}(E_{p_k})$, si bien que les événements E_p, pour $p \in \mathscr{P}$, sont indépendants. Par conséquent, pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leq k}} \overline{E_p}\right) = \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leq k}} \mathbb{P}(\overline{E_p}) = \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leq k}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

où $\overline{E_p}$ désigne le complémentaire de E_p. Quand k tend vers l'infini, le membre de droite converge vers le produit de $1 - p^{-s}$ sur tous les entiers $p \in \mathscr{P}$, tandis que le membre de gauche tend vers la probabilité de l'événement $\bigcap_{p\in\mathscr{P}} \overline{E_p} = \{X = 1\}$, qui vaut $1/\zeta(s)$. On en déduit la formule d'Euler.

2. L'entier X est sans facteur carré si et seulement si $p^2 \nmid X$ pour tout $p \in \mathscr{P}$. De plus, on peut vérifier en procédant comme à la question précédente que les événements $\{p^2|X\}$, pour $p \in \mathscr{P}$, sont indépendants et se produisent chacun avec probabilité p^{-2s}. Ainsi, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leq k}} \{p^2 \nmid X\}\right) = \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leq k}} \mathbb{P}(p^2 \nmid X) = \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leq k}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right).$$

On conclut en faisant tendre k vers l'infini et en utilisant la formule d'Euler.

3. On a $\mathrm{pgcd}(X, Y) = n$ si et seulement si $X = na$ et $Y = nb$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, si bien que

$$\mathbb{P}(\mathrm{pgcd}(X, Y) = n) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}^*\\ \mathrm{pgcd}(a,b)=1}} \mathbb{P}(X = na \text{ et } Y = nb) = \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}^*\\ \mathrm{pgcd}(a,b)=1}} \frac{(na)^{-s}}{\zeta(s)} \frac{(nb)^{-s}}{\zeta(s)} = n^{-2s} \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}^*\\ \mathrm{pgcd}(a,b)=1}} \frac{(ab)^{-s}}{\zeta(s)^2},$$

où on a utilisé l'indépendance des variables X et Y. Ainsi, $\mathbb{P}(\mathrm{pgcd}(X, Y) = n) = n^{-2s}\mathbb{P}(\mathrm{pgcd}(X, Y) = 1)$. Il reste donc à calculer la probabilité que les entiers X et Y soient premiers entre eux. Cela se produit quand aucun des événements $F_p = \{p|X \text{ et } p|Y\}$, pour $p \in \mathscr{P}$, n'est réalisé. En procédant comme à la première question, on peut montrer que ces événements sont indépendants et que $\mathbb{P}(F_p) = 1/p^{2s}$, par indépendance de X et Y. D'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{pgcd}(X, Y) = 1) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathscr{P}} \overline{F_p}\right) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \mathbb{P}(\overline{F_p}) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \frac{1}{\zeta(2s)},$$

où on a utilisé la formule d'Euler. On en déduit que $\mathrm{pgcd}(X, Y) = n$ avec probabilité $n^{-2s}/\zeta(2s)$.

Exercice 1.17 — La densité naturelle ne définit pas une tribu

M1 • énoncé, p. 7

Chaque singleton de $\mathbb{N}$ a une densité nulle. Si la collection considérée était une tribu, elle contiendrait donc toute partie de $\mathbb{N}$, par réunion dénombrable de singletons. Or l'ensemble

$$A = \bigcup_{k\geq 1} \{(2k)!, \dots, (2k+1)!\}$$

n'a pas de densité. Au rang $n_k = (2k+1)!$, la proportion est au moins $1 - (2k)!/(2k+1)! \to 1$. Au rang $m_k = (2k+2)! - 1$, tous ses éléments déjà comptés sont au plus $(2k+1)!$, donc la proportion est au plus $[(2k+1)!+1]/m_k \to 0$. La limite n'existe pas.

Exercice 1.18 — Formules de Bayes et probabilités totales

M1 • énoncé, p. 7

1. Les deux expressions de $\mathbb{P}(A \cap B)$ donnent la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

2. Les événements $A \cap C_i$ sont disjoints et leur union est A. Par additivité dénombrable,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(A \mid C_i)\mathbb{P}(C_i), \qquad \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(A \mid C_i)\mathbb{P}(C_i)}.$$

Le dénominateur est strictement positif par hypothèse. Si certains C_i ont une probabilité nulle, on les omet de la somme.

Exercice 1.19 — Indépendance de familles et tribus engendrées

M1 • énoncé, p. 7

Il suffit de poser $A = \{1,3\}$, $B = \{2,3\}$ et $C = \{3,4\}$, puis de prendre $G_1 = \{A, B\}$ et $G_2 = \{C\}$. La condition (i) est alors clairement vérifiée. En effet, les événements A et C sont indépendants, puisque

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C),$$

de même que les événements B et C, puisque

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

La condition (ii) est également vérifiée : les tribus engendrées par G_1 et G_2, qui sont respectivement égales à $\mathscr{F}$ et $\{\varnothing, \Omega, C, \overline{C}\}$, ne sont pas indépendantes, car par exemple les événements C et $\{1\}$ ne le sont pas, vu que $\mathbb{P}(C \cap \{1\}) = 0 \neq \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(\{1\})$.

Exercice 1.20 — Urne où les boules blanches deviennent rouges

L3 • énoncé, p. 7

Après k blanches tirées, il y a $r+k$ rouges, donc la probabilité conditionnelle vaut $(r+k)/a$. Ainsi $\mathbb{P}(R_1) = r/a$ et $\mathbb{P}(R_2) = r/a + b/a^2$. Comme il y a eu $n - S_n$ blanches, la formule de la troisième question suit par conditionnement. Écrivons $u_n = \mathbb{P}(R_n)$, $s_n = \mathbb{E}S_n$. Alors $s_{n+1} = s_n + (r+n-s_n)/a$ et $u_{n+2} = (1-1/a)u_{n+1} + 1/a$. Avec $u_1 = r/a$, on obtient

$$u_n = 1 - \frac{b}{a}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n-1}.$$

Enfin, pour $1 \leq k \leq b+1$, il faut $k-1$ blanches puis une rouge, donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{b(b-1)\cdots(b-k+2)}{a^{k-1}} \frac{r+k-1}{a}.$$

Le produit vide vaut 1 ; toutes les autres masses sont nulles.

Exercice 1.21 — Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

L3 • énoncé, p. 8

Deux égalités distinctes portant sur des paires disjointes sont indépendantes. Si elles partagent un indice, l'intersection exige trois résultats égaux, de probabilité $6/6^3 = 1/36 = (1/6)^2$. Ainsi la famille est deux à deux indépendante. Pour $n \geq 3$, $A_{12} \cap A_{23} \subset A_{13}$: l'intersection triple a probabilité $1/36$, différente de $1/216$. Pas d'indépendance mutuelle ; pour $n \leq 2$ la question est triviale.

Exercice 1.22 — Deux victoires consécutives au tennis

L3 • énoncé, p. 8

Pour la séquence mère-père-mère, la probabilité de gagner les parties 1, 2 ou 2, 3 est $pq + pq - pq^2 = pq(2-q)$. Pour père-mère-père elle vaut $pq(2-p)$. La différence en faveur de cette seconde stratégie est $pq(q-p) \geq 0$: il faut commencer contre le père, pour placer l'adversaire le moins difficile au milieu. Si $p = 0$, les deux stratégies donnent zéro.

Exercice 1.23 — Décodage de deux canaux bruités

L3 • énoncé, p. 8

Un canal reçoit 0 avec probabilité $f(1-a) + (1-f)b = 0{,}602$ et son taux d'erreur est $fa + (1-f)b = 0{,}014$. Pour une paire (r_1, r_2), comparer les vraisemblances pondérées par $f, 1-f$. Pour 00, choisir 0, avec erreur $b^2(1-f)/[(1-a)^2 f + b^2(1-f)] \simeq 0{,}0002720$. Pour 11, choisir 1, avec erreur $a^2 f/[a^2 f + (1-b)^2(1-f)] \simeq 0{,}0001562$. Pour 01 ou 10, la probabilité que la source ait émis 0 vaut

$$\frac{a(1-a)f}{a(1-a)f + b(1-b)(1-f)} = \frac{0{,}00594}{0{,}01378} \simeq 0{,}431059.$$

On choisit donc 1, avec cette probabilité d'erreur. Le taux global est $(1-f)b^2 + f[1-(1-a)^2] = 0{,}01210$. Enfin $\mathbb{P}(R_1 = 0, R_2 = 0) = (1-a)^2 f + b^2(1-f) = 0{,}58822 \neq 0{,}602^2$. Leur covariance indicatrice est $f(1-f)(1-a-b)^2$: l'indépendance conditionnelle ne donne pas l'indépendance non conditionnelle.

Exercice 1.24 — Tribu engendrée par une variable

L3 • énoncé, p. 8

L'image réciproque commute aux complémentaires et aux réunions dénombrables et $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$. La famille annoncée est donc une tribu, et X y est mesurable par définition. Toute tribu rendant X mesurable doit contenir chaque $X^{-1}(B)$; elle contient donc cette famille entière.

Exercice 1.25 — Dénombrement, lois et inégalités

L3 • énoncé, p. 8

1. Sur $\{1, \dots, 6\}^5$ uniforme, le nombre de résultats favorables est $5!/(2!2!) = 30$, d'où $30/6^5 = 5/1296$.
2. Étiqueter les six boules. Il y a $6!$ permutations et $3!(2!)^3$ favorables, d'où $1/15$.
3. Pour U, V uniformes indépendantes, $\mathbb{P}(\min(U,V) < 10) = 1-(90/100)^2 = 19/100$. L'aire de $\{\min < 10, |U-V| > 60\}$ vaut $2\int_0^{10}(40-u)du = 700$, donc la probabilité conditionnelle vaut $(7/100)/(19/100) = 7/19$.
4. Par symétrie et intégration, la densité de $|X-Y|$ sur $z > 0$ est $2\int_0^\infty t^{-2}e^{-(2y+z)/t}dy = t^{-1}e^{-z/t}$.
5. Cauchy–Schwarz donne $\mathbb{E}|X| \leq (\mathbb{E}X^2)^{1/2}$. Chebyshev donne $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq u) \leq \operatorname{Var} X/u^2$; ici $\mathbb{P}(X \geq 100) \leq 100/90^2 = 1/81$.
6. Les trois événements « exactement trois incidents pour le coursier i » sont disjoints : la probabilité vaut $3\binom{5}{3}(1/3)^3(2/3)^2 = 120/243 = 40/81$.

Exercice 1.26 — Tirage uniforme et construction par pile ou face

L3 • énoncé, p. 8

L'uniformité signifie que chaque élément de la population a la même probabilité d'être choisi. Pour les cartes, on cherche à rendre les positions indiscernables au tirage et à mélanger sans favoriser certaines cartes. Pour les personnes, il faut d'abord une liste sans omission ni doublon, puis tirer un indice uniforme. Un recrutement de volontaires ne réalise pas ce modèle. Pour tirer dans $\{1, \dots, N\}$, prendre $k = \lceil \log_2 N \rceil$ lancers indépendants équitables et lire leur écriture binaire $J \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$. Si $J < N$, retourner $J + 1$; sinon recommencer. Les valeurs acceptées sont équiprobables et la probabilité d'acceptation est $N/2^k > 1/2$ si $N > 1$. La terminaison est p.s. Pour $N = 1$, retourner directement 1. Des répétitions permettent de comparer les fréquences à l'uniforme ; elles peuvent révéler un biais mais ne prouvent pas l'uniformité exacte du mécanisme.

Exercice 1.27 — Traduire les événements en ensembles

L3 • énoncé, p. 8

Poser $N = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C$. Les deux premiers événements sont $A \cap B^c \cap C^c$ et $A \cap C \cap B^c$, de complémentaires $A^c \cup B \cup C$ et $A^c \cup C^c \cup B$. Les suivants sont $\{N = 3\}$, $\{N \geq 1\}$, $\{N \geq 2\}$, $\{N \leq 1\}$, $\{N = 0\}$, $\{N = 2\}$ et $\{N \leq 2\}$. Leurs complémentaires s'obtiennent en prenant, respectivement, $N \leq 2$, $N = 0$, $N \leq 1$, $N \geq 2$, $N \geq 1$, $N \in \{0, 1, 3\}$ et $N = 3$. En ensembles, $\{N \geq 2\} = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $\{N = 2\}$ est cette réunion privée de $A \cap B \cap C$.

Exercice 1.28 — Opérations ensemblistes et additivité

L3 • énoncé, p. 8

L'appartenance à la première expression signifie « appartenir à au moins un A_i et à B », ce qui équivaut à appartenir à au moins un $A_i \cap B$. Ne pas appartenir à tous les A_i signifie manquer au moins l'un d'eux : $(\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i A_i^c$; l'autre identité s'obtient par complémentation. Par exemple, « avoir un ticket rouge ou bleu et gagner » se décompose selon la couleur du ticket. Pour des ensembles disjoints A_i et des masses $p_\omega \geq 0$, l'interversion des sommes positives donne $\mathbb{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \sum_{\omega \in A_i} p_\omega = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$. Enfin,

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

On l'obtient en appliquant deux fois la formule pour deux événements, ou en vérifiant l'identité d'indicatrices correspondante.

Exercice 1.29 — Relations entre combinaisons de poker

L3 • énoncé, p. 9

Si « contenir » signifie au moins deux, respectivement trois cartes de même rang, le brelan est inclus dans la paire ; une suite n'a aucun rang répété, donc est disjointe de la paire. Une main d'une seule enseigne n'a pas de rang répété non plus ; son intersection avec une suite est une quinte flush. Si les mots désignent les catégories exactes du poker, les catégories paire, brelan, suite et couleur sont au contraire disjointes par convention, sauf si l'on choisit d'inclure les quintes flush dans les deux dernières. Cette convention doit être fixée. Avec les événements inclusifs suite et enseigne unique, il y a 10 suites de rangs autorisées (as bas ou haut), $10 \cdot 4^5$ suites, $4\binom{13}{5}$ couleurs et 40 quintes flush, sur $\binom{52}{5}$ mains. Ainsi $\mathbb{P}(\text{suite} \mid \text{couleur}) = 10/\binom{13}{5}$, différente de $10 \cdot 4^5/\binom{52}{5}$: il n'y a pas indépendance.

Exercice 1.30 — Probabilités produits et épreuves répétées

L3 • énoncé, p. 9

La positivité est immédiate, et les sommes successives donnent $\sum_{x_1,\dots,x_n} \prod_i p_i(x_i) = \prod_i \sum_{x_i} p_i(x_i) = 1$. Pour deux facteurs, $C_1 = A_1 \times \Omega_2$, $C_2 = \Omega_1 \times A_2$ et $C_1 \cap C_2 = A_1 \times A_2$, donc $\mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2)$. Le produit modélise des expériences indépendantes ; des marginales données seules ne justifient pas ce choix. Si les masses sont uniformes sur des ensembles finis, chaque tuple a masse $1/\prod_i |\Omega_i|$. Le dernier modèle est celui de n Bernoulli indépendantes de paramètre q ; la somme de ses masses vaut $(q + 1 - q)^n = 1$, avec la convention usuelle pour les cas $q = 0, 1$.

Exercice 1.31 — Association et probabilités conditionnelles

L3 • énoncé, p. 9

Les deux premières inégalités équivalent à $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. La troisième, après multiplication par $1 - \mathbb{P}(B)$, équivaut à $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B))$, donc à la même condition. La condition $\mathbb{P}(A) > 0$, est nécessaire pour définir $\mathbb{P}(B \mid A)$. Les inégalités inverses décrivent une association positive. Dans un exemple construit, tirer uniformément un entier de 1 à 10 et poser $A = \{X \geq 8\}$, $B = \{X \geq 6\}$ donne $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$ sans qu'un événement cause l'autre : ils décrivent le même tirage. Plus généralement, un facteur commun peut produire une association. Une relation causale ne résulte pas de la seule comparaison de probabilités conditionnelles.

Exercice 1.32 — Origine d'une ampoule défectueuse

L3 • énoncé, p. 9

On peut prendre comme espace les ampoules produites, toutes de même masse. Alors $\mathbb{P}(A) = 2/3$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$ et, pour le défaut D, $\mathbb{P}(D) = \frac{2}{3}\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\frac{1}{20} = 3/20$. La probabilité d'une ampoule correcte vaut $17/20$. Bayes donne $\mathbb{P}(A \mid D) = (2/15)/(3/20) = 8/9$.

Exercice 1.33 — Recherche infructueuse d'une lettre

L3 • énoncé, p. 9

Si E est l'échec de la recherche en pile 1, ses probabilités conditionnelles sachant les positions $1, 2, 3$ sont $a_1, 1, 1$. Donc $\mathbb{P}(E) = (a_1 + 2)/3$ et Bayes donne les probabilités $a_1/(a_1+2)$, $1/(a_1+2)$, $1/(a_1+2)$. Les paramètres a_2, a_3 n'interviennent pas puisque ces piles n'ont pas encore été examinées.

Exercice 1.34 — Vrai ou faux : indépendance d'événements

L3 • énoncé, p. 9

La première assertion est vraie : $0 = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. La deuxième est fausse pour la disjonction ensembliste : un singleton de mesure nulle peut appartenir à Ω ; l'indépendance, elle, est vraie. La troisième est vraie par la formule des probabilités totales ; les deux valeurs conditionnelles communes sont alors $\mathbb{P}(A)$. La dernière est fausse : sur $\{00, 01, 10, 11\}$ uniforme, prendre $E =$ « bits égaux », $F =$ « premier bit nul », $G =$ « second bit nul ». On a $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E \cap G) = 1/4$, mais $\mathbb{P}(E \cap (F \cup G)) = 1/4 \neq (1/2)(3/4)$.

Exercice 1.35 — Rois et as dans une main de cinq cartes

L3 • énoncé, p. 9

Le dénominateur est $D = \binom{52}{5}$. Les quatre as imposent le choix de la cinquième carte parmi 48, d'où $48/D$. Exactement deux rois donnent $\binom{4}{2}\binom{48}{3}/D$. La probabilité conditionnelle de trois rois sachant au moins deux vaut

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{48}{2}}{\binom{4}{2}\binom{48}{3} + \binom{4}{3}\binom{48}{2} + \binom{4}{4}\binom{48}{1}}.$$

Si « paire de rois » signifie la catégorie exacte une paire, les trois autres cartes doivent avoir des rangs distincts non rois : le numérateur devient $\binom{4}{2}\binom{12}{3}4^3$. Pour un brelan de rois excluant le full, le numérateur est $\binom{4}{3}\binom{12}{2}4^2$.

Exercice 1.36 — Deux six et deux trois

L3 • énoncé, p. 9

Il y a $\binom{4}{2} = 6$ choix des positions des six sur 6^4 résultats équiprobables, donc la probabilité vaut $6/6^4 = 1/216$.

Exercice 1.37 — Indépendance et variables constantes

L3 / M1 • énoncé, p. 9

Si X est indépendante d'elle-même, pour tout borélien B, on a $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X \in B)^2$. Sa fonction de répartition ne prend donc que les valeurs 0 et 1. Ses limites en $\pm\infty$ et sa continuité à droite montrent qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$. Réciproquement, toute variable presque sûrement constante est indépendante d'elle-même.

Exercice 1.38 — Deux tirages sans remise

L3 • énoncé, p. 9

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \frac{\mathbf{1}_{\{i \neq j\}}}{n(n-1)}.$$

En sommant sur une coordonnée, on obtient les deux lois uniformes sur $\{1, \dots, n\}$. Les variables ne sont pas indépendantes, puisque $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 0$. Pour tout entier s, posons $a_s = \max(1, s-n)$ et $b_s = \min(n, s-1)$. Alors

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = s) = \frac{(b_s - a_s + 1)_+ - \mathbf{1}_{\{s \text{ pair},\ 2 \leq s \leq 2n\}}}{n(n-1)}.$$

En effet, on compte les couples $(i, s-i)$ admissibles, puis on retire le couple diagonal lorsqu'il existe.

Exercice 1.39 — Indépendance et regroupement des événements

L3 • énoncé, p. 10

La loi jointe des X_j est le produit des lois marginales. En sommant l'égalité correspondante sur une coordonnée, puis en recommençant, on obtient pour toute partie J de $\{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} \{X_j = x_j\}\Big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j = x_j).$$

C'est l'indépendance des événements. Pour $K \subset \{1, \dots, p\}$, les ensembles I_k étant disjoints,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k \in K} B_k\Big) = \prod_{i \in \bigcup_{k \in K} I_k} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{k \in K} \mathbb{P}(B_k),$$

ce qui donne le second résultat.

Exercice 1.40 — Tribus boréliennes et probabilités à densité

L3 • énoncé, p. 10

1. L'intersection contient Ω. Si un ensemble appartient à toutes les tribus, son complémentaire aussi ; une réunion dénombrable d'ensembles de l'intersection appartient également à chacune des tribus. L'intersection vide de tribus est, par convention, $\mathscr{P}(\Omega)$.
2. Chaque demi-droite fermée est borélienne. Réciproquement, $]-\infty, b[= \bigcup_{n\geq 1}]-\infty, b-1/n]$ et
$$]a,b[= (]-\infty,a])^c \cap]-\infty,b[.$$
Les intervalles ouverts sont donc dans la tribu engendrée. Pour les demi-droites ouvertes, utiliser $]-\infty,a] = \bigcap_n]-\infty, a+1/n[$. Pour les intervalles semi-ouverts, utiliser $]-\infty,a] = \bigcup_{n\geq 1}]-n,a]$, en omettant les intervalles vides.
3. On a $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$ et $\mu \geq 0$. Si les A_n sont disjoints, la convergence monotone appliquée à $f \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{A_j}$ donne $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

Exercice 1.41 — Mesurabilité des limites et des vecteurs

L3 • énoncé, p. 10

1. Un supremum dénombrable est mesurable car $\{\sup_k X_k \leq t\} = \bigcap_k \{X_k \leq t\}$. Un infimum l'est de même, par changement de signe. Donc $\limsup_n X_n = \inf_n \sup_{k\geq n} X_k$ est mesurable ; il coïncide ici avec la limite finie.
2. L'ensemble $\mathscr{T} = \{B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \,:\, X^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ est une tribu : les images réciproques préservent complémentaire et réunion dénombrable. Il contient les intervalles ouverts, donc tous les boréliens.
3. La même famille dans $\mathbb{R}^d$ contient les pavés ouverts, puisque leur image réciproque est l'intersection des images réciproques des intervalles par les coordonnées. Les pavés ouverts engendrent $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$: tout ouvert est réunion dénombrable de pavés à bornes rationnelles qui y sont contenus.

Exercice 1.42 — Partitions et identités ensemblistes

L3 • énoncé, p. 10

1. Chaque couple appartient à l'unique ensemble E_{p+q} ; ces ensembles sont non vides et deux à deux disjoints.
2. Les inclusions découlent des implications logiques « et » et « ou ». Si $E \subset F$, un point hors de F est hors de E, donc $F^c \subset E^c$. Les distributivités traduisent
$$(e \vee f) \wedge g = (e \wedge g) \vee (f \wedge g), \qquad (e \wedge f) \vee g = (e \vee g) \wedge (f \vee g).$$
Tout point de F est soit dans E, soit dans E^c, ce qui donne les deux décompositions. Enfin, ne pas être dans une union signifie n'être dans aucun des ensembles, tandis que ne pas être dans une intersection signifie être absent d'au moins l'un d'eux. Ainsi, pour toute famille,
$$(\cup_i A_i)^c = \cap_i A_i^c, \quad (\cap_i A_i)^c = \cup_i A_i^c, \quad G \cap \cup_i A_i = \cup_i (G \cap A_i), \quad G \cup \cap_i A_i = \cap_i (G \cup A_i).$$
3. Prendre $B_1 = A_1$ et $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j<i} A_j$. Chaque point est affecté à son premier indice d'apparition. Les ensembles vides sont omis si l'on exige qu'une partition ne comporte que des parties non vides.
4. Chaque $x \in E$ appartient à l'unique fibre $f^{-1}(\{f(x)\})$. Les fibres correspondant à $y \notin f(E)$ sont vides et doivent être omises avec cette convention.

Exercice 1.43 — Images réciproques et indicatrices

L3 • énoncé, p. 10

1. Un point de $f(A \cup B)$ est l'image d'un point appartenant à A ou à B, d'où l'égalité. Si un point est l'image d'un élément de $A \cap B$, il est dans les deux images, ce qui donne l'inclusion. Enfin, $x \in A$ implique $f(x) \in f(A)$. L'inclusion relative à l'intersection peut être stricte : une application constante sur deux points distincts le montre.
2. Les équivalences $f(x) \in C \cup D$, $f(x) \in C \cap D$ et $f(x) \notin C$ donnent respectivement
$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D), \quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D), \quad f^{-1}(F \setminus C) = E \setminus f^{-1}(C).$$
En fait $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(E)$.

3. On a $A \subset B$ si et seulement si $\mathbf{1}_A \le \mathbf{1}_B$ point par point. Les identités sont

$$\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A, \quad \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.$$

Sur le produit, $\mathbf{1}_{A\times B}(x,y) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(y)$. Enfin, $\mathbf{1}_C(f(x)) = \mathbf{1}_{f^{-1}(C)}(x)$.

Exercice 1.44 — Comptages et sommes d'indicatrices

L3 • énoncé, p. 10

1. Chaque match élimine exactement un joueur ; il faut éliminer $n-1$ joueurs, donc il y a $n-1$ matchs. Les exemptions n'en éliminent aucun.

2. On a $\sum_i a_i = 30$ et la moyenne est $\sum_i i a_i/30$. Plus généralement, pour un ensemble de jours observés, le dénominateur est $\sum_i a_i$.

3. Chaque point de E contribue un et les autres zéro : la somme vaut $\mathrm{Card}(E)$.

4. Pour chaque x, une seule indicatrice de la somme vaut un, celle correspondant à $a = f(x)$. La somme vaut donc exactement $f(x)$. Il faut que les valeurs soient numériques pour que cette écriture ait un sens.

Exercice 1.45 — Intervertir des sommes finies

L3 • énoncé, p. 10

Les deux sommes itérées additionnent une fois chaque terme du même ensemble fini ; l'associativité et la commutativité donnent $\sum_i \sum_j x_{ij} = \sum_j \sum_i x_{ij}$. En décrivant les ensembles d'indices, on obtient

$$S_1 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} x_{ij}, \qquad S_2 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} x_{ij}, \qquad S_3 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{\min(m,j)} x_{ij}.$$

Les domaines sont respectivement $0 \le i \le j \le n$, $i,j \ge 0$ avec $i+j \le n$, et $0 \le i \le m$, $i \le j \le n$.

Exercice 1.46 — Arrangements, combinaisons et groupes étiquetés

L3 • énoncé, p. 11

1. Les q fibres disjointes partitionnent le domaine, dont le cardinal est pq.

2. Pour $0 \le k \le n$, les choix successifs donnent $n(n-1)\cdots(n-k+1) = n!/(n-k)!$. Pour un nombre à quatre chiffres, le premier chiffre est non nul : il y a $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 4536$ possibilités. Si l'on comptait des codes autorisant un zéro initial, on obtiendrait $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$.

3. Chaque partie à k éléments a $k!$ ordres possibles, donc il y en a $\binom{n}{k} = n!/[k!(n-k)!]$. Un mot binaire est déterminé par l'ensemble des positions de ses uns, d'où le même nombre.

4. On choisit successivement les groupes : $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots = n!/(n_1!\cdots n_r!)$. Les groupes sont distingués par leur étiquette ; sans cette précision, des facteurs de symétrie supplémentaires pourraient intervenir.

Exercice 1.47 — Identités binomiales par double comptage

L3 • énoncé, p. 11

1. Dans $(a+b)^n$, les termes $a^k b^{n-k}$ proviennent du choix de k facteurs où prendre a, d'où leur coefficient $\binom{n}{k}$. Avec $a=b=1$, on obtient $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$, le nombre de parties. En comptant les parties de taille k d'une union disjointe de tailles p, q selon leur effectif dans la première partie,

$$\binom{p+q}{k} = \sum_i \binom{p}{i}\binom{q}{k-i}.$$

2. Comptons les couples (x, A) avec $x \in A$. Pour chaque $x \in \Omega$, les 2^{n-1} choix du reste de A donnent $n2^{n-1}$ si $n \ge 1$. Pour $n = 0$, la somme vaut zéro.

3. Le premier membre compte les mots selon leur nombre total de uns. Pour le second, on fixe la position $i+1$ du $(p+1)$-ième un : les i positions précédentes contiennent exactement p uns, de $\binom{i}{p}$ façons ; les $n-i$ positions suivantes sont libres, de 2^{n-i} façons. Ces cas forment une partition des mots considérés.

Exercice 1.48 — Suites croissantes et compositions faibles

L3 • énoncé, p. 11

1. Une suite strictement croissante est l'énumération unique d'une partie à k éléments : il y en a $\binom{n}{k}$. L'application $v_j = u_j + j - 1$ est une bijection des suites croissantes au sens large dans $\{1, \dots, n\}$ vers les suites strictement croissantes dans $\{1, \dots, n+k-1\}$. Son inverse est $u_j = v_j - j + 1$, d'où $\binom{n+k-1}{k}$.
2. On code $(r_1, \dots, r_k)$ par r_1 uns, un zéro séparateur, r_2 uns, etc. Il y a n uns et $k-1$ séparateurs, soit $\binom{n+k-1}{k-1}$ codes, pour $k \geq 1$.
3. Le résultat observé est $(r_1, \dots, r_b) \in \mathbb{N}^b$ de somme p, donc il y en a $\binom{p+b-1}{b-1}$. Ce dénombrement ne détermine pas une probabilité : choisir chaque boîte indépendamment pour chaque prospectus ne rend pas ces répartitions équiprobables.
4. Le développement multinomial est

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{r_1+\cdots+r_r=n} \frac{n!}{r_1! \cdots r_r!} x_1^{r_1} \cdots x_r^{r_r}.$$

Il contient $\binom{n+r-1}{r-1}$ monômes formels distincts pour $r \geq 1$, après regroupement, et r^n termes avant regroupement.

Exercice 1.49 — Parties d'un ensemble dénombrable

M1 • énoncé, p. 11

Écrivons $E = \{x_n \,:\, n \geq 1\}$, sans répétition. Si $\mathscr{P}(E) = \{A_n \,:\, n \geq 1\}$, l'ensemble $D = \{x_n \,:\, x_n \notin A_n\}$ serait égal à un A_k. On aurait alors $x_k \in D$ si et seulement si $x_k \notin D$, ce qui est impossible. Donc aucune énumération des parties de E n'existe.

Exercice 1.50 — Loi d'une variable aléatoire

M1 • énoncé, p. 11

La mesurabilité de X assure que chaque expression est définie. On a $\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}_X(A) \geq 0$. Si les A_n sont disjoints, leurs images réciproques sont disjointes et $X^{-1}(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n X^{-1}(A_n)$. La σ-additivité de $\mathbb{P}$ donne donc celle de $\mathbb{P}_X$.

Exercice 1.51 — Indépendance et événements complémentaires

M1 • énoncé, p. 11

Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, alors

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B).$$

La réciproque s'obtient en remplaçant A par A^c. Le même raisonnement s'applique à B, ce qui donne les quatre équivalences.

Exercice 1.52 — Critère fonctionnel d'indépendance

M1 • énoncé, p. 11

L'égalité pour les indicatrices est exactement la définition de l'indépendance. Fixons une indicatrice f. La classe des fonctions bornées g vérifiant l'égalité contient les constantes et les indicatrices, et est un espace vectoriel. Si $0 \leq g_n \uparrow g$ avec g bornée, la convergence monotone dans les deux membres montre que g appartient encore à la classe. Les fonctions positives bornées s'approchent par des fonctions étagées positives croissantes ; les fonctions signées s'obtiennent par différence. L'égalité vaut donc pour tout g borné. Fixons ensuite un tel g et procédons de même en f ; on utilise la convergence dominée lorsque g est signé. Réciproquement, il suffit de prendre $f = \mathbf{1}_A$ et $g = \mathbf{1}_B$.

Exercice 1.53 — Mesurabilité d'une suite de variables

M1 • énoncé, p. 11

La tribu produit est engendrée par les cylindres $\pi_n^{-1}(A)$, avec $A \in \mathscr{E}_n$. Or $X^{-1}(\pi_n^{-1}(A)) = X_n^{-1}(A) \in \mathscr{F}$. Les ensembles dont l'image réciproque est mesurable formant une tribu, X est mesurable. Réciproquement, les projections π_n sont mesurables et $X_n = \pi_n \circ X$.

Exercice 1.54 — Borne supérieure de fonctions continues

M1 • énoncé, p. 12

Pour tout réel a, on a $\{f > a\} = \bigcup_{i\in I}\{f_i > a\}$, qui est ouvert. C'est la semi-continuité inférieure. La continuité peut échouer : sur $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \min(1, n|x|)$ est continue, tandis que $\sup_n f_n = \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ est discontinue en zéro.

Exercice 1.55 — Tribu produit et ensemble de toutes les parties

M1 • énoncé, p. 12

Non. Après énumération de I, la topologie produit sur Ω possède une base dénombrable de cylindres ; sa tribu borélienne est exactement $\mathscr{F}$. Un espace à base dénombrable possède au plus $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ boréliens : les ouverts sont codés par des parties de la base, et les opérations boréliennes par des arbres dénombrables, dont il n'existe que $\mathfrak{c}$ codes. Or $|\Omega| = \mathfrak{c}$ et le théorème de Cantor donne $|\mathscr{P}(\Omega)| = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$. Il existe donc des parties de Ω qui n'appartiennent pas à la tribu produit. La dénombrabilité de l'ensemble des coordonnées ne rend pas dénombrable l'espace des configurations.

2. Lois usuelles et changements de variables

Exercice 2.1 — Sondage sans remise

L3 • énoncé, p. 13

Chaque X_i suit une Bernoulli de paramètre k/N. Pour $i \neq j$, $\mathbb{E}[X_iX_j] = k(k-1)/[N(N-1)]$; les variables ne sont pas indépendantes si $0 < k < N$ et $N > 1$. Leur covariance vaut $-k(N-k)/[N^2(N-1)]$. Le dénombrement des échantillons donne

$$\mathbb{P}(S=s) = \frac{\binom{m}{s}\binom{N-m}{k-s}}{\binom{N}{k}}, \quad \mathbb{E}S = \frac{km}{N}, \quad \operatorname{Var} S = k\frac{m}{N}\Big(1-\frac{m}{N}\Big)\frac{N-k}{N-1}.$$

Les coefficients binomiaux impossibles sont nuls. Pour k fixé, $m/N \to a$ entraîne $S \Rightarrow \mathscr{B}(k,a)$ en passant à la limite dans chacune des probabilités. La condition « k fixé » est nécessaire à cette conclusion telle qu'elle est formulée.

Aux extrémités $a = 0$ et $a = 1$, la limite est respectivement constante égale à zéro ou à k, ce qui suit aussi de l'espérance du nombre de succès ou d'échecs.

La matrice de covariance a pour coefficients diagonaux $k(N-k)/N^2$ et pour coefficients hors diagonale $-k(N-k)/(N^2(N-1))$.

Exercice 2.2 — Deux temps géométriques

L3 • énoncé, p. 13

On suppose $0 < p < 1$ et tous les lancers indépendants. Posons $q = 1-p$. Pour $k \geq 0$, $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k) = pq^k$. La question sur la simultanéité concerne la première apparition de *face*. On obtient

$$\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k\geq 0} p^2q^{2k} = \frac{p}{2-p}, \qquad \mathbb{P}(X+Y=k) = (k+1)p^2q^k.$$

Comme $\mathbb{P}(\min(X,Y) \geq k) = q^{2k}$, $\min(X,Y)$ est géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $1-q^2 = p(2-p)$.

Exercice 2.3 — Cible circulaire et deux barèmes de score

L3 • énoncé, p. 13

Un élément de $\mathscr{A}$ est un borélien de D, auquel on ajoute ou non tout D^c. Cette description est stable par complémentaire et réunion dénombrable. La probabilité est

$$\mathbb{P}(B) = (1-p)\frac{\text{aire}(B\cap D)}{100\pi} + p\mathbf{1}_{\{D^c\subset B\}}.$$

La seconde contribution est une masse sur l'atome mesurable D^c. Les probabilités géométriques sont $(1-p)t^2/100$ et $(1-p)[1-(10-t)^2/100]$. La fonction $X = (20-\sqrt{x^2+y^2})\mathbf{1}_D$ est constante sur D^c et borélienne sur D, donc $\mathscr{A}$-mesurable. Sa fonction de répartition est

$$F_X(s) = \begin{cases} 0 & s < 0, \\ p & 0 \leq s < 10, \\ p + (1-p)\big[1-(20-s)^2/100\big] & 10 \leq s < 20, \\ 1 & s \geq 20. \end{cases}$$

Il y a un atome de masse p en zéro et une partie à densité sur $(10,20)$. Enfin, conditionnellement à une réussite, le rayon a pour densité $r/50$ sur $(0,10)$, donc pour espérance $20/3$. Ainsi $\mathbb{E}X = (1-p)(20-20/3) = 40(1-p)/3$.

On représente un échec par un point isolé ∂ et une réussite par un point du disque D de rayon 10. Sur $D\cup\{\partial\}$, muni des boréliens et du singleton, on prend $\mathbb{P} = p\delta_\partial + (1-p)\,\mathrm{Leb}_{|D}/(100\pi)$. Une pénalité de dix points signifie ici un score -10. En cas de réussite, $S = 10-R$, où le rayon R a densité $r/50$ sur $(0,10)$. La loi est donc

$$\mathscr{L}(S) = p\delta_{-10} + (1-p)\frac{10-s}{50}\mathbf{1}_{\{s\in(0,10)\}}ds.$$

Comme $\mathbb{E}(R \mid \text{réussite}) = 20/3$, on obtient $\mathbb{E}S = -10p + (1-p)10/3 = (10-40p)/3$.

Exercice 2.4 — Absence de mémoire

L3 • énoncé, p. 13

1. La survie $G(k) = \mathbb{P}(X \geq k)$ vérifie $G(k+\ell) = G(k)G(\ell)$, y compris si $G(k) = 0$. Donc $G(k) = q^k$. Comme X est finie, $q < 1$, et

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-q)q^k, \qquad \mathbb{E}X = \sum_{k\geq 1} q^k = \frac{q}{1-q}.$$

Pour $q = 0$, $X = 0$ presque sûrement.

2. L'événement $\{Y_n \geq k\}$ est $\{Y \geq k2^{-n}\}$. La propriété de Y donne donc celle de Y_n, et $\mathbb{P}(Y_n \geq k) = q_n^k$.

3. On a $\{Y_n \geq 1\} = \{Y_{n+1} \geq 2\}$, donc $q_n = q_{n+1}^2$. D'une part, $q_0 < 1$ puisque Y_0 est finie. D'autre part, $q_n \to 1$, car $Y > 0$ presque sûrement ; si $q_0 = 0$, la relation précédente donnerait $q_n = 0$ pour tout n, une contradiction. Ainsi $q_n = q_0^{2^{-n}}$.

4. Les nombres $(\lfloor 2^n t\rfloor + 1)2^{-n}$ décroissent vers t en restant strictement supérieurs à t. Les événements $\{Y_n \leq \lfloor 2^n t\rfloor\}$ décroissent donc vers $\{Y \leq t\}$. Leur probabilité vaut

$$1 - q_n^{\lfloor 2^n t\rfloor + 1} \longrightarrow 1 - q_0^t = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad \lambda = -\log q_0 > 0.$$

Ainsi $Y \sim \mathscr{E}(\lambda)$ et $\mathbb{E}Y = 1/\lambda$.

5. Le quotient vaut $(1 - e^{-\lambda\varepsilon})/\varepsilon$ et tend vers λ. La durée restante, sachant que la machine fonctionne encore, a la même loi que sa durée initiale ; le taux instantané de panne ne dépend pas de son âge.

6. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $0 < z < 1$, la loi jointe de (K, Z) a pour densité, par rapport au produit de la mesure de comptage et de la mesure de Lebesgue,

$$\lambda e^{-\lambda(k+z)} = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda k}\,\frac{\lambda e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Ainsi K et Z sont indépendantes, $\mathbb{P}(K = k) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda k}$ et Z a pour densité $\lambda e^{-\lambda z}/(1 - e^{-\lambda})$ sur $(0, 1)$.

7. Cette densité converge uniformément vers 1 sur $(0, 1)$ puisque $\lambda/(1 - e^{-\lambda}) \to 1$ et $e^{-\lambda z} \to 1$ uniformément. Donc Z converge en loi vers l'uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 2.5 — Médianes et écart absolu moyen

L3 • énoncé, p. 14

1. Si $n = 2k + 1$, l'unique médiane est x_{k+1}. Si $n = 2k$, les médianes sont tous les points de $[x_k, x_{k+1}]$, puisque chacun laisse au plus la moitié de la masse strictement de chaque côté.

2. Posons $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$. Pour $a \geq m$, l'identité obtenue en intégrant la pente de $a \mapsto |x - a|$ donne, par Fubini,

$$\mathbb{E}|X - a| - \mathbb{E}|X - m| = \int_m^a (2F(t) - 1)\,dt \geq 0,$$

car $F(t) \geq F(m) \geq 1/2$. Pour $a < m$, on a $F(t) \leq F(m-) \leq 1/2$ pour $t < m$, et la même identité avec les bornes inversées donne encore une différence positive. Les valeurs aux atomes n'affectent pas l'intégrale.

3. Chaque médiane minimise la même fonction $a \mapsto \mathbb{E}|X - a|$; les valeurs minimales sont donc égales.

4. En développant autour de la moyenne,

$$\mathbb{E}(X - a)^2 = \mathrm{Var}(X) + (\mathbb{E}X - a)^2 \geq \mathrm{Var}(X).$$

5. En prenant $a = \mathbb{E}X$ dans la question 2, puis par Cauchy–Schwarz,

$$\mathbb{E}|X - m| \leq \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2} = \sigma(X).$$

Enfin, $|\mathbb{E}X - m| \leq \mathbb{E}|X - m| \leq \sigma(X)$ par l'inégalité triangulaire pour l'intégrale.

Exercice 2.6 — Inégalité de Hoeffding

L3 • énoncé, p. 14

1. a) Soit $\varepsilon > 0$ et $\theta > 0$,

$$P(\bar{Y}_n - \mu \geq \varepsilon) = P(e^{\theta \sum_{i=1}^n Y_i} \geq e^{n\theta(\mu+\varepsilon)}).$$

Appliquons l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $Z = e^{\theta \sum_{i=1}^n Y_i}$: $P(\bar{Y}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq E(e^{\theta \sum_{i=1}^n Y_i})e^{-n\theta(\mu+\varepsilon)}$.

b) Comme les variables aléatoires Y_i sont i.i.d, $E(e^{\theta \sum_{i=1}^n Y_i}) = E(\prod_{i=1}^n e^{\theta Y_i}) = E(e^{\theta Y_1})^n = \exp(n\lambda(\theta))$. On en déduit que

$$P(\bar{Y}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq e^{n(\lambda(\theta) - \theta(\mu+\varepsilon))}.$$

c) Comme Y est à valeurs dans $[0,1]$, on a $Y^2 \leq Y$. Donc, $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 \leq \mu - \mu^2 \leq 1/4$, puisque $\mathbb{E}[Y]$ est compris entre zéro et un.

d) Posons $g(\theta) = \mathbb{E}e^{\theta Y}$. Pour $|\theta| \leq M$ et $k = 0, 1, 2$, on a $|Y^k e^{\theta Y}| \leq e^M$. La dérivation sous l'espérance et la convergence dominée montrent donc que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, avec $g'(\theta) = \mathbb{E}[Ye^{\theta Y}]$ et $g''(\theta) = \mathbb{E}[Y^2 e^{\theta Y}]$. Comme $g > 0$, la fonction $\lambda = \log g$ est de classe C^2. Sous la probabilité de densité $e^{\theta Y}/g(\theta)$ par rapport à la probabilité initiale, Y reste à valeurs dans $[0,1]$. La question précédente donne alors

$$\lambda''(\theta) = \frac{\mathbb{E}[Y^2 e^{\theta Y}]}{g(\theta)} - \left(\frac{\mathbb{E}[Ye^{\theta Y}]}{g(\theta)}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Puisque $\lambda(0) = 0$ et $\lambda'(0) = \mu$, la formule de Taylor avec reste intégral donne, pour $\theta \geq 0$,

$$\lambda(\theta) = \mu\theta + \int_0^\theta (\theta - t)\lambda''(t)\, dt \leq \mu\theta + \frac{\theta^2}{8}.$$

e) On a obtenu que pour tout $\theta > 0$, $P(\bar{Y}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq \exp(n(\theta\mu + \frac{\theta^2}{8} - \theta(\mu+\varepsilon)))$. Donc, $P(\bar{Y}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq \exp(nz(\varepsilon))$ avec $z(\varepsilon) = \min(\frac{\theta^2}{8} - \theta\varepsilon,\ \theta > 0)$. Le minimum est atteint pour $\theta = 4\varepsilon$ et vaut $-2\varepsilon^2$. On en conclut que $P(\bar{Y}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq \exp(-2n\varepsilon^2)$.

f) On applique la majoration précédente aux variables aléatoires $Z_i = 1 - Y_i$: elles sont à valeurs dans $[0,1]$ et d'espérance $1 - \mu$. Comme $\bar{Z}_n - (1-\mu) \geq \varepsilon$ si et seulement si $-\bar{Y}_n + \mu \geq \varepsilon$, on a aussi pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\bar{Y}_n - \mu \leq -\varepsilon) \leq \exp(-2n\varepsilon^2)$. En utilisant ces deux inégalités, on obtient l'inégalité de Hoeffding pour $a = 0$ et $b = 1$.

2. On introduit les variables aléatoires $Y_i = \frac{X_i - a}{b-a}$ qui sont à valeurs dans $[0,1]$ et d'espérance $\mu = \frac{E(X)-a}{b-a}$. Comme $\bar{Y}_n = \frac{\bar{X}_n - a}{b-a}$, $|\bar{X}_n - E(X)| \geq \varepsilon$ si et seulement si $|\bar{Y}_n - E(Y)| \geq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Finalement, $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}X_1| \geq \varepsilon) \leq 2\exp[-2n\varepsilon^2/(b-a)^2]$ pour $a < b$. Si $a = b$, la moyenne est constante et la probabilité est nulle. Pour une fréquence $\hat{p} = S_n/n$, l'intervalle $[\hat{p} - \delta, \hat{p} + \delta] \cap [0,1]$, où $\delta = \sqrt{\log(2/\alpha)/(2n)}$, a couverture au moins $1 - \alpha$. Pour 510 succès sur 1000, il est centré en 0,51 ; au niveau 95%, il vaut environ $[0{,}467053; 0{,}552947]$ (au niveau 90%, $[0{,}471298; 0{,}548702]$). La longueur est strictement inférieure à 0,01 au niveau 90% si $n > 20000 \log 20$, soit $n \geq 59915$.

Exercice 2.7 — Loi uniforme sous le graphe d'une densité

L3 • énoncé, p. 15

On suppose ϕ mesurable et on pose $I = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx \in (0, \infty)$. La densité jointe uniforme sous le graphe est $I^{-1}\mathbf{1}_{\{0<y<\phi(x)\}}$. En intégrant en y, la densité de X est $\phi(x)/I$. L'indépendance n'est pas automatique. Si $\phi = c\mathbf{1}_A$, avec $c > 0$ et $0 < \mathrm{Leb}(A) < \infty$, la région est le rectangle $A \times (0, c)$ et les coordonnées sont indépendantes. Si $\phi = a\mathbf{1}_A + b\mathbf{1}_B$, avec A, B disjoints de mesures finies strictement positives et $0 < a < b$, l'événement $\{X \in A, Y > a\}$ est impossible, alors que ses deux marginales ont une probabilité strictement positive : il y a dépendance. Pour toute fonction borélienne positive h, l'indépendance de W, U donne

$$\mathbb{E}h(W, U\phi(W)) = \frac{1}{I}\int_{\mathbb{R}} \phi(w) \int_0^1 h(w, u\phi(w))du\, dw = \frac{1}{I}\iint_{0<y<\phi(w)} h(w,y)dy\, dw.$$

Les valeurs où $\phi(w) = 0$ ne contribuent pas. Le couple a donc la loi uniforme sur D_ϕ.

Exercice 2.8 — Tirage sans remise dans une population répartie en classes

L3 • énoncé, p. 15

Le tirage est uniforme parmi les $\binom{N}{k}$ parties de taille k. Pour des $a_i \geq 0$ de somme k,

$$\mathbb{P}(X_{N,1} = a_1, \dots, X_{N,r} = a_r) = \frac{\prod_i \binom{n_i}{a_i}}{\binom{N}{k}}.$$

Les marginales sont hypergéométriques : $\mathbb{P}(X_{N,i} = a) = \binom{n_i}{a}\binom{N-n_i}{k-a}/\binom{N}{k}$. Pour $N > 1$, la covariance des deux premières coordonnées est

$$\operatorname{Cov}(X_{N,1}, X_{N,2}) = -\frac{k(N-k)}{N-1}\frac{n_1 n_2}{N^2}.$$

Elle est strictement négative si $0 < k < N$ et les deux classes sont non vides, ce qui exclut l'indépendance. Dans les cas dégénérés $k = 0$, $k = N$ ou l'une des classes vide, les coordonnées concernées sont constantes et indépendantes. La somme des deux coordonnées est hypergéométrique avec une classe de taille $n_1 + n_2$. Pour k fixé et $n_i/N \to p_i$, le quotient de produits décroissants donne, pour chaque vecteur admissible,

$$\mathbb{P}(X_{N,1} = a_1, \dots, X_{N,r} = a_r) \longrightarrow \frac{k!}{a_1! \cdots a_r!} \prod_i p_i^{a_i}.$$

Il s'agit de la loi multinomiale $\mathscr{M}(k; p_1, \dots, p_r)$; la première marginale converge vers $\mathscr{B}(k, p_1)$.

Exercice 2.9 — Durées de vie et renouvellements exponentiels

L3 • énoncé, p. 15

On suppose les durées des piles indépendantes. La somme S_n a densité $\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}/(n-1)!$ pour $t > 0$, donc suit $\Gamma(n, \lambda)$. Le nombre de *remplacements* avant t suit $\mathscr{P}(\lambda t)$: pour $k \geq 0$, l'événement est $S_k \leq t < S_{k+1}$, de probabilité $e^{-\lambda t}(\lambda t)^k/k!$. Le nombre de piles *utilisées*, en incluant la pile initiale, vaut donc $1 + \mathscr{P}(\lambda t)$ pour $t > 0$. Avec deux piles utilisées simultanément et nécessaires au fonctionnement, la durée est le minimum de deux exponentielles indépendantes de taux a. Sa survie est e^{-2at} : c'est une exponentielle de taux $2a$.

Exercice 2.10 — Méthode de Box-Muller

L3 / M1 • énoncé, p. 15

La variable $\cos V$ a densité $\mathbf{1}_{\{x\in(-1,1)\}}/(\pi\sqrt{1-x^2})$, obtenue en additionnant les deux branches inverses du cosinus. En coordonnées polaires, $R = \sqrt{W}$ a densité $re^{-r^2/2}$ pour $r > 0$, et l'angle est uniforme indépendant. Le jacobien polaire vaut r ; ainsi

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Les marginales sont normales standard et indépendantes. Pour $T = X/Y$, le changement $(t, y) \mapsto (ty, y)$ donne

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |y| e^{-(1+t^2)y^2/2} dy = \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

C'est la loi de Cauchy standard.

Exercice 2.11 — Méthode de simulation par acceptation-rejet

L3 • énoncé, p. 16

Posons $q = \mu(D) > 0$. Pour $k \geq 1$ et tout $A \in \mathscr{E}$,

$$\mathbb{P}(T_D = k, X_{T_D} \in A) = (1-q)^{k-1}\mu(A \cap D) = q(1-q)^{k-1}\mu_{|D}(A).$$

Ainsi T_D est fini presque sûrement, de loi géométrique de succès q, et indépendant de X_{T_D}, dont la loi est $\mu_{|D}$. Sur l'événement mesurable $\{T_D = \infty\}$, de probabilité nulle, on donne à la sortie une valeur fixée $x_0 \in E$. La mesurabilité découle de $\{X_{T_D} \in A\} = \bigcup_{k\geq 1}\{T_D = k, X_k \in A\}$, en ajoutant $\{T_D = \infty\}$ lorsque $x_0 \in A$. On a $\mathbb{E}T_D = 1/q$. Si μ est uniforme sur un ensemble A de volume fini non nul et $D \subset A$ de volume positif, la loi conditionnelle est uniforme sur D. Pour simuler une densité h sur $[a, b]$, choisir $M \geq \sup h$ et tirer indépendamment (U, V) uniforme sur $[a, b] \times [0, M]$. Accepter si $V \leq h(U)$, puis retourner U ; sinon recommencer avec un nouveau couple indépendant. La loi du couple accepté est uniforme sous le graphe et sa première coordonnée a densité h. Le taux d'acceptation est $1/[M(b-a)]$ et le nombre moyen de propositions $M(b-a)$.

L'aire du domaine vaut $\int_1^e \log x\, dx = 1$. On tire dans le rectangle $(1, e) \times (0, 1)$ et on accepte sous le graphe. La probabilité d'acceptation vaut $1/(e-1)$; l'abscisse acceptée a densité $\log x \mathbf{1}_{\{x\in(1,e)\}}$.

```
function [x,y]=pointscourbe(n)
x=zeros(1,n); y=zeros(1,n); k=0;
while k<n
 u=1+(exp(1)-1)*rand; v=rand;
 if v<log(u), k=k+1; x(k)=u; y(k)=v; end
end
scatter(x,y,'.');
end
```

Pour ne retourner que les abscisses, on conserve la même boucle en supprimant le stockage des ordonnées et le tracé.

Exercice 2.12 — Lois gamma et bêta

L3 / M1 • énoncé, p. 16

Pour éviter toute ambiguïté, $\Gamma(a,b)$ désigne la loi de forme a et de *taux* b. Le changement $t = bx$ normalise la densité. L'identité $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ donne $\mathbb{E}X = a/b$ et $\operatorname{Var} X = a/b^2$. Si $X \sim \Gamma(a,\lambda)$ et $Y \sim \Gamma(c,\lambda)$ sont indépendantes, le changement $x = uv$, $y = u(1-v)$ a jacobien u sur $u > 0$, $0 < v < 1$. Sa densité se factorise en

$$\frac{\lambda^{a+c}}{\Gamma(a+c)} u^{a+c-1} e^{-\lambda u} \, \frac{\Gamma(a+c)}{\Gamma(a)\Gamma(c)} v^{a-1}(1-v)^{c-1}.$$

Ainsi $U \sim \Gamma(a+c,\lambda)$, $V \sim \mathrm{Beta}(a,c)$ et U, V sont indépendantes. Les intégrales bêta donnent $\mathbb{E}V = a/(a+c)$ et $\operatorname{Var} V = ac/[(a+c)^2(a+c+1)]$. En particulier la somme de deux exponentielles de même taux est une gamma de forme 2 et le rapport à leur somme est uniforme.

La transformée de Laplace existe pour les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathbb{E}[e^{-\operatorname{Re}(z)X}] < \infty$, car c'est exactement l'espérance du module de l'intégrande. L'indépendance et Fubini donnent $R_{X+Y}(z) = R_X(z)R_Y(z)$ sur le domaine d'intégrabilité commun. Pour $X \sim \Gamma(a,b)$, $R_X(z) = (b/(b+z))^a$ lorsque $\operatorname{Re}(z) > -b$, avec la branche continue valant 1 en zéro. Les dérivées en zéro redonnent moyenne et variance. Plus généralement, si $X_j \sim \Gamma(a_j,b)$ sont indépendantes, le produit de leurs transformées est $(b/(b+z))^{\sum_j a_j}$: leur somme suit $\Gamma(\sum_j a_j, b)$, par unicité de la transformée de Laplace. Une somme de k exponentielles de taux λ est $\Gamma(k,\lambda)$. Enfin, si $G \sim \mathcal{N}(0,1)$, le changement $x = g^2$ donne $f_{G^2}(x) = e^{-x/2}/\sqrt{2\pi x}$ pour $x > 0$, soit $\Gamma(1/2,1/2)$. La somme de k carrés indépendants suit $\Gamma(k/2,1/2) = \chi^2_k$.

Un changement d'échelle donne $cX \sim \Gamma(a,b/c)$. Entre le premier et le dixième appel, il y a neuf intervalles : la durée suit $\Gamma(9,0{,}5)$, d'espérance 18 minutes. Avec r piles, la durée totale suit $\Gamma(r,1/3)$; le risque de panne avant neuf heures est $1 - e^{-3}\sum_{j=0}^{r-1} 3^j/j!$. Il décroît avec r, vaut environ 0,083918 pour $r = 6$ et 0,033509 pour $r = 7$. Il faut sept piles.

Exercice 2.13 — Trois clients et deux guichets

L3 • énoncé, p. 16

Posons $A = \min(X,Y)$. Il suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(2a)$ de taux $2a$. Par absence de mémoire, après ce premier départ, le temps résiduel R de l'autre client et le service Z de Marc sont indépendants, de loi exponentielle $\mathscr{E}(a)$ de taux a, et indépendants de A. Marc ne part pas le dernier si $Z < R$, de probabilité $1/2$. Son temps de présence $T = A + Z$ a densité $2a(e^{-at} - e^{-2at})\mathbf{1}_{\{t>0\}}$, fonction de répartition $(1-e^{-at})^2$ et espérance $3/(2a)$. Le temps total $W = A + \max(R,Z)$ a pour fonction de répartition, pour $t \geq 0$,

$$\int_0^t 2ae^{-2au}(1-e^{-a(t-u)})^2 du = 1 - 4e^{-at} + (3+2at)e^{-2at}.$$

Exercice 2.14 — Points uniformes, statistiques d'ordre et espacements

L3 • énoncé, p. 17

1. a) Pour $k_1 + \cdots + k_r = n$, avec $k_i \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} r^{-n}.$$

En effet, il y a $n!/(k_1! \cdots k_r!)$ affectations des n points aux intervalles et chacune a probabilité r^{-n}. C'est la loi multinomiale $\mathscr{M}(n; 1/r, \ldots, 1/r)$.

b) Écrivons $X_i = \sum_{\ell=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_\ell \in I_i\}}$. Les termes portant sur des indices ℓ distincts sont indépendants. Pour un même indice, les indicatrices de deux intervalles distincts ont produit nul. Donc

$$\operatorname{Var}(X_i) = \frac{n}{r}\Big(1 - \frac{1}{r}\Big), \qquad \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{n}{r^2} \quad (i \neq j).$$

c) Fixons k et des entiers $j_1, \dots, j_k \geq 0$, et posons $s = \sum_i j_i$. Pour $r > k$ et $n \geq s$,

$$\mathbb{P}(X_1 = j_1, \dots, X_k = j_k) = \frac{n!}{(n-s)!\, j_1! \cdots j_k!}\, r^{-s}(1 - k/r)^{n-s}.$$

Cette quantité tend vers $e^{-ka}a^s/(j_1! \cdots j_k!)$. Ces masses limites somment à un : le vecteur converge en loi vers k variables indépendantes de loi $\mathscr{P}(a)$. Le nombre k est fixé ; on ne prétend pas approcher en variation totale le vecteur entier, dont la somme reste exactement n.

2. a) Pour $i \neq j$, le couple (U_i, U_j) possède une densité et la diagonale est de mesure nulle. Donc $\mathbb{P}(U_i = U_j) = 0$. Une union finie donne le résultat.

b) On classe les couples (U_i, i) dans l'ordre lexicographique : la seconde coordonnée départage les égalités. Cela définit une unique permutation σ. L'événement $\{\sigma = s\}$ s'écrit à l'aide d'un nombre fini de comparaisons mesurables, donc σ est mesurable. Enfin,

$$U_{(j)} = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \mathbf{1}_{\{\sigma = s\}} U_{s(j)}$$

est mesurable. Cette définition vaut aussi sur l'événement négligeable des égalités.

c) Par symétrie de la loi produit et absence d'égalités, les $n!$ ordres stricts sont équiprobables. Donc σ est uniforme sur $\mathfrak{S}_n$.

d) Pour toute fonction mesurable positive h, la partition selon ces ordres et une permutation des coordonnées donnent

$$\mathbb{E}h(U_{(1)}, \dots, U_{(n)}) = n! \int_{0<u_1<\cdots<u_n<1} h(u_1, \dots, u_n)\, du_1 \cdots du_n.$$

On obtient la densité annoncée ; modifier les frontières ne change pas la loi.

e) En intégrant les $i-1$ coordonnées avant x et les $n-i$ coordonnées après x, on obtient

$$f_{U_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i} \mathbf{1}_{\{x \in (0,1)\}}.$$

C'est la loi bêta $\mathrm{B}(i, n-i+1)$.

f) Pour $2 \leq i \leq n$, la densité du couple $(U_{(i-1)}, U_{(i)})$ est

$$\frac{n!}{(i-2)!(n-i)!} x^{i-2}(1-y)^{n-i} \mathbf{1}_{\{0<x<y<1\}}.$$

Le changement de variables $v = y - x$ donne, pour $0 < v < 1$,

$$f_{V_i}(v) = \frac{n!}{(i-2)!(n-i)!} \int_0^{1-v} x^{i-2}(1-v-x)^{n-i}\, dx = n(1-v)^{n-1}.$$

La dernière égalité découle du changement $x = (1-v)t$ et de l'intégrale bêta. Ainsi tous les espacements considérés suivent $\mathrm{B}(1, n)$; cela ne signifie pas qu'ils sont indépendants.

Exercice 2.15 — Nombre de filles dans une famille

M1 • énoncé, p. 17

Conditionnellement à $X = n$, $Y \sim \mathscr{B}(n, 1/2)$. Sa fonction génératrice vaut

$$\mathbb{E}[s^Y] = \frac{p(1+s)}{2 - q(1+s)}, \qquad q = 1 - p.$$

En développant la série géométrique, $\mathbb{P}(Y = 0) = p/(1+p)$ et, pour $k \geq 1$, $\mathbb{P}(Y = k) = 2pq^{k-1}/(1+p)^{k+1}$. Ces masses somment bien à 1.

Exercice 2.16 — Minimum et écart de deux exponentielles

M1 • énoncé, p. 17

Les deux ordres $X < Y$ et $Y < X$ donnent ensemble, par le changement $x = u$, $y = u + v$, la densité $2\alpha^2 e^{-\alpha(2u+v)}\mathbf{1}_{\{u>0,v>0\}}$. Elle se factorise en $(2\alpha e^{-2\alpha u})(\alpha e^{-\alpha v})$. Ainsi m et $M - m$ sont indépendantes, de lois exponentielles $\mathscr{E}(2\alpha)$ et $\mathscr{E}(\alpha)$ de taux respectifs 2α et α.

Exercice 2.17 — Symétrie, signe et indépendance

M1 • énoncé, p. 17

La loi de εX est $p\mathscr{L}(X) + (1-p)\mathscr{L}(-X) = \mathscr{L}(X)$. Pour la covariance, on suppose X de carré intégrable. Alors $\mathbb{E}X = 0$ et $\mathrm{Cov}(X, \varepsilon X) = (2p-1)\mathbb{E}X^2$: elle est nulle si $p = 1/2$, ou si $X = 0$ presque sûrement. Posons $r = \mathbb{P}(X = 0)$. Le signe Y a masses $(1-r)/2, r, (1-r)/2$ en $-1, 0, 1$, et $XY = |X|$. Si $\mathbb{E}|X| < \infty$, $\mathrm{Cov}(|X|, Y) = \mathbb{E}X = 0$. La symétrie implique l'indépendance du signe et du module si $r = 0$. Si $0 < r < 1$, ils ne sont pas indépendants puisque $\{Y = 0\} = \{|X| = 0\}$ a probabilité strictement entre zéro et un. Si $r = 1$, ils sont tous deux constants, donc indépendants.

Exercice 2.18 — Somme et mélange de lois uniformes

L3 • énoncé, p. 17

La convolution donne $f_Z(z) = z\mathbf{1}_{\{0<z<1\}} + (2-z)\mathbf{1}_{\{1\le z<2\}}$. Sa fonction de répartition vaut 0 pour $z \le 0$, $z^2/2$ pour $0 < z \le 1$, $1 - (2-z)^2/2$ pour $1 < z < 2$, et 1 au-delà. En conditionnant par ε, $\mathscr{L}(T) = \frac{1}{2}\mathscr{L}(X) + \frac{1}{2}\mathscr{L}(Z)$. Ainsi $f_T(t) = (1+t)/2$ sur $(0,1)$, $(2-t)/2$ sur $(1,2)$, et zéro ailleurs. Sa fonction de répartition vaut $t/2 + t^2/4$ sur $[0,1]$ puis $1 - (2-t)^2/4$ sur $[1,2]$, avec les prolongements 0 et 1.

Exercice 2.19 — Loi uniforme sur un disque

L3 • énoncé, p. 17

La densité jointe est $\pi^{-1}\mathbf{1}_D$. En intégrant sur une corde, $f_X(x) = f_Y(x) = 2\sqrt{1-x^2}\,\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}/\pi$. Les variables ne sont pas indépendantes : par exemple $X > 3/4$ et $Y > 3/4$ ont chacun probabilité positive, mais leur intersection est impossible. Pour $0 \le t \le 1$, $\mathbb{P}(T \le t)$ est le rapport des aires, égal à t^2 ; $f_T(t) = 2t\mathbf{1}_{\{0<t<1\}}$.

Le changement polaire a pour jacobien r. La densité jointe est donc $r\mathbf{1}_{\{r\in(0,1)\}}\mathbf{1}_{\{\theta\in[0,2\pi)\}}/\pi$. Elle se factorise en $2r\mathbf{1}_{\{r\in(0,1)\}}$ et $\mathbf{1}_{\{\theta\in[0,2\pi)\}}/(2\pi)$. Ces fonctions sont les densités marginales, et T, Θ sont indépendantes. La valeur de l'angle à l'origine est sans effet, ce point étant de probabilité nulle.

Exercice 2.20 — Géométriques, inverse et somme conditionnée

L3 • énoncé, p. 18

Les formules géométriques donnent $\mathbb{E}X = 1/p$ et $\mathrm{Var}\,X = q/p^2$. La variable Y a masse pq^{k-1} en $1/k$. Elle est bornée et

$$\mathbb{E}Y = \frac{p}{q}\sum_{k\ge1}\frac{q^k}{k} = -\frac{p}{q}\log(1-q) = -\frac{p}{q}\log p.$$

L'indépendance donne $\mathbb{E}S_n = n/p$, $\mathrm{Var}\,S_n = nq/p^2$. Les compositions de k en n entiers positifs sont au nombre de $\binom{k-1}{n-1}$ et chacune a probabilité $p^n q^{k-n}$; la loi annoncée en découle, avec masse nulle pour $k < n$. Pour $n \ge 2$, le conditionnement rend ces compositions équiprobables :

$$\mathbb{P}(X_1 = m \mid S_n = k) = \frac{\binom{k-m-1}{n-2}}{\binom{k-1}{n-1}}.$$

Pour $n = 1$, la loi conditionnelle est la masse de Dirac en k.

Exercice 2.21 — Fiabilité et taux de défaillance discret

L3 • énoncé, p. 18

L'identité ponctuelle $T = \sum_{n\ge1}\mathbf{1}_{\{T\ge n\}}$ et Tonelli donnent la formule, finie si la série converge. On a $h(n) = (R(n) - R(n+1))/R(n)$. Si $h = \alpha$, $R(n+1) = (1-\alpha)R(n)$ et $R(1) = 1$, donc $\mathbb{P}(T = n) = \alpha(1-\alpha)^{n-1}$, $\mathbb{E}T = 1/\alpha$. Si l'on autorise $T = 0$, la masse initiale doit être spécifiée : en général $R(n) = R(1)(1-\alpha)^{n-1}$ et $\mathbb{E}T = R(1)/\alpha$.

Exercice 2.22 — Combinaison de deux indicatrices

L3 • énoncé, p. 18

La loi est $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)\delta_0 + \mathbb{P}(A \cap B^c)\delta_a + \mathbb{P}(A^c \cap B)\delta_b + \mathbb{P}(A \cap B)\delta_{a+b}$. Si des valeurs coïncident ($a = b$ ou $a = -b$), additionner leurs masses. Si $A \cap B = \emptyset$, la dernière masse est nulle et celles en a, b valent $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)$. Sous

indépendance, elles sont respectivement $(1-p)(1-q), p(1-q), (1-p)q, pq$ avec $p = \mathbb{P}(A), q = \mathbb{P}(B)$. La dernière indicatrice est Bernoulli de paramètre c.

Exercice 2.23 — Différence de deux nombres de faces

L3 • énoncé, p. 18

X, Y sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(n, 1/2)$. Comme $n - Y$ a aussi cette loi, $X - Y + n \sim \mathscr{B}(2n, 1/2)$. Donc $\mathbb{P}(X - Y = k) = 4^{-n}\binom{2n}{n+k}$ pour $-n \le k \le n$ et $\mathbb{P}(X = Y) = 4^{-n}\binom{2n}{n}$.

Exercice 2.24 — Cible circulaire et angle de Cauchy

L3 • énoncé, p. 18

Prendre le disque muni de la mesure $(1-p)$ fois la probabilité uniforme, auquel on ajoute un point d'échec de masse p. Sur le disque, R a densité $r/50$, $0 < r < 10$, et Θ est uniforme sur $[0, 2\pi)$, indépendante de R. La loi polaire complète ajoute la masse p à l'état-cimetière. Le score positif $10 - R$ a densité $(1-p)(10-s)/50$ sur $(0, 10)$, plus $p\delta_{-10}$. Conditionnellement au succès, $\tan\Theta$ a densité $1/[\pi(1+t^2)]$, par les deux branches de la tangente.

Exercice 2.25 — Queues, temps géométrique et succès répétés

L3 • énoncé, p. 18

Écrire $X = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X>t\}}dt$ ou $X = \sum_{j\ge 0} \mathbf{1}_{\{X>j\}}$ et appliquer Tonelli, y compris si l'espérance est infinie. Le premier temps a loi $p(1-p)^{j-1}$ sur $j \ge 1$ et moyenne $1/p$. Le k-ième temps est somme de k géométriques indépendantes : sa loi est $\binom{j-1}{k-1}p^k(1-p)^{j-k}$, $j \ge k$, et sa moyenne k/p. Sans indépendance des épreuves, la seule constance de la probabilité marginale de succès ne suffit pas.

Exercice 2.26 — Transformations d'une normale et rapport de normales

L3 • énoncé, p. 18

La symétrie donne $\mathbb{E}X = 0$; l'intégration par parties de $\int x^2 e^{-x^2/2}dx$ donne $\mathbb{E}X^2 = 1$. Le changement affine donne la densité normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, moyenne m, variance σ^2. Pour $Z = Y/X$, le changement $(x, z) \mapsto (x, xz)$ de jacobien $|x|$ donne $f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} |x| e^{-(1+z^2)x^2/2}dx/(2\pi) = 1/[\pi(1+z^2)]$. Ainsi Z est de Cauchy standard, et $1/Z = X/Y$ a la même loi par échangeabilité.

Exercice 2.27 — Densité dans un secteur : covariance et indépendance

L3 • énoncé, p. 18

Le secteur a angle $\pi/2$, donc l'intégrale vaut $(4/\pi)(\pi/2)\int_0^\infty re^{-r^2}dr = 1$. Par symétrie en y, $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}XY = 0$, donc $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Pourtant les coordonnées ne sont pas indépendantes, car $|Y| \le X$ p.s. tandis que leurs marginales donnent une probabilité positive à $X < 1, |Y| > 1$ sous une hypothèse d'indépendance. Pour $U = X - Y, V = X + Y$, $x = (u+v)/2, y = (v-u)/2$, jacobien $1/2$. La densité devient $(2/\pi)e^{-(u^2+v^2)/2}\mathbf{1}_{\{u,v\ge 0\}}$: U, V sont indépendantes et chacune a la loi $|G|$ pour G normale standard.

Exercice 2.28 — Loi image sur un espace dénombrable

L3 • énoncé, p. 18

Les fibres $f^{-1}(\{x\})$ sont disjointes et leur réunion est Ω ; leurs masses sont positives de somme 1. L'additivité donne $Q(A) = \mathbb{P}(f^{-1}(A))$. Pour X dénombrable, $\mathbb{P}(f(X) = v) = \sum_{z\,:\,f(z)=v} \mathbb{P}(X = z)$. L'image d'un tirage uniforme dans une population finie attribue à chaque catégorie sa proportion dans la population. Une caractéristique à valeurs multiples doit être codée par une application précise avant d'appliquer cette formule.

Exercice 2.29 — Mêmes marginales, lois jointes différentes

L3 • énoncé, p. 19

Chaque ligne et chaque colonne a somme $1/3$. Les deux marginales sont donc uniformes sur $\{1, 2, 3\}$ et ne dépendent pas de a. La diagonale est nulle, donc $\mathbb{P}(X = Y) = 0$. En particulier le couple n'est indépendant pour aucune valeur de a, puisque l'indépendance de ces marginales donnerait une masse $1/9$ sur la diagonale.

Exercice 2.30 — Loi jointe et images d'un couple discret

L3 • énoncé, p. 19

Les masses sont positives et leur somme vaut 1. La loi de X est $(1/4, 1/2, 1/4)$ sur $(-1, 0, 1)$; celle de Y est uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $X + Y$, les masses sur $(-2, -1, 0, 1, 2)$ sont $(1/12, 1/3, 1/4, 1/6, 1/6)$. Pour XY, les masses sur $(-1, 0, 1)$ sont $(1/4, 1/2, 1/4)$.

Exercice 2.31 — Deux lettres dans une pile

L3 • énoncé, p. 19

Les positions ordonnées (i, j), $1 \le i < j \le n$, sont uniformes parmi $\binom{n}{2}$ possibilités. La correspondance est $X_1 = i-1$, $X_2 = j-i-1$. La loi jointe est donc uniforme sur les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x+y \le n-2$. Pour $0 \le k \le n-2$, les deux marginales valent $(n-1-k)/\binom{n}{2}$. L'égalité des deux variables exige $2k \le n-2$, donnant $\lfloor n/2 \rfloor / \binom{n}{2}$. Z est la position de la seconde lettre : $\mathbb{P}(Z=j) = (j-1)/\binom{n}{2}$, $2 \le j \le n$. Les modes sont 0 pour X_1, X_2 et n pour Z.

Exercice 2.32 — Moments, symétrie et modes de la binomiale

L3 • énoncé, p. 19

Le modèle binomial suppose les sexes indépendants avec une probabilité constante p de garçon. Écrire B comme somme de n Bernoulli donne $\mathbb{E}B = np$ et $\operatorname{Var} B = np(1-p)$, ce qui est l'identité demandée. Pour $n \ge 1$, $0 < p < 1$, la loi a support entier $[0, n]$; sa symétrie impose le centre $n/2$ et donc $p = 1/2$. Réciproquement $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ prouve cette symétrie pour $p = 1/2$. Les cas $p = 0, 1$ ou $n = 0$ sont des masses ponctuelles, donc symétriques autour de leur support. Pour $0 < p < 1$, le rapport des masses consécutives est $(n-k)p/[(k+1)(1-p)]$. Le mode est $\lfloor (n+1)p \rfloor$ si $(n+1)p$ n'est pas entier ; s'il est entier, les deux modes sont $(n+1)p - 1$ et $(n+1)p$. Tracer les masses avec un diagramme en bâtons illustre ces conclusions.

Exercice 2.33 — Binomiale rare et approximation de Poisson

L3 • énoncé, p. 19

Le nombre est $B \sim \mathcal{B}(100, 0{,}02)$. Les probabilités exactes sont $\binom{100}{k} 0{,}02^k 0{,}98^{100-k}$ pour $k = 0, \dots, 4$, et un moins leur somme pour la dernière catégorie. Numériquement elles valent environ

$$(0{,}13262 ; 0{,}27065 ; 0{,}27341 ; 0{,}18228 ; 0{,}09021 ; 0{,}05083).$$

. L'approximation $\mathcal{P}(2)$ donne

$$(0{,}13534 ; 0{,}27067 ; 0{,}27067 ; 0{,}18045 ; 0{,}09022 ; 0{,}05265).$$

. Les deux listes sont proches mais différentes ; le modèle binomial suppose ici un échantillonnage indépendant, approximation d'un tirage sans remise dans une population très grande.

Exercice 2.34 — Raisins dans les galettes et modes de Poisson

L3 • énoncé, p. 19

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{P}(X \ge 1) = 1 - e^{-\lambda} \ge 0{,}98$ équivaut à $\lambda \ge \log 50 \simeq 3{,}91202$. Cela détermine un nombre moyen par galette ; une proportion massique dans la pâte demanderait aussi les masses des galettes et des raisins. Le même modèle calcule la probabilité qu'une case reçoive au moins un des objets distribués aléatoirement. Le rapport $\mathbb{P}(X=k+1)/\mathbb{P}(X=k) = \lambda/(k+1)$ montre que le mode est $\lfloor \lambda \rfloor$ pour λ non entier, et que les modes sont $\lambda - 1, \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Pour $\lambda = 0$, la masse est en zéro.

Exercice 2.35 — Sauts de la fonction de répartition

L3 • énoncé, p. 19

Les événements $\{X \le t - 1/n\}$ croissent vers $\{X < t\}$, donc la continuité croissante de la probabilité donne la limite. Ainsi $\mathbb{P}(X = t) = F_X(t) - F_X(t-)$, où $F_X(t-) = \lim_{s \uparrow t} F_X(s)$. Le raisonnement vaut pour toute variable réelle, sans hypothèse de support dénombrable.

Exercice 2.36 — Maximum de tirages avec remise

L3 • énoncé, p. 19

L'espace est $\{1, \dots, N\}^n$ uniforme. Pour $0 \le k \le N$, $\mathbb{P}(M \le k) = (k/N)^n$, d'où $\mathbb{P}(M = k) = [k^n - (k-1)^n]/N^n$. La répartition générale remplace k par $\lfloor x \rfloor$, avec valeurs 0 et 1 hors du support. Pour $n = 1$, tous les points sont modes ; pour $n > 1$, les différences de la fonction strictement convexe x^n croissent, donc le mode unique est N (cas $N = 1$ immédiat). Ces masses donnent les diagrammes demandés. Poser $r = \lfloor N/2 \rfloor / N$. Si $N \ge 2$, la condition est $r^n < 1 - p$, soit $n > \log(1-p)/\log r$. Le minimum est donc $\lfloor \log(1-p)/\log r \rfloor + 1$. Le signe strict explique le plancher suivi de 1. Pour $N = 1$, un tirage suffit. La fonction de p est un escalier croissant.

Pour deux dés, $\mathbb{P}(M = k) = (2k-1)/36$, $1 \le k \le 6$. Si m désigne le minimum, $\mathbb{P}(M = 1, m = 6) = 0$, alors que $\mathbb{P}(M = 1) = \mathbb{P}(m = 6) = 1/36$. Donc m et M ne sont pas indépendants.

Exercice 2.37 — Modélisation uniforme et deux lancers de pièce

L3 • énoncé, p. 19

Le modèle uniforme pour une date suppose une population de référence et un calendrier précis : les mois n'ont pas tous le même nombre de jours et le 29 février ne figure pas chaque année. Des variations saisonnières ou de pratique de programmation des naissances sont des facteurs possibles à examiner dans les données ; leur effet ne peut être chiffré sans données. Il s'agit donc d'une hypothèse de modèle à vérifier. Pour la pièce, les masses sont $(1-p)^2, 2p(1-p), p^2$. L'égalité des deux extrêmes impose $p = 1/2$; les masses sont alors $1/4, 1/2, 1/4$, non uniformes. Aucun biais constant ne convient.

Exercice 2.38 — Agrégation multinomiale et événements rares

L3 • énoncé, p. 19

La somme sur J a loi $\mathscr{B}(n, \sum_{i\in J} p_{n,i})$, puisque chaque essai est un succès lorsqu'il tombe dans J. Pour les d catégories rares, la fonction génératrice jointe est

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{d} p_{n,i}(s_i - 1)\right)^n \longrightarrow \exp\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i(s_i - 1)\right).$$

La limite est donc un vecteur de Poisson indépendantes de paramètres λ_i. La catégorie résiduelle est nécessaire : puisque la somme des effectifs moyens vaut n, ces moyennes ne peuvent pas toutes converger vers des limites finies.

Exercice 2.39 — Hypergéométrique multivariée et double paire

L3 • énoncé, p. 20

Pour $\sum_i x_i = k$, la masse jointe est $\prod_i \binom{n_i}{x_i} / \binom{N}{k}$; elle est nulle sinon. La marginale de la classe i est hypergéométrique $\mathscr{H}(N, n_i, k)$. En développant les produits décroissants pour k fixé, la masse jointe tend vers $k! \prod_i p_i^{x_i}/x_i!$, celle de $\mathscr{M}(k, (p_i))$; les marginales tendent vers $\mathscr{B}(k, p_i)$. Pour une double paire exacte au poker, choisir les deux rangs, les deux cartes de chaque rang, puis un cinquième rang distinct et son enseigne : probabilité $\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2 11 \cdot 4 / \binom{52}{5}$.

Exercice 2.40 — Temps du premier et du nième succès, avec troncature

L3 • énoncé, p. 20

Pour une géométrique G, $F_G(t) = 0$ si $t < 1$ et $1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}$ sinon. Pour $\min(G, N+1)$, garder cette formule jusqu'à $t < N+1$, puis prendre 1. En comptant les piles parmi les N premiers lancers,

$$\mathbb{P}(T_n > N) = \sum_{j=0}^{\min(n-1,N)} \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j}.$$

Pour n fixé, cette quantité tend vers zéro, par la loi forte ou par domination de chaque terme polynomial par la décroissance exponentielle. Pour $n \le k \le N$, $\mathbb{P}(X_N = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$; la masse restante est en $N+1$. La limite est la binomiale négative du temps T_n. Ces formules donnent tous les diagrammes et la courbe de la probabilité de troncature demandés. Pour $p = 1/2$, la symétrie de $\mathscr{B}(2n, 1/2)$ donne $\mathbb{P}(T_n \le 2n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n} 4^{-n} \to 1/2$.

Exercice 2.41 — Convolution et stabilité des lois discrètes

L3 / M1 • énoncé, p. 20

On prolonge les masses par zéro hors de leurs supports. L'indépendance donne

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_i q_j, \qquad \mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_i p_i q_{k-i}.$$

Pour $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m, p)$, l'identité de Vandermonde donne

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_i \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} p^k (1-p)^{n+m-k}.$$

Pour $X \sim \mathscr{P}(a)$ et $Y \sim \mathscr{P}(b)$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = e^{-(a+b)} \sum_{i=0}^{k} \frac{a^i b^{k-i}}{i!(k-i)!} = e^{-(a+b)} \frac{(a+b)^k}{k!}.$$

Une récurrence donne $\sum_i X_i \sim \mathscr{B}(\sum_i n_i, p)$ dans le premier cas, et $\mathscr{P}(\sum_i a_i)$ dans le second. Les minima géométriques sont étudiés dans l'exercice 2.42.

La série exponentielle donne $\varphi_X(t) = \exp(a(e^{it}-1))$ et $\varphi_Y(t) = \exp(b(e^{it}-1))$. L'indépendance implique $\varphi_{X+Y}(t) = \exp((a+b)(e^{it}-1))$; par unicité, $X+Y \sim \mathscr{P}(a+b)$.

Exercice 2.42 — Minimum de variables géométriques

L3 • énoncé, p. 20

Posons $r = \prod_i r_i$. Pour tout entier $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\min_i G_i > k) = \prod_i \mathbb{P}(G_i > k) = r^k.$$

Le minimum suit donc la loi géométrique de probabilité de succès $1-r$. Pour $N \geq 1$, on a $\min_i X_i = \min(\min_i G_i - 1, N)$, d'où les masses $(1-r)r^k$ pour $0 \leq k < N$ et r^N au point N. Pour $N = 0$, la variable est nulle. Ici r_i désigne la probabilité d'échec ; avec des paramètres de succès p_i, le paramètre du minimum est $1-\prod_i(1-p_i)$. L'indépendance est indispensable.

Exercice 2.43 — Répartition entre plusieurs hôtels

L3 • énoncé, p. 20

Chaque X_i est une somme de n indicatrices indépendantes de paramètre $1/r$, donc $X_i \sim \mathscr{B}(n, 1/r)$. Pour des entiers $k_i \geq 0$ de somme n,

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}\, r^{-n}.$$

C'est la loi multinomiale. Pour $i \neq j$, en séparant les contributions des différentes personnes, on obtient $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = -n/r^2$. Si $n > 0$ et $r \geq 2$, les coordonnées ne sont donc pas deux à deux indépendantes. Les cas $n = 0$ ou $r = 1$ sont déterministes.

Exercice 2.44 — Naissances et systèmes de détection

L3 • énoncé, p. 20

1. Le nombre de garçons suit la loi $\mathscr{B}(5, 0{,}55)$. La probabilité cherchée est $\binom{5}{2}(0{,}55)^2(0{,}45)^3 = 0{,}275653125$.
2. Le nombre de détections suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$. Les probabilités cherchées sont respectivement p^n, $1-(1-p)^n$ et $1-(1-p)^n - np(1-p)^{n-1}$. La dernière vaut zéro pour $n = 1$, y compris aux valeurs limites de p, par continuité.

Exercice 2.45 — Inégalité de Markov, intégrabilité et positivité

L3 • énoncé, p. 20

1. L'inégalité $a\mathbf{1}_{\{X \geq a\}} \leq X$ donne $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}X/a$ par intégration, même si $\mathbb{E}X = +\infty$. Si $\mathbb{E}X = 0$, pour tout $m \geq 1$, $\mathbb{P}(X \geq 1/m) \leq m\mathbb{E}X = 0$. Donc $X = 0$ presque sûrement. Dans un espace discret dont chaque point a une masse strictement positive, X est nulle en tout point.
2. On a $|X| \leq \max(|a|, |b|)$, d'où l'intégrabilité. La monotonie de l'espérance donne les deux bornes. L'égalité à gauche équivaut à $\mathbb{E}(X-a) = 0$, donc à $X = a$ presque sûrement.
3. Il suffit d'intégrer l'inégalité $|x|^k \leq 1 + |x|^n$.

Exercice 2.46 — Espérance de la somme de deux dés

L3 • énoncé, p. 20

Les masses de S sont $(s-1)/36$ pour $2 \leq s \leq 7$ et $(13-s)/36$ pour $8 \leq s \leq 12$. Elles sont symétriques autour de 7, donc $\mathbb{E}S = 7$. On peut aussi calculer la somme finie, ou écrire $\mathbb{E}S = 2(1+\cdots+6)/6 = 7$.

Exercice 2.47 — Calculs de variance et de covariance

L3 / M1 • énoncé, p. 20

1. Le développement du carré donne $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - 2(\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}X)^2$. La variable standardisée a alors espérance zéro et variance un.
2. En développant le produit centré, on obtient la formule de covariance, puis $\operatorname{Var}(X \pm Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) \pm 2\operatorname{Cov}(X, Y)$. Pour les indicatrices,

$$\operatorname{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)[\mathbb{P}(A \mid B) - \mathbb{P}(A)].$$

3. Par bilinéarité, $\mathrm{Var}(\sum_i X_i) = \sum_{i,j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_i \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
4. La symétrie vient de celle de la covariance. Pour tout vecteur réel u, $u^\mathsf{T} K u = \mathrm{Var}(u^\mathsf{T} Z) \geq 0$. Enfin, la bilinéarité donne $K_{AZ} = AKA^\mathsf{T}$.

Exercice 2.48 — Inégalités de probabilité et saturation d'un détecteur

L3 • énoncé, p. 21

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Markov donne $\mathbb{P}(X > 75) = \mathbb{P}(X \geq 76) \leq 50/76$. Avec la variance, Bienaymé–Tchebychev donne $\mathbb{P}(X > 75) \leq 25/26^2$. Les bornes moins fines $2/3$ et $1/25$ conviennent aussi. Ces informations ne déterminent pas la probabilité exacte.
2. De même, les bornes $100/1001$ puis $100/901^2$ conviennent ; en oubliant l'intégralité, on trouve $1/10$ puis $1/8100$.
3. Pour $\theta > 0$, Markov donne
$$\mathbb{P}(Y > am) \leq \mathbb{E}e^{\theta(Y-am)} = \exp\{m(e^\theta - 1) - \theta am\}.$$
L'exposant est minimal pour $e^\theta = a$, d'où le résultat. Pour $m = 100, a = 10$, la borne est $e^{900-1000\log 10}$, soit environ $7{,}33 \times 10^{-610}$.
4. Comme Y est entier positif, Markov donne $\mathbb{P}(Y > 140) \leq 100/141$. Avec la variance, Bienaymé–Tchebychev donne $\mathbb{P}(Y > 140) \leq 100/41^2$; les bornes $100/140$ et $1/16$ sont aussi valables. L'approximation normale directe donne $1 - \Phi(4) \simeq 3{,}1671 \times 10^{-5}$. Avec correction de continuité, on obtient $1 - \Phi(4{,}05) \simeq 2{,}5609 \times 10^{-5}$. Or la somme exacte
$$\mathbb{P}(Y \geq 141) = e^{-100} \sum_{k=141}^{\infty} \frac{100^k}{k!} \simeq 6{,}4013 \times 10^{-5}.$$
Le théorème limite central ne garantit pas une petite erreur relative dans une queue aussi éloignée. Ici, les approximations normales sous-estiment sensiblement la probabilité.

Exercice 2.49 — Densités usuelles et changement de variable

L3 • énoncé, p. 21

Pour $a < b$ et $\lambda > 0$, les intégrales de $\mathbf{1}_{[a,b]}/(b-a)$ et de $\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$ valent un. Si $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}dx$, Tonelli puis les coordonnées polaires donnent $I^2 = 2\pi \int_0^\infty re^{-r^2/2}dr = 2\pi$. Le changement affine donne ensuite la densité $e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}/(\sigma\sqrt{2\pi})$. Pour $Y = u(X)$ et une fonction test bornée h, le changement de variable dans $\mathbb{E}h(u(X))$ donne la densité
$$f_Y(y) = \frac{f_X(u^{-1}(y))}{|u'(u^{-1}(y))|}$$
sur l'image de u, et zéro ailleurs. La valeur absolue est nécessaire si u décroît. En découpant en branches monotones, on somme les contributions $f_X(x)/|u'(x)|$ sur les antécédents réguliers de y. Pour $Y = X^2$ avec X normale centrée réduite, de loi $\mathcal{N}(0,1)$, les deux antécédents $\pm\sqrt{y}$ donnent
$$f_Y(y) = \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}\mathbf{1}_{\{y>0\}},$$
la densité du χ^2 à un degré de liberté.

Exercice 2.50 — Fonctions de répartition et mélanges

L3 • énoncé, p. 21

1. La croissance vient de l'inclusion des demi-droites. Les ensembles $]-\infty, t+1/n]$ décroissent vers $]-\infty, t]$, ce qui donne la continuité à droite. Les demi-droites aux extrémités croissent vers $\mathbb{R}$ ou décroissent vers le vide, d'où les limites. Enfin, $]-\infty, a-1/n]$ croît vers $]-\infty, a[$; la différence des masses donne la formule du saut.
2. Pour $\mu = \sum_i \alpha_i \mu_i$, la positivité et la masse totale un sont immédiates. La permutation des deux séries positives donne la dénombrable additivité. Si μ_i a pour densité f_i, Tonelli donne la densité $\sum_i \alpha_i f_i$.
3. La première fonction est $\mathbf{1}_{[a,\infty)}$. La seconde vaut 0 pour $t < 0$, $(1+t)/3$ pour $0 \leq t < 1$, et 1 pour $t \geq 1$. Ses sauts en 0 et 1 valent chacun $1/3$.

Exercice 2.51 — Transformations des lois exponentielle et normale

L3 • énoncé, p. 21

1. La densité de bX est $(a/|b|)e^{-ay/b}\mathbf{1}_{\{y/b>0\}}$. Pour $b>0$, c'est la loi exponentielle de taux a/b ; pour $b<0$, c'est son image par une réflexion. Pour $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(\lfloor X\rfloor = k) = e^{-ak} - e^{-a(k+1)} = (1-e^{-a})e^{-ak}.$$

Enfin, $\mathbb{P}(-\log U > t) = e^{-t}$ pour $t\geq 0$, donc $-\log U \sim \mathscr{E}(1)$.

2. Le changement $x=\log y$, de jacobien $1/y$, donne

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\log y - m)^2}{2\sigma^2}\right)\mathbf{1}_{\{y>0\}}.$$

Si $\sigma=0$, la loi est la masse de Dirac en e^m et n'a pas de densité de Lebesgue.

Exercice 2.52 — Parties entière et fractionnaire d'une uniforme

L3 • énoncé, p. 21

Pour $k\in\{0,\dots,N-1\}$ et tout borélien $B\subset[0,1)$,

$$\mathbb{P}(Y=k, Z\in B) = \frac{\mathrm{Leb}(k+B)}{N} = \frac{\mathrm{Leb}(B)}{N}.$$

En sommant sur k, on obtient la loi uniforme de Z sur $[0,1)$. En prenant $B=[0,1)$, on obtient la loi uniforme de Y sur $\{0,\dots,N-1\}$. La factorisation donne l'indépendance.

Exercice 2.53 — Mélange gaussien et vitesse de déplacement

L3 • énoncé, p. 21

Notons Φ la fonction de répartition normale centrée réduite et φ sa densité. Les probabilités totales donnent

$$\mathbb{P}(V<1{,}2) = \tfrac{2}{3}\Phi(-0{,}5) + \tfrac{1}{3}\Phi(-1) \simeq 0{,}258577.$$

Par Bayes, la probabilité conditionnelle demandée est $2\Phi(-0{,}5)/(2\Phi(-0{,}5)+\Phi(-1)) \simeq 0{,}795476$. La densité du mélange est

$$f_V(v) = \frac{2}{3\cdot 0{,}4}\varphi\left(\frac{v-1{,}4}{0{,}4}\right) + \frac{1}{3\cdot 0{,}4}\varphi\left(\frac{v-1{,}6}{0{,}4}\right).$$

Exercice 2.54 — Construire une uniforme avec des bits indépendants

L3 • énoncé, p. 21

La série converge, ses termes étant positifs et sa somme majorée par un. Posons $U_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}B_k$. Les 2^n mots de bits sont équiprobables et correspondent bijectivement aux valeurs $j/2^n$, $0\leq j<2^n$. Pour $0\leq t<1$,

$$\mathbb{P}(U_n\leq t) = \frac{\lfloor 2^n t\rfloor + 1}{2^n}.$$

Comme $U_n\uparrow U$, les événements $\{U_n\leq t\}$ décroissent vers $\{U\leq t\}$. La limite vaut t. Aux autres points, la fonction de répartition vaut zéro ou un. L'ambiguïté de développement aux dyadiques est de probabilité nulle.

Exercice 2.55 — Sommation par paquets et permutation des séries

L3 • énoncé, p. 22

1. Par définition, la somme positive est le supremum des sommes sur les parties finies de l'ensemble d'indices. Une bijection transporte exactement ces parties finies, donc conserve le supremum.

2. Pour une partition (I_k) de l'ensemble d'indices, toute somme finie est majorée par $\sum_k\sum_{i\in I_k} x_i$. Réciproquement, toute somme sur un nombre fini de paquets, chacun tronqué à une partie finie, est majorée par la somme totale. En prenant les supremums, on obtient l'égalité. Les lignes, colonnes et diagonales de $\mathbb{N}^2$ donnent les trois partitions demandées.

3. Le point précédent appliqué aux valeurs absolues donne $\sum_{i,j}|x_{ij}| = \sum_i\sum_j|x_{ij}| < \infty$. On applique alors la sommation par paquets aux parties positives et négatives, puis on soustrait deux quantités finies. Le même argument donne l'invariance par bijection. Sans positivité ni sommabilité absolue, une permutation peut modifier la somme d'une série convergente. Ces hypothèses sont donc essentielles.

Exercice 2.56 — Calculs de familles sommables

L3 • énoncé, p. 22

1. La somme des valeurs absolues vaut $[(1-|u|)(1-|v|)]^{-1} < \infty$, et la somme signée vaut $[(1-u)(1-v)]^{-1}$.
2. Par diagonales $p+q=n$, la somme absolue vaut $\sum_{n\geq 0}(2|x|)^n$. Elle est finie exactement si $|x|<1/2$. Dans ce cas, la somme est $\sum_{n\geq 0}(2x)^n = 1/(1-2x)$.
3. Pour $p \geq 2$, $\sum_{q\geq 2} p^{-q} = 1/[p(p-1)]$, et la somme sur p vaut un par télescopage. La famille est sommable. Avec $p=1$, une sous-famille a tous ses termes de valeur absolue un, donc la sommabilité échoue.
4. On a $\sum_q |x_{p,q}| = e^{-p}|u_p|e^p = |u_p|$. Sous sommabilité, $\sum_q x_{p,q} = e^{-2p}u_p$. Pour $u_p = x^p$, la somme totale vaut $1/(1-xe^{-2})$. On prend $0^0 = 1$ pour le terme $p=q=0$.
5. Le critère du quotient donne la convergence absolue. Le produit des séries est absolument sommable et, en regroupant par $p+q=n$,

$$f(x)f(y) = \sum_{n\geq 0}\sum_{p+q=n}\frac{x^p y^q}{p!q!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(x+y)^n}{n!} = f(x+y).$$

6. Dans la famille $a_j \mathbf{1}_{\{0\leq i<j\}}$, le terme a_j est répété exactement j fois. La somme absolue est $\sum_j j|a_j| < \infty$, donc la permutation des sommes donne l'identité. Le terme a_0 n'intervient pas.

Exercice 2.57 — Corde de Bertrand à distance uniforme du centre

M1 • énoncé, p. 22

La distance R du milieu au centre est uniforme sur $[0,1]$, et $L = 2\sqrt{1-R^2}$. Pour $0 \leq \ell \leq 2$,

$$\mathbb{P}(L \leq \ell) = \mathbb{P}\Big(R \geq \sqrt{1-\ell^2/4}\Big) = 1 - \sqrt{1-\ell^2/4}.$$

La densité est donc $f_L(\ell) = \ell \mathbf{1}_{\{\ell\in(0,2)\}}/(2\sqrt{4-\ell^2})$. Enfin, $L \geq \sqrt{3}$ équivaut à $R \leq 1/2$, donc la probabilité vaut $1/2$. La notion de corde « au hasard » doit préciser cette procédure ; d'autres procédures donnent d'autres lois.

Exercice 2.58 — Équation multiplicative mesurable

M1 • énoncé, p. 22

Si $f(0)=0$, alors f est identiquement nulle. Sinon $f(0)=1$, $f(t)f(-t)=1$ et $f(t) = f(t/2)^2 > 0$. La fonction borélienne $g = \log f$ est additive. Montrons sa continuité. Les ensembles $\{x \in [-1,1] : |g(x)| \leq k\}$ recouvrent $[-1,1]$, donc l'un d'eux, A, a une mesure positive. Par le théorème de Steinhaus, $A-A$ contient un voisinage de zéro ; sur ce voisinage, $|g| \leq 2k$. L'additivité implique alors la continuité en zéro : si $|g| \leq C$ sur $(-\delta,\delta)$ et $|x| < \delta/m$, alors $|g(x)| = |g(mx)|/m \leq C/m$. Ainsi $g(t) = ct$, d'abord sur les rationnels puis par continuité sur $\mathbb{R}$, et $f(t) = e^{ct}$. Pour rappeler la justification de Steinhaus dans ce cas, A est de mesure finie et la continuité des translations dans L^1 donne $|A \cap (A+h)| \to |A| > 0$ quand $h \to 0$. Donc tous les petits h appartiennent à $A-A$. Sur $[0,\infty)$, s'ajoutent au cas nul et aux exponentielles la fonction $f(0)=1$, $f(t)=0$ pour $t>0$. En effet, un zéro en $t_0 > 0$ entraîne un zéro en t_0/n puis en tout $t>0$. En l'absence de zéro, $\log f$ se prolonge en une fonction additive sur $\mathbb{R}$. Pour une fonction de survie $f(t) = \mathbb{P}(X>t)$ avec $0 < X < \infty$ presque sûrement, la continuité à droite en zéro et la limite nulle à l'infini excluent les cas dégénérés et imposent $f(t) = e^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$.

3. Convergence presque sûre et lois des grands nombres

Exercice 3.1 — Queue d'une variable de carré intégrable

L3 • énoncé, p. 23

Pour $x > 0$, $x^2\mathbb{P}(|X| \geq x) \leq \mathbb{E}[X^2 \mathbf{1}_{\{|X|\geq x\}}]$. Le membre de droite tend vers zéro par convergence dominée, le majorant X^2 étant intégrable.

Exercice 3.2 — Loi faible sous dépendance

L3 / M1 • énoncé, p. 23

Il suffit que $\mathrm{Var}(S_n)/n^2 \to 0$, par Tchebychev. Si $\mathrm{Var}\, X_i \leq C$ et les covariances sont nulles lorsque $|i-j| > 1$, Cauchy-Schwarz donne $\mathrm{Var}(S_n) \leq nC + 2(n-1)C \leq 3Cn$. Dans le cas stationnaire, posons $c_k = \mathrm{Cov}(X_0, X_k)$. Alors

$$\frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2} = \frac{c_0}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)c_k.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, choisir K tel que $|c_k| \leq \varepsilon$ pour $k \geq K$. La contribution de $k < K$ est $O(1/n)$ et celle des autres termes est au plus ε. La variance normalisée tend donc vers zéro.

Exercice 3.3 — Polynômes de Bernstein

L3 / M1 • énoncé, p. 23

Pour $S_n \sim \mathscr{B}(n,x)$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Posons $M = \|f\|_\infty$. L'uniforme continuité de f sur $[0,1]$ donne, pour chaque $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tel que $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$ si $|u-v| \leq \delta$. Alors

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M\mathbb{P}(|S_n/n - x| > \delta) \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2},$$

uniformément en x. On obtient l'approximation uniforme par des polynômes, puis sur tout *segment compact* par changement affine de variable. Un intervalle seulement borné mais ouvert ne suffit pas à l'affirmation générale.

Exercice 3.4 — Une distance pour la convergence en probabilité

L3 • énoncé, p. 23

Supposons que X_n tend vers X en probabilité quand $n \to \infty$. Comme ϕ tend vers zéro en zéro, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $|\phi(x)| < \varepsilon$ pour $|x| < \delta$. En outre,

$$0 \leq \mathbb{E}[\phi(|X_n - X|)] = \mathbb{E}\Big[\phi(|X_n - X|)\mathbf{1}_{\{|X_n - X|<\delta\}}\Big] + \mathbb{E}\Big[\phi(|X_n - X|)\mathbf{1}_{\{|X_n - X|\geq\delta\}}\Big]$$

Sur l'événement $\{|X_n - X| < \delta\}$, on a $0 \leq \phi(|X_n - X|) < \varepsilon$, de sorte que le premier terme est inférieur à ε. De plus, comme ϕ est bornée par un, le second terme est inférieur à $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \delta)$, qui tend vers zéro quand $n \to \infty$, comme X_n tend vers X en probabilité. Ainsi, $\mathbb{E}[\phi(|X_n - X|)]$ tend vers zéro.

Réciproquement, supposons que $\mathbb{E}[\phi(|X_n - X|)]$ tend vers zéro quand $n \to \infty$. La croissance de la fonction ϕ sur $[0,\infty[$ et l'inégalité de Markov permettent d'écrire, pour tout réel $\delta > 0$ et tout entier naturel n,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \delta) \leq \mathbb{P}(\phi(|X_n - X|) \geq \phi(\delta)) \leq \frac{\mathbb{E}[\phi(|X_n - X|)]}{\phi(\delta)},$$

ce qui tend vers zéro quand $n \to \infty$, et assure donc la convergence en probabilité de X_n vers X.

Exercice 3.5 — Problème du collectionneur de coupons

M1 • énoncé, p. 23

1. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On observe que $X_{n,k}$ représente le temps qu'il faut attendre pour tirer un coupon différent des $k-1$ collectés précédemment. Ainsi, $X_{n,k}$ suit une loi géométrique de paramètre $p_{n,k} = 1 - (k-1)/n$, c'est-à-dire que

$$\forall r \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(X_{n,k} = r) = (1 - p_{n,k})^{r-1} p_{n,k}.$$

En particulier, on a alors $\mathbb{E}[X_{n,k}] = 1/p_{n,k}$ et $\mathrm{Var}(X_{n,k}) = (1-p_{n,k})/p_{n,k}^2$. Conditionnellement aux tirages jusqu'à $\tau_{n,k-1}$, le temps d'attente $X_{n,k}$ a cette loi géométrique, qui ne dépend pas du passé : il reste toujours $n-k+1$

coupons nouveaux. Par récurrence, les $X_{n,k}$ sont donc indépendantes à n fixé. Sachant que $T_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$, on en déduit que

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_{n,k}] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_{n,k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \sim n \ln n,$$

pour $n \to \infty$. De même, en utilisant en outre l'indépendance des $X_{n,k}$, on a

$$\mathrm{Var}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_{n,k}) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_{n,k}^2} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{n}{n-k+1} \Big)^2 = n^2 \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell^2} = \mathrm{O}(n^2).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$,

$$\left| \frac{\mathbb{E}[T_n]}{n \ln n} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que

$$\left| \frac{T_n}{n \ln n} - 1 \right| > \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \frac{T_n}{n \ln n} - \frac{\mathbb{E}[T_n]}{n \ln n} \right| \geq \left| \frac{T_n}{n \ln n} - 1 \right| - \left| \frac{\mathbb{E}[T_n]}{n \ln n} - 1 \right| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'inégalité de Chebyshev conduit donc à

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{T_n}{n \ln n} - 1 \right| > \varepsilon \right) \leq \mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}[T_n]| > \frac{\varepsilon}{2} n \ln n \right) \leq \frac{4 \, \mathrm{Var}(T_n)}{(\varepsilon n \ln n)^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\ln n)^2} \right).$$

On en déduit finalement que

$$\frac{T_n}{n \ln n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Exercice 3.6 — À propos du critère de Kolmogorov

M1 • énoncé, p. 24

1. Pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n prend les valeurs 1 et -1 chacune avec probabilité $(1 - 1/2^n)/2$ et les valeurs 2^n et -2^n chacune avec probabilité $1/2^{n+1}$. On en déduit donc que Y_n prend les valeurs 1 et -1 chacune avec probabilité $(1 - 1/2^n)/2$ et la valeur 0 avec probabilité $1/2^n$. Ainsi, on a $\mathbb{E}[Y_n] = 0$ et $\mathrm{Var}(Y_n) = 1 - 1/2^n$.

2. Les variables Y_n sont indépendantes et de moyenne nulle, et la série $\sum_n \mathrm{Var}(Y_n)/n^2$ converge clairement. Le critère de Kolmogorov assure donc que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$ presque sûrement.

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(X_n \neq Y_n) = \mathbb{P}(X_n \in \{-2^n, 2^n\}) = \frac{1}{2^n}.$$

4. La série $\sum_n \mathbb{P}(X_n \neq Y_n)$ converge clairement. Le lemme de Borel-Cantelli implique donc que la probabilité de l'événement $\limsup_n \{X_n \neq Y_n\}$ est nulle. Par conséquent, $\mathbb{P}(\liminf_n \{X_n = Y_n\}) = 1$.

5. Posons $A = \liminf_n \{X_n = Y_n\}$ et $B = \{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0\}$. D'après ce qui précède, on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$, de sorte que $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$. Sur l'événement $A \cap B$, on a $X_n = Y_n$ pour tout entier n suffisamment grand, de sorte que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ a la même limite que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ quand n tend vers l'infini, c'est-à-dire une limite nulle. D'où

$$\text{p.s.} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0.$$

6. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = -1) + 2^{2n} \mathbb{P}(X_n = 2^n) + 2^{2n} \mathbb{P}(X_n = -2^n) = 1 - \frac{1}{2^n} + 2^n.$$

La série $\sum_n \mathbb{E}[X_n^2]/n^2$ est donc divergente.

7. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne vérifie pas les hypothèses du critère de Kolmogorov, mais suit cependant la loi forte des grands nombres. On en déduit que ce critère est une condition suffisante, mais pas nécessaire.

Exercice 3.7 — Loi des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund

M1 • énoncé, p. 24

1. La loi forte des grands nombres assure que si $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ alors, presque sûrement, S_n/n tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Ici l'hypothèse est plus forte, mais le résultat est plus fort également.

2. Puisque les X_k ont même loi, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_k \neq Y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_k|^p > k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1|^p > k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \mathbb{P}(|X_1|^p > y)\mathrm{d}y$$
$$\leq \int_0^{\infty} \mathbb{P}(|X_1|^p > y)\mathrm{d}y = \mathbb{E}[|X_1|^p] < \infty.$$

En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que $\mathbb{P}(\limsup_n\{X_n \neq Y_n\}) = 0$. Donc, presque sûrement, l'événement $\liminf_n\{X_n = Y_n\}$ est réalisé, c'est-à-dire que $X_n = Y_n$ à partir d'un certain rang. Posons maintenant $A = (\liminf_n\{X_n = Y_n\}) \cap \{\lim_{n\to\infty} n^{-1/p}\, T_n = 0\}$. Si on a montré que

$$\text{p.s.} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n^{1/p}} = 0$$

alors, d'après le résultat précédent, $\mathbb{P}(A) = 1$. De plus, si $\omega \in A$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > M$, $X_n(\omega) = Y_n(\omega)$, et donc

$$\frac{S_n(\omega)}{n^{1/p}} = \frac{T_n(\omega)}{n^{1/p}} + \frac{\sum_{i=1}^{M}(X_i - Y_i)(\omega)}{n^{1/p}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On aura donc montré : p.s. $\lim_{n\to\infty} n^{-1/p}\, S_n = 0$.

3. Tout d'abord, on peut écrire

$$\mathrm{Var}(Y_m) \leq \mathbb{E}(Y_m^2) = \int_0^{\infty} 2y\mathbb{P}(|Y_m| > y)\mathrm{d}y.$$

Mais, si $y > m^{1/p}$, $\mathbb{P}(|Y_m| > y) = 0$, et, puisque $|Y_m| \leq |X_m|$, $\mathbb{P}(|Y_m| > y) \leq \mathbb{P}(|X_m| > y)$. Par conséquent,

$$\mathrm{Var}(Y_m) \leq \int_0^{m^{1/p}} 2y\mathbb{P}(|X_m| > y)\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{m} \int_{(n-1)^{1/p}}^{n^{1/p}} 2y\mathbb{P}(|X_m| > y)\mathrm{d}y$$

ce qui prouve la première inégalité.

4. D'après le théorème de Fubini,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{Y_m}{m^{1/p}}\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m} \int_{(n-1)^{1/p}}^{n^{1/p}} \frac{2y}{m^{2/p}}\mathbb{P}(|X_m| > y)\mathrm{d}y \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} \int_{(n-1)^{1/p}}^{n^{1/p}} \frac{2y}{m^{2/p}}\mathbb{P}(|X_m| > y)\mathrm{d}y.$$

5. Supposons $n \geq 2$. Une comparaison usuelle série-intégrale donne

$$\sum_{m=n}^{\infty} m^{-2/p} \leq \int_{n-1}^{\infty} y^{-2/p}dy = \frac{p}{2-p}(n-1)^{\frac{p-2}{p}}. \tag{3}$$

De plus, $((n-1)/n)^{\frac{p-2}{p}} \leq (1/2)^{\frac{p-2}{p}} \leq 2$. Donc, pour $y \leq n^{1/p}$,

$$\sum_{m=n}^{\infty} m^{-2/p} \leq \frac{p}{2-p} 2n^{\frac{p-2}{p}} \leq \frac{2p}{2-p} y^{p-2}.$$

Si $n = 1$, et $y \in](n-1)^{1/p}, n^{1/p}] =]0, 1]$, alors $y^{p-2} \geq 1$. Donc, en utilisant la comparaison série-intégrale précédente pour $n = 2$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2/p}} = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^{2/p}} \leq 1 + \frac{p}{2-p} \leq \frac{2p}{2-p} \leq \frac{2p}{2-p} y^{p-2}.$$

Ainsi on a prouvé la même majoration dans le cas $n = 1$.

6. En combinant les questions 4 et 5,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Var}\Big(\frac{Y_m}{m^{1/p}}\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)^{1/p}}^{n^{1/p}} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{2y}{m^{2/p}} \mathbb{P}(|X_1| > y)\mathrm{d}y \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)^{1/p}}^{n^{1/p}} \frac{2p}{2-p} y^{p-2} 2y \mathbb{P}(|X_1| > y)\mathrm{d}y$$
$$\le \frac{4}{2-p} \int_0^{\infty} p y^{p-1} \mathbb{P}(|X_1| > y)\mathrm{d}y \le \frac{4}{2-p} \mathbb{E}[|X_1|^p] < \infty.$$

7. Les variables aléatoires $(Y_m - \mu_m)/m^{1/p}$ sont indépendantes, centrées et de variances sommables. Par un théorème du cours (dû à Kolmogorov), on en déduit que la série $\sum_m (Y_m - \mu_m)/m^{1/p}$ converge presque sûrement. On applique alors le lemme de Kronecker pour obtenir

$$\text{p.s.} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{m=1}^{n} (Y_m - \mu_m) = 0.$$

8. Puisque $\mathbb{E}[X_m] = 0$, et que les X_m sont identiquement distribuées, on a, pour tout $m \ge 1$,

$$\mu_m = -\mathbb{E}[X_m \mathbf{1}_{\{|X_m| > m^{1/p}\}}] = -\mathbb{E}[X_1 \mathbf{1}_{\{|X_1| > m^{1/p}\}}].$$

Donc

$$|\mu_m| \le \mathbb{E}[|X_1| \mathbf{1}_{\{|X_1| > m^{1/p}\}}] \le \mathbb{E}\left[|X_1| \mathbf{1}_{\{|X_1| > m^{1/p}\}} \Big(\frac{|X_1|}{m^{1/p}}\Big)^{p-1}\right].$$

Ainsi,

$$|\mu_m| \le m^{-1+1/p} u_m \qquad \text{avec} \qquad u_m = \mathbb{E}\Big[|X_1|^p \mathbf{1}_{\{|X_1| > m^{1/p}\}}\Big].$$

Muni de cette inégalité, on souhaite montrer que $n^{-1/p} \sum_{m=1}^{n} \mu_m$ tend vers zéro quand $n \to \infty$. Pour cela, on observe que

$$s_n = \sup_{m \ge n+1} u_m \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{n} m^{-1+1/p} \le p n^{1/p}$$

par convergence dominée et du fait d'une comparaison série-intégrale, respectivement. Ainsi, pour $n_0 \le n$, on a

$$\Big|\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{m=1}^{n} \mu_m\Big| \le \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{m=1}^{n} m^{-1+1/p} u_m \le \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{m=1}^{n_0} m^{-1+1/p} u_m + \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{m=n_0+1}^{n} m^{-1+1/p} u_m \le \frac{n_0 s_0}{n^{1/p}} + p s_{n_0},$$

On fait d'abord tendre n vers l'infini, puis n_0 vers l'infini ; on obtient ainsi la limite nulle cherchée. Donc, d'après la question précédente,

$$\text{p.s.} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{m=1}^{n} Y_m = 0$$

ce qui donne la conclusion d'après la question 2.

Exercice 3.8 — Géométrie en grande dimension

M1 • énoncé, p. 25

Les variables X_i^2 sont indépendantes, de même loi, bornées, et $\mathbb{E}X_i^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = 1/3$. La loi des grands nombres donne $n^{-1}\sum_i X_i^2 \to 1/3$, même presque sûrement. Par continuité de la racine carrée,

$$\frac{\|(X_1, \dots, X_n)\|}{\sqrt{n/3}} \longrightarrow 1 \quad \text{en probabilité.}$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$, $A_{n,\varepsilon}$ est la couronne ouverte entre les sphères de rayons $(1-\varepsilon)\sqrt{n/3}$ et $(1+\varepsilon)\sqrt{n/3}$. Pour $\varepsilon \ge 1$, la contrainte inférieure est inopérante, sauf l'exclusion de l'origine quand $\varepsilon = 1$. La loi du vecteur est uniforme sur le cube, de densité 2^{-n}, donc

$$2^{-n} \mathrm{Leb}_n(A_{n,\varepsilon} \cap [-1,1]^n) = \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in A_{n,\varepsilon}) \longrightarrow 1.$$

Ceci exprime une concentration en largeur relative autour de la sphère de rayon $\sqrt{n/3}$; le voisinage considéré a une largeur absolue proportionnelle à $\sqrt{n}$.

Exercice 3.9 — Convergence positive et convergence dans L1

M1 • énoncé, p. 25

On a $|X_n - X_\infty| = X_n + X_\infty - 2\min\{X_n, X_\infty\}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, donc

$$\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] = \mathbb{E}[X_n] + \mathbb{E}[X_\infty] - 2\mathbb{E}[\min\{X_n, X_\infty\}].$$

D'après les hypothèses, le premier terme converge vers $\mathbb{E}[X_\infty]$. Il en va de même de $\mathbb{E}[\min\{X_n, X_\infty\}]$, d'après le théorème de convergence dominée. On en déduit que $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|]$ converge vers zéro quand n tend vers l'infini.

Exercice 3.10 — Produits indépendants de moyenne un

M1 • énoncé, p. 25

1. On a $0 \leq \mathrm{Var}(\sqrt{X}) = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\sqrt{X}]^2 = 1 - \mathbb{E}[\sqrt{X}]^2$, donc $q = \mathbb{E}[\sqrt{X}] \leq 1$. De plus, si $q = 1$, alors la variable $\sqrt{X}$ est de variance nulle, donc presque sûrement égale à q, ce qui contredit le fait que $\mathbb{P}(X \neq 1) > 0$. Ainsi, $q < 1$.

2. D'après le théorème de Beppo-Levi, on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{X_1 \cdots X_n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\sqrt{X_1 \cdots X_n}] = \sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty.$$

Il en ressort que la série $\sum_n \sqrt{X_1 \cdots X_n}$ converge avec probabilité un. Dans ce cas, son terme général tend vers zéro, ce qui permet de conclure que $\prod_{i=1}^n X_i$ tend presque sûrement vers zéro quand n tend vers l'infini.

Exercice 3.11 — Loi faible des grands nombres pour les tableaux triangulaires

M1 • énoncé, p. 25

1. Posons $\overline{S}_n = \sum_k \overline{X}_{n,k}$. La borne de l'union puis Bienaymé–Tchebychev donnent

$$\mathbb{P}(|S_n - a_n| > \varepsilon b_n) \leq \sum_k \mathbb{P}(|X_{n,k}| > b_n) + \frac{\sum_k \mathrm{Var}(\overline{X}_{n,k})}{\varepsilon^2 b_n^2} \leq \sum_k \mathbb{P}(|X_{n,k}| > b_n) + \frac{\sum_k \mathbb{E}\overline{X}_{n,k}^2}{\varepsilon^2 b_n^2} \to 0.$$

L'indépendance n'est utilisée qu'au sein de chaque ligne.

2. Pour $b_n = n$, la première somme est $n\mathbb{P}(|X_1| > n) \to 0$. Pour $Y \geq 0$, l'identité $Y^p = \int_0^Y pt^{p-1}dt$ et Tonelli donnent $\mathbb{E}Y^p = \int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}(Y > t)dt$. Ainsi

$$\mathbb{E}[X_1^2 \mathbf{1}_{\{|X_1| \leq n\}}] \leq \mathbb{E}(|X_1| \wedge n)^2 = \int_0^n 2t\mathbb{P}(|X_1| > t)dt.$$

La fonction $g(t) = 2t\mathbb{P}(|X_1| > t)$ tend vers zéro et est bornée : elle est majorée par $2A$ sur $[0, A]$, puis bornée sur la queue par sa convergence. En coupant l'intégrale en A,

$$\frac{1}{n}\int_0^n g(t)dt \leq \frac{A}{n} \sup_{[0,\infty)} g + \frac{n-A}{n} \sup_{[A,\infty)} g.$$

On fait d'abord tendre n, puis A, vers l'infini : la limite est zéro. La seconde condition est donc satisfaite et la première question donne $S_n/n - \mu_n \to 0$ en probabilité.

3. L'intégrabilité donne $t\mathbb{P}(|X_1| > t) \leq \mathbb{E}[|X_1|\mathbf{1}_{\{|X_1|>t\}}] \to 0$. De plus, $\mu_n \to \mathbb{E}X_1$ par convergence dominée. La conclusion découle de la question précédente.

Exercice 3.12 — Paradoxe de Saint-Petersbourg

L3 / M1 • énoncé, p. 26

1. La variable X prend clairement ses valeurs dans l'ensemble des entiers de la forme 2^j pour $j \in \mathbb{N}^*$. De plus, pour tout entier $j \geq 1$, on a $\mathbb{P}(X = 2^j) = 2^{-j}$. Par conséquent,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \mathbb{P}(X = 2^j) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^j 2^{-j} = \infty.$$

2. Les parties étant indépendantes entre elles, le résultat d'un nombre infini de parties peut être consigné dans une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que celle de X, c'est-à-dire telles que $\mathbb{P}(X_k = 2^j) = 2^{-j}$ pour tous entiers $j, k \in \mathbb{N}^*$. Le gain obtenu à la k-ième partie étant donné par X_k, on en déduit que le gain accumulé au bout de n parties est $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

3. D'une part, on a pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_{n,k}| > b_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k| > 2^{m_n}) = n \sum_{j=m_n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = 2^j) = n \sum_{j=m_n+1}^{\infty} 2^{-j} = n\, 2^{-m_n} = 2^{-u_n},$$

ce qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini. D'autre part, en notant $\overline{X}_{n,k} = X_k \mathbf{1}_{\{|X_k| \leq b_n\}}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\mathbb{E}\big[\overline{X}_{n,k}^2\big] = \sum_{j=1}^{m_n} 2^{2j}\mathbb{P}(X = 2^j) = \sum_{j=1}^{m_n} 2^{2j}2^{-j} = 2(2^{m_n} - 1) = 2(b_n - 1).$$

On en déduit que

$$\frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big[\overline{X}_{n,k}^2\big] \leq \frac{2n}{b_n} = 2^{1-u_n},$$

qui tend aussi vers zéro quand n tend vers l'infini. Ainsi, les deux conditions de troncature de l'exercice 3.11 sont vérifiées.

4. Pour évaluer a_n, observons que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{E}\big[\overline{X}_{n,k}\big] = \sum_{j=1}^{m_n} 2^j\mathbb{P}(X = 2^j) = \sum_{j=1}^{m_n} 2^j 2^{-j} = m_n.$$

Il en résulte que $a_n = nm_n$.

5. On pose $u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \sup\Big\{k \leq \tfrac{1}{2}\log_2\log_2 n \,\Big|\, \log_2 n + k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les hypothèses de la question 3, c'est-à-dire qu'elle diverge vers l'infini et que $m_n = \log_2 n + u_n$ est toujours un entier. De plus, on a

$$\left|\frac{S_n}{n\log_2 n} - 1\right| \leq \left|\frac{S_n - a_n}{n\log_2 n}\right| + \left|\frac{a_n}{n\log_2 n} - 1\right| \leq \left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| + \mathrm{o}(1)$$

Donc, pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout entier n assez grand,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n\log_2 n} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini, d'après l'exercice 3.11. Finalement,

$$\frac{S_n}{n\log_2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Le gain net est $S_n - ny_n$. Si $y_n/\log_2 n \to c$, sa normalisation par $n\log_2 n$ converge en probabilité vers $1 - c$. Cette comparaison porte sur un ordre de grandeur en probabilité, et non sur une espérance finie. $\mathbb{E}X_1 = \sum_{k\geq 1} 1 = \infty$, donc la loi forte pour variables intégrables ne s'applique pas. Poser $L = \log_2 n$, $K = \lfloor \log_2(nL) \rfloor$. Alors $\mathbb{E}X_1^{(n)} = K$, $\mathbb{E}[(X_1^{(n)})^2] = 2^{K+1} - 2$, et

$$\mathbb{E}\frac{S'_n}{nL} = \frac{K}{L} \to 1, \qquad \mathrm{Var}\left(\frac{S'_n}{nL}\right) = \frac{2^{K+1} - 2 - K^2}{nL^2} \leq \frac{2}{L} \to 0.$$

La convergence est donc dans L^2, puis en probabilité. Comme les gains sont positifs, $S_n \neq S'_n$ exactement si au moins un dépasse le seuil. Ainsi $\mathbb{P}(S_n \neq S'_n) = 1 - (1 - 2^{-K})^n \leq n2^{-K} < 2/L \to 0$. Le remplacement de S'_n par S_n préserve la convergence en probabilité.

Exercice 3.13 — Limites supérieures et inférieures d'ensembles

L3 / M1 • énoncé, p. 27

La réunion est $(0,\infty)$: tout réel strictement positif dépasse $1/n$ pour n assez grand, mais zéro n'appartient à aucun terme. Pour la suite alternée, la limite inférieure est $B\cap C$ et la limite supérieure $B\cup C$. Par définition, $\liminf A_n$ signifie « appartenir à tous les termes à partir d'un rang », et $\limsup A_n$ signifie « appartenir à une infinité de termes ». On obtient

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n, \quad (\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c, \quad (\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c,$$

$$\limsup(A_n\cup B_n) = (\limsup A_n)\cup(\limsup B_n), \quad \liminf(A_n\cap B_n) = (\liminf A_n)\cap(\liminf B_n).$$

L'appartenance à une infinité d'unions implique celle à une infinité d'au moins l'une des deux suites, ce qui justifie la première égalité. On a aussi

$$(\liminf A_n)\cup(\liminf B_n)\subset \liminf(A_n\cup B_n), \quad \limsup(A_n\cap B_n)\subset(\limsup A_n)\cap(\limsup B_n),$$

et la borne intermédiaire utile

$$(\liminf A_n)\cap(\limsup B_n)\subset\limsup(A_n\cap B_n).$$

Les inclusions peuvent être strictes, comme le montre une alternance de deux événements complémentaires. Enfin, point par point,

$$\mathbf{1}_{\liminf A_n} = \liminf \mathbf{1}_{A_n}, \qquad \mathbf{1}_{\limsup A_n} = \limsup \mathbf{1}_{A_n}.$$

Exercice 3.14 — Loi zéro-un pour les sommes indépendantes

M1 • énoncé, p. 27

Fixons $m\geq 1$. Pour $n>m$, écrire $S_n = S_m + \sum_{i=m+1}^n X_i$. Ajouter la constante finie $S_m(\omega)$ ne modifie ni la propriété de tendre vers $+\infty$, ni celle d'avoir une limite supérieure égale à $+\infty$. Chacun des deux événements est donc mesurable par rapport à $\sigma(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots)$ pour tout m. Ils appartiennent à la tribu asymptotique. Par indépendance, la loi zéro-un de Kolmogorov donne à chacun une probabilité zéro ou un.

Exercice 3.15 — Événements échangeables et loi du 0-1 de Hewitt-Savage

M1 • énoncé, p. 27

1. Si A est asymptotique, pour chaque m il existe un ensemble mesurable B_m de l'espace des suites, ne dépendant que des coordonnées d'indice supérieur à m, tel que $A=\{(X_k)_{k\geq 1}\in B_m\}$. Posons $B=\limsup_m B_m$. Son image réciproque est encore A. Toute permutation de support fini laisse B_m invariant à partir d'un certain rang ; elle laisse donc B invariant. Cette représentation montre que A est échangeable.

2. Sur l'espace canonique $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, l'événement $\{\sum_n x_n = 0 \text{ avec série convergente}\}$ est invariant par toute permutation finie. Il n'est pas asymptotique, car modifier x_1 change la somme sans changer la suite à partir du deuxième terme. On peut aussi considérer l'événement $A=\{X_1+\dots+X_n\in C \text{ pour une infinité de } n\geq 1\}$, où C est un borélien de $\mathbb{R}$.

3. La preuve suit celle de la loi du 0-1 de Kolmogorov. Soit A un événement échangeable. D'après un lemme du cours, il existe une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ telle que A_n est dans la tribu engendrée par $X_1,\dots,X_n$ et $\mathbb{P}(A\Delta A_n)\to 0$ quand $n\to\infty$. Il existe des boréliens B_n et un borélien B invariant par toute permutation de support fini tels que

$$A_n=\{(X_k)_{1\leq k\leq n}\in B_n\} \qquad \text{et} \qquad A=\{(X_k)_{k\geq 1}\in B\}.$$

Fixons $n\geq 1$ et notons $\sigma\in S$ la permutation qui échange les ensembles $\{1,\dots,n\}$ et $\{n+1,\dots,2n\}$. Plus explicitement, $\sigma(i)=n+i$ si $1\leq i\leq n$, $\sigma(i)=i-n$ si $n<i\leq 2n$ et $\sigma(i)=i$ si $i>2n$. Cela permet de considérer les événements

$$A_n'=\{(X_{\sigma(k)})_{1\leq k\leq n}\in B_n\} \qquad \text{et} \qquad A'=\{(X_{\sigma(k)})_{k\geq 1}\in B\}.$$

Comme A est échangeable, on a clairement $A'=A$. En outre, $A_n'=\{(X_k)_{n+1\leq k\leq 2n}\in B_n\}$. Comme les variables sont i.i.d., les lois de $(X_k)_{k\geq 1}$ et $(X_{\sigma(k)})_{k\geq 1}$ sont les mêmes, de sorte que

$$\mathbb{P}(A\Delta A_n)=\mathbb{P}(A'\Delta A_n')=\mathbb{P}(A\Delta A_n') \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A_n')=\mathbb{P}(A_n).$$

En outre, on a $A_n \setminus (A_n \cap A'_n) \subset A_n \Delta A'_n \subset (A \Delta A_n) \cup (A \Delta A'_n)$ et les événements A_n et A'_n sont indépendants. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_n)^2 = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A'_n) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_n \cap A'_n) = \mathbb{P}(A_n \setminus (A_n \cap A'_n)) \leq 2\mathbb{P}(A \Delta A_n),$$

ce qui converge vers 0 quand $n \to \infty$. Pour conclure, il suffit d'observer que $\mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(A)$ quand $n \to \infty$, ce qui conduit finalement à $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)^2 = 0$.

4. Dans le cas i.i.d., tout événement asymptotique est échangeable par la première question, donc sa probabilité vaut zéro ou un par la troisième. La loi de Kolmogorov vaut en outre pour des variables indépendantes qui ne sont pas de même loi.

Exercice 3.16 — Intégrabilité, queues et loi forte

L3 / M1 • énoncé, p. 27

Pour $W \geq 0$, la décroissance des queues et $\mathbb{E}W = \int_0^\infty \mathbb{P}(W > t)dt$ donnent

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(W > n) \leq \mathbb{E}W \leq 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(W > n).$$

En appliquant aussi cette comparaison à W/a, on obtient la même équivalence pour tout seuil an, $a > 0$. L'égalité des lois permet de remplacer W par $|X_n|$ dans chaque terme. Si l'espérance est finie, Borel–Cantelli pour les seuils n/k donne $X_n/n \to 0$ presque sûrement. Si l'espérance est infinie et les variables indépendantes, le second lemme donne $|X_n| > an$ infiniment souvent, pour chaque entier a, donc la première limite supérieure est infinie. Posons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Comme

$$\frac{|X_n|}{n} \leq \frac{|S_n|}{n} + \frac{n-1}{n}\frac{|S_{n-1}|}{n-1},$$

une limite supérieure finie de $|S_n|/n$ contredirait le résultat précédent. Enfin, une convergence finie de S_n/n impose l'intégrabilité ; la loi forte donne alors la limite constante $\mathbb{E}X_1$.

Exercice 3.17 — Limite supérieure d'exponentielles non identiques

L3 / M1 • énoncé, p. 27

1. Fixons un entier $k \geq 2$. Comme T_k suit une loi exponentielle de taux $\ln k$, on a $\mathbb{P}(T_k \geq 1) = \mathrm{e}^{-\ln k} = 1/k$. De même, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(T_k \geq 1 + \varepsilon) = \mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)\ln k} = 1/k^{1+\varepsilon}$.

2. Les variables T_k sont indépendantes et la série $\sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(T_k \geq 1)$ diverge. Donc, le lemme de Borel-Cantelli implique qu'avec probabilité un, $T_k \geq 1$ pour une infinité d'entiers k. À l'inverse, pour $\varepsilon > 0$ fixé, la série $\sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(T_k \geq 1 + \varepsilon)$ converge, donc le lemme de Borel-Cantelli assure qu'avec probabilité un, $T_k < 1 + \varepsilon$ pour tout entier k assez grand. Il en ressort que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{p.s.} \qquad 1 \leq \limsup_{k \to \infty} T_k \leq 1 + \varepsilon.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, considérons l'événement

$$E_n = \left\{ 1 \leq \limsup_{k \to \infty} T_k \leq 1 + \frac{1}{n} \right\}.$$

Ce qui précède assure que $\mathbb{P}(E_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, l'événement $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$ est de probabilité un, puisque son complémentaire est $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{E_n}$ et que chaque événement $\overline{E_n}$ est de probabilité nulle. De plus, sur l'événement E, on a $1 \leq \limsup_{k \to \infty} T_k \leq 1 + 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'où

$$\text{p.s.} \qquad \limsup_{k \to \infty} T_k = 1.$$

Exercice 3.18 — Sommes gaussiennes et modes de convergence

L3 / M1 • énoncé, p. 27

1. Pour $t > 0$, une intégration par parties donne

$$\frac{t}{1+t^2}\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \leq \mathbb{P}(X_0 > t) \leq \frac{e^{-t^2/2}}{t\sqrt{2\pi}},$$

d'où l'équivalent annoncé.

2. La somme est gaussienne centrée de variance n, donc $S_n/\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$ exactement.

3. Pour $a_n/\sqrt{n} \to \infty$, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon a_n) = \mathbb{P}(|G| > \varepsilon a_n/\sqrt{n}) \to 0$. Avec $a_n = \sqrt{n}\log n$, pour $n \geq 2$, cette probabilité est majorée par $2e^{-\varepsilon^2(\log n)^2/2}$, une suite sommable. Borel–Cantelli pour $\varepsilon = 1/k$ donne la convergence presque sûre. La seule condition $a_n/\sqrt{n} \to \infty$ ne suffit pas. Voici un contre-exemple sans utiliser la loi du logarithme itéré. Posons $n_k = 2^{k^2}$ pour $k \geq 1$, puis $a_{n_k} = \frac{1}{2}\sqrt{n_k \log k}$ pour $k \geq 2$ et $a_n = \sqrt{n}\log(n+1)$ aux autres indices. Le rapport $a_n/\sqrt{n}$ tend vers l'infini. Les variables

$$V_k = \frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{\sqrt{n_k}}$$

sont indépendantes gaussiennes, de variances $v_k = 1 - 2^{-2k+1} \to 1$. Les probabilités $\mathbb{P}(V_k > \sqrt{\log k})$ ont l'équivalent $k^{-1/2}/\sqrt{2\pi \log k}$, car $(1/v_k - 1)\log k \to 0$. Leur série diverge. De plus, $S_{n_{k-1}}/\sqrt{n_k} \to 0$ presque sûrement, par Bienaymé–Tchebychev et la sommabilité de 2^{-2k+1}. Le second lemme de Borel–Cantelli donne alors $S_{n_k}/a_{n_k} > 1$ infiniment souvent presque sûrement. Il n'y a pas convergence vers zéro.

4. Pour $c > 0$, $\mathbb{P}(X_n > c\sqrt{2\log n}) \sim n^{-c^2}/(c\sqrt{4\pi \log n})$. La série converge pour $c > 1$ et diverge pour $c < 1$. Les deux lemmes de Borel–Cantelli donnent $\limsup X_n/\sqrt{2\log n} = 1$. Pour les valeurs absolues, la probabilité est simplement doublée, et la même conclusion s'applique.

Exercice 3.19 — Convergence des séries aléatoires

M1 • énoncé, p. 28

1. Les sommes partielles sont des martingales dont les normes L^2 au carré valent $\sum_{k\leq n} \mathrm{Var}(X_k)$, uniformément bornées. Le théorème de convergence des martingales bornées dans L^2 donne la convergence presque sûre et dans L^2.

2. Si $\sum_n a_n^2 < \infty$, les sommes partielles sont des martingales bornées dans L^2 ; elles convergent presque sûrement et dans L^2. Réciproquement, la convergence impose $a_n \to 0$. Dès lors $|a_n\varepsilon_n| \leq 1$ à partir d'un certain rang. La nécessité dans le théorème des trois séries impose la convergence de la série des variances, qui est $\sum_n a_n^2$. L'événement de convergence étant asymptotique, sa probabilité vaut zéro lorsque cette condition échoue. La convergence absolue équivaut à $\sum_n |a_n| < \infty$, puisque les valeurs absolues sont déterministes. Ainsi la série harmonique à signes indépendants converge presque sûrement, mais jamais absolument.

Si $\alpha > 1/2$, les variances $n^{-2\alpha}$ sont sommables, donc le premier point s'applique. Si $\alpha \leq 0$, les termes ne tendent pas vers zéro et la série diverge pour toute trajectoire. Si $0 < \alpha \leq 1/2$, les termes sont bornés par un et centrés, mais leur série de variances diverge : la nécessité dans le théorème des trois séries exclut la convergence presque sûre (et la loi zéro-un lui donne probabilité zéro). Enfin, $\sum_n |X_n| = \sum_n n^{-\alpha}$ pour toute trajectoire, donc la convergence absolue équivaut à $\alpha > 1$.

3. Pour chaque t fixé, les variables $Y_n = X_n \sin(n\pi t)/n$ sont indépendantes centrées, de variances au plus $1/n^2$. Le premier point donne la convergence presque sûre. L'événement de probabilité un peut dépendre de t ; cet argument ne prétend pas établir une convergence simultanée pour tous les réels t.

Exercice 3.20 — Normalisation logarithmique et lemme de Kronecker

M1 • énoncé, p. 28

La série doit commencer à $n = 2$, puisque $\log 1 = 0$. Les variables $Y_n = X_n/a_n$ sont indépendantes centrées et

$$\sum_{n\geq 2} \mathrm{Var}(Y_n) = \mathrm{Var}(X_1) \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^{1+2\varepsilon}} < \infty.$$

Les sommes partielles forment donc une martingale bornée dans L^2 ; le théorème de convergence des martingales donne la convergence presque sûre et dans L^2 de la série. On peut également appliquer le critère de convergence des séries indépendantes centrées à variances sommables. Le lemme de Kronecker donne alors $S_n/a_n \to 0$ presque sûrement. Pour le vérifier, si b_k croît vers l'infini et $s_n = \sum_{k=2}^n x_k/b_k \to s$, la sommation par parties donne

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=2}^{n} x_k = s_n - \frac{1}{b_n}\sum_{k=2}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)s_k.$$

La somme pondérée de droite tend vers s : les poids ont somme $1 - b_2/b_n \to 1$ et la contribution de tout nombre fini de termes tend vers zéro. Les deux termes se compensent. Ici $b_n = a_n$ est croissante pour $n \geq 2$; le terme isolé X_1/a_n tend aussi vers zéro.

Exercice 3.21 — Série des carrés de variables gaussiennes

M1 • énoncé, p. 28

Les indices tels que $\sigma_n = 0$ peuvent être omis dans la seconde question : les variables correspondantes sont nulles presque sûrement.

1. Considérons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k^2$ et $s_n = \sum_{k=1}^n (\mu_k^2 + \sigma_k^2)$. Alors, pour $m < n$, on a

$$\mathbb{E}[|S_n - S_m|] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=m+1}^n X_k^2\right] = \sum_{k=m+1}^n \mathbb{E}[X_k^2] = \sum_{k=m+1}^n (\mu_k^2 + \sigma_k^2) = |s_n - s_m|,$$

de sorte que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans L^1 si et seulement si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est dans $\mathbb{R}$. On déduit le résultat du fait que ces deux espaces sont complets.

2. Posons $M = \sup_n \sigma_n$, ainsi que $Z_n = X_n/\sigma_n$ pour tout entier $n \geq 1$. Alors, les variables Z_n sont indépendantes et toutes distribuées comme Z, une gaussienne standard.

- Si $M = \infty$, il existe une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers telle $\sigma_{n_k} \uparrow \infty$. Alors

$$\mathbb{P}(X_{n_k}^2 > 1) = \mathbb{P}\left(Z^2 > \frac{1}{\sigma_{n_k}^2}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{\uparrow} \mathbb{P}(Z^2 > 0) = 1,$$

de sorte que $\sum_n \mathbb{P}(X_n^2 > 1) = \infty$.

- Si $M < \infty$, on a $\mathbb{E}[X_n^2 \mathbf{1}_{\{|X_n|\leq 1\}}] = \sigma_n^2 \mathbb{E}[Z^2 \mathbf{1}_{\{|Z|\leq 1/\sigma_n\}}] \geq \sigma_n^2 \mathbb{E}[Z^2 \mathbf{1}_{\{|Z|\leq 1/M\}}]$. Donc, si $\sum_n \sigma_n^2$ diverge, il en va de même de $\sum_n \mathbb{E}[X_n^2 \mathbf{1}_{\{|X_n|\leq 1\}}]$.

Dans les deux cas, le théorème des trois séries permet d'affirmer que la probabilité que la série $\sum_n X_n^2$ converge est strictement inférieure à un. D'après la loi du zéro-un, cette probabilité est nulle.

Exercice 3.22 — Séries de cubes de variables de Cauchy

M1 • énoncé, p. 28

Les termes tels que $\varepsilon_n = 0$ sont nuls et peuvent être omis. Si ε_n ne tend pas vers zéro, les termes $\varepsilon_n X_n^3$ ne tendent même pas vers zéro en probabilité, donc la série ne peut converger presque sûrement. On suppose donc $\varepsilon_n \to 0$ pour les équivalents qui suivent. On va utiliser le théorème des trois séries. On a d'abord

$$\mathbb{P}(|\varepsilon_n X_n^3| > 1) = \mathbb{P}(|X_n| > |\varepsilon_n|^{-1/3}) = \frac{1}{\pi}\int_{|x|>|\varepsilon_n|^{-1/3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{|\varepsilon_n|^{1/3}}\right) = \frac{2}{\pi}\arctan|\varepsilon_n|^{1/3} \sim \frac{2}{\pi}|\varepsilon_n|^{1/3},$$

puis

$$\mathbb{E}[\varepsilon_n X_n^3 \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_n X_n^3|\leq 1\}}] = \frac{1}{\pi}\int_{|x|\leq|\varepsilon_n|^{-1/3}} \frac{\varepsilon_n x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

et enfin

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\varepsilon_n X_n^3 \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_n X_n^3|\leq 1\}}) = \mathbb{E}[\varepsilon_n^2 X_n^6 \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_n X_n^3|\leq 1\}}] &= \frac{1}{\pi}\int_{|x|\leq|\varepsilon_n|^{-1/3}} \frac{\varepsilon_n^2 x^6}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\varepsilon_n^2}{\pi}\int_0^{|\varepsilon_n|^{-1/3}} \frac{x^6}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\varepsilon_n^2}{\pi}\left(\frac{1}{5|\varepsilon_n|^{5/3}} - \frac{1}{3|\varepsilon_n|} + \frac{1}{|\varepsilon_n|^{1/3}} - \arctan\frac{1}{|\varepsilon_n|^{1/3}}\right) \sim \frac{2}{5\pi}|\varepsilon_n|^{1/3}.\end{aligned}$$

Ainsi, les trois séries du théorème convergent si et seulement si $\sum_n |\varepsilon_n|^{1/3}$ converge. On en déduit le résultat.

Exercice 3.23 — Critères de convergence presque sûre

L3 / M1 • énoncé, p. 28

1. La convergence a lieu si et seulement si, pour tout entier $k \geq 1$, l'événement $\{|X_n - X| \geq 1/k\}$ ne se produit qu'un nombre fini de fois, presque sûrement. Le premier lemme de Borel–Cantelli donne la condition suffisante annoncée. Elle n'est pas nécessaire : $C/n \to 0$ presque sûrement, mais

$$\mathbb{P}(|C| \geq n\varepsilon) \sim \frac{2}{\pi\varepsilon n},$$

donc la série diverge.

2. La convergence en probabilité vers zéro équivaut à $p_n \to 0$. Par les deux lemmes de Borel–Cantelli, la convergence presque sûre vers zéro équivaut à $\sum_n p_n < \infty$, et celle vers un à $\sum_n (1 - p_n) < \infty$. Si les deux séries divergent, les valeurs zéro et un apparaissent toutes deux infiniment souvent presque sûrement : la suite ne converge pas. Ces deux cas de sommabilité sont donc les seuls cas de convergence presque sûre. Pour $p_n = 1/n$, la sous-suite X_{2^k} converge presque sûrement vers zéro.

3. La limite supérieure est mesurable pour la tribu asymptotique. La loi zéro-un de Kolmogorov montre que la limite réelle X est presque sûrement une constante c : sa fonction de répartition ne prend que les valeurs zéro et un. Les événements $\{|X_n - c| \geq \varepsilon\}$ sont indépendants ; leur occurrence infinie a probabilité nulle, donc le second lemme de Borel–Cantelli impose la sommabilité. Pour les Y_n, on a $Y_n \to 0$ en probabilité, mais

$$\sum_n \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = \infty.$$

Ils ne convergent donc pas presque sûrement vers zéro, ni vers une autre limite réelle par unicité de la limite en probabilité. Cela contraste avec la convergence presque sûre de C/n.

4. L'inégalité de Markov donne $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \mathbb{E}|X_n - X|/\varepsilon$. Pour Z_n, la sommabilité de n^{-2} donne $Z_n = 0$ à partir d'un certain rang presque sûrement, donc $Z_n \to 0$ presque sûrement. Cependant $\mathbb{E}|Z_n| = n$; il n'y a pas convergence dans L^1 vers zéro, ni vers une autre limite puisque la convergence dans L^1 impliquerait une convergence en probabilité vers cette limite.

5. Presque sûrement, $|W_{n+1} - W_n| \leq a_n$ à partir d'un rang aléatoire fini. Pour $q > p$ au-delà de ce rang,

$$|W_q - W_p| \leq \sum_{n=p}^{q-1} a_n \leq \sum_{n=p}^{\infty} a_n \longrightarrow 0.$$

La suite est de Cauchy et converge dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.24 — Produits de Bernoulli voisines

L3 • énoncé, p. 29

$\mathbb{E}Y_k = p^2$, $\operatorname{Var} Y_k = p^2(1-p^2)$. Les variables Y_i, Y_j sont indépendantes si $|i-j| > 1$, et $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p^3 - p^4$. Donc

$$\mathbb{E}S_n = np^2, \qquad \operatorname{Var} S_n = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p).$$

La variance de S_n/n tend vers zéro ; la convergence vers p^2 a lieu dans L^2 et en probabilité.

Exercice 3.25 — Queues de Pareto et Borel-Cantelli

L3 • énoncé, p. 29

Si $\sum \mathbb{P}(A_k) < \infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup A_k) = 0$. Si les événements sont indépendants et la série diverge, cette probabilité vaut 1. Ici $\mathbb{P}(X_1 > x) = x^{1-\alpha}$. Pour $c > 0$, $\mathbb{P}(X_k > k^c) = k^{-c(\alpha-1)}$; la série converge exactement lorsque $c > 1/(\alpha-1)$. Les deux lemmes, appliqués à une famille dénombrable de seuils tendant vers cette valeur, donnent le résultat (le quotient est pris pour $k \geq 2$).

Exercice 3.26 — Suites construites à partir d'uniformes

M1 • énoncé, p. 29

Pour $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(U_n > \varepsilon) = \min(1, \varepsilon^{-2} n^{-2\alpha})$ et $\mathbb{E}U_n = 2n^{-\alpha}$. D'où convergence en probabilité et dans L^1 pour tout $\alpha > 0$. Les événements sont indépendants : Borel–Cantelli donne la convergence p.s. vers zéro si et seulement si $\alpha > 1/2$. Pour $\alpha \leq 1/2$, leur réalisation infiniment souvent pour tout seuil entier donne $\limsup U_n = +\infty$; et $\liminf U_n = 0$, par exemple en utilisant les événements indépendants $X_n \leq 1/2$. Conditionnellement à $X_{n+1} = u$,

Y_n est uniforme sur $[0, 1/(n+u)]$. Sa densité est donc

$$f_n(y) = \begin{cases} n + \frac{1}{2}, & 0 < y < 1/(n+1), \\ \frac{1}{2y^2} - \frac{n^2}{2}, & 1/(n+1) \le y < 1/n, \\ 0, & \text{ailleurs}, \end{cases} \qquad \mathbb{E}Y_n = \frac{1}{2}\log(1 + 1/n).$$

Les variables de rang pair sont indépendantes car elles utilisent des couples disjoints d'uniformes. Les voisines ne le sont pas : leur covariance a le signe de $\operatorname{Cov}((n+U)^{-1}, U) < 0$, les autres facteurs étant indépendants et d'espérance positive. Plus précisément cette covariance vaut $\frac{1}{2}\mathbb{E}[(n+1+X_{n+2})^{-1}]\operatorname{Cov}((n+X_{n+1})^{-1}, X_{n+1})$. On a $0 \le Y_n \le 1/n$ et

$$n^\alpha Y_n = n^{\alpha-1} X_n \, (1 + X_{n+1}/n)^{-1}.$$

Pour $\alpha < 1$, la limite est zéro. Pour $\alpha = 1$, les limites inférieure et supérieure sont 0 et 1. Pour $1 < \alpha \le 2$, elles sont 0 et $+\infty$: les événements $X_n \le cn^{1-\alpha}$ ont une série de probabilités divergente, et les $X_n \ge 1/2$ se produisent infiniment souvent. Pour $\alpha > 2$, pour tout $K > 0$, $\mathbb{P}(n^\alpha Y_n \le K) \le K(n+1)n^{-\alpha}$ est sommable ; ainsi $n^\alpha Y_n \to +\infty$ p.s. Dans les arguments de divergence on applique Borel–Cantelli directement aux X_n, indépendants, et les inégalités $n \le n + X_{n+1} \le n+1$ transfèrent les conclusions.

Exercice 3.27 — Maximum exponentiel : convergence presque sûre

M1 • énoncé, p. 29

Pour $a > 0$, $\mathbb{P}(M_n < a) = (1 - n^{-a})^n \le e^{-n^{1-a}}$. Si $a \le 0$, cette probabilité est nulle. Pour $a < 1$, la série converge ; Borel–Cantelli donne $\liminf M_n \ge 1$, en prenant une suite $a \uparrow 1$. Pour $a > 1$, l'union des événements $X_i > a \log n$ donne $\mathbb{P}(M_n > a) \le n^{1-a}$. Aux indices n^k, la série converge si $k(a-1) > 1$. Si $n^k \le m < (n+1)^k$, la monotonie du maximum donne $M_m \le M_{(n+1)^k} \log((n+1)^k)/\log(n^k)$. Le rapport tend vers 1, donc $\limsup M_m \le a$ p.s. Puis $a \downarrow 1$ conclut. Le premier indice doit être 2, puisque $\log 1 = 0$.

Exercice 3.28 — Convergences en probabilité : critères et contre-exemples

L3 • énoncé, p. 29

Chebyshev donne $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \le \mathbb{E}|X_n - X|^2/\varepsilon^2$. Pour Poisson, $\mathbb{P}(X_n \ne 0) = 1 - e^{-\lambda_n} \to 0$. Pour Y_n, la probabilité d'écart à zéro vaut $1/n^2$ dès que $n > \varepsilon$, mais $\mathbb{E}Y_n^2 = 1$: la convergence L^2 n'est pas nécessaire. Il y a même convergence p.s. par Borel–Cantelli.

Exercice 3.29 — Calcul continu en probabilité

L3 • énoncé, p. 29

Toutes les normes de $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes ; avec la norme maximum, $\{\|X_n - X\|_\infty > \varepsilon\}$ est l'union des d événements coordonnés. Une inclusion et la borne de l'union donnent les deux implications. Pour la somme, utiliser l'inégalité triangulaire et partager le seuil en deux. Pour f, fixer K tel que $\mathbb{P}(\|X\| > K) < \eta$. La continuité est uniforme sur la boule compacte de rayon $K+1$; choisir $\delta < 1$ tel que $\|x - y\| < \delta$ y implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Alors $\mathbb{P}(|f(X_n) - f(X)| \ge \varepsilon) \le \eta + \mathbb{P}(\|X_n - X\| \ge \delta)$. Faire $n \to \infty$ puis $\eta \downarrow 0$.

Exercice 3.30 — Suites de zéros dans un développement dyadique

L3 • énoncé, p. 29

Les chiffres sont iid Bernoulli équitables, car chaque bloc de k chiffres correspond à un intervalle dyadique de longueur 2^{-k}. Donc $\mathbb{P}(L_n \ge k) = 2^{-k}$, $k \ge 0$. Le premier chiffre non nul est en position $n + L_n$; sa contribution à e_n vaut $2^{-L_n - 1}$ et la somme maximale de la queue vaut 2^{-L_n}. La probabilité $\mathbb{P}(L_n \ge (1+\varepsilon)\log_2 n) = 2^{-\lceil (1+\varepsilon)\log_2 n \rceil} \le n^{-1-\varepsilon}$ est sommable. Pour la divergence, $2^{-u_n}/u_n \ge 1/[2n(\log_2 n + 1)]$. La fonction $2^{-u_n}/u_n$ décroît ; sur le bloc $n_k \le n < n_{k+1}$, sa somme est au plus $u_{n_k} 2^{-u_{n_k}}/u_{n_k} = 2^{-u_{n_k}}$. Donc $\sum_k 2^{-u_{n_k}} = \infty$. Les événements que tous les chiffres du bloc $[n_k, n_{k+1} - 1]$ sont nuls sont indépendants et de ces probabilités. Le second Borel–Cantelli donne $L_{n_k} \ge u_{n_k} \ge \log_2 n_k$ infiniment souvent. Les bornes sur e_n donnent la première affirmation. Si $e_n \le n^{-1-\varepsilon}$, alors $L_n \ge (1+\varepsilon)\log_2 n - 1 \ge (1+\varepsilon/2)\log_2 n$ pour n grand, ce qui ne se produit qu'un nombre fini de fois. Les deux bornes sur L_n donnent sa limite supérieure normalisée.

Exercice 3.31 — Complétude de L1 et de L2

L3 • énoncé, p. 29

Pour $r = 1, 2$, la positivité et l'homogénéité de $\|\cdot\|_r$ sont immédiates ; la norme est nulle exactement pour la classe nulle. L'inégalité triangulaire est celle des valeurs absolues pour $r = 1$. Pour $r = 2$, la positivité de $\mathbb{E}(X + tY)^2$

donne Cauchy–Schwarz,

$$|\mathbb{E}(XY)| \le \|X\|_2 \|Y\|_2,$$

puis l'inégalité triangulaire. L'application $\mathbb{E}(XY)$ est bilinéaire, symétrique et définie positive sur les classes : c'est un produit scalaire. Soit (X_n) de Cauchy dans L^r. On extrait (X_{n_j}) telle que $\|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}\|_r \le 2^{-j}$. Par Cauchy–Schwarz si $r = 2$, on a aussi $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_r$. Ainsi $\mathbb{E}\sum_j |X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| < \infty$, et cette série converge presque sûrement. La sous-suite converge presque sûrement vers une variable X. L'inégalité triangulaire et Fatou donnent

$$\|X - X_{n_j}\|_r \le \sum_{k \ge j} 2^{-k}.$$

Donc $X \in L^r$ et la sous-suite converge dans L^r. La propriété de Cauchy donne la convergence de toute la suite. Enfin, Cauchy–Schwarz appliquée à $|X|$ et 1 donne l'inégalité demandée.

Exercice 3.32 — Limites supérieure et inférieure d'une suite indépendante

L3 • énoncé, p. 30

Posons $b = \operatorname{ess\,sup} X_1$ et $a = \operatorname{ess\,inf} X_1$. Pour tout rationnel $t < b$, $\mathbb{P}(X_n > t) = \mathbb{P}(X_1 > t) > 0$. Le second lemme de Borel–Cantelli donne $X_n > t$ infiniment souvent presque sûrement. En intersectant sur ces rationnels, on obtient $\limsup X_n \ge b$. Si $b < \infty$, toutes les variables sont simultanément au plus b presque sûrement, ce qui donne l'égalité. Le cas $b = +\infty$ est déjà traité. En appliquant le résultat à $-X_n$, on trouve $\liminf X_n = a$. Une limite réelle presque sûre impose $a = b$, donc une loi commune de Dirac et une suite constante presque sûrement.

La suite M_n est croissante et sa limite vaut b, puisque $\limsup X_n = b$ presque sûrement et que chaque $X_n \le b$ presque sûrement lorsque $b < \infty$. On retrouve $b = \inf\{t \,:\, F(t) = 1\}$. Dans le cas fini, $F(-\infty) = 0$ assure $b > -\infty$ et la continuité à droite de F donne $F(b) = 1$.

Exercice 3.33 — Fréquences et logarithme d'une vraisemblance

L3 • énoncé, p. 30

Une catégorie de probabilité nulle n'est jamais observée presque sûrement ; on convient alors que $0^0 = 1$. Pour les autres catégories, la loi forte donne $N_n(i)/n \to p_i$. La somme étant finie,

$$\frac{1}{n}\log T_n = \sum_{i\,:\,p_i>0} \frac{N_n(i)}{n}\log p_i \longrightarrow \sum_{i\,:\,p_i>0} p_i \log p_i \quad \text{p.s.}$$

C'est l'opposé de l'entropie, avec la convention $0 \log 0 = 0$.

4. Fonctions caractéristiques et convergence en loi

Exercice 4.1 — Gaussienne de variance tendant vers zéro

L3 • énoncé, p. 31

Soit ϕ une fonction continue bornée. On cherche à montrer que $I_\sigma = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})dx$ tend vers $\phi(0)$. En terme probabiliste, $I_\sigma = E(\phi(\sigma Z))$ avec Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Or $\phi(\sigma Z(\omega))$ tend vers $\phi(0)$ pour tout ω et est majorée par $\|\phi\|_\infty$. Donc, par le théorème de convergence dominée, $E(\phi(\sigma Z))$ tend vers $\phi(0)$. *Remarque :* Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\sigma Z \leq t)$ tend vers $1/2\mathbf{1}_{\{t=0\}} + \mathbf{1}_{\{t>0\}}$. On voit donc que la fonction de répartition de σZ converge vers la fonction de répartition F_0 de la variable nulle en tout point sauf en 0 qui est un point de discontinuité de F_0.

Exercice 4.2 — Convergence en loi vers une constante

L3 • énoncé, p. 31

Si $X_n \to a$ en probabilité et f est continue bornée, alors $f(X_n) \to f(a)$ en probabilité. Pour $\eta > 0$,

$$|\mathbb{E}f(X_n) - f(a)| \leq \eta + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|f(X_n) - f(a)| > \eta).$$

On fait tendre n vers l'infini puis η vers zéro : la convergence en loi s'ensuit. Réciproquement, si $X_n \Rightarrow a$, pour tout $\varepsilon > 0$ les points $a \pm \varepsilon$ sont des points de continuité de la fonction de répartition de δ_a, donc

$$\mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) \leq 1 - F_n(a+\varepsilon) + F_n(a-\varepsilon) \longrightarrow 0.$$

Cette équivalence ne vaut pas pour une limite aléatoire non constante : si $X_n = X \sim \mathrm{Bern}(1/2)$ et $Y = 1 - X$, les lois de X_n et Y coïncident, mais $|X_n - Y| = 1$ presque sûrement.

Exercice 4.3 — Lemme de Scheffé et densités oscillantes

L3 • énoncé, p. 31

Comme $\min(f_n, f) \to f$ presque partout et $0 \leq \min(f_n, f) \leq f$, la convergence dominée donne

$$\int |f_n - f| = \int f_n + \int f - 2\int \min(f_n, f) \longrightarrow 0.$$

Pour toute fonction continue bornée h, la différence des intégrales contre les deux lois est alors majorée par $\|h\|_\infty \int |f_n - f|$, d'où la convergence en loi. Pour $f_n(x) = (1-\cos(2\pi n x))\mathbf{1}_{\{x\in[0,1]\}}$, la fonction de répartition sur $[0,1]$ vaut $F_n(t) = t - \sin(2\pi n t)/(2\pi n)$; elle converge uniformément vers celle de l'uniforme sur $[0,1]$. En revanche, pour $x \in (0,1)$, poser $\theta = 2\pi x$. Si $\cos(n\theta)$ convergait vers L, la récurrence $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta)$ imposerait $L = 0$, puisque $\cos\theta \neq 1$. Mais $\cos(2n\theta) = 2\cos^2(n\theta) - 1$ tendrait alors vers -1, en contradiction avec la convergence de la sous-suite vers zéro. Les densités ne convergent donc en aucun point de $(0,1)$. Aux points 0 et 1, elles sont toutes nulles.

Exercice 4.4 — Lois de Laplace et de Cauchy

L3 / M1 • énoncé, p. 31

La densité de Laplace est $e^{-|x|}/2$. En intégrant séparément sur les deux demi-droites, sa fonction caractéristique vaut $(1+t^2)^{-1}$. La formule d'inversion de Fourier donne celle de la Cauchy standard : $e^{-|t|}$. Par indépendance, $aY + bZ$ a fonction caractéristique $e^{-(|a|+|b|)|t|}$, donc suit une Cauchy d'échelle $|a| + |b|$. En particulier la moyenne de n Cauchy standard indépendantes est encore Cauchy standard. La loi des grands nombres intégrable ne s'applique pas car $\mathbb{E}|Y| = \infty$.

Exercice 4.5 — Convergence de couples

L3 • énoncé, p. 31

Sous indépendance à chaque rang, la fonction caractéristique du couple est le produit des fonctions caractéristiques marginales. Elle converge vers $\hat{\mu}(s)\hat{\nu}(t)$, fonction caractéristique de $\mu \otimes \nu$; le théorème de Lévy donne la conclusion. Si $Y_n \Rightarrow a$, alors $Y_n \to a$ en probabilité. Pour s, t fixés, $e^{itY_n} - e^{ita} \to 0$ en probabilité et reste borné par 2, donc tend vers zéro dans L^1. Par conséquent $\mathbb{E}e^{\mathrm{i}(sX_n + tY_n)} \to \hat{\mu}(s)e^{ita}$. Aucune indépendance n'est nécessaire dans ce second cas.

Exercice 4.6 — Un centrage incorrect dans le TCL

L3 • énoncé, p. 31

La loi forte donne $\overline{X}_n \to \mu = \mathbb{E}X_1$ presque sûrement. Si $m \neq \mu$, alors $\sqrt{n}(\overline{X}_n - m) \to +\infty$ presque sûrement lorsque $\mu > m$, et vers $-\infty$ lorsque $\mu < m$. Il n'y a pas de limite en loi à valeurs réelles.

Exercice 4.7 — Limite de Poisson et formule de Stirling

L3 • énoncé, p. 31

1. Pour $a > 0$, $\varphi_{X_a}(t) = \exp(a(e^{\mathrm{i}t} - 1))$.

2. Le développement de l'exponentielle à l'ordre deux donne

$$\varphi_{Z_a}(t) = \exp\left(a(e^{\mathrm{i}t/\sqrt{a}} - 1) - \mathrm{i}t\sqrt{a}\right) \longrightarrow e^{-t^2/2}.$$

Le théorème de Lévy entraîne $Z_a \Rightarrow G$, où $G \sim \mathcal{N}(0,1)$.

3. Pour $x > 0$, $\{Z_n^- > x\} = \{Z_n < -x\}$. Sa probabilité converge donc vers $\mathbb{P}(G < -x)$, car la loi normale n'a pas d'atomes. De plus, $\mathbb{E}Z_n^2 = 1$, et l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}(Z_n^- > x) \leq \min\{1, x^{-2}\}.$$

Cette borne est intégrable sur $(0,\infty)$. Par la formule d'intégration des queues et la convergence dominée,

$$\mathbb{E}Z_n^- \longrightarrow \mathbb{E}G^- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

4. Pour $X_n \sim \mathcal{P}(n)$, en utilisant $k\mathbb{P}(X_n = k) = n\mathbb{P}(X_n = k-1)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(n - X_n)^+ &= n\mathbb{P}(X_n \leq n-1) - n\mathbb{P}(X_n \leq n-2)\\ &= n\mathbb{P}(X_n = n-1) = \frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!}.\end{aligned}$$

La formule vaut aussi pour $n = 1$, avec $\mathbb{P}(X_n \leq -1) = 0$. Ainsi $\mathbb{E}Z_n^- = \sqrt{n}\, n^n e^{-n}/n!$.

5. La limite précédente donne la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n.$$

Enfin, la somme S_n de n variables indépendantes de loi $\mathcal{P}(1)$ suit $\mathcal{P}(n)$. Par le TCL, $\mathbb{P}(S_n \leq n) \to 1/2$. La somme demandée vaut $\mathbb{P}(S_n \leq n) - \mathbb{P}(S_n = 0)$; le terme retranché est e^{-n}, donc la limite est $1/2$.

Exercice 4.8 — Tableau de petits pas : limite gaussienne

L3 • énoncé, p. 32

L'existence des variables impose $|m_n| \leq a/\sqrt{n}$. Leur fonction caractéristique est

$$\cos(at/\sqrt{n}) + \mathrm{i}(m_n\sqrt{n}/a)\sin(at/\sqrt{n}) = 1 + \mathrm{i}tm_n - a^2t^2/(2n) + o(1/n).$$

En prenant la puissance n, on obtient $\exp(\mathrm{i}tm - a^2t^2/2)$; Lévy donne $\mathcal{N}(m, a^2)$.

Exercice 4.9 — Théorème de Lindeberg-Feller

M1 • énoncé, p. 32

1. Soit $(Y_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de variance σ^2. Posons $X_{n,m} = n^{-1/2}(Y_m - \mathbb{E}[Y_m])$. Alors les variables $X_{n,m}$ sont centrées et

$$\sum_{m=1}^n \mathbb{E}[X_{n,m}^2] = \sum_{m=1}^n \frac{1}{n}\operatorname{Var}(Y_m) = \sigma^2,$$

ce qui assure la première hypothèse. De plus,

$$\sum_{m=1}^n \mathbb{E}[X_{n,m}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,m}|>\varepsilon\}}] = \mathbb{E}[(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1])^2 \mathbf{1}_{\{|Y_1 - \mathbb{E}[Y_1]|>\sqrt{n}\varepsilon\}}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'après le théorème de convergence dominée. Donc la deuxième hypothèse est verifiée également. Si on applique le résultat de l'exercice, on obtient la convergence en loi de $n^{-1/2}\sum_{m=1}^n (Y_m - \mathbb{E}[Y_m])$ vers $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Ainsi le résultat permet de prouver le théorème central limite usuel (mais il est plus large car on peut l'utiliser pour des tableaux triangulaires).

2. D'après le théorème de Lévy, il suffit de montrer la convergence simple de la fonction caractéristique de S_n vers celle d'une variable de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Or, en utilisant l'indépendance des $X_{n,m}$, on observe que la fonction caractéristique de S_n en t vaut :

$$\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}tS_n)] = \mathbb{E}\left[\prod_{m=1}^{n}\exp(\mathrm{i}tX_{n,m})\right] = \prod_{m=1}^{n}\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}tX_{n,m})] = \prod_{m=1}^{n}\varphi_{n,m}(t).$$

Et on sait que la fonction caractéristique d'une variable de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ en t vaut $\exp(-\sigma^2t^2/2)$.

3. Soit $x\in\mathbb{R}$. La formule de Taylor à l'ordre trois s'écrit

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1+\mathrm{i}x-\frac{x^2}{2}-\mathrm{i}x^3\int_0^1\frac{(1-u)^2}{2}e^{\mathrm{i}ux}du$$

ce qui implique

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\left(1+\mathrm{i}x-\frac{x^2}{2}\right)\right| \le |x|^3\int_0^1\frac{|1-u|^2}{2}du \le \frac{|x|^3}{6}.$$

De même, la formule de Taylor à l'ordre deux donne

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\left(1+\mathrm{i}x-\frac{x^2}{2}\right)\right| \le \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-(1+\mathrm{i}x)\right|+\left|\frac{x^2}{2}\right| \le \frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2} \le x^2.$$

Soit maintenant $\varepsilon>0$. Puisque les variables $X_{n,m}$ sont centrées, on a

$$|z_{n,m}-w_{n,m}| = \left|\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_{n,m}}-\left(1+\mathrm{i}tX_{n,m}-\frac{t^2X_{n,m}^2}{2}\right)\right]\right| \le \mathbb{E}\left[\min\left\{\frac{|tX_{n,m}|^3}{6},|tX_{n,m}|^2\right\}\right].$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}|z_{n,m}-w_{n,m}| &\le \frac{|t|^3}{6}\mathbb{E}\left[|X_{n,m}|^3\mathbf{1}_{\{|X_{n,m}|\le\varepsilon\}}\right]+t^2\mathbb{E}\left[|X_{n,m}|^2\mathbf{1}_{\{|X_{n,m}|>\varepsilon\}}\right]\\ &\le \frac{\varepsilon|t|^3}{6}\mathbb{E}[X_{n,m}^2\mathbf{1}_{\{|X_{n,m}|\le\varepsilon\}}]+t^2\mathbb{E}[X_{n,m}^2\mathbf{1}_{\{|X_{n,m}|>\varepsilon\}}],\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité demandée. En sommant sur m, on obtient

$$\sum_{m=1}^{n}|z_{n,m}-w_{n,m}| \le \frac{\varepsilon|t|^3}{6}\sum_{m=1}^{n}\mathbb{E}[X_{n,m}^2]+t^2\sum_{m=1}^{n}\mathbb{E}[X_{n,m}^2\mathbf{1}_{\{|X_{n,m}|>\varepsilon\}}]$$

et donc, en utilisant les hypothèses,

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}|z_{n,m}-w_{n,m}| \le \frac{\varepsilon|t|^3}{6}\sigma^2.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout ε, il s'ensuit que cette suite tend vers zéro.

4. Le résultat est vrai pour $n=1$ de façon évidente. Supposons maintenant le résultat vrai pour un certain $n\ge1$. Alors, puisque $a_{n+1},b_1,\dots,b_n$ sont de module inférieur à 1,

$$\begin{aligned}\left|\prod_{m=1}^{n+1}a_m-\prod_{m=1}^{n+1}b_m\right| &= \left|\prod_{m=1}^{n+1}a_m-a_{n+1}\prod_{m=1}^{n}b_m+a_{n+1}\prod_{m=1}^{n}b_m-\prod_{m=1}^{n+1}b_m\right|\\ &\le \left|\prod_{m=1}^{n}a_m-\prod_{m=1}^{n}b_m\right||a_{n+1}|+\left|\prod_{m=1}^{n}b_m\right||a_{n+1}-b_{n+1}|\\ &\le \left|\prod_{m=1}^{n}a_m-\prod_{m=1}^{n}b_m\right|+|a_{n+1}-b_{n+1}|\\ &\le \sum_{m=1}^{n+1}|a_m-b_m|.\end{aligned}$$

Le résultat est prouvé à l'ordre $n+1$ donc, par récurrence, il est vrai pour tout $n\ge1$.

5. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$ et $1 \leq m \leq n$

$$\sigma_{n,m}^2 = \mathbb{E}[X_{n,m}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,m}| \leq \varepsilon\}}] + \mathbb{E}[X_{n,m}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,m}| > \varepsilon\}}] \leq \varepsilon^2 + \mathbb{E}[X_{n,m}^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,m}| > \varepsilon\}}].$$

En utilisant la deuxième hypothèse, on obtient que $\max_{1 \leq m \leq n} \sigma_{n,m}^2$ tend vers zéro quand $n \to \infty$. Ainsi, pour n assez grand, pour tout $1 \leq m \leq n$, on a $1 - t^2\sigma_{n,m}^2/2 > -1$, et donc $w_{n,m}$ est de module inférieur à un. Par ailleurs, $z_{n,m}$ est aussi de module inférieur à un, donc on peut utiliser le résultat précédent pour n assez grand :

$$\left| \prod_{m=1}^n \varphi_{n,m}(t) - \prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{\sigma_{n,m}^2}{2} t^2\right) \right| \leq \sum_{m=1}^n |z_{n,m} - w_{n,m}|.$$

Puisque le membre de droite tend vers zéro quand $n \to \infty$, le membre de gauche également.

6. Puisque $\max_{1 \leq m \leq n} \sigma_{n,m}^2$ tend vers zéro, pour n assez grand on a $1 - t^2\sigma_{n,m}^2/2 > 0$ pour tout $1 \leq m \leq n$, donc on peut passer au logarithme :

$$\ln\left(\prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{\sigma_{n,m}^2}{2} t^2\right)\right) = \sum_{m=1}^n \ln\left(1 - \frac{\sigma_{n,m}^2}{2} t^2\right).$$

On utilise maintenant l'inégalité suivante : pour tout $u \in [0, 1[$,

$$|\ln(1-u) + u| \leq \sum_{k=2}^\infty \frac{u^k}{k} \leq \frac{u^2}{2} \sum_{p=0}^\infty u^p = \frac{u^2}{2(1-u)}.$$

Puisque $\max_{1 \leq m \leq n} \sigma_{n,m}^2$ tend vers zéro, pour n assez grand on a $1 - t^2\sigma_{n,m}^2/2 > 1/2$ pour tout $1 \leq m \leq n$ et alors

$$\sum_{m=1}^n \left| \ln\left(1 - \frac{\sigma_{n,m}^2}{2} t^2\right) + \frac{\sigma_{n,m}^2}{2} t^2 \right| \leq \sum_{m=1}^n \left(\frac{\sigma_{n,m}^2}{2} t^2\right)^2 \leq \frac{t^4}{4} \left(\max_{1 \leq m \leq n} \sigma_{n,m}^2\right) \sum_{m=1}^n \sigma_{n,m}^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{t^4}{4} \cdot 0 \cdot \sigma^2 = 0.$$

Donc

$$\left| \sum_{m=1}^n \ln\left(1 - \frac{\sigma_{n,m}^2}{2} t^2\right) + \frac{\sigma^2}{2} t^2 \right| \leq \sum_{m=1}^n \left| \ln\left(1 - \frac{\sigma_{n,m}^2}{2} t^2\right) + \frac{\sigma_{n,m}^2}{2} t^2 \right| + \frac{t^2}{2} \left| \sigma^2 - \sum_{m=1}^n \sigma_{n,m}^2 \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

ce qui implique

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{m=1}^n \left(1 - \frac{\sigma_{n,m}^2}{2} t^2\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} t^2\right).$$

En reprenant le résultat de la question 2, on obtient

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{m=1}^n \varphi_{n,m}(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} t^2\right),$$

qui était le résultat cherché.

Exercice 4.10 — Théorème de représentation de Skorokhod

M1 • énoncé, p. 33

1. • *Définition.* La fonction tend vers zéro en $-\infty$, et vers un en ∞. Donc, pour tout $u \in]0, 1[$, l'ensemble des réels x tels que $F_\nu(x) > u$ est non vide et minoré. L'infimum de cet ensemble, c'est-à-dire $G_\nu(u)$, est donc bien défini. En fait, plus précisément, comme F_ν est croissante, l'ensemble des réels x tels que $F_\nu(x) > u$ est même de la forme $]G_\nu(u), \infty[$ ou $[G_\nu(u), \infty[$.

• *Croissance.* Considérons deux réels $u, u' \in]0, 1[$ avec $u \leq u'$. Alors, l'ensemble des réels x tels que $F_\nu(x) > u'$ est inclus dans celui des x tels que $F_\nu(x) > u$, si bien que $G_\nu(u') \geq G_\nu(u)$.

• *Continuité à droite.* Fixons $u \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$. On a alors $F_\nu(G_\nu(u) + \varepsilon) > u$, donc il existe $\delta > 0$ tel que $F_\nu(G_\nu(u) + \varepsilon) > u + \delta$. On en déduit que $G_\nu(u + \delta) \leq G_\nu(u) + \varepsilon$. La croissance de G_ν implique finalement que $G_\nu(u) \leq G_\nu(x) \leq G_\nu(u) + \varepsilon$ pour tout $x \in [u, u + \delta]$.

- *Loi de* $Y = G_\nu(U)$. Montrons d'abord que pour tout $u \in]0,1[$, $F_\nu(G_\nu(u)) \geq u$. Par définition de l'infimum, il existe (x_n) une suite décroissante tendant vers $G_\nu(u)$ telle que $F_\nu(x_n) > u$ pour tout n. On a donc $\lim F_\nu(x_n) \geq u$. Mais, puisque F_ν est continue à droite, $\lim F_\nu(x_n) = F_\nu(\lim x_n) = F_\nu(G_\nu(u))$. Maintenant, pour tous $u \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $u < F_\nu(x) \implies G_\nu(u) \leq x \implies u \leq F_\nu(x)$. Donc, $\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_\nu(x)) = F_\nu(x)$.

2. Notons C l'ensemble des points de continuité de G_μ. Le complémentaire dans $]0,1[$ de cet ensemble est au plus dénombrable, puisque G_μ est croissante. Prenons $u \in C$ et $\varepsilon > 0$.

- D'une part, pour tout $x > G_\mu(u)$, on a $F_\mu(x) > u$. Comme les points de discontinuité de F_μ forment un ensemble au plus dénombrable, il existe un point de continuité y de F_μ dans l'intervalle $[x, x+\varepsilon]$. On a alors $F_\mu(y) \geq F_\mu(x) > u$. Pour n assez grand, on a donc $F_{\mu_n}(y) > u$, puis $F_{\mu_n}(x+\varepsilon) > u$, ce qui implique que $G_{\mu_n}(u) \leq x + \varepsilon$. D'où
$$\limsup_{n\to\infty} G_{\mu_n}(u) \leq x + \varepsilon.$$
En faisant tendre x vers $G_\mu(u)$, il vient $\limsup_{n\to\infty} G_{\mu_n}(u) \leq G_\mu(u) + \varepsilon$.
- D'autre part, comme les points de discontinuité de F_μ sont en nombre au plus dénombrable, il existe un point de continuité y de F_μ dans l'intervalle $[G_\mu(u) - \varepsilon, G_\mu(u)[$. De plus, comme u est un point de continuité de G_μ, il existe $x < u$ tel que $G_\mu(x) > y$. Ainsi, $F_\mu(y) \leq x < u$, ce qui implique que $F_{\mu_n}(y) < u$ pour n assez grand. Donc, $G_{\mu_n}(u) \geq y \geq G_\mu(u) - \varepsilon$ et finalement
$$\liminf_{n\to\infty} G_{\mu_n}(u) \geq G_\mu(u) - \varepsilon.$$

On déduit de ce qui précède que $G_{\mu_n}(u) \to G_\mu(u)$ quand $n \to \infty$. Maintenant, notons U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$ et posons $X_n = G_{\mu_n}(U)$ pour tout entier $n \geq 1$, ainsi que $X = G_\mu(U)$. Alors, chaque X_n a pour loi μ_n, et X a pour loi μ. En outre, $U \in C$ avec probabilité un et dans ce cas $X_n = G_{\mu_n}(U) \to G_\mu(U) = X$ quand $n \to \infty$.

Exercice 4.11 — Un couplage loi géométrique-loi exponentielle

M1 • énoncé, p. 33

1. Par définition de la loi du vecteur (X,Y) et grâce à la formule fournie, on a pour tout entier $n \geq 0$,
$$\mathbb{P}(X = n) = b\int_0^\infty \frac{(ay)^n}{n!} e^{-(a+b)y}\,dy = \frac{b}{a+b}\Big(\frac{a}{a+b}\Big)^n.$$
On remarque alors que X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $b/(a+b)$. La probabilité précédente est strictement positive, donc on peut considérer l'espérance conditionnellement à l'événement $\{X = n\}$ et écrire
$$\mathbb{E}[h(Y)|X = n] = \frac{\mathbb{E}[h(Y)\mathbf{1}_{\{X=n\}}]}{\mathbb{P}(X = n)}.$$
Ensuite, observons que
$$\mathbb{E}[h(Y)\mathbf{1}_{\{X=n\}}] = b\int_0^\infty h(y)\frac{(ay)^n}{n!}e^{-(a+b)y}dy. \tag{4}$$
En effet, la définition de la loi du vecteur (X,Y) assure que l'égalité précédente est vérifiée lorsque h est de la forme $\mathbf{1}_{[0,t]}$ pour $t \geq 0$. Comme les intervalles de la forme $[0,t]$ constituent un π-système, il en résulte que l'égalité précédente est vraie lorsque h est de la forme $\mathbf{1}_B$, où B est un ensemble appartenant à la tribu engendrée par ce π-système, qui n'est autre que la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^+$. On en déduit que l'ensemble $\mathscr{H}$ des fonctions h vérifiant l'égalité précédente contient les indicatrices de boréliens. En outre, $\mathscr{H}$ est clairement stable par combinaison linéaire à coefficients positifs (par linéarité de l'espérance et de l'intégrale) et par limite croissante (en vertu du théorème de convergence monotone). Finalement, un résultat du cours assure que $\mathscr{H}$ contient toutes les fonctions mesurables positives. Maintenant, en utilisant l'égalité précédente, on obtient
$$\mathbb{E}[h(Y)|X = n] = \frac{\mathbb{E}[h(Y)\mathbf{1}_{\{X=n\}}]}{\mathbb{P}(X = n)} = (a+b)^{n+1}\int_0^\infty h(y)\frac{y^n}{n!}e^{-(a+b)y}\,dy,$$
que l'on note $\phi(n)$. On a alors, comme X est à valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}[h(Y)|X] = \phi(X).$$
Autrement dit, conditionnellement à X, la variable Y suit la loi Gamma de paramètres $X+1$ et $a+b$.

2. Pour calculer l'espérance de $Y/(X+1)$, commençons par conditionner par rapport à X, c'est-à-dire par calculer, à l'aide du résultat de la question précédente et de la formule fournie,

$$\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\middle|X\right] = \frac{1}{X+1}\mathbb{E}[Y|X] = \frac{(a+b)^{X+1}}{X+1}\int_0^\infty y\frac{y^X}{X!}\mathrm{e}^{-(a+b)y}\,\mathrm{d}y = \frac{(a+b)^{X+1}}{X+1}\frac{(X+1)!}{X!(a+b)^{X+2}} = \frac{1}{a+b}.$$

En prenant l'espérance, on en déduit directement que

$$\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\right] = \frac{1}{a+b}.$$

3. Par définition de la loi du couple (X,Y), on a

$$\mathbb{P}(Y\le t) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(X=n \text{ et } Y\le t) = \sum_{n=0}^\infty b\int_0^t \frac{(ay)^n}{n!}\mathrm{e}^{-(a+b)y}\,\mathrm{d}y = \int_0^t b\mathrm{e}^{-by}\,\mathrm{d}y,$$

de sorte que Y suit la loi exponentielle de taux b. En combinant cette observation avec l'égalité précédente, on en déduit que pour toute fonction mesurable $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X=n\}}h(Y)] = b\int_0^\infty h(y)\frac{(ay)^n}{n!}\mathrm{e}^{-(a+b)y}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty\left(\frac{(ay)^n}{n!}\mathrm{e}^{-ay}h(y)\right)b\mathrm{e}^{-by}\,\mathrm{d}y = \mathbb{E}\left[\frac{(aY)^n}{n!}\mathrm{e}^{-aY}h(Y)\right].$$

Cela implique directement que

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X=n\}}|Y] = \frac{(aY)^n}{n!}\mathrm{e}^{-aY},$$

c'est-à-dire que, conditionnellement à Y, la variable X suit la loi de Poisson de paramètre aY. D'où

$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_{n=0}^\infty n\,\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X=n\}}|Y] = \sum_{n=1}^\infty \frac{(aY)^n}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-aY} = aY.$$

Exercice 4.12 — Attente d'un événement rare

M1 • énoncé, p. 33

On prend la convention $\mathbb{P}(X_p = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour $k\ge 1$. Pour $t\ge 0$,

$$\mathbb{P}(pX_p > t) = (1-p)^{\lfloor t/p\rfloor} \longrightarrow e^{-t},$$

car $\log(1-p)/p \to -1$ et $p\lfloor t/p\rfloor \to t$. Pour $t<0$, la fonction de répartition est nulle. Donc pX_p converge en loi vers une exponentielle de taux un. Avec la convention géométrique sur $\mathbb{N}$, la différence est p et la même limite s'obtient.

Exercice 4.13 — Problème des anniversaires

M1 • énoncé, p. 33

Pour $1\le n\le N$, l'absence de répétition donne

$$\mathbb{P}(T_N > n) = \prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{j}{N}\right) = \frac{N!}{(N-n)!N^n},$$

et cette probabilité vaut zéro pour $n > N$. Pour $N = 365$, sous le modèle des anniversaires indépendants uniformes, c'est la probabilité que les n personnes aient toutes des dates distinctes. Pour $t\ge 0$, poser $m_N = \lfloor t\sqrt{N}\rfloor$. Le développement $\log(1-u) = -u + O(u^2)$, uniforme ici puisque $m_N/N\to 0$, donne

$$\log\mathbb{P}(T_N > m_N) = -\frac{m_N(m_N-1)}{2N} + O(m_N^3/N^2) \longrightarrow -t^2/2.$$

Donc $T_N/\sqrt{N}$ converge vers la loi de Rayleigh de fonction de répartition $1-e^{-t^2/2}$ pour $t\ge 0$, nulle pour $t<0$. L'approximation limite pour $\mathbb{P}(T_{365} > 22)$ est $e^{-22^2/(2\cdot 365)} \simeq 0{,}515296$. La valeur exacte est 0,524305. La probabilité d'une coïncidence parmi 22 personnes vaut donc environ 47,57% ; l'approximation limite donne environ 48,47%.

Exercice 4.14 — Théorème de Glivenko-Cantelli

M1 • énoncé, p. 34

1. La fonction de répartition F est continue, donc la mesure de probabilité $\mathrm{d}F$ qu'elle définit, qui n'est autre que la loi commune aux variables aléatoires X_n, est sans atome. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\exists i,j\in\{1,\dots,n\}\text{ distincts }:\ X_i=X_j)\le\sum_{1\le i\ne j\le n}\mathbb{P}(X_i=X_j)=n(n-1)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{\{x=y\}}\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}F(y)=0.$$

Donc, presque sûrement, les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont distinctes et on peut correctement en définir les statistiques d'ordre $X^n_{(1)},\dots,X^n_{(n)}$. Dans toute la suite, on se placera sur l'événement de probabilité un sur lequel ces statistiques d'ordre sont strictement croissantes.

2. On observe que $F_n(x)$ prend ses valeurs dans $\{0,1/n,2/n,\dots,(n-1)/n,1\}$. De plus, on a

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\operatorname{Card}\{j\in\{1,\dots,n\}\mid X_j\le x\}. \tag{5}$$

Donc, pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$,

$$\left\{F_n(x)=\frac{k}{n}\right\}=\bigcup_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,n\}\\ \operatorname{Card}J=k}}\left(\bigcap_{j\in J}\{X_j\le x\}\cap\bigcap_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus J}\{X_j>x\}\right).$$

Comme les $X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires, cela assure que $F_n(x)$ est aussi une variable aléatoire.

3. C'est une conséquence directe de la formule de la question 2.

4. Dans le cas où $F(x)=x$ pour tout $x\in[0,1]$, les variables X_n suivent la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. De plus, à $x\in[0,1]$ fixé, en utilisant la formule de la question 2 et la loi forte des grands nombres, on obtient

$$\text{p.s.}\qquad F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{1}_{\{X_j\le x\}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_1\le x\}}]=F(x).$$

En d'autres termes,

$$\forall x\in[0,1]\quad\text{p.s.}\qquad\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x). \tag{6}$$

5. Il s'agit d'échanger le "pour tout $x\in[0,1]$" et le "presque sûrement" dans la convergence ponctuelle presque sûre, ce qui ne peut se faire directement car x parcourt un ensemble infini non dénombrable. Cependant, on peut déduire de la convergence ponctuelle presque sûre que l'événement

$$A=\left\{\forall x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\quad\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)\right\}$$

est de probabilité un, car on se restreint alors à prendre x dans un ensemble dénombrable. Plaçons-nous sur l'événement A et prenons un réel $x\in[0,1]$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite croissante $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de rationnels et une suite décroissante $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui convergent toutes deux vers x. Comme la fonction F_n est croissante, on a $F_n(a_p)\le F_n(x)\le F_n(b_p)$ pour tous entiers n et p. On obtient, en faisant tendre n vers l'infini,

$$F(a_p)\le\liminf_{n\to\infty}F_n(x)\le\limsup_{n\to\infty}F_n(x)\le F(b_p).$$

La fonction F étant continue sur $\mathbb{R}$, le membre de gauche et le membre de droite tend tous deux vers $F(x)$ quand $p\to\infty$. On en déduit que sur l'événement presque sûr A,

$$\forall x\in[0,1]\qquad\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x).$$

6. Fixons $m\ge1$. Sur l'événement où la convergence vaut en tous les points rationnels, on a, pour $j/m\le x\le(j+1)/m$,

$$F_n(j/m)\le F_n(x)\le F_n((j+1)/m).$$

Il en résulte

$$\sup_{x\in[0,1]}|F_n(x)-x|\le\max_{0\le j\le m}|F_n(j/m)-j/m|+\frac{1}{m}.$$

Le maximum fini tend vers zéro. En prenant la limite supérieure en n puis en faisant tendre m vers l'infini, on obtient la convergence uniforme. Hors de $[0,1]$, les fonctions de répartition coïncident presque sûrement.

7. On a clairement pour tous réels $x \in \mathbb{R}$ et $u \in (0,1)$,

$$F^{-1}(u) \leq x \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \leq F(x).$$

Donc, si U suit la loi uniforme sur $(0,1)$, on a pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\{F^{-1}(U) \leq x\} = \{U \leq F(x)\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x),$$

ce qui prouve que $F^{-1}(U)$ est une variable aléatoire de fonction de répartition égale à F.

8. La question précédente assure que si $U_1, \dots, U_n$ désignent des variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $(0,1)$, alors $(F^{-1}(U_1), \dots, F^{-1}(U_n))$ a même loi que $(X_1, \dots, X_n)$. Donc, en désignant par $\overset{\mathscr{L}}{=}$ l'égalité en loi, on a

$$\begin{aligned} V_n &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_j \leq x\}} - F(x) \right| \\ &\overset{\mathscr{L}}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{F^{-1}(U_j) \leq x\}} - F(x) \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_j \leq F(x)\}} - F(x) \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^{\text{unif}}(F(x)) - F(x)|. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit d'observer que cette dernière quantité est égale à

$$\sup_{t\in F(\mathbb{R})} |F_n^{\text{unif}}(t) - t| \leq \sup_{t\in[0,1]} |F_n^{\text{unif}}(t) - t|,$$

ce qui tend presque sûrement vers zéro quand $n \to \infty$, d'après le résultat de la question 6.

Pour conclure à la convergence presque sûre dans le modèle initial, il faut considérer la suite entière : $(F^{-1}(U_j))_{j\geq 1}$ a la même loi sur l'espace produit que $(X_j)_{j\geq 1}$. L'événement de convergence uniforme est mesurable, le supremum pouvant être pris sur les rationnels par continuité à droite. Sa probabilité un se transfère donc à la suite initiale ; une simple égalité en loi séparément à chaque rang ne suffirait pas.

Exercice 4.15 — Convergence des maxima

L3 / M1 • énoncé, p. 34

L'indépendance donne $\mathbb{P}(M_n \leq x) = F(x)^n$.

1. Pour $t > 0$ et n assez grand, $\mathbb{P}(M_n/n^{1/\alpha} \leq t) = (1 - t^{-\alpha}/n)^n \to e^{-t^{-\alpha}}$. Pour $t \leq 0$, la probabilité vaut zéro. C'est la loi de Fréchet de paramètre α.

2. Pour $t < 0$ et n assez grand, $\mathbb{P}(n^{1/\beta} M_n \leq t) = (1 - |t|^\beta/n)^n \to e^{-|t|^\beta}$. Pour $t \geq 0$, la probabilité vaut un. On obtient une loi de Weibull réfléchie.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et n assez grand, $\mathbb{P}(M_n - \log n \leq t) = (1 - e^{-t}/n)^n \to \exp(-e^{-t})$, la fonction de répartition de la loi de Gumbel.

Pour $0 < \varepsilon < 1$, la borne de l'union donne $\mathbb{P}(M_n > (1+\varepsilon)\log n) \leq n^{-\varepsilon}$, tandis que $\mathbb{P}(M_n \leq (1-\varepsilon)\log n) \leq e^{-n^\varepsilon}$. Ainsi $M_n/\log n \to 1$ en probabilité.

Exercice 4.16 — Fonctions caractéristiques et moments gaussiens

L3 / M1 • énoncé, p. 35

La binomiale a fonction caractéristique $(1 - p + pe^{it})^n$ et l'exponentielle de taux λ a $\lambda/(\lambda - it)$. Pour une normale standard, une intégration par parties donne $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$ et $\varphi(0) = 1$, donc $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. Les moments impairs sont nuls par symétrie ; les moments pairs valent $\mathbb{E}G^{2k} = (2k)!/(2^k k!)$, soit $\mathbb{E}G^{2k} = (2k-1)\mathbb{E}G^{2k-2}$ par intégration par parties.

Pour $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\mathbb{E}X^{2k} = \sigma^{2k}(2k)!/(2^k k!)$ et les moments impairs sont nuls ; la formule reste valable pour $\sigma = 0$ et $k \geq 1$.

Exercice 4.17 — Moyenne d'une fonction caractéristique

M1 • énoncé, p. 35

On définit $g(0) = 1$. Si $f = \varphi_X$, prendre U uniforme sur $[0,1]$ indépendante de X. Fubini donne $\varphi_{UX}(t) = \int_0^1 f(tu)du$, ce qui est $t^{-1}\int_0^t f(v)dv$ pour $t \neq 0$, y compris pour $t < 0$.

Exercice 4.18 — Théorème de Slutsky par les fonctions caractéristiques

L3 / M1 • énoncé, p. 35

1. a) Puisque, pour tous réels x, y, $|e^{ix} - e^{iy}| \leq |x-y|$, on peut écrire

$$\begin{aligned} |e^{iA_n v} - e^{iav}| &= |e^{iA_n v} - e^{iav}|\mathbf{1}_{\{|A_n - a| \leq \varepsilon\}} + |e^{iA_n v} - e^{iav}|\mathbf{1}_{\{|A_n-a|>\varepsilon\}} \\ &\leq |A_n v - av|\mathbf{1}_{\{|A_n-a|\leq\varepsilon\}} + (|e^{iA_n v}| + |e^{iav}|)\mathbf{1}_{\{|A_n-a|>\varepsilon\}} \\ &\leq |v|\varepsilon + 2\mathbf{1}_{\{|A_n-a|>\varepsilon\}} \end{aligned}$$

b) Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$. On peut décomposer la différence de la façon suivante

$$\mathbb{E}(e^{iuY_n}e^{ivA_n}) - \mathbb{E}(e^{iuY}e^{iva}) = \mathbb{E}(e^{iuY_n}(e^{ivA_n} - e^{iva})) + e^{iva}(\mathbb{E}(e^{iuY_n}) - \mathbb{E}(e^{iuY}))$$

Comme $A_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$, $\mathbb{P}(|A_n - a| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et comme $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$, $\varphi_{Y_n}(u) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_Y(u)$. Ainsi, en utilisant le résultat précédent,

$$\begin{aligned} |\varphi_{(Y_n,A_n)}(u,v) - \varphi_Y(u)e^{iav}| &\leq \mathbb{E}(|e^{ivA_n} - e^{iva}|) + |\mathbb{E}(e^{iuY_n}) - \mathbb{E}(e^{iuY})| \\ |\varphi_{(Y_n,A_n)}(u,v) - \varphi_Y(u)e^{iav}| &\leq |v|\varepsilon + 2\mathbb{P}(|A_n - a| > \varepsilon) + |\varphi_{Y_n}(u) - \varphi_Y(u)| \\ \limsup_n |\varphi_{(Y_n,A_n)}(u,v) - \varphi_Y(u)e^{iav}| &\leq |v|\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

c) La fonction caractéristique de (Y_n, A_n) converge vers la fonction caractéristique de (Y, a). Donc (Y_n, A_n) converge en loi vers (Y, a).

2. Notons $\sigma^2 = \mathbb{E}(X_1^2)$.

a) D'après la loi des grands nombres appliquée aux variables X_i^2 qui sont intégrables, $n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^2$ converge presque sûrement et en probabilité vers σ^2.

b) Notons

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i, \qquad A_n = \left(\frac{1}{\sigma^2 n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{-1/2}.$$

On pose $A_n = 0$ lorsque la somme des carrés est nulle. D'après le théorème central limite, $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0,1)$. Par ailleurs, d'après la question précédente, $A_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$. En appliquant le lemme de Slutsky, on obtient

$$Y_n A_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Si la somme des carrés est nulle, on définit le quotient égal à zéro. Cet événement a probabilité $\mathbb{P}(X_1 = 0)^n \to 0$, puisque la variance est strictement positive, et ne modifie pas la convergence en loi.

Exercice 4.19 — Inversion de la transformée de Laplace par des lois de Poisson

M1 • énoncé, p. 35

La somme suit $\mathscr{P}(nx)$. L'expression de la question 2 est donc $\mathbb{P}(S_n/n \leq \lfloor ny \rfloor/n)$: la loi des grands nombres donne les limites 1 pour $y > x$ et 0 pour $y < x$. Si $y = x$, le TCL s'applique avec le seuil $(\lfloor nx \rfloor - nx)/\sqrt{nx} \to 0$ et donne $1/2$. Pour la dernière question, toutes les dérivées existent en $n > 0$, avec $L^{(k)}(n) = \mathbb{E}[(-X)^k e^{-nX}]$: les facteurs $x^k e^{-nx}$ sont bornés sur $[0,\infty)$, ce qui justifie les dérivations localement. La somme s'écrit

$$\mathbb{E}\left[e^{-nX}\sum_{k=0}^{\lfloor ny \rfloor}\frac{(nX)^k}{k!}\right].$$

L'intégrande est entre zéro et un et converge vers $\mathbf{1}_{\{X<y\}} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{X=y\}}$. La convergence dominée donne la formule, avec une somme vide si $y < 0$.

Exercice 4.20 — Convergence des lois discrètes et conservation de la masse

L3 / M1 • énoncé, p. 36

1. Le lemme de Fatou donne $\sum_x p_x \le \liminf_n \sum_x \mu_n(\{x\}) = 1$. Sur $E = \mathbb{N}$, les probabilités $\mu_n = \delta_n$ ont pour limite ponctuelle la famille nulle.

2. Si $\sum_x p_x = 1$, choisir une partie finie F_0 telle que $\sum_{x\in F_0} p_x > 1-\varepsilon/2$. La convergence sur F_0 donne $\mu_n(F_0) \ge 1-\varepsilon$ pour tous les indices assez grands. Pour chacun des indices restants, choisir une partie finie portant une masse au moins $1-\varepsilon$; la réunion de ces parties et de F_0 convient. Réciproquement, la convergence sur une partie finie F fournie par l'hypothèse donne $\sum_{x\in F} p_x \ge 1-\varepsilon$. Faire tendre ε vers zéro et utiliser la première question.

3. Si $p_x > 0$, alors $\mu_n(\{x\}) > p_x/2 > 0$ à partir d'un certain rang. C'est l'inclusion annoncée. Pour la convergence en variation, choisir une partie finie F telle que $\mu(F^c) < \varepsilon$. La somme des écarts sur F tend vers zéro et

$$\sum_{x\notin F} |\mu_n(\{x\}) - p_x| \le \mu_n(F^c) + \mu(F^c).$$

Comme $\mu_n(F) \to \mu(F)$, la limite supérieure de cette queue est inférieure à 2ε ; on conclut en faisant tendre ε vers zéro.

4. La fonction $h(t) = \min(1, \operatorname{dist}(t, \mathbb{Z}))$ est continue bornée, positive hors de $\mathbb{Z}$ et nulle sur $\mathbb{Z}$. La convergence en loi donne $\mathbb{E}h(X) = \lim_n \mathbb{E}h(X_n) = 0$, donc $X \in \mathbb{Z}$ presque sûrement. Pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, choisir une fonction continue à support dans $[j-1/2, j+1/2]$, égale à 1 en j. Ses espérances sont les masses en j, qui convergent donc.

5. La nécessité découle de la question précédente. Réciproquement, la troisième question donne la convergence en variation, donc la convergence des intégrales de toute fonction bornée et en particulier des fonctions continues bornées. Dans l'exemple $X_n = n$, toutes les masses tendent vers zéro : il n'y a pas de limite en loi sur $\mathbb{R}$.

6. Non. Les densités $(1-\cos(2\pi n x))\mathbf{1}_{\{x\in[0,1]\}}$ ont des lois convergeant vers l'uniforme sur $[0,1]$, mais elles ne convergent en aucun point de $(0,1)$, comme établi dans l'exercice 4.3.

Exercice 4.21 — Tension d'un couple et convergence des marginales

M1 • énoncé, p. 36

1. Comme $(X_n)_{n\ge1}$ converge en loi, la suite $(\mathbb{P}_{X_n})_{n\ge1}$ converge étroitement, donc est tendue. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $\mathbb{P}_{X_n}(K) \ge 1-\varepsilon/2$ pour tout $n \ge 1$. De même, il existe un compact K' tel que $\mathbb{P}_{Y_n}(K') \ge 1-\varepsilon/2$ pour tout $n \ge 1$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{U_n}(K\times K') &= \mathbb{P}(X_n \in K \text{ et } Y_n \in K')\\ &= \mathbb{P}(X_n \in K) + \mathbb{P}(Y_n \in K') - \mathbb{P}(X_n \in K \text{ ou } Y_n \in K')\\ &\ge (1-\varepsilon/2) + (1-\varepsilon/2) - 1 = 1-\varepsilon.\end{aligned}$$

La suite $(\mathbb{P}_{U_n})_{n\ge1}$ est donc tendue.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}^2$, notons $\Phi(t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}t\cdot U_n}]$. Comme $(\mathbb{P}_{U_n})_{n\ge1}$ est tendue, elle admet une valeur d'adhérence μ pour la convergence étroite. Il existe donc une variable aléatoire U de loi μ et une suite $(n_k)_{k\ge1}$ strictement croissante d'entiers strictement positifs telles que $U_{n_k} \xrightarrow{\mathscr{L}} U$ quand $k \to \infty$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^2$, on a donc $\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}t\cdot U_{n_k}}] \to \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}t\cdot U}]$ quand $k \to \infty$, ce qui implique que $\Phi(t) = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}t\cdot U}]$. Le théorème de Paul Lévy montre que $U_n \xrightarrow{\mathscr{L}} U$.

Exercice 4.22 — Tension et convergence des intégrales

L3 / M1 • énoncé, p. 36

1. Posons $A = \sup_{\mathbb{P}\in P} \int_{\mathbb{R}} |g| d\mathbb{P} < \infty$ et prenons $\varepsilon > 0$. Il existe un compact K de $\mathbb{R}$ tel que $|g(x)| \ge (A+1)/\varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus K$. Pour tout $\mathbb{P} \in P$, on a alors

$$A \ge \int_{\mathbb{R}} |g| d\mathbb{P} \ge \int_{\mathbb{R}\setminus K} |g| d\mathbb{P} \ge \frac{A+1}{\varepsilon}\, \mathbb{P}(\mathbb{R}\setminus K),$$

donc $\mathbb{P}(K) \ge 1-\varepsilon$. La famille P est donc tendue.

2. Considérons une suite croissante de fonctions continues ψ_m à valeurs dans $[0,1]$, à support dans $[-m-1, m+1]$ et valant un uniformément sur $[-m,m]$. Pour tous $m,n\in\mathbb{N}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |g|\psi_m d\mathbb{P}_n \le \int_{\mathbb{R}} |g| d\mathbb{P}_n \le A.$$

De plus, la fonction $|g|\psi_m$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et la suite $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers μ, donc

$$\int_{\mathbb{R}} |g|\psi_m d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g|\psi_m d\mathbb{P}_n \le A.$$

Finalement, comme $|g|\psi_m$ converge en croissant vers $|g|$, le théorème de Beppo-Levi donne

$$\int_{\mathbb{R}} |g| d\mu = \lim_{m\uparrow\infty} \uparrow \int_{\mathbb{R}} |g|\psi_m d\mu \le A.$$

Autre méthode : D'après le théorème de représentation de Skorokhod, il existe une variable aléatoire X de loi μ et, pour chaque $n\in\mathbb{N}$, une variable aléatoire X_n de loi $\mathbb{P}_n$, telles que p.s. $X_n\to X$. Comme g est continue, on a p.s. $|g(X_n)|\to|g(X)|$. D'après le lemme de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}} |g| d\mu = \mathbb{E}[|g(X)|] = \mathbb{E}\Big[\liminf_{n\to\infty} |g(X_n)|\Big] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|g(X_n)|] = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g| d\mathbb{P}_n \le A.$$

3. Choisir B tel que $|f(x)|\le\varepsilon|g(x)|$ pour $|x|>B$, puis une fonction continue ϕ à valeurs dans $[0,1]$, égale à un sur $[-B,B]$ et nulle hors de $[-B-1,B+1]$. Alors

$$\left|\int f\, d\mathbb{P}_n - \int f\, d\mu\right| \le \left|\int f\phi\, d\mathbb{P}_n - \int f\phi\, d\mu\right| + \varepsilon\int |g|\, d\mathbb{P}_n + \varepsilon\int |g|\, d\mu.$$

Le premier terme tend vers zéro car $f\phi$ est continue bornée. Les deux autres ont somme au plus $2A\varepsilon$. Faire tendre ε vers zéro.

Pour l'application, il existe n_0 tel que $\sup_{n\ge n_0}\mathbb{E}|X_n|^r<\infty$. On applique les questions précédentes à $g(x)=|x|^r$ et aux lois de X_n, $n\ge n_0$. Elles donnent $\mathbb{E}|X|^r<\infty$ et la convergence demandée.

Exercice 4.23 — Dérivées d'une fonction caractéristique

M1 • énoncé, p. 36

Pour $0\le k\le p$, $\mathbb{E}|X|^k<\infty$. La dérivation sous l'espérance est justifiée par $|X|^k$, et donne $\varphi^{(k)}(t)=\mathbb{E}[(\mathrm{i}X)^k e^{\mathrm{i}tX}]$. La convergence dominée assure la continuité de chaque dérivée. En particulier $\varphi^{(k)}(0)=\mathrm{i}^k\mathbb{E}X^k$.

La formule de Taylor–Peano en zéro donne donc

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{p}\frac{\mathrm{i}^k\mathbb{E}[X^k]}{k!}t^k+o(t^p).$$

Pour une normale standard, tous les moments absolus sont finis et $\varphi(t)=e^{-t^2/2}$. En comparant les coefficients de ses développements à tout ordre, on obtient

$$\mathbb{E}X^{2n}=\frac{(2n)!}{2^n n!},\qquad \mathbb{E}X^{2n+1}=0.$$

Le quotient $(2n)!/(2^n n!)$ est le produit des entiers impairs de 1 à $2n-1$.

Exercice 4.24 — Critère de Pólya

M1 • énoncé, p. 37

L'intégrale de Dirichlet $\int_0^\infty \sin x/x\,dx=\pi/2$ se démontre en introduisant $e^{-\varepsilon x}$, puis par intégration par parties pour contrôler uniformément la queue. Une intégration par parties donne $\int_0^\infty(1-\cos x)x^{-2}dx=\pi/2$. La fonction proposée est donc une densité. Par changement de variable, $|a|=(2/\pi)\int_0^\infty(1-\cos(ta))t^{-2}dt$; Tonelli donne la formule pour $\mathbb{E}|X|$, même si elle est infinie. La fonction triangulaire $h(t)=(1-|t|)^+$ est la convolution des indicatrices de $[-1/2,1/2]$. Son inverse de Fourier vaut $(1-\cos x)/(\pi x^2)$ (avec la valeur limite $1/(2\pi)$ en zéro).

L'inversion donne donc $\varphi_X = h$. Sur $(0,\infty)$, la dérivée droite φ'_+ est croissante et négative. Sa limite à l'infini est nulle : une limite strictement négative contredirait $\varphi(t) \to 0$. Sa mesure de Stieltjes $\eta = d\varphi'_+$ est donc positive et vérifie $-\varphi'_+(u) = \eta((u,\infty))$. La convexité assure l'absolue continuité sur tout intervalle compact de $(0,\infty)$. Pour $t > 0$, on obtient ainsi $\varphi(t) = \int_t^\infty -\varphi'_+(u)\,du$. Le théorème de Tonelli, puis la convergence monotone lorsque $t \downarrow 0$, donnent

$$\varphi(t) = \int_{(t,\infty)} (s-t)\eta(ds), \qquad \int_0^\infty s\eta(ds) = 1.$$

Ainsi $\nu(ds) = s\eta(ds)$ est une probabilité et donne la représentation demandée. Pour une fonction affine par morceaux, ses atomes sont les points de changement de pente s, de masses $s(\varphi'_+(s) - \varphi'_-(s))$. On mélange les lois de X/s selon ces masses. Le même mélange, par Tonelli, fonctionne pour une mesure ν quelconque. Enfin e^{-t^α} est décroissante et convexe sur $(0,\infty)$ si $0 < \alpha \le 1$, puisque sa dérivée seconde vaut $e^{-t^\alpha}[\alpha^2 t^{2\alpha-2} + \alpha(1-\alpha)t^{\alpha-2}] \ge 0$. Pólya s'applique ; le produit des fonctions caractéristiques donne la stabilité annoncée.

Exercice 4.25 — Produits infinis et loi de Cantor

M1 • énoncé, p. 37

Par convergence dominée, $\varphi_{S_\infty}(t) = \lim_n \mathbb{E}e^{itS_n} = \lim_n \prod_{j=1}^n \varphi_j(t)$. L'itération de la formule trigonométrique donne $\sin t = 2^n \sin(t/2^n)\prod_{j=1}^n \cos(t/2^j)$. Pour $t \neq 0$ fixé, le facteur $2^n \sin(t/2^n)$ est non nul pour n assez grand et tend vers t. Le produit tend donc vers $\sin t/t$; en zéro, tous ses facteurs valent 1. Probabilistement, $\sum_{j\ge1} \varepsilon_j 2^{-j}$, avec signes équiprobables indépendants, est uniforme sur $[-1,1]$, car ses approximations sont uniformes sur les grilles dyadiques. Sa fonction caractéristique est donc $\sin t/t$. Pour la loi de Cantor,

$$\varphi(t) = \prod_{j\ge1} \frac{1 + e^{2\mathrm{i}t/3^j}}{2} = e^{\mathrm{i}t/2} \prod_{j\ge1} \cos(t/3^j).$$

Pour $t = 3^k\pi$, les k premiers cosinus valent -1 ; le facteur de phase vaut $\mathrm{i}(-1)^k$. Leur produit vaut donc i, et $\varphi(3^k\pi) = \mathrm{i}\prod_{j\ge1}\cos(\pi/3^j)$, indépendamment de k. Le produit est strictement positif puisque tous ses facteurs sont positifs et que $\sum_j(1-\cos(\pi/3^j)) < \infty$.

Exercice 4.26 — Somme de Poisson et amincissement

L3 / M1 • énoncé, p. 37

On a $\varphi_N(t) = e^{a(e^{\mathrm{i}t}-1)}$. En conditionnant par N, $\varphi_S(t) = \sum_n e^{-a}a^n\varphi(t)^n/n! = e^{a(\varphi(t)-1)}$. Dans le cas Bernoulli, $S \sim \mathscr{P}(ap)$ et

$$\mathbb{E}e^{\mathrm{i}(uS+v(N-S))} = \exp\{a(pe^{\mathrm{i}u} + (1-p)e^{\mathrm{i}v} - 1)\} = e^{ap(e^{\mathrm{i}u}-1)}e^{a(1-p)(e^{\mathrm{i}v}-1)}.$$

Les coordonnées sont donc indépendantes, de lois $\mathscr{P}(ap)$ et $\mathscr{P}(a(1-p))$.

Dans l'application, notons $X = N$ le nombre d'œufs et Y le nombre de naissances. Conditionnellement à X, les éclosions sont indépendantes, de probabilité p chacune. Alors $\mathscr{L}(Y \mid X = \ell) = \mathscr{B}(\ell, p)$ et, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{\ell=k}^\infty \binom{\ell}{k} p^k(1-p)^{\ell-k} e^{-a}\frac{a^\ell}{\ell!} = e^{-a}\frac{(ap)^k}{k!}\sum_{j=0}^\infty \frac{[a(1-p)]^j}{j!} = e^{-ap}\frac{(ap)^k}{k!}.$$

Donc $Y \sim \mathscr{P}(ap)$, également aux cas limites $p = 0, 1$.

Exercice 4.27 — Distance en variation et couplage binomiale-Poisson

L3 • énoncé, p. 38

La série est dominée par $\sum(p_k + q_k) = 2$. Les sommes de $p_k - q_k$ sur A et son complément sont opposées ; l'inégalité triangulaire donne la majoration. En A_0, les signes sont séparés et l'égalité a lieu. L'identité $|p_k - q_k| = p_k + q_k - 2\min(p_k, q_k)$ donne la seconde formule. Pour un couplage, $|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \le \mathbb{P}(X \neq Y)$; prendre le supremum. La somme des Y_i est $\mathscr{P}(\lambda)$. La fonction f croît de 0 à 1 car $f'(x) = xe^x \ge 0$. On a $\mathbb{P}(X_i = 0) = (1 - f(h))e^{-h} = 1 - h$. Les couples (U_i, Y_i) étant indépendants, les X_i sont indépendantes Bernoulli de paramètre h et leur somme est binomiale. Les cas de désaccord sont $Y_i = 0, U_i = 1$ et $Y_i \ge 2$. Leur probabilité vaut

$$f(h)e^{-h} + 1 - e^{-h}(1+h) = h(1-e^{-h}) \le h^2.$$

Si les sommes diffèrent, au moins un couple diffère ; l'union donne une probabilité au plus $nh^2 = \lambda^2/n$, puis l'inégalité de couplage conclut. La convergence est en variation totale, donc en loi.

Exercice 4.28 — Convergence en loi et théorème de Lévy

M1 • énoncé, p. 38

On écrit $X_n \Rightarrow X$ si $\mathbb{E}h(X_n) \to \mathbb{E}h(X)$ pour toute fonction continue bornée h ; sur $\mathbb{R}$, cela équivaut à $F_n(x) \to F(x)$ aux points de continuité de F. Cette convergence implique $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ pour tout t. Réciproquement, si les fonctions caractéristiques convergent ponctuellement vers une fonction φ continue en zéro, celle-ci est la fonction caractéristique d'une probabilité et les lois convergent vers cette probabilité. La continuité en zéro est indispensable.

Exercice 4.29 — La médiane d'une loi de Poisson entière

L3 • énoncé, p. 38

Stirling donne $u_n \sim (2\pi n)^{-1/2}$. On calcule

$$P_n'(\lambda) = -e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \qquad P_n''(\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{n!}(\lambda - n).$$

L'intégration de P_n' depuis zéro fournit la formule intégrale. De plus $P_n + P_n' = P_{n-1}$. Taylor donne $Q(n) = Q(n-1) + Q'(n-1) + \int_{n-1}^{n}(n-t)Q''(t)\,dt$. Pour $Q = P_n$, le reste est strictement négatif : $P_n(n) < P_{n-1}(n-1)$. Pour $Q = P_{n-1}$, son signe est strictement positif lorsque $n \geq 2$, d'où $P_{n-1}(n) > P_{n-2}(n-1)$. Leur différence est $u_n \to 0$: les suites sont adjacentes. Si $X_n \sim \mathscr{P}(n)$, le TCL appliqué à une somme de n Poisson unitaires donne $\mathbb{P}(X_n \leq n) \to 1/2$. Donc, pour tout $n \geq 1$,

$$P_{n-1}(n) < \tfrac{1}{2} < P_n(n).$$

Ces inégalités excluent toute médiane réelle différente de n. Enfin, à marge nulle et réserve fixe, le seuil normalisé $R/(s\sqrt{n})$ tend vers zéro : la probabilité finale de couvrir les dépenses tend vers $1/2$.

Exercice 4.30 — Convergence des moments et détermination d'une loi

M1 • énoncé, p. 38

1. Posons $y = \log x$. Pour tout entier $p \geq 0$, l'intégrale du terme sans sinus vaut $e^{p^2/2}$. Pour le terme oscillant, compléter le carré réel donne

$$\int e^{py}\sin(2\pi y)\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dy = e^{p^2/2}\mathbb{E}\sin(2\pi(Z+p)) = 0,$$

car Z est symétrique et p entier. La positivité vient de $|a| \leq 1$; le moment $p = 0$ vaut 1. Toutes ces lois ont donc les moments $e^{p^2/2}$, bien que leurs densités soient distinctes dès que les paramètres diffèrent.

2. Prendre $X_n = n$ avec probabilité $1/n$, zéro sinon. Alors $X_n \to 0$ en probabilité, mais $\mathbb{E}X_n = 1$.

3. Avec $C = \sup_n \mathbb{E}|X_n|^q < \infty$, $\mathbb{E}[|X_n|^p \mathbf{1}_{\{|X_n|>K\}}] \leq CK^{p-q}$. Par troncature continue, la convergence en loi traite la partie bornée et cette majoration traite uniformément les queues ; de plus $\mathbb{E}|X|^q \leq C$ par troncature et passage à la limite. On conclut $\mathbb{E}X_n^p \to \mathbb{E}X^p$. Une borne sur le moment signé d'ordre impair ne suffit pas ; il faut un moment absolu, ou un ordre pair.

4. La tension signifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K avec $\sup_n \mathbb{P}(|X_n| > K) < \varepsilon$. La formulation avec $\limsup_n$ est équivalente, les termes initiaux en nombre fini pouvant être absorbés en agrandissant K. Par extractions successives puis diagonale, une sous-suite F_{n_j} converge sur chaque rationnel vers une fonction croissante G. Définir

$$F(x) = \inf_{r\in\mathbb{Q},\, r>x} G(r).$$

Cette fonction est croissante et continue à droite ; la tension donne ses limites 0 et 1 aux infinis. Aux points de continuité de F, encadrer $F_{n_j}(x)$ par les valeurs en deux rationnels de part et d'autre, puis rapprocher ces rationnels, donne $F_{n_j}(x) \to F(x)$. Ainsi F est une fonction de répartition limite. La limite rationnelle doit se prendre *par la droite*, et non sans préciser le côté.

5. La convergence des seconds moments implique la tension par Markov. Toute sous-suite a donc une sous-suite convergente en loi. Pour identifier son moment d'ordre p, utiliser une borne sur un moment pair $2k > p$, fournie par l'hypothèse. La question précédente montre que tous ses moments coïncident avec ceux de la loi cible. La détermination par les moments impose cette loi à toutes les limites extraites ; cela entraîne la convergence de la suite entière.

6. Pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}s^X = e^{\lambda(s-1)}$. Pour X normale de moyenne μ et de variance σ^2, de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, c'est $\exp(\mu\log s + \frac{1}{2}\sigma^2(\log s)^2)$. La normale possède des moments exponentiels absolus de tout ordre : $\mathbb{E}e^{t|X|} < \infty$. Pour prouver la détermination, toute loi ayant les mêmes moments pairs satisfait, par convergence monotone, $\mathbb{E}\cosh(tY) = \sum t^{2k}\mathbb{E}X^{2k}/(2k)! < \infty$. Comme $e^{|tY|} \le 2\cosh(tY)$, on peut développer sa fonction caractéristique en série absolument intégrable ; celle-ci est déterminée par ses moments et coïncide avec celle de X.

7. Pour $Z_n = (X_n - n)/\sqrt{n}$, le logarithme de la fonction génératrice exponentielle est

$$\log \mathbb{E}e^{tZ_n} = n(e^{t/\sqrt{n}} - 1 - t/\sqrt{n}) = \sum_{r\ge 2} \frac{n^{1-r/2}t^r}{r!}.$$

Le coefficient de t^p de l'exponentielle est une somme finie sur les partitions de p en blocs de taille au moins 2. Chaque bloc de taille r apporte $n^{1-r/2}$. Seules survivent les partitions en paires : les moments impairs tendent vers zéro et les moments d'ordre $2k$ vers $(2k)!/(2^k k!)$. Ce sont les moments de la normale centrée réduite ; la question 5 conclut, sans utiliser le TCL.

Exercice 4.31 — Autorégression et série aléatoire

M1 • énoncé, p. 39

Par récurrence, $X_n = \theta^n x_0 + \sum_{i=1}^n \theta^{n-i}W_i$. Sa moyenne est $\theta^n x_0$ et sa variance $(1-\theta^{2n})/(1-\theta^2)$. Dans le cas gaussien, ces paramètres caractérisent sa loi, qui converge vers $\mathcal{N}(0,(1-\theta^2)^{-1})$, loi normale centrée de variance $(1-\theta^2)^{-1}$. L'échangeabilité du vecteur iid donne $X_n \overset{d}{=} V_n$. Par indépendance et centrage,

$$\mathbb{E}(V_{n+p} - V_n)^2 = x_0^2(\theta^{n+p} - \theta^n)^2 + \sum_{i=n+1}^{n+p} \theta^{2(i-1)} \longrightarrow 0$$

uniformément en $p \ge 1$. La complétude de L^2 donne $V_n \to V = \sum_{i\ge1}\theta^{i-1}W_i$ dans L^2, donc $X_n \Rightarrow V$. La décomposition de la série en son premier terme et sa queue donne l'équation de loi et $\varphi(t) = \psi(t)\varphi(\theta t)$. Son itération, avec $\varphi(\theta^n t) \to 1$, assure aussi l'unicité. Si $W_i = 2B_i - 1$ avec B_i Bernoulli équitables, $\sum_{i\ge1} 2^{-i}B_i$ est uniforme sur $[0,1]$ (probabilités des intervalles dyadiques), donc $V = 4\sum 2^{-i}B_i - 2$ est uniforme sur $[-2,2]$.

Exercice 4.32 — Changement de signe entre deux sommes

M1 • énoncé, p. 39

Les deux sommes utilisent des blocs indépendants. Par le TCL et multiplication des fonctions caractéristiques, le vecteur converge vers (G,H) de composantes normales centrées réduites indépendantes. Le bord de $\{(x,y) : x > 0, x+y < 0\}$ a probabilité nulle sous cette loi ; la probabilité converge donc vers $\mathbb{P}(G>0, G+H<0)$. La densité bidimensionnelle est radiale : le secteur $x>0, y<-x$ a angle $\pi/4$, d'où la limite $1/8$.

Exercice 4.33 — Sommes de Cauchy et échec de la loi faible

L3 • énoncé, p. 39

La fonction caractéristique $e^{-a|t|}$ montre que S_n est de Cauchy d'échelle na. Ainsi $S_n/\sqrt{n}$ a échelle $a\sqrt{n}$ et n'est pas tendue : pour tout K, $\mathbb{P}(|S_n/\sqrt{n}| \le K) = \frac{2}{\pi}\arctan(K/(a\sqrt{n})) \to 0$. Pas de limite en loi réelle, donc pas de limite en probabilité. S_n/n^2 a échelle a/n, converge en loi vers zéro, donc en probabilité. Les blocs S_n et $S_{2n} - S_n$ sont indépendants de même loi ; leur différence divisée par $2n$ est de Cauchy d'échelle a. Elle ne tend donc pas en probabilité vers zéro. Si S_n/n convergeait en probabilité, cette différence tendrait vers zéro, contradiction. La loi de Cauchy n'est pas intégrable : les hypothèses de la loi faible usuelle ne sont pas satisfaites.

Exercice 4.34 — Maximum à queue de puissance et loi de Fréchet

L3 • énoncé, p. 39

Pour $x > 0$, $n\mathbb{P}(X_1 > n^{1/\lambda}x) \to \alpha x^{-\lambda}$, donc $\mathbb{P}(\max X_i \le n^{1/\lambda}x) = (1 - \mathbb{P}(X_1 > n^{1/\lambda}x))^n \to e^{-\alpha x^{-\lambda}}$. Pour $x \le 0$, la probabilité est majorée par $\mathbb{P}(X_1 \le 0)^n \to 0$, car la queue positive est non nulle. Le seuil annuel est $c = 0{,}71 \times 70 \times 365 \times 10^{-6} = 0{,}0181405$ gramme. En *supposant* l'approximation asymptotique valable à ce seuil, $q \simeq \alpha c^{-\lambda} \simeq 1{,}101\,10^{-4}$; pour N personnes indépendantes, $\mathbb{P}(\max > c) = 1-(1-q)^N \simeq 1 - e^{-Nq}$. Cela donne une probabilité pratiquement égale à 1 pour 225000 personnes, environ 0,01095 pour 100, et $N \simeq -\log(0{,}05)/q \simeq 27215$ pour 95 %. Une simple équivalence de queue à l'infini ne justifie pas à elle seule cette précision à un seuil fixé : les résultats numériques sont conditionnels à l'approximation demandée. Avec $q = 0{,}0001100749$ et la formule binomiale $1-(1-q)^N$, le plus petit effectif entier donnant au moins 95 % est 27214, sous cette même approximation de q.

Exercice 4.35 — Fonctions génératrices et moments factoriels

L3 • énoncé, p. 39

La série $\sum_{j\geq 0} p_j s^j$ converge absolument sur $[-1,1]$ et est analytique dans le disque ouvert unité. On dérive terme à terme : $G_X^{(k)}(s) = \sum_{j\geq k} (j)_k p_j s^{j-k}$, et $G_X^{(k)}(0) = k! p_k$, d'où l'unicité de la loi. Pour $s \uparrow 1$, la convergence monotone donne $G_X^{(k)}(1-) = \mathbb{E}(X)_k$, éventuellement infini. La finitude de ce moment factoriel équivaut à celle de $\mathbb{E}X^k$, les deux polynômes étant comparables pour les grands entiers. Ainsi $\mathbb{E}X = G_X'(1-)$ et $\operatorname{Var} X = G_X''(1-) + G_X'(1-) - G_X'(1-)^2$ lorsque le second moment est fini. Les fonctions sont $1-p+ps$, $(1-p+ps)^n$, $e^{\lambda(s-1)}$. Pour des variables indépendantes les génératrices se multiplient ; les binomiales de même p et les Poisson s'additionnent en ajoutant leurs paramètres respectifs. Pour Poisson, moyenne et variance valent λ.

Exercice 4.36 — Distance d'un sommet à un axe

L3 • énoncé, p. 39

Pour toute fonction continue h sur $[0,1]$, la moyenne de $h(|\sin\theta|)$ sur les angles des sommets converge, par les sommes de Riemann, vers $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} h(|\sin\theta|)d\theta$. Ceci reste vrai quelle que soit la rotation choisie pour chaque polygone, par continuité uniforme. La limite est donc $|\sin U|$, avec U uniforme sur $[0,2\pi]$. Pour $0 \leq x \leq 1$, sa fonction de répartition vaut $2\arcsin(x)/\pi$, d'où la densité $2\mathbf{1}_{\{x\in(0,1)\}}/(\pi\sqrt{1-x^2})$.

Exercice 4.37 — Distance entre deux points uniformes

L3 • énoncé, p. 39

Les sommes de Riemann doubles donnent $(X_n/n, Y_n/n) \Rightarrow (U,V)$, où U,V sont indépendantes uniformes sur $[0,1]$. Par continuité, la limite cherchée est $D = |U-V|$. Pour $0 \leq t \leq 1$, les deux triangles $|u-v| > t$ ont aire totale $(1-t)^2$, donc $F_D(t) = 2t - t^2$ et $f_D(t) = 2(1-t)\mathbf{1}_{\{t\in(0,1)\}}$. L'application donne $(1-70/112)^2 = 9/64 = 0{,}140625$.

Exercice 4.38 — Passage des fonctions lisses aux fonctions de répartition

L3 • énoncé, p. 39

Fixons $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Choisissons des fonctions lisses f_-, f_+ à valeurs dans $[0,1]$ telles que

$$\mathbf{1}_{(-\infty,t-\varepsilon]} \leq f_- \leq \mathbf{1}_{(-\infty,t]} \leq f_+ \leq \mathbf{1}_{(-\infty,t+\varepsilon]}.$$

On les construit en raccordant les constantes 1 et 0 par une fonction lisse sur les intervalles de longueur ε. L'hypothèse donne

$$F_G(t-\varepsilon) \leq \liminf_n F_{Z_n}(t) \leq \limsup_n F_{Z_n}(t) \leq F_G(t+\varepsilon).$$

La continuité de F_G permet de faire tendre ε vers zéro. Pour l'uniformité, on choisit deux bornes où les queues de G sont inférieures à η, puis une subdivision finie de l'intervalle entre ces bornes sur laquelle les accroissements de F_G sont au plus η. La convergence aux points de subdivision et la monotonie des fonctions de répartition bornent l'erreur uniforme par 2η pour n assez grand. La continuité de la fonction limite est essentielle ; une simple continuité à droite ne suffit pas.

Exercice 4.39 — Approximation normale d'un chi-deux

L3 • énoncé, p. 40

Écrivons $Q_n = \sum_{i=1}^n G_i^2$, avec les G_i indépendantes normales centrées réduites. On a $\mathbb{E}G_i^2 = 1$ et $\operatorname{Var}(G_i^2) = 3-1 = 2$. Le théorème limite central donne $(Q_n - n)/\sqrt{2n} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$. La limite étant continue, la convergence des fonctions de répartition est uniforme, ce qui justifie l'approximation annoncée. Elle n'est pas une égalité à n fixé.

Exercice 4.40 — Produit de Slutsky et variance estimée

L3 • énoncé, p. 40

On note $\mathcal{N}(0,1)$ la loi normale centrée réduite. Si $u > 0$ et $0 < \delta < u$, posons $q_n = \mathbb{P}(|U_n - u| > \delta)$. Pour $t \geq 0$,

$$F_n(t/(u+\delta)) - q_n \leq \mathbb{P}(U_n Z_n \leq t) \leq F_n(t/(u-\delta)) + q_n.$$

Pour $t < 0$, on échange $u+\delta$ et $u-\delta$. On fait tendre n vers l'infini, puis δ vers zéro, ce qui donne $F(t/u)$. Si $u < 0$, on applique le cas positif à $-U_n$ et $-Z_n$; la limite a fonction de répartition $1 - F(t/u)$, par continuité de F. Si $u = 0$, la convergence en loi rend (Z_n) tendue. Pour $M > 0$,

$$\mathbb{P}(|U_n Z_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|Z_n| > M) + \mathbb{P}(|U_n| > \varepsilon/M).$$

On choisit M grand, puis n grand : le produit tend vers zéro en probabilité. La convergence de sa fonction de répartition est seulement garantie aux points non nuls ; au point zéro elle peut échouer. La formule $F(t/u)$ n'a pas de sens pour $u = 0$. Enfin, le TCL donne $\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)/\sigma \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $\sigma/T_n \to 1$ en probabilité. Le résultat précédent donne la conclusion. On définit arbitrairement le quotient sur $\{T_n = 0\}$, événement de probabilité tendant vers zéro. La convergence des fonctions de répartition est uniforme, la limite normale étant continue.

Exercice 4.41 — Approximation de l'identité par des gaussiennes

M1 • énoncé, p. 40

Fixons y et $\eta > 0$. Par continuité en y, il existe $\delta > 0$ tel que $|\varphi(y-z) - \varphi(y)| \le \eta$ pour $|z| \le \delta$. Puisque $\int g_\sigma = 1$,

$$|(g_\sigma * \varphi)(y) - \varphi(y)| \le \eta + 2\|\varphi\|_\infty \int_{|z|>\delta} g_\sigma(z)\,dz.$$

La dernière intégrale vaut $\mathbb{P}(|G| > \delta/\sigma)$ pour $G \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ et tend vers zéro. Le passage à la limite puis $\eta \downarrow 0$ donnent le résultat. La borne uniforme $|g_\sigma * \varphi| \le \|\varphi\|_\infty$ permet aussi de passer à la limite dans l'intégrale contre toute probabilité fixée.

5. Statistique, estimation et tests

Exercice 5.1 — Moyenne studentisée

L3 • énoncé, p. 41

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Notons $\sigma^2 = \operatorname{Var} X_1 > 0$. Les lois fortes appliquées à X_i et X_i^2 donnent $V_n = n^{-1}\sum X_i^2 - \overline{X}_n^2 \to \sigma^2$ presque sûrement. Le TCL et Slutsky entraînent la convergence annoncée, en définissant arbitrairement le quotient sur $\{V_n = 0\}$, dont la probabilité tend vers zéro. Avec $z = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$,

$$\left[\overline{X}_n - z\sqrt{V_n/n},\ \overline{X}_n + z\sqrt{V_n/n}\right]$$

a la couverture asymptotique $1-\alpha$. Pour obtenir des bornes strictement distinctes même si $V_n = 0$, on peut remplacer V_n par $V_n + n^{-1}$ sans changer la limite.

Exercice 5.2 — Consistance ponctuelle d'un histogramme

L3 • énoncé, p. 41

1. Au point $x \in \mathbb{R}$, l'espérance de l'histogramme des observations est

$$\mathbb{E}[\bar{f}_n(\cdot,x)] = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \in [k_n(x)h_n,(k_n(x)+1)h_n[) = \frac{I_n(x)}{h_n} \qquad \text{avec} \qquad I_n(x) = \int_{k_n(x)h_n}^{(k_n(x)+1)h_n} f(t)\mathrm{d}t.$$

Du fait de l'indépendance des variables X_i, la variance est

$$\operatorname{Var}(\bar{f}_n(\cdot,x)) = \frac{1}{(nh_n)^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(\mathbf{1}_{\{X_i\in[k_n(x)h_n,(k_n(x)+1)h_n[\}}) = \frac{1}{nh_n^2}(1-I_n(x))I_n(x).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue au point x, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$ pour tout $t \in]x-\delta, x+\delta[$. Ainsi,

$$\left|\mathbb{E}[\bar{f}_n(\cdot,x)] - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h_n}\int_{k_n(x)h_n}^{(k_n(x)+1)h_n}(f(t)-f(x))\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{h_n}\int_{k_n(x)h_n}^{(k_n(x)+1)h_n}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t \le \varepsilon,$$

où la dernière majoration est vraie dès que n est assez grand pour assurer que $[k_n(x)h_n,(k_n(x)+1)h_n]$ est inclus dans $]x-\delta,x+\delta[$. On en déduit que $\mathbb{E}[\bar{f}_n(\cdot,x)]$, c'est-à-dire $I_n(x)/h_n$, tend vers $f(x)$ quand $n\to\infty$. De plus, comme h_n tend vers zéro à l'infini, cela implique que $1-I_n(x)$ tend vers un. L'expression de la variance obtenue à la question 1 devient donc

$$\operatorname{Var}(\bar{f}_n(\cdot,x)) = \frac{1}{nh_n}\frac{I_n(x)}{h_n}(1-I_n(x)) = \frac{1}{nh_n}(f(x)+\mathrm{o}(1)).$$

3. En décomposant $\bar{f}_n(\cdot,x) - f(x)$ sous la forme $(\bar{f}_n(\cdot,x) - \mathbb{E}[\bar{f}_n(\cdot,x)]) + (\mathbb{E}[\bar{f}_n(\cdot,x)] - f(x))$, on observe que $\mathbb{E}[(\bar{f}_n(\cdot,x)-f(x))^2]$ est égal à

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[(\bar{f}_n(\cdot,x)-\mathbb{E}[\bar{f}_n(\cdot,x)])^2 + (\mathbb{E}[\bar{f}_n(\cdot,x)]-f(x))^2 + 2(\bar{f}_n(\cdot,x)-\mathbb{E}[\bar{f}_n(\cdot,x)])(\mathbb{E}[\bar{f}_n(\cdot,x)]-f(x))\big]\\ &= \operatorname{Var}(\bar{f}_n(\cdot,x)) + (\mathbb{E}[\bar{f}_n(\cdot,x)]-f(x))^2.\end{aligned}$$

Cela tend vers zéro quand $n\to\infty$, d'après le résultat de la question précédente et le fait que nh_n tend vers l'infini. Ainsi, $\bar{f}_n(\cdot,x)$ converge vers $f(x)$ dans $L^2(\mathrm{d}\mathbb{P})$.

4. Pour n assez grand, le biais est majoré en valeur absolue par Ah_n^α. La variance est $O((nh_n)^{-1})$, d'après la question 2. Le risque quadratique est donc majoré par $A^2h_n^{2\alpha} + C/(nh_n)$. On choisit $h_n = n^{-1/(2\alpha+1)}$, qui donne un risque $O(n^{-2\alpha/(2\alpha+1)})$, tout en assurant $h_n\to 0$ et $nh_n\to\infty$. Les termes initiaux en nombre fini ne changent pas la bornitude demandée.

Exercice 5.3 — Chaîne plane d'atomes

L3 • énoncé, p. 41

Chaque liaison s'écrit $V_i = \varepsilon(\cos\Theta_i, \sin\Theta_i)$, avec moyenne nulle et covariance $(\varepsilon^2/2)I_2$. Il y a $n-1$ liaisons. Le TCL vectoriel donne

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_n}}{\varepsilon\sqrt{(n-1)/2}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, I_2).$$

La loi limite est gaussienne centrée de matrice de covariance I_2. Le vecteur non normalisé est donc approché par $\mathcal{N}(0, (n-1)\varepsilon^2 I_2/2)$, de moyenne nulle et de matrice de covariance $(n-1)\varepsilon^2 I_2/2$. Par continuité de la norme au carré,

$$\frac{2|A_1A_n|^2}{(n-1)\varepsilon^2} \Rightarrow \chi^2_2.$$

Ainsi le carré de la distance est approché par une exponentielle de moyenne $(n-1)\varepsilon^2$.

Exercice 5.4 — Détection d'un signal gaussien

L3 • énoncé, p. 42

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Sous $H_0 : \theta = 0$, X/σ suit $\mathcal{N}(0,1)$. On rejette H_0 lorsque $X > \sigma z_{1-\alpha}$, où $z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$. La probabilité de fausse alarme est exactement α. Sous $\theta = 1$, la puissance vaut

$$\mathbb{P}_1(X > \sigma z_{1-\alpha}) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha} - S/\sigma).$$

Le rapport de vraisemblance est croissant en X, ce qui justifie le test à seuil supérieur. Le quantile vaut environ 4,753424 pour $\alpha = 10^{-6}$ et 3,090232 pour $\alpha = 10^{-3}$.

Exercice 5.5 — Comparaison de deux proportions de guérison

L3 • énoncé, p. 42

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On suppose les observations de patients indépendantes entre elles et entre les deux groupes. Alors $S_{n,A} \sim \mathcal{B}(n, p_A)$ et $S_{n,B} \sim \mathcal{B}(n, p_B)$ indépendamment. Le TCL doit être appliqué aux sommes centrées. Sous H_0, avec $p = p_A = p_B \in (0,1)$,

$$\frac{S_{n,A} - S_{n,B}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 2p(1-p)).$$

La loi limite est centrée et de variance $2p(1-p)$. La loi forte donne $U_n \to (p_A + p_B)/2$ presque sûrement, et donc $U_n \to p$ sous H_0. Slutsky donne

$$T_n = \frac{S_{n,A} - S_{n,B}}{\sqrt{2nU_n(1-U_n)}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

On prend $q = \Phi^{-1}(0{,}975) \simeq 1{,}96$ et on rejette si $|T_n| \geq q$. Si $U_n = 0$ ou 1, les deux effectifs sont égaux ; on définit $T_n = 0$ et on ne rejette pas. Ceci traite aussi les hypothèses nulles dégénérées $p = 0, 1$, pour lesquelles le niveau est zéro. Sous une alternative fixe $p_A \neq p_B$, le numérateur divisé par n tend vers $p_A - p_B \neq 0$ et le dénominateur est d'ordre $\sqrt{n}$. Donc $|T_n| \to \infty$ presque sûrement et la puissance tend vers un. Pour les données, $U_{100} = 0{,}65$ et $T_{100} = -10/\sqrt{200 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35} \simeq -1{,}4825$. La valeur-$p$ normale est d'environ 0,1382 : on ne rejette pas l'égalité au niveau 5%.

Exercice 5.6 — Test du chi-deux pour une proportion

L3 • énoncé, p. 42

Pour un échantillon indépendant de taille n et $0 < p_1 < 1$, si N_1 est l'effectif de x_1, la statistique de Pearson est

$$Q = \frac{(N_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(n - N_1 - np_0)^2}{np_0} = \frac{(N_1 - np_1)^2}{np_0 p_1}.$$

Sous l'hypothèse nulle, sa loi tend vers χ^2_1 ; on rejette au-dessus du quantile $1-\alpha$. Si une probabilité théorique vaut zéro, toute observation de cette catégorie réfute l'hypothèse ; sinon les observations sont déterministes sous celle-ci. Pour les données, la statistique d'égalité garçons-filles vaut $(43220 - 41359)^2/84579 \simeq 40{,}9477$. On rejette l'égalité, même au niveau 0,1%. La fréquence de filles est $\hat{p} = 41359/84579 \simeq 0{,}4889985$. L'intervalle de Wald asymptotique à 95% est

$$\hat{p} \pm 1{,}959964\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/84579} \simeq [0{,}485630; 0{,}492367].$$

La calibration suppose un modèle d'observations indépendantes ; les données du recensement sont ici celles de l'exercice.

Exercice 5.7 — Répartition des observations entre habitats

L3 • énoncé, p. 42

Sous cette hypothèse, les effectifs théoriques sont 131,838, 194,18, 131,838, 53,144. Le test d'ajustement donne

$$Q = \sum_{i=1}^{4} \frac{(N_i - 511 p_i)^2}{511 p_i} \simeq 20{,}9775.$$

L'approximation par un χ^2_3 donne une valeur-p d'environ 0,0001064 : on rejette au niveau 5%. Le marécage est notamment surreprésenté. Le test ne porte pas sur des probabilités égales entre les quatre habitats, mais sur les parts de superficie. Si les localisations successives sont dépendantes, la calibration multinomiale n'est plus justifiée sans un modèle de cette dépendance.

Exercice 5.8 — Estimation d'un taux exponentiel

L3 • énoncé, p. 42

On note $\mathcal{N}(0,1)$ la loi normale centrée réduite. T_n suit la loi gamma $\Gamma(n,\theta)$ de forme n et de taux θ, et $T_n/n \to 1/\theta$ presque sûrement ; donc $n/T_n \to \theta$. Le TCL donne $\sqrt{n}(\theta T_n/n - 1) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Un intervalle asymptotique à 95% est

$$\left[\max\left(0, \frac{n}{T_n}(1 - 1{,}96/\sqrt{n})\right), \frac{n}{T_n}(1 + 1{,}96/\sqrt{n})\right].$$

Ici $n = 20$, $T_n = 190$ et la valeur garantie est $\theta_0 = 0{,}1$. La statistique $\sqrt{20}(0{,}1 \cdot 9{,}5 - 1) \simeq -0{,}224$ ne conduit pas au rejet. Pour un contrôle exact à effectif fini, on utilise $2\theta_0 T_n \sim \chi^2_{40}$: la valeur observée est 38, également non significative. Une approximation asymptotique ne garantit pas à elle seule un risque fini inférieur à 5%. Enfin, le nombre de remplacements pendant $[0,t]$ est de loi $\mathcal{P}(\theta t)$.

Exercice 5.9 — Approximations binomiales et choix d'un effectif

M1 • énoncé, p. 43

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On suppose les cueillettes indépendantes, avec probabilité $1/5$ d'obtenir un champignon comestible. Le nombre comestible est $B \sim \mathcal{B}(100, 0{,}2)$; la probabilité exacte vaut $\sum_{k=15}^{25} \binom{100}{k} 0{,}2^k 0{,}8^{100-k} \simeq 0{,}832081$. L'approximation normale sans correction de continuité demandée par la valeur fournie donne $2\Phi(1{,}25) - 1 \simeq 0{,}788$. Avec correction de continuité, les seuils deviennent $\pm 1{,}375$, ce qui améliore l'approximation. Un cèpe a probabilité 0,02 ; le nombre de cèpes est $C \sim \mathcal{B}(100, 0{,}02)$. La probabilité exacte est $1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{100}{k} 0{,}02^k 0{,}98^{100-k} \simeq 0{,}323314$. L'approximation de Poisson de paramètre 2 donne $1 - 5e^{-2} \simeq 0{,}323324$ (ou 0,325 avec l'arrondi fourni). L'approximation normale de la dernière question mène à $0{,}05\sqrt{n}/0{,}4 \geq 1{,}96$, soit $n \geq 246$. Ce n'est pas une garantie exacte ni le minimum exact, à cause des arrondis des bornes entières. Le calcul binomial exact donne comme premier effectif satisfaisant la probabilité strictement supérieure à 0,95 : $n = 232$, avec bornes 35 et 58 et couverture 0,9516543324. Cette minimalité a été vérifiée pour tous les entiers $1 \leq n < 232$ en comparant exactement

$$20 \sum_{k=\lceil 3n/20 \rceil}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{k} 4^{n-k} \quad \text{à} \quad 19 \cdot 5^n.$$

La couverture n'est pas nécessairement monotone en n ; « premier effectif » ne signifie pas que tous les effectifs supérieurs conviennent.

Exercice 5.10 — Limite multinomiale et statistique du chi-deux

L3 / M1 • énoncé, p. 43

1. On voit clairement que la loi de N_n est portée par l'ensemble $A_{n,k} = \{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 + \dots + a_k = n\}$. De plus, pour tout $a = (a_1, \dots, a_k) \in A_{n,k}$, on a $N_n = a$ si et seulement s'il existe des sous-ensembles disjoints $B_1, \dots, B_k$ de $\{1, \dots, n\}$ vérifiant $\#B_i = a_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, et $X_j = i \iff j \in B_i$ pour tous $i \in \{1, \dots, k\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. De plus, il y a $\frac{n!}{a_1! \cdots a_k!}$ façons de choisir ces ensembles. Ainsi,

$$\mathbb{P}(N_n = a) = \sum_{B_1, \dots, B_k} \prod_{i=1}^{k} \prod_{j \in B_i} \mathbb{P}(X_j = i) = \frac{n!}{a_1! \cdots a_k!} p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}.$$

La loi de N_n est donc la loi multinomiale de paramètres n et $p_1, \dots, p_k$.

2. Pour tout entier $j \in \{1, \dots, n\}$, posons $Y_j = {}^t(\mathbf{1}_{\{X_j=1\}}/\sqrt{p_1}, \cdots, \mathbf{1}_{\{X_j=k\}}/\sqrt{p_k})$. Les vecteurs Y_j sont indépendants et identiquement distribués, de moyenne $X = {}^t(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_k})$ et de matrice de covariance Γ donnée par

$$\Gamma_{i,i'} = \mathbb{E}\Big[(Y_{j,i} - \sqrt{p_i})(Y_{j,i'} - \sqrt{p_{i'}})\Big] = \mathbb{E}[Y_{1,i}Y_{1,i'}] - \sqrt{p_i p_{i'}} = \begin{cases} 1 - \sqrt{p_i p_{i'}} & \text{si } i = i' \\ -\sqrt{p_i p_{i'}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\Gamma = \mathrm{I}_k - X^t X$. Le théorème central limite vectoriel assure donc que

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{N_{n,1} - np_1}{\sqrt{np_1}} \\ \vdots \\ \frac{N_{n,k} - np_k}{\sqrt{np_k}} \end{pmatrix} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n - nX}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} N(0, \Gamma).$$

Enfin, on vérifie facilement que $\Gamma^2 = \Gamma$ et que ${}^t\Gamma = \Gamma$, ce qui montre que Γ est la matrice d'un projecteur orthogonal. De plus, $\mathrm{Ker}\Gamma = \mathrm{Im} X^t X = \mathrm{Vect} X$, l'image de Γ est le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Vect} X$ dans $\mathbb{R}^k$.

3. Le vecteur X est unitaire, donc il existe une matrice orthogonale Q de taille k telle que $QX = e$. Le résultat de la question précédente implique alors que pour tout $u \in \mathbb{R}^k$,

$$\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}u\cdot QV_n}] = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}({}^tQu)\cdot V_n}] \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{1}{2}{}^t({}^tQu)\Gamma({}^tQu)} = e^{-\frac{1}{2}{}^tu(Q\Gamma{}^tQ)u}.$$

Cependant, comme Q est orthogonale, on a $Q\Gamma{}^tQ = Q{}^tQ - QX^tX{}^tQ = \mathrm{I}_k - e^t e$. Donc, $\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}u\cdot QV_n}] \to e^{-\frac{1}{2}{}^tu(\mathrm{I}_k - e^t e)u}$ quand $n \to \infty$. On en déduit que

$$QV_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} N(0, \mathrm{I}_k - e^t e).$$

4. On observe que $T_n = \|V_n\|^2$ et, comme la matrice Q est orthogonale, on a aussi $T_n = \|QV_n\|^2$. D'après la question précédente et le fait que $\|\cdot\|^2$ est continue sur $\mathbb{R}^k$, on a

$$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}} \|Z\|^2,$$

où Z est une variable aléatoire de loi $N(0, \mathrm{I}_k - e^t e)$. Vu sa matrice de covariance, on peut écrire Z sous la forme $Z = {}^t(Z_1, \dots, Z_{k-1}, 0)$, où $Z_1, \dots, Z_{k-1}$ sont des variables indépendantes et suivent toutes la loi normale centrée réduite $N(0,1)$. Il en ressort que $\|Z\|^2$ suit la loi $\chi^2(k-1)$.

La loi faible appliquée aux indicatrices donne $\hat{p}_n \to p$ en probabilité. Le TCL vectoriel donne $\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \mathrm{diag}(p) - pp^{\mathsf{T}})$. Pour un dé équilibré, les coefficients diagonaux sont $5/36$ et les autres $-1/36$.

Exercice 5.11 — Méthode delta

M1 • énoncé, p. 44

Notons $Z_n = \sqrt{n}(X_n - m)$ et $J = J_f(m)$. La convergence en loi de Z_n implique sa tension. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc choisir $R < \infty$ tel que $\sup_n \mathbb{P}(\|Z_n\| > R) < \varepsilon$. En particulier $X_n \to m$ en probabilité. La différentiabilité donne $f(m+h) = f(m) + Jh + r(h)$, avec $\|r(h)\|/\|h\| \to 0$ et $r(0) = 0$. Sur $\{\|Z_n\| \le R\}$,

$$\sqrt{n}\,\|r(X_n - m)\| \le R \sup_{0<\|h\|\le R/\sqrt{n}} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \longrightarrow 0.$$

Comme ε est arbitraire, le reste converge vers zéro en probabilité. Ainsi

$$\sqrt{n}(f(X_n) - f(m)) = JZ_n + o_{\mathbb{P}}(1).$$

Par continuité de l'application linéaire J, puis par Slutsky, la limite est gaussienne centrée de covariance $J\Gamma J^{\mathsf{T}}$, y compris lorsque cette covariance est singulière.

Exercice 5.12 — Comparaison de trois magasins

L3 • énoncé, p. 44

On modélise les trois nombres annuels de vols par des variables de Poisson indépendantes. Sous l'hypothèse nulle, leurs paramètres sont égaux. Conditionnellement au total 90, les effectifs suivent une multinomiale de probabilités $(1/3, 1/3, 1/3)$. La statistique de Pearson vaut

$$\frac{(38-30)^2+(25-30)^2+(27-30)^2}{30} = \frac{98}{30} \simeq 3{,}267.$$

La référence asymptotique est χ^2_2, dont le quantile à 95% vaut 5,991 ; la valeur-p est environ $e^{-3{,}267/2} = 0{,}195$. On ne rejette pas l'égalité des nombres moyens annuels de vols. Sans données d'exposition (fréquentation, valeur des biens, etc.), on ne peut pas assimiler cette conclusion à une comparaison de risques par unité d'exposition.

Exercice 5.13 — Composition d'un jury

L3 • énoncé, p. 44

Sous le modèle précisé, $B \sim \mathscr{B}(200, 0{,}6)$. Le score normalisé est $(100-120)/\sqrt{48} \simeq -2{,}887$, inférieur au seuil unilatéral $-1{,}645$; le test rejette. Un test exact utilise la valeur-p $\sum_{k=0}^{100} \binom{200}{k} 0{,}6^k 0{,}4^{200-k}$, elle aussi inférieure à 0,05. Les données indiquent une sous-représentation incompatible avec ce modèle au seuil choisi ; elles ne prouvent pas à elles seules une intention discriminatoire. Si les tirages sont sans remise dans une population finie de taille connue, la loi correcte est hypergéométrique, et la taille de cette population est nécessaire au calcul exact.

Exercice 5.14 — Sondage électoral et test unilatéral

L3 • énoncé, p. 44

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Le modèle suppose un échantillonnage représentatif, des réponses fiables et l'indépendance ; un tirage sans remise n'est pas exactement indépendant et les non-réponses peuvent introduire un biais. La loi forte donne $\hat{p}_n \to p$ presque sûrement. Si $p > 1/2$, la probabilité demandée tend vers 1, tout en restant inférieure à 1 car l'événement « toutes les réponses sont B » a probabilité $(1-p)^n > 0$. Le TCL donne $\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \Rightarrow \mathcal{N}(0, p(1-p))$, loi normale centrée de variance $p(1-p)$. L'approximation usuelle est $\Phi(\sqrt{n}(1/2-p)/\sqrt{p(1-p)})$. Pour $p > 1/2$ fixé, le seuil normalisé tend vers $-\infty$: le TCL seul ne garantit pas une précision relative pour cette petite probabilité. Une majoration rigoureuse est $e^{-2n(p-1/2)^2}$ par Hoeffding. Le test rejette si $2\sqrt{n}(\hat{p}_n - 1/2) > z_{0,95} \simeq 1{,}645$. Ici le score vaut 0,8, donc on ne rejette pas. On ne peut pas conclure, sur cette base, à une majorité pour A au seuil de 5%.

Exercice 5.15 — Limite normale de la médiane empirique

L3 • énoncé, p. 44

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Le nombre de $X_i \le a_n$ est au moins n exactement quand la médiane est au plus a_n, et exactement quand $S \ge 1$ (équivalent à $S \ge 0$, car S est impair). Les ε_i sont des signes indépendants équilibrés, donc le TCL donne une limite normale standard. La différence divisée par 2 compte les X_i dans $(1/2, a_n]$; sa loi est bien la binomiale indiquée. La moyenne de $(S-\tilde{S})/\sqrt{2n-1}$ tend vers t et sa variance vaut $4(t/\sqrt{8n})(1-t/\sqrt{8n}) \to 0$. Slutsky donne $S/\sqrt{2n-1} \Rightarrow \mathcal{N}(t,1)$, loi normale de moyenne t et de variance 1, d'où la limite $\Phi(t)$ pour la fonction de répartition de la médiane normalisée. La symétrie $X_{(n)} \overset{\mathscr{L}}{=} 1 - X_{(n)}$ donne les valeurs $t < 0$; en zéro, la probabilité vaut $1/2$ pour tout n.

Exercice 5.16 — Réserve d'une assurance et approximation normale

L3 • énoncé, p. 45

On note $\mathcal{N}(0,1)$ la loi normale centrée réduite. Les fonctions génératrices $e^{\lambda(z-1)}$ se multiplient : les paramètres s'ajoutent. Sur cinq ans, $X \sim \mathscr{P}(n)$, $n = 5k$, et le coût est sX. Les ressources finales sont $R + ns(1+\theta)$: la condition est $X - n \le R/s + n\theta$. Lorsque $n \to \infty$, $(X-n)/\sqrt{n} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$, par exemple en représentant X comme une somme de n Poisson de paramètre 1 pour n entier. Avec $z_{0,99} \simeq 2{,}32635$, la réserve approchée est

$$R \simeq s \max(0, z_{0,99}\sqrt{n} - n\theta).$$

La cotisation annuelle individuelle vaut $ks(1+\theta)/N = 5{,}50$ euros. Pour $n = 50$, la formule donne environ 5725 euros (environ 5738 si l'on arrondit d'abord le quantile à 2,33). Sans réserve il faut approximativement $\theta\sqrt{5k} \ge z_{0,99}$, donc $N \ge \lceil 20(z_{0,99}/0{,}1)^2 \rceil = 10824$. Ces chiffres sont des approximations : une garantie exacte utilise le quantile $q_{0,99}$ de $\mathscr{P}(5k)$ et $R = s\max(0, q_{0,99} - 5k(1+\theta))$. Contrôler la solvabilité à chaque date serait un autre événement, plus contraignant.

Exercice 5.17 — Fiabilité d'un montage série-parallèle

L3 • énoncé, p. 45

Le système fonctionne si 1 et 2 fonctionnent et si au moins l'un de 3, 4 fonctionne. Donc

$$D = \min(T_1, T_2, \max(T_3, T_4)).$$

Pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(D > t) = e^{-2\lambda t}[1 - (1 - e^{-\lambda t})^2] = 2e^{-3\lambda t} - e^{-4\lambda t}.$$

La densité vaut $6\lambda e^{-3\lambda t} - 4\lambda e^{-4\lambda t}$ sur $t > 0$. Par intégration des queues, $\mathbb{E}D = 5/(12\lambda)$ et $\mathbb{E}D^2 = 23/(72\lambda^2)$, donc $\operatorname{Var} D = 7/(48\lambda^2)$. Le TCL donne

$$\sqrt{n}\left(\lambda \overline{D}_n - \frac{5}{12}\right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 7/48).$$

La loi limite est normale centrée de variance $7/48$. On note z_q le quantile d'ordre q de la loi normale centrée réduite. Avec $z_{0,95} \simeq 1{,}64485$, un intervalle asymptotique est

$$\left[\frac{5/12 - z_{0,95}\sqrt{7/(48n)}}{\overline{D}_n}, \frac{5/12 + z_{0,95}\sqrt{7/(48n)}}{\overline{D}_n}\right] \cap (0, \infty).$$

Il ne s'agit pas d'une couverture exacte à taille finie.

Exercice 5.18 — Estimation avec censure aux premières pannes

L3 • énoncé, p. 45

La densité des statistiques d'ordre est $n!(2\theta)^{-n}\exp[-\sum t_i/(2\theta)]\mathbf{1}_{\{0<t_1<\cdots<t_n\}}$. Le changement $t_i = \sum_{j\leq i} y_j$ a jacobien 1 et $\sum_i t_i = \sum_j (n-j+1)y_j$. Comme $\prod_{j=1}^{n}(n-j+1) = n!$, la densité se factorise : les Y_j sont indépendantes exponentielles de taux $(n-j+1)/(2\theta)$. Or $S_r = \sum_{j=1}^{r}(n-j+1)Y_j$ est somme de r variables indépendantes exponentielles de moyenne 2θ. Donc $\mathbb{E}[S_r/(2r)] = \theta$ et sa variance vaut θ^2/r, ce qui prouve la convergence en probabilité même dans un schéma triangulaire $n \geq r+1$. Une exponentielle de taux $1/2$ est une χ^2_2 ; les variables $(n-j+1)Y_j/\theta$ ont cette loi, d'où $S_r/\theta \sim \chi^2_{2r}$. Enfin le TCL donne $\sqrt{r}(S_r/(2r) - \theta) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \theta^2)$, loi normale centrée de variance θ^2.

Exercice 5.19 — Tests et intervalle pour une moyenne normale

L3 • énoncé, p. 45

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ et $z_q = \Phi^{-1}(q)$ son quantile d'ordre q. L'identité $\sum(x_i - m)^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(m - \bar{x})^2$ donne l'unique maximum en $\bar{x}$. $\bar{X} \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$, de moyenne m et de variance σ^2/n. Le test unilatéral rejette si $\sqrt{n}\bar{X}/\sigma > z_{1-\alpha}$; sa puissance est $1 - \Phi(z_{1-\alpha} - \sqrt{n}\mu/\sigma)$. Elle croît avec μ, n, α et décroît avec σ. Le test bilatéral rejette si $|\sqrt{n}\bar{X}/\sigma| > z_{1-\alpha/2}$. L'intervalle exact est $\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$. Ici $\bar{x} = 101{,}2$, la statistique vaut $1{,}2\sqrt{5} \simeq 2{,}6833 < z_{0,9975} \simeq 2{,}8070$: on ne rejette pas. L'intervalle est environ $[99{,}9447; 102{,}4553]$.

Exercice 5.20 — Estimation du taux d'un processus d'appels

L3 • énoncé, p. 45

La loi forte donne $T_n/n \to 1/\theta$, donc $\hat{\theta}_n \to \theta$ p.s. Puisque T_n suit la loi gamma $\Gamma(n, \theta)$ de forme n et de taux θ, $\mathbb{E}T_n^{-1} = \theta/(n-1)$ pour $n \geq 2$ et $\mathbb{E}T_n^{-2} = \theta^2/[(n-1)(n-2)]$ pour $n \geq 3$. Le biais est $\theta/(n-1)$ et

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = \theta^2 \frac{n+2}{(n-1)(n-2)} \longrightarrow 0.$$

Le second moment n'est fini qu'à partir de $n = 3$; la convergence L^2 concerne cette queue de suite.

Exercice 5.21 — Test exact d'une durée exponentielle

L3 • énoncé, p. 45

La somme vaut 1592, la moyenne 159,2. Sous H_0, $2\sum_i X_i/180 \sim \chi^2_{20}$. Un test bilatéral exact à queues égales rejette si cette statistique est hors $[q_{0,025}, q_{0,975}]$, soit environ $[9{,}5908; 34{,}1696]$. Cela revient à rejeter pour une moyenne hors $[86{,}317; 307{,}526]$. La valeur observée 17,6889 ne conduit pas au rejet. La p-valeur bilatérale à queues égales est environ 0,784.

Exercice 5.22 — Fréquence de pile et maximum de vraisemblance

L3 • énoncé, p. 45

$20X \sim \mathscr{B}(20, 1/2)$, donc la masse en $k/20$ vaut $2^{-20}\binom{20}{k}$. Par symétrie, $\mathbb{P}(X > 1/2) = \frac{1}{2}(1 - 2^{-20}\binom{20}{10}) \simeq 0{,}41190$. La probabilité sur $[0{,}4, 0{,}6]$ est $2^{-20}\sum_{k=8}^{12}\binom{20}{k} \simeq 0{,}73682$. Le plus petit rayon est $a = 0{,}2$: la masse entre 6 et 14 piles vaut environ 0,95861, tandis qu'entre 7 et 13 elle vaut 0,88468. Cinq piles conduisent donc au rejet dans ce test bilatéral, dont le niveau exact est environ 0,04139. Cela ne prouve pas que la pièce soit biaisée. La vraisemblance vaut $\binom{20}{s}q^s(1-q)^{20-s}$. Sa dérivée logarithmique est $s/q - (20-s)/(1-q)$; son unique maximum sur $[0, 1]$ est $q = s/20$, y compris les extrémités $s = 0, 20$. Pour $s = 5$, tracer cette fonction donne un sommet en $q = 1/4$.

Exercice 5.23 — Capture-recapture et maximum de vraisemblance

L3 • énoncé, p. 45

Sous l'hypothèse que la seconde capture est uniforme conditionnellement aux marques, $X \sim \mathscr{H}(N, m, n)$, de masse $L(N) = \binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}/\binom{N}{n}$, pour $N \geq m + n - i$. Pour $i > 0$,

$$\frac{L(N+1)}{L(N)} = \frac{(N+1-m)(N+1-n)}{(N+1)(N+1-m-n+i)}.$$

Ce rapport est au moins 1 exactement si $N + 1 \leq mn/i$. Ainsi, si mn/i n'est pas entier, l'unique maximum est $\lfloor mn/i \rfloor$; si $mn/i = K$ est entier, $K - 1, K$ sont les deux maxima lorsqu'ils sont tous deux admissibles. Dans le cas $i = m = n$, seul $N = m$ est admissible parmi ces deux valeurs, et il donne la vraisemblance 1. Pour $20, 10, 2$, les deux maxima sont 99 et 100 ; annoncer seulement 100 manquerait ce plateau. Pour $i = 0$, la vraisemblance croît vers 1 sans maximum fini. Tracer $L(N)$ sur les entiers admissibles montre ces comportements ; les diagrammes hypergéométriques se calculent avec la formule des masses.

Exercice 5.24 — Distinguer deux proportions avec deux cents observations

L3 • énoncé, p. 46

Le rapport des vraisemblances vaut $4^s(0{,}92/0{,}98)^{200-s}$; il est croissant en s. On rejette H_0 lorsque $S \geq 9$. Les deux risques exacts sont

$$\mathbb{P}_{0{,}02}(S \geq 9) \simeq 0{,}020175, \qquad \mathbb{P}_{0{,}08}(S \leq 8) \simeq 0{,}018251.$$

Ils sont bien de l'ordre de 2%. Le premier est toutefois strictement supérieur à 2% : il ne faut donc pas annoncer un test de niveau 2% au sens strict. Le seuil 10 donne un niveau inférieur à 2%, mais une erreur de second type d'environ 3,74%.

Exercice 5.25 — Test sur la transmission d'un phénotype

L3 • énoncé, p. 46

On a $X \sim \mathscr{B}(50, p)$. Prenons $H_0 : p = 3/4$ et $H_1 : p = 9/16$. Le rapport des vraisemblances de H_1 à H_0 est décroissant ; on rejette donc pour les petites valeurs de X. Le niveau n'étant pas fixé dans l'énoncé, on peut par exemple construire un test de niveau 5% : on rejette si $X \leq 31$, car

$$\mathbb{P}_{3/4}(X \leq 31) \simeq 0{,}028733 < 0{,}05 < \mathbb{P}_{3/4}(X \leq 32) \simeq 0{,}055123.$$

Son erreur de second type est $\mathbb{P}_{9/16}(X \geq 32) \simeq 0{,}168139$, et sa puissance vaut environ 0,831861. Le choix du niveau doit précéder l'observation ; une absence de rejet ne démontre pas H_0.

Exercice 5.26 — Une pièce est-elle équilibrée ?

L3 • énoncé, p. 46

On a $Z \sim \mathscr{B}(10, p)$, en particulier $\mathscr{B}(10, 1/2)$ sous H_0. Le test rejette si $Z \geq 8$, puisque

$$\mathbb{P}_{1/2}(Z \geq 8) = \frac{45 + 10 + 1}{1024} = 0{,}0546875 \leq 0{,}06, \qquad \mathbb{P}_{1/2}(Z \geq 7) = \frac{176}{1024} > 0{,}06.$$

Le niveau exact est donc 5,46875%. L'observation $Z = 7$ ne conduit pas au rejet. Elle ne permet pas d'affirmer que la pièce est équilibrée. Les erreurs de second type sont

$$\sum_{j=0}^{7}\binom{10}{j}p^j(1-p)^{10-j},$$

soit 0,8327102464 pour $p = 0{,}6$ et 0,6172172136 pour $p = 0{,}7$.

Exercice 5.27 — Monotonie et puissance d'un test binomial

L3 • énoncé, p. 46

Soient U_i indépendantes uniformes sur $[0,1]$. La variable $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_i \le p\}}$ a la loi $\mathscr{B}(n,p)$ et croît avec p. Ceci donne la monotonie, puis

$$\sup_{p \le 0{,}02} \mathbb{P}_p(S_n \ge a) = \mathbb{P}_{0{,}02}(S_n \ge a).$$

On prend donc le plus petit entier $a \in \{0, \dots, n+1\}$ pour lequel cette dernière probabilité est au plus α. La puissance $p \mapsto \mathbb{P}_p(S_n \ge a)$ est croissante. Les sommes binomiales donnent :

n	a	niveau exact	puissance en 0,04	puissance en 0,10
100	6	0,015484	0,211625	0,942423
200	8	0,049335	0,549896	0,999515

.

Pour $n = 100$, le seuil 5 donnerait un niveau d'environ 0,050830, qui dépasse 5%.

Exercice 5.28 — Inversion des tests et intervalle binomial exact

L3 • énoncé, p. 46

Pour une observation $0 < s < n$, l'intervalle exact fermé de Clopper–Pearson a pour bornes les solutions

$$\mathbb{P}_{p_-}(S \ge s) = \alpha/2, \qquad \mathbb{P}_{p_+}(S \le s) = \alpha/2.$$

La première probabilité est croissante en p, et la seconde décroissante ; leur inversion définit donc un intervalle. Aux extrémités, on pose $p_- = 0$ si $s = 0$, et $p_+ = 1$ si $s = n$. Chaque erreur de queue est au plus $\alpha/2$, donc la couverture est au moins $1 - \alpha$ pour tout p. Pour $n = 100, s = 4, \alpha = 0{,}05$, on obtient

$$[p_-, p_+] \simeq [0{,}011004494; 0{,}099257157].$$

Cet intervalle est contenu dans $]0{,}011; 0{,}10[$. Les probabilités de queue aux bornes arrondies valent respectivement environ 0,024968 et 0,023711. Un arrondi systématique vers l'extérieur conserve la garantie de couverture. En revanche, la couverture est une propriété de la procédure pour toutes les observations : le seul intervalle observé ne suffit pas à justifier l'annonce d'un niveau global strictement supérieur à 95%.

Exercice 5.29 — Proportions rares et approximation de Poisson

L3 • énoncé, p. 46

1. Le rapport des vraisemblances est décroissant : on rejette pour les petits nombres de porteurs. Sous H_0, l'approximation est $Z \sim \mathscr{P}(20)$. On a $\mathbb{P}(Z \le 12) \simeq 0{,}039012$ et $\mathbb{P}(Z \le 13) \simeq 0{,}066128$; le seuil est donc 12. Dans le modèle binomial exact, les probabilités correspondantes valent 0,037605 et 0,064226, et le même test est bien de niveau 5%. L'observation 1 entraîne le rejet de H_0. Pour une observation $s > 0$ de Poisson de moyenne $\mu = np$, l'intervalle exact pour μ est

$$\left[\frac{q_{2s}(\alpha/2)}{2}, \frac{q_{2s+2}(1-\alpha/2)}{2}\right],$$

où q_d est la fonction quantile du χ^2 à d degrés de liberté. Ceci résulte de l'identité entre les queues de Poisson et les fonctions de répartition des lois gamma, obtenue par intégrations par parties. Pour p, on divise par n. Avec $s = 1, n = 1000$, on obtient $[0{,}000025318; 0{,}005571643]$.

2. Avec $s = 4, n = 10000$, les intervalles sont respectivement

$$[0{,}000108987; 0{,}001024159], \qquad [0{,}000067221; 0{,}001259409].$$

Ces garanties sont exactes dans le modèle de Poisson et approchées dans le modèle binomial. Pour une garantie binomiale exacte, on inverse les queues binomiales comme dans l'exercice 5.28.

Exercice 5.30 — Précision d'un sondage par Bienaymé–Tchebychev

L3 • énoncé, p. 46

Pour $\hat{p} = S_n/n$, on a $\mathrm{Var}(\hat{p}) = p(1-p)/n \le 1/(4n)$. Ainsi

$$\mathbb{P}_p(|\hat{p} - p| \ge \varepsilon) \le \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Avec $\alpha = 0{,}05$, l'intervalle $[\hat{p} - 1/(2\sqrt{n\alpha}), \hat{p} + 1/(2\sqrt{n\alpha})] \cap [0,1]$ convient. Pour les données, on obtient environ $[0{,}449289; 0{,}590711]$. Une demi-largeur de 0,01 est garantie dès que $n \geq 50000$. Si « précision de 1% » signifie une largeur totale de 0,01, il faut $n \geq 200000$. Pour une borne de couverture strictement supérieure à 95% donnée par cette inégalité, prendre respectivement $n > 50000$ ou $n > 200000$.

Exercice 5.31 — Contrôle du poids de paquets

L3 • énoncé, p. 46

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Avec une pesée, on rejette si $X < 1010 + 10\Phi^{-1}(0{,}05) \simeq 993{,}551$. Si $m = 990$, le risque de non-rejet est $1 - \Phi(1 + \Phi^{-1}(0{,}05)) \simeq 0{,}740489$. La pesée 1000 ne conduit pas au rejet. Avec quatre pesées, $\overline{X} \sim \mathcal{N}(m + 10, 5^2)$, de moyenne $m + 10$ et d'écart-type 5 grammes ; le seuil devient $1010 + 5\Phi^{-1}(0{,}05) \simeq 1001{,}776$. La moyenne observée vaut 1000, donc on rejette. Pour $m = 990$, le risque de non-rejet vaut $1 - \Phi(2 + \Phi^{-1}(0{,}05)) \simeq 0{,}361240$. La probabilité d'être sous le seuil décroît avec m. Son supremum sur $m \geq 1000$ est donc atteint en 1000 : les mêmes tests ont encore niveau 5% pour cette hypothèse composite.

Exercice 5.32 — Contrôle de précision d'un dosage

L3 • énoncé, p. 46

1. Les écarts normalisés sont indépendants de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, donc $Z = nS_n^2/\sigma^2 \sim \chi^2_n$. Si $c = \sigma^2/\sigma_0^2$, alors $nS_n^2/\sigma_0^2 = cZ$: sa fonction de répartition est $F_{\chi^2_n}(t/c)$ et sa densité $c^{-1} f_{\chi^2_n}(t/c)$.
2. On rejette lorsque $nS_n^2/(0{,}05)^2 > q_n(0{,}95)$, où q_n est le quantile du χ^2_n. La loi étant continue, le niveau est exactement 5%.
3. Pour les sept observations, la statistique vaut 16,8 et la probabilité de queue sous H_0 vaut environ 0,018732 : on rejette. Pour $n = 100$, la statistique vaut 120, inférieur au quantile $q_{100}(0{,}95) \simeq 124{,}342$; la probabilité de queue vaut environ 0,084407 et on ne rejette pas. La moyenne 5 étant connue, il y a n degrés de liberté, et non $n - 1$.
4. La statistique augmente avec σ dans la représentation $\sigma^2 Z/(0{,}05)^2$. Le pire cas sous $\sigma \leq 0{,}05$ est donc la borne 0,05 ; le test convient encore.

Exercice 5.33 — Droite des moindres carrés d'un nuage de points

L3 • énoncé, p. 47

Posons $\bar{x} = n^{-1}\sum_i x_i$, $\bar{y} = n^{-1}\sum_i y_i$ et $D = \sum_i (x_i - \bar{x})^2$. Si $D > 0$, le minimum unique est

$$a = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{D}, \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

En effet, $S(a,b)/n = \mathbb{E}(Y - aX - b)^2$; la formule est celle de la projection affine. On peut aussi annuler les deux dérivées de cette fonction quadratique. Géométriquement, S est la somme des carrés des écarts verticaux à la droite, et non des distances orthogonales. Si $D = 0$, tous les x_i valent $\bar{x}$. Tous les couples vérifiant $a\bar{x} + b = \bar{y}$ minimisent S, avec minimum $\sum_i (y_i - \bar{y})^2$.

Exercice 5.34 — Consistance des estimateurs usuels

L3 • énoncé, p. 47

1. L'identité $\sum_i (X_i - \overline{X}_n)^2 = \sum_i (X_i - m)^2 - n(\overline{X}_n - m)^2$ donne une espérance $(n-1)\sigma^2$. Pour la consistance,

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i^2 - \overline{X}_n^{\,2}\right) \longrightarrow \mathbb{E}X_1^2 - m^2 = \sigma^2$$

   presque sûrement, par la loi forte appliquée à X_i et X_i^2. La continuité de la racine carrée donne $S_n \to \sigma$.
2. On a $\mathbb{E}(Z_n - \theta)^2 = \mathrm{Var}(Z_n) + (\mathbb{E}Z_n - \theta)^2 \to 0$, puis la convergence en probabilité par Markov.
3. La convergence conjointe en probabilité résulte de la borne de l'union. La continuité de l'addition et de la multiplication donne les deux premiers résultats. Pour l'inverse, $\mathbb{P}(|Y_n - \theta| \geq |\theta|/2) \to 0$ et l'application $1/y$ est continue au voisinage de θ. On peut donner une valeur quelconque à l'estimateur sur $\{Y_n = 0\}$, dont la probabilité tend vers zéro.

Pour la variance avec diviseur n, $\mathbb{E}V_n = (n-1)\sigma^2/n$ et $V_n \to \sigma^2$ presque sûrement. Le diviseur $n - 1$ corrige donc exactement le biais.

Exercice 5.35 — Places assises dans deux trains

L3 • énoncé, p. 47

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Si X est l'effectif du premier train, $X \sim \mathcal{B}(1600, 1/2)$, de moyenne 800 et d'écart-type 20. Avec $c \geq 800$ places dans chaque train, la probabilité cherchée vaut

$$\mathbb{P}(X > c \text{ ou } X < 1600 - c) = 2\mathbb{P}(X > c).$$

L'approximation avec correction de continuité est $2[1 - \Phi((c + 1/2 - 800)/20)]$; elle conduit à $c = 859$. Les sommes binomiales exactes valent environ 0,003431819 pour $c = 858$ et 0,002918266 pour $c = 859$. Par monotonie, le minimum exact est donc 859 places par train.

Exercice 5.36 — Sondage avant un référendum

L3 • énoncé, p. 47

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Notons p la proportion de oui et testons $H_0 : p \geq 1/2$ contre $p < 1/2$. La probabilité d'un résultat aussi faible en nombre de oui est maximale sous H_0 en $p = 1/2$. La valeur-p exacte est donc

$$\mathbb{P}_{1/2}(\mathcal{B}(10000, 1/2) \leq 4903) \simeq 0{,}026801.$$

La standardisation donne $(4903 - 5000)/50 = -1{,}94$ et l'approximation $\Phi(-1{,}94) \simeq 0{,}026190$. Les observations conduisent à rejeter H_0 au niveau 5%, mais pas au niveau 1%. Cette valeur-p n'est pas la probabilité, conditionnellement aux données, que le non perde. Une telle probabilité demanderait un modèle supplémentaire, notamment sur le paramètre inconnu et sur le lien entre intentions et votes effectifs. Elle n'est pas déterminée par l'énoncé.

Exercice 5.37 — Intervalle de confiance après cent lancers

L3 • énoncé, p. 47

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. La fréquence est $\hat{p} = 0{,}4$. Hoeffding donne la demi-largeur $\sqrt{\log 20/200} \simeq 0{,}122387$, donc l'intervalle $[0{,}277613; 0{,}522387]$. Il contient $1/2$. L'intervalle normal usuel, avec variance estimée, est

$$\hat{p} \pm \Phi^{-1}(0{,}95)\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/100} \simeq [0{,}319419; 0{,}480581].$$

Il exclut $1/2$, mais sa couverture n'est qu'approchée. Les conclusions diffèrent parce que Hoeffding fournit une borne conservatrice. Aucune absence de rejet ne démontre l'équilibre ; le second calcul fournit une indication de déséquilibre au niveau approché de 10%.

Exercice 5.38 — Estimation d'un taux de retard

L3 • énoncé, p. 47

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Dans le modèle exponentiel exact, le théorème limite central donne $\sqrt{n}(\lambda \overline{X}_n - 1) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$. En inversant la borne normale centrale, on obtient

$$\left[\frac{1 - z/\sqrt{n}}{\overline{X}_n}, \frac{1 + z/\sqrt{n}}{\overline{X}_n}\right], \qquad z = \Phi^{-1}(0{,}99).$$

Pour les données, cet intervalle vaut environ $[0{,}088368; 0{,}111632]$ par minute. La couverture est asymptotique et suppose le modèle exponentiel. Si celui-ci est exact, on peut aussi utiliser le pivot $2\lambda \sum_i X_i \sim \chi^2_{800}$ pour un intervalle exact.

Exercice 5.39 — Test d'un générateur de chiffres

L3 • énoncé, p. 47

Les dix effectifs théoriques valent 100. La statistique de Pearson est

$$Q = \sum_{i=0}^{9} \frac{(N_i - 100)^2}{100} = 21{,}86.$$

Sous l'hypothèse nulle, sa loi est approchée par un χ^2_9. La probabilité de queue correspondante vaut environ 0,009333. On rejette donc l'uniformité au niveau approché de 5%, et même de 1%, mais pas de 0,5%. Ce test porte sur les fréquences marginales : il ne vérifie pas, à lui seul, l'indépendance des tirages.

Exercice 5.40 — Croisements de pois et transmission de caractères

L3 • énoncé, p. 47

Le total est 2132. Sous le modèle complet, les probabilités des quatre cases sont $9/16, 3/16, 3/16, 1/16$, donnant les effectifs théoriques 1199,25, 399,75, 399,75, 133,25. La statistique de Pearson vaut environ 966,610 ; comparée à un χ^2_3, elle conduit à un rejet très net. Pour la couleur, l'effectif dominant est 1634, contre 1599 attendu. Le test marginal à deux catégories donne $Q \simeq 3{,}0644$ et une valeur-p approchée de 0,0800 ; on ne rejette pas au niveau 5%. Pour la forme, l'effectif dominant est 1645, donnant $Q \simeq 5{,}2933$ et une valeur-p d'environ 0,0214 : on rejette à ce niveau. Ces tests supposent l'indépendance des croisements. Ils contrôlent la compatibilité avec des proportions phénotypiques ; les seules observations de phénotypes ne permettent pas de démontrer l'équiprobabilité de toutes les transmissions génotypiques. Une absence de rejet ne valide pas avec certitude le mécanisme proposé.

Exercice 5.41 — Comparaison unilatérale de deux proportions

L3 • énoncé, p. 48

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Les fréquences sont $\hat{p}_F = 95/355$ et $\hat{p}_H = 115/645$. À la frontière $p_F = p_H$, la fréquence commune estimée est $\hat{p} = (95 + 115)/1000 = 0{,}21$. La statistique asymptotiquement normale est

$$Z = \frac{\hat{p}_F - \hat{p}_H}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/355 + 1/645)}} \simeq 3{,}318.$$

Le seuil unilatéral à 5% est $\Phi^{-1}(0{,}95) \simeq 1{,}645$. On rejette ; la valeur-p approchée est 0,000453. Il s'agit d'une comparaison de proportions dans le modèle de l'exercice, qui ne démontre pas un lien causal.

Exercice 5.42 — Indépendance du défaut et de la division de production

L3 • énoncé, p. 48

Les totaux des lignes sont 255, 396, 349 et ceux des colonnes 116, 329, 191, 364. Sous indépendance, les effectifs ajustés sont $e_{ij} = n_{i\bullet} n_{\bullet j}/1000$. Tous sont suffisamment grands pour l'approximation usuelle. On obtient

$$Q = \sum_{i,j} \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \simeq 14{,}8512.$$

Le nombre de degrés de liberté est $(3-1)(4-1) = 6$. La valeur-p approchée vaut 0,021446 ; on rejette l'indépendance au niveau 5%.

Exercice 5.43 — Degrés de liberté et hypothèse plus précise

L3 • énoncé, p. 48

Écrivons $Q_{d+1} = Q_d + G^2$ avec indépendance. Alors $Q_{d+1} \geq Q_d$, et l'inégalité des fonctions de répartition est stricte pour $t > 0$, car $\mathbb{P}(Q_d \leq t < Q_d + G^2) > 0$. L'estimateur de p est $\bar{x}/4 = 1/2$. Les effectifs ajustés et la statistique de Pearson sont donc identiques dans les deux tests. Mais le premier a asymptotiquement $5 - 1 - 1 = 3$ degrés de liberté, le second $5 - 1 = 4$. Le seuil à 95% augmente : environ 7,815 contre 9,488. Le rejet n'est donc pas nécessairement conservé. Par exemple, les effectifs 77, 239, 368, 239, 77 ont total 1000, moyenne 2 et statistique 7,8267 : ils donnent un rejet dans le premier test et aucun dans le second.

6. Vecteurs gaussiens

Exercice 6.1 — Couple gaussien corrélé

L3 / M1 • énoncé, p. 49

Pour $|\rho| < 1$, prendre U, V indépendantes normales standard et poser $X = U$, $Y = \rho U + \sqrt{1-\rho^2}V$. Le changement de variables donne exactement la densité indiquée ; elle est donc normalisée. Les marginales sont $\mathcal{N}(0,1)$, leur covariance vaut ρ, et elles sont indépendantes si et seulement si $\rho = 0$. La loi conditionnelle est $X \mid Y = y \sim \mathcal{N}(\rho y, 1-\rho^2)$, de moyenne ρy et de variance $1-\rho^2$, donc $\mathbb{E}[X \mid Y] = \rho Y$.

Pour $r > 0$, $0 \le \phi < 2\pi$, le changement polaire donne

$$f_{R,\Phi}(r,\phi) = \frac{r}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{r^2(1-\rho\sin(2\phi))}{2(1-\rho^2)}\right), \quad f_\Phi(\phi) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi(1-\rho\sin(2\phi))}.$$

Pour $\rho = 0$, $f_R(r) = re^{-r^2/2}\mathbf{1}_{\{r>0\}}$, Φ est uniforme et les deux variables sont indépendantes.

Le dernier couple s'obtient en divisant (X_1, X_2) par $\sqrt{1-\rho^2}$. Ses marginales sont donc $\mathcal{N}(0, 1/(1-\rho^2))$, centrées et de variance $1/(1-\rho^2)$, sa covariance vaut $\rho/(1-\rho^2)$ et ses coordonnées sont indépendantes si et seulement si $\rho = 0$.

Exercice 6.2 — Somme et différence gaussiennes

L3 • énoncé, p. 49

Une transformation linéaire d'un vecteur gaussien reste gaussienne. Le vecteur $(X+Y, X-Y)$ est centré, de matrice de covariance $\mathrm{diag}(2+2\rho, 2-2\rho)$. Ses coordonnées sont indépendantes, centrées et de variances respectives $2+2\rho$ et $2-2\rho$, de lois $\mathcal{N}(0, 2+2\rho)$ et $\mathcal{N}(0, 2-2\rho)$. Cela inclut $\rho = \pm 1$, où l'une des coordonnées est nulle presque sûrement.

Exercice 6.3 — Matrices de covariance

L3 • énoncé, p. 49

Les conditions nécessaires et suffisantes sont $b = c$, $a, d \ge 0$ et $ad - b^2 \ge 0$: c'est exactement la symétrie et la positivité de la matrice. Si $a > 0$, prendre

$$Z = (\sqrt{a}X,\ (b/\sqrt{a})X + \sqrt{d - b^2/a}\,Y).$$

Si $a = 0$, nécessairement $b = c = 0$, et l'on prend $Z = (0, \sqrt{d}Y)$. La construction gaussienne admet une densité sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $ad - b^2 > 0$. Ses marginales sont indépendantes si et seulement si $b = c = 0$.

Exercice 6.4 — Représentation et densité d'un vecteur gaussien

L3 / M1 • énoncé, p. 49

Si $p = 0$, alors $\Sigma = 0$ et $X = m$ presque sûrement ; la représentation s'interprète avec une matrice à zéro colonne. On suppose désormais $p \ge 1$. Soit A une matrice de taille $d \times p$ et Y un vecteur gaussien de loi $N(0, I_p)$. Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}u\cdot(AY+m)}] = e^{\mathrm{i}u\cdot m}\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}({}^tAu)\cdot Y}] = e^{\mathrm{i}u\cdot m - \frac{1}{2}{}^t({}^tAu)I_p({}^tAu)} = e^{\mathrm{i}u\cdot m - \frac{1}{2}{}^tu(A{}^tA)u},$$

ce qui fait que $AY+m$ est un vecteur gaussien de loi $N(m, A{}^tA)$. Pour que ce vecteur ait même loi que X, i.e. suive la loi $N(m,\Sigma)$, il faut et il suffit que $\Sigma = A{}^tA$. Dans ce but, rappelons que Σ est une matrice symétrique réelle positive de taille d (on a ${}^tu\Sigma u \ge 0$ car $|\phi_X(u)| \le 1$), donc est diagonalisable dans une base orthonormée. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les valeurs propres de Σ rangées par ordre décroissant. On a en fait $\lambda_1 \ge \dots \ge \lambda_p > 0$ et $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_d = 0$, puisque Σ est de rang p. Il existe alors une matrice orthogonale U telle que $\Sigma = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d){}^tU$. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$, on a donc $\Sigma = (U\Delta)^t(U\Delta)$. Cependant, on observe facilement en faisant un produit par blocs que les $d-p$ dernières colonnes de $U\Delta$ sont nulles. Il existe donc une matrice A de taille $d \times p$ telle que les colonnes de $U\Delta$ soient celles de A puis des colonnes nulles. On a alors $\Sigma = A{}^tA$ et la matrice A ainsi construite convient.

Comme $X - m$ a la même loi que AY, on a p.s. $X - m \in \mathrm{Im}A$. Si $p < d$, cet espace vectoriel est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^d$, donc X ne peut admettre de densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Supposons

$p = d$ et considérons une fonction g continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$. On a

$$\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(AY+m)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(Ay+m)e^{-\frac{1}{2}\|y\|^2}\frac{dy}{(2\pi)^{d/2}} = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)e^{-\frac{1}{2}\|A^{-1}(x-m)\|^2}|\det A^{-1}|\frac{dx}{(2\pi)^{d/2}},$$

où on a fait le changement de variable $x = Ay + m$ (la matrice A est inversible quand $p = d$). Cependant, $\det\Sigma = (\det A)^2$ et $\|A^{-1}(x-m)\|^2 = {}^t(A^{-1}(x-m))A^{-1}(x-m) = {}^t(x-m)\Sigma^{-1}(x-m)$. D'où

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)e^{-\frac{1}{2}{}^t(x-m)\Sigma^{-1}(x-m)}\frac{dx}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det\Sigma}}.$$

Pour $v \in \mathbb{R}^q$, on a

$$\mathbb{E}e^{\mathrm{i}v^{\mathsf{T}}(BX+b)} = \exp\Big(\mathrm{i}v^{\mathsf{T}}(Bm+b) - \frac{1}{2}v^{\mathsf{T}}B\Sigma B^{\mathsf{T}}v\Big).$$

Ainsi $BX + b \sim \mathcal{N}(Bm+b, B\Sigma B^{\mathsf{T}})$, même lorsque la covariance est singulière. En prenant $B = e_i^{\mathsf{T}}$ et $b = 0$, on obtient $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \Sigma_{ii})$; si $\Sigma_{ii} = 0$, cette loi est la masse de Dirac en m_i.

Exercice 6.5 — Diagonaliser une covariance gaussienne

M1 • énoncé, p. 50

Pour toute matrice U de taille 3×3, le vecteur $Y = UX$ est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $U\Gamma{}^tU$. Les composantes de Y sont alors indépendantes si et seulement si la matrice $U\Gamma{}^tU$ est diagonale. Il convient donc de diagonaliser la matrice Γ, et il suffit en fait de diagonaliser la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On voit donc que l'on peut poser

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour avoir $U\Gamma{}^tU = \Delta = \mathrm{diag}(2,4,2)$. Pour une telle matrice U, les composantes de $Y = UX$ sont indépendantes et la loi de Y est $N(0,\Delta)$.

Exercice 6.6 — Somme et différence de vecteurs gaussiens

M1 • énoncé, p. 50

Notons Σ la matrice de covariance du vecteur X et posons $\Phi(u) = \exp(-{}^tu\Sigma u/2)$ pour $u \in \mathbb{R}^d$. On a donc $\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}u\cdot X}] = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}u\cdot Y}] = \Phi(u)$. Pour tous $u, v \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}(u\cdot Z + v\cdot Z')}] = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}(u+v)\cdot X}e^{\mathrm{i}(v-u)\cdot Y}] = \Phi(u+v)\Phi(v-u) = \exp\Big(-\frac{1}{2}({}^t(u+v)\Sigma(u+v) + {}^t(v-u)\Sigma(v-u))\Big).$$

Cependant, par bilinéarité du produit scalaire, $(u+v)\cdot\Sigma(u+v) + (v-u)\cdot\Sigma(v-u) = 2(u\cdot\Sigma u + v\cdot\Sigma v)$. On en déduit que

$$\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}(u\cdot Z + v\cdot Z')}] = \exp\Big(-\frac{1}{2}{}^tu(2\Sigma)u\Big)\exp\Big(-\frac{1}{2}{}^tv(2\Sigma)v\Big).$$

Ainsi, les vecteurs Z et Z' sont gaussiens, indépendants et de même loi. *Autre méthode* : On peut calculer $\mathrm{Cov}(Z, Z')$ pour montrer l'indépendance, et $\mathrm{Var}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z')$ pour déterminer la loi.

Exercice 6.7 — Gaussiennes et sphères de grande dimension

L3 • énoncé, p. 50

Le vecteur gaussien standard a une densité ne dépendant que de la norme et sa norme est non nulle presque sûrement. La formule d'intégration polaire montre que sa direction a la mesure de surface normalisée ; pour $n = 1$, les deux signes sont équiprobables. Réaliser toutes les dimensions avec une même suite (Y_i) donne

$$(Z_n^{(1)}, \dots, Z_n^{(p)}) \overset{\mathscr{L}}{=} \frac{(Y_1, \dots, Y_p)}{(n^{-1}\sum_{i=1}^n Y_i^2)^{1/2}}.$$

La loi forte fait tendre le dénominateur vers 1 presque sûrement. Slutsky donne la limite normale standard en dimension p.

Exercice 6.8 — Rayon gaussien et théorème central limite

L3 • énoncé, p. 50

La densité du couple est $(2\pi)^{-1}e^{-(x^2+y^2)/2}$. En coordonnées polaires, Z a densité $ze^{-z^2/2}\mathbf{1}_{\{z>0\}}$ et $F_Z(z) = 1-e^{-z^2/2}$ pour $z \geq 0$; cela donne la loi exponentielle de Z^2. Les intégrales gaussiennes donnent $\mathbb{E}Z = \sqrt{\pi/2}$, $\mathbb{E}Z^2 = 2$ et $\operatorname{Var} Z = 2 - \pi/2$. Le TCL impose $\beta = \sqrt{\pi/2}$ et donne la limite normale $\mathcal{N}(0, 2-\pi/2)$, centrée et de variance $2-\pi/2$. Pour tout autre centrage, la loi forte implique une divergence vers un infini.

Exercice 6.9 — Régression gaussienne et applications

L3 • énoncé, p. 50

1. La covariance Γ est symétrique définie positive. On a

$$\mathbb{E}(Y - a^{\mathsf{T}}X)^2 = \mathbb{E}Y^2 - 2a^{\mathsf{T}}u + a^{\mathsf{T}}\Gamma a = \mathbb{E}Y^2 - u^{\mathsf{T}}\Gamma^{-1}u + (a-\Gamma^{-1}u)^{\mathsf{T}}\Gamma(a-\Gamma^{-1}u).$$

Le minimum est donc atteint uniquement en $\hat{a} = \Gamma^{-1}u$.

2. Le vecteur (Z, X) est gaussien et sa covariance croisée vaut $u - \Gamma\hat{a} = 0$. Ainsi Z et X sont indépendants. De plus,

$$Z \sim \mathcal{N}\big(0, \mathbb{E}Y^2 - u^{\mathsf{T}}\Gamma^{-1}u\big),$$

avec une variance éventuellement nulle.

3. Dans le premier cas, les équations normales sont $9a-3b = 1$ et $-3a+4b = 2$. Elles donnent $a = 10/27$, $b = 7/9$, puis $\operatorname{Var} Z = 4-a-2b = 56/27$. Dans le second cas, elles sont $4a+b = 3$ et $a+b = 3/2$. Elles donnent $a = 1/2$, $b = 1$, puis $\operatorname{Var} Z = 9-3a-3b/2 = 6$. Les matrices de covariance des covariables ont pour déterminants 27 et 3 ; elles sont bien définies positives.

4. Avec Φ la fonction de répartition normale standard,

$$K = \sqrt{56/27}\,\Phi^{-1}(0{,}975) \simeq 2{,}823.$$

Exercice 6.10 — Calculs gaussiens et conditionnement

M1 • énoncé, p. 50

Avec Z, T normales centrées réduites indépendantes, $(X, Y) \overset{d}{=} (1+Z, Z+T)$, car les moyennes et covariances coïncident. Ainsi $2 + 2X - Y \sim \mathcal{N}(4, 2)$, loi normale de moyenne 4 et de variance 2. Les carrés Z^2, T^2 ont chacun la loi $\Gamma(1/2, 1/2)$ (second paramètre : taux) ; leur somme, ajoutée à $S \sim \Gamma(1, 1/2)$, a la loi $\Gamma(2, 1/2) = \chi^2_4$. Le résidu $X - 1 - Y/2$ est gaussien et non corrélé à Y, donc indépendant de Y et centré. D'où $\mathbb{E}[X \mid Y] = 1 + Y/2$. Enfin l'indépendance de S et (X, Y) et $\mathbb{E}S = 2$ donnent $\mathbb{E}[SX \mid Y] = 2 + Y$.

Exercice 6.11 — Marginales gaussiennes sans vecteur gaussien

L3 • énoncé, p. 50

La symétrie de la normale donne $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[ZX^2] = \mathbb{E}Z\,\mathbb{E}X^2 = 0$. Pourtant $|X| = |Y|$ p.s. ; ils ne sont pas indépendants, car par exemple $\mathbb{P}(|X| \leq 1, |Y| \leq 1) = \mathbb{P}(|X| \leq 1)$, différente du carré de cette probabilité. Un vecteur gaussien à covariance diagonale a des coordonnées indépendantes ; le vecteur n'est donc pas gaussien. On peut aussi noter que $X+Y$ possède un atome de masse $1/2$ en zéro et une composante normale non dégénérée.

Exercice 6.12 — Caractérisation de la loi normale par moyenne et dispersion

L3 • énoncé, p. 51

La projection sur la droite constante vaut $(S_n/n)(1, \dots, 1)$; le carré de la norme de la projection orthogonale vaut V_n. Les projections orthogonales d'un vecteur normal standard sont indépendantes, car conjointement gaussiennes et de covariance croisée nulle. Le changement de moyenne et d'échelle préserve l'indépendance demandée. Réciproquement, $\mathbb{E}V_n = n-1$, et l'indépendance donne $\mathbb{E}[V_n e^{\mathrm{i}tS_n}] = (n-1)\varphi(t)^n$. En développant V_n et en dérivant les fonctions caractéristiques (le second moment le permet), on obtient

$$\mathbb{E}[V_n e^{\mathrm{i}tS_n}] = -(n-1)\varphi''\varphi^{n-1} + (n-1)(\varphi')^2\varphi^{n-2}.$$

Sur la composante ouverte I de $\{\varphi \neq 0\}$ contenant zéro, cela donne $(\varphi'/\varphi)' = -1$. Puisque $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'/\varphi = -t$, donc $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$ sur I. Une extrémité finie de I contredirait la continuité, car cette expression y a une limite non nulle. Ainsi $I = \mathbb{R}$, et la loi est normale. Pour une variance $\sigma^2 > 0$, appliquer ce résultat à $(X_i - m)/\sigma$; pour $\sigma^2 = 0$, la loi est la masse en m, normale dégénérée. La justification du prolongement de I à $\mathbb{R}$ est nécessaire : une égalité locale des fonctions caractéristiques ne suffit pas en général.

Exercice 6.13 — Somme, différence et produit de normales

L3 • énoncé, p. 51

Le couple somme-différence est gaussien et sa covariance croisée vaut $\operatorname{Var} X - \operatorname{Var} Y$. L'indépendance équivaut donc à l'égalité des variances. Pour des normales standard, $\mathbb{E}e^{itX^2/2} = (1-it)^{-1/2}$, branche continue valant 1 en zéro. Par indépendance, $\varphi_{(X^2-Y^2)/2}(t) = (1-it)^{-1/2}(1+it)^{-1/2} = (1+t^2)^{-1/2}$. Enfin $G = (X+Y)/\sqrt{2}$ et $H = (X-Y)/\sqrt{2}$ sont normales standard indépendantes et $GH = (X^2-Y^2)/2$.

Exercice 6.14 — Espérance du maximum de normales

L3 • énoncé, p. 51

La convexité de l'exponentielle donne $e^x \geq e^t + (x-t)e^t$, avec égalité en $t = x$. En prenant $t = \mathbb{E}X$, puis l'espérance, on obtient $\mathbb{E}e^X \geq e^{\mathbb{E}X}$, aussi si le membre de gauche est infini. Comme $|Z| \leq \sum_i |X_i|$, Z est intégrable. Pour $\lambda > 0$,

$$e^{\lambda \mathbb{E}Z} \leq \mathbb{E}e^{\lambda Z} = \mathbb{E}\max_i e^{\lambda X_i} \leq \sum_i \mathbb{E}e^{\lambda X_i} \leq N e^{\varphi(\lambda)}.$$

Prendre le logarithme puis l'infimum donne le résultat. Dans le cas normal standard, $\varphi(\lambda) = \lambda^2/2$; minimiser $\lambda/2 + \log N/\lambda$ donne $\lambda = \sqrt{2\log N}$ et la borne, si $N > 1$. Pour $N = 1$, faire $\lambda \downarrow 0$, ou utiliser directement $\mathbb{E}X_1 = 0$.

Exercice 6.15 — Une transformation normale non indépendante

L3 • énoncé, p. 51

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. La symétrie de la densité donne $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Si ϕ est la densité normale, $\operatorname{Cov}(X,Y) = 4\int_0^\alpha x^2\phi(x)dx - 1 = 4\Phi(\alpha) - 3 - 4\alpha\phi(\alpha)$. Cette fonction continue croît strictement de -1 à 1, donc s'annule pour un unique $\alpha > 0$. Cependant $|X| = |Y|$ p.s., ce qui exclut l'indépendance pour tout α, par le même argument sur l'événement $\{|X| \leq 1\}$ que pour les marginales normales non conjointement gaussiennes.

Exercice 6.16 — Convolution de deux densités gaussiennes

L3 • énoncé, p. 51

Il suffit de centrer. Pour $v = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 > 0$ et les deux variances strictement positives,

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z-x)^2}{\sigma_2^2} = \frac{z^2}{v} + \frac{v}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x - \frac{\sigma_1^2 z}{v}\right)^2.$$

Dans l'intégrale de convolution, le second terme donne une intégrale gaussienne de valeur $\sqrt{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2/v}$. La densité résultante est donc $e^{-z^2/(2v)}/\sqrt{2\pi v}$. On réintroduit la moyenne $m_1 + m_2$. Si une variance est nulle, la variable correspondante est constante et le résultat est immédiat.

7. Conditionnement, marches aléatoires et martingales

Exercice 7.1 — Problème des allumettes de Banach

M1 • énoncé, p. 52

1. Soit k un entier compris entre 0 et n. Si $X_n = k$ et que le fumeur s'aperçoit pour la première fois que la boîte dans sa poche gauche est vide, cela signifie que le fumeur a pris n allumettes dans sa poche gauche, $n-k$ allumettes dans sa poche droite et qu'il choisit la $(2n-k+1)$-ième allumette dans sa poche gauche. La probabilité de cet événement est

$$\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}\frac{1}{2}.$$

Par symétrie, il s'agit également de la probabilité que $X_n = k$ et que le fumeur s'aperçoive pour la première fois que la boîte dans sa poche droite est vide. Comme ces deux événements sont incompatibles et que leur union est l'événement $\{X_n = k\}$, on a finalement

$$\mathbb{P}(X_n = k) = 2^{-(2n-k)}\binom{2n-k}{n} = p_k.$$

2. Calculons maintenant $\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=0}^{n} k p_k$. Dans ce but, observons que

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{2^{-2n+k+1}\binom{2n-k-1}{n}}{2^{-2n+k}\binom{2n-k}{n}} = 2\frac{(2n-k-1)!}{(n-k-1)!}\frac{(n-k)!}{(2n-k)!} = 2\frac{n-k}{2n-k},$$

de sorte que $(2n-k)p_{k+1} = 2(n-k)p_k$. En sommant sur k entre 0 et $n-1$, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2(n-k)p_k = \sum_{k=0}^{n-1}(2n-k)p_{k+1} = \sum_{k=1}^{n}(2n-k+1)p_k,$$

ce qui donne

$$(n+1)p_n - 2np_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(2n-k+1-2n+2k)p_k = 0$$

puis

$$2np_0 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)p_k = \sum_{k=1}^{n} k p_k + \sum_{k=1}^{n} p_k = \mathbb{E}[X_n] + 1 - p_0.$$

On en déduit que $\mathbb{E}[X_n] = (2n+1)p_0 - 1 = (2n+1)2^{-2n}\binom{2n}{n} - 1$.

3. Pour obtenir un équivalent de $\mathbb{E}[X_n]$, commençons par utiliser la formule de Stirling pour obtenir

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+1/2}\mathrm{e}^{-2n}}{2\pi(n^{n+1/2}\mathrm{e}^{-n})^2} \sim \frac{2^{2n+1/2}}{\sqrt{2\pi n}}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[X_n] + 1 \sim (2n+1)2^{-2n}\frac{2^{2n+1/2}}{\sqrt{2\pi n}} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} \qquad \text{puis} \qquad \mathbb{E}[X_n] \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Exercice 7.2 — Changements de signe d'une marche aléatoire

M1 • énoncé, p. 52

1. En décomposant l'événement $\mathscr{E}_{n,r}$ suivant les événements $\{S_1 = 1\}$ et $\{S_1 = -1\}$, qui sont incompatibles et se produisent chacun avec probabilité $1/2$, on peut écrire

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,r}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,r} \mid S_1 = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,r} \mid S_1 = -1).$$

De plus, par symétrie de la marche, on a $\mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,r} \mid S_1 = -1) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,r} \mid S_1 = 1)$, si bien que $\mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,r}) = \mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,r} \mid S_1 = 1)$. Effectuons alors un changement de repère en prenant le point $(1,1)$ comme nouvelle origine. Ainsi,

conditionnellement à l'événement $\{S_1 = 1\}$, dire que la marche aléatoire présente r changements de signe avant l'instant $2n+1$ revient à dire que sa trajectoire après l'instant 1 part de la nouvelle origine et croise ensuite r fois le niveau -1 dans les nouvelles coordonnées sur une durée de $2n$ pas. On en déduit que

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,r}) = \mathbb{P}(\text{la marche croise exactement } r \text{ fois le niveau } -1 \text{ avant l'instant } 2n).$$

2. Supposons $r = 0$ et fixons $k \geq 0$. D'après le principe de réflexion, le nombre de chemins reliant $(0,0)$ à $(2n, 2k)$ qui touchent la droite horizontale d'ordonnée -2 est égal au nombre de chemins reliant $(0,-4)$ à $(2n, 2k)$, qui est lui-même égal au nombre de chemins reliant $(0,0)$ à $(2n, 2k+4)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\text{la marche arrive au niveau } 2k \text{ à l'instant } 2n \text{ et a atteint le niveau } -2 \text{ avant}) = \mathbb{P}(S_{2n} = 2k+4) = p_{2n,2k+4}.$$

Par ailleurs, on a $\mathbb{P}(\text{la marche arrive au niveau } 2k \text{ à l'instant } 2n) = \mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = p_{2n,2k}$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 2k \text{ et la marche n'atteint pas le niveau } -2 \text{ avant l'instant } 2n) = p_{2n,2k} - p_{2n,2k+4}.$$

3. Si la marche n'atteint pas le niveau -2 avant l'instant $2n$, alors en particulier S_{2n} est alors pair et positif. Donc,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{la marche n'atteint pas le niveau } -2 \text{ avant l'instant } 2n)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 2k \text{ et la marche n'atteint pas le niveau } -2 \text{ avant l'instant } 2n)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (p_{2n,2k} - p_{2n,2k+4}) = p_{2n,0} + p_{2n,2} = 2p_{2n+1,1}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que $p_{2n+1,1} = \mathbb{P}(S_{2n+1} = 1) = \mathbb{P}(S_{2n+1} = 1 \mid S_{2n} = 0)\mathbb{P}(S_{2n} = 0) + \mathbb{P}(S_{2n+1} = 1 \mid S_{2n} = 2)\mathbb{P}(S_{2n} = 2) = \frac{1}{2}p_{2n,0} + \frac{1}{2}p_{2n,2}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que dire que la marche n'atteint pas le niveau -2 avant l'instant $2n$ revient à dire que le niveau -1 n'est pas croisé par la marche avant l'instant $2n$. Finalement,

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,0}) = \mathbb{P}(\text{la marche ne croise pas le niveau } -1 \text{ avant l'instant } 2n) = 2p_{2n+1,1}.$$

4. Supposons $r = 1$ et fixons $\nu \in \{1, \dots, n\}$. Par symétrie par rapport au niveau -1, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\text{la marche } S_{2\nu}, \dots, S_{2n} \text{ ne croise pas le niveau } -1 \mid S_{2\nu} = -2)\\
=&\mathbb{P}(\text{la marche } -2 - S_{2\nu}, \dots, -2 - S_{2n} \text{ ne croise pas le niveau } -1 \mid -2 - S_{2\nu} = 0).
\end{aligned}$$

Conditionnellement à $\{-2 - S_{2\nu} = 0\}$, la marche $-2 - S_{2\nu}, \dots, -2 - S_{2n}$ a la même loi qu'une marche aléatoire symétrique issue de 0 étudiée jusqu'à l'instant $2n - 2\nu$. On se ramène alors au cas d'une marche qui ne croise pas le niveau -1 au bout de $2n - 2\nu$ étapes. D'après le cas précédent, on a

$$\mathbb{P}(\text{la marche } -2 - S_{2\nu}, \dots, -2 - S_{2n} \text{ ne croise pas le niveau } -1 \mid -2 - S_{2\nu} = 0) = 2p_{2n-2\nu+1,1}.$$

Par ailleurs, pour la même raison, on a $p_{2n-2\nu+1,1} = \mathbb{P}(-2 - S_{2n+1} = 1 \mid -2 - S_{2\nu} = 0)$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(\text{la marche } -2 - S_{2\nu}, \dots, -2 - S_{2n} \text{ ne croise pas le niveau } -1 \mid S_{2\nu} = -2) = 2\mathbb{P}(S_{2n+1} = -3 \mid S_{2\nu} = -2).$$

Si $L = 2n - 2\nu$, la probabilité de gauche est le nombre de chemins sans croisement divisé par 2^L. La probabilité de droite, avec son facteur 2, est deux fois le nombre de chemins vers -3 divisé par 2^{L+1}, donc ce même nombre divisé par 2^L. Les deux nombres de chemins sont ainsi égaux.

5. Comme $r = 1$, on s'intéresse aux chemins de longueur $2n$ issus de $(0,0)$ qui croisent le niveau -1 une seule fois. Un tel chemin atteint pour la première fois le niveau -2 à un instant de la forme 2ν avec $\nu \in \{1, \dots, n\}$. Il peut alors se voir comme un chemin allant de $(0,0)$ à $(2\nu, -2)$ et ne touchant pas le niveau -2 avant l'instant 2ν, suivi d'un chemin de longueur $2n - 2\nu$ partant de $(2\nu, -2)$ et ne croisant pas le niveau -1. D'après la question précédente, il y a autant de possibilités pour cette dernière portion que de chemins allant de $(2\nu, -2)$ à $(2n+1, -3)$. Par conséquent, il y a autant de chemins de longueur $2n$ issus de $(0,0)$ qui croisent le niveau -1 une seule fois que de chemins allant de $(0,0)$ à $(2n+1, -3)$. Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,1}) &= \mathbb{P}(\text{la marche croise une seule fois le niveau } -1 \text{ avant l'instant } 2n)\\
&= 2^{-2n} \operatorname{Card}\{\text{chemins de longueur } 2n \text{ issus de } (0,0) \text{ qui croisent une seule fois le niveau } -1\}\\
&= 2^{-2n} \operatorname{Card}\{\text{chemins allant de } (0,0) \text{ à } (2n+1, -3)\} = 2^{-2n}2^{2n+1}\mathbb{P}(S_{2n+1} = -3) = 2p_{2n+1,3}.
\end{aligned}$$

6. Notons $c_{m,r}$ le nombre de chemins de longueur $2m$, issus de zéro, qui croisent exactement r fois le niveau -1. Le cas $r = 0$ donne $c_{m,0} = \binom{2m+1}{m}$, le nombre de chemins de longueur $2m+1$ aboutissant à -1. Supposons le résultat établi pour $r-1$, uniformément en m. Un chemin avec $r \geq 1$ croisements atteint -2 pour la première fois à un instant pair $2v$. Soit h_v le nombre de préfixes possibles jusqu'à cet instant. En réfléchissant la suite du chemin par rapport au niveau -1, le nombre de suffixes admissibles est $c_{m-v,r-1}$. Par récurrence, il est égal au nombre de chemins de longueur $2(m-v)+1$ allant de -2 à $-2r-1$. Or tout chemin de longueur $2m+1$ allant de zéro à $-2r-1$ atteint -2 pour la première fois à un unique instant $2v$. Les deux décompositions donnent donc

$$c_{m,r} = \sum_{v=1}^{m} h_v c_{m-v,r-1} = \binom{2m+1}{m-r},$$

avec la convention qu'un coefficient binomial hors de son domaine vaut zéro. Finalement,

$$\mathbb{P}(\mathscr{E}_{n,r}) = 2^{-2n} c_{n,r} = 2p_{2n+1,2r+1}.$$

Exercice 7.3 — Variation quadratique d'une martingale

M1 • énoncé, p. 52

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe et $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable donc $(M_n^2)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale. Ainsi, pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2 | \mathscr{F}_n] \geq 0$. Cela entraîne que le processus $(\langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ est croissant. On peut aussi le voir en calculant

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_{n+1} - \langle M\rangle_n &= \mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2 | \mathscr{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 | \mathscr{F}_n] + 2M_n \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathscr{F}_n] - 2M_n^2 \\ &= \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 | \mathscr{F}_n] \geq 0.\end{aligned}$$

De plus, il est facile de vérifier que le processus $(\langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ est prévisible. Enfin, pour tout $n \geq 0$, $M_n^2 - \langle M\rangle_n$ est intégrable et $\mathscr{F}_n$-mesurable et

$$\mathbb{E}[M_{n+1}^2 - \langle M\rangle_{n+1} | \mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+1}^2 | \mathscr{F}_n] - \langle M\rangle_{n+1} = M_n^2 - \langle M\rangle_n,$$

donc $(M_n^2 - \langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

2. Si $(M_n^2 - A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale alors pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}(M_{n+1}^2 | \mathscr{F}_n) - A_{n+1} = \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - A_{n+1} | \mathscr{F}_n) = M_n^2 - A_n$$

c'est-à-dire $A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - M_n^2 | \mathscr{F}_n)$. Comme $A_0 = 0$ p.s., on en déduit que $A_n = \langle M\rangle_n$ p.s. pour tout $n \geq 0$.

3. On va utiliser deux fois la propriété suivante, vue dans la question 1. avec $\langle M\rangle_n$, et qui est très souvent utile : si X est une martingale de carré intégrable, pour tout $n \geq 0$ on a

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2 - X_n^2 | \mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2 | \mathscr{F}_n]. \tag{7}$$

Pour tout $n \geq 0$ on obtient

$$\begin{aligned}\langle (C\cdot M)\rangle_{n+1} - \langle (C\cdot M)\rangle_n &= \mathbb{E}\big[(C\cdot M)_{n+1}^2 - (C\cdot M)_n^2 | \mathscr{F}_n\big] = \mathbb{E}\Big[\big((C\cdot M)_{n+1} - (C\cdot M)_n\big)^2 | \mathscr{F}_n\Big] \\ &= \mathbb{E}\big[C_{n+1}^2 (M_{n+1} - M_n)^2 | \mathscr{F}_n\big] = C_{n+1}^2 \mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2 | \mathscr{F}_n] \\ &= C_{n+1}^2 (\langle M\rangle_{n+1} - \langle M\rangle_n).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\langle (C\cdot M)\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} C_k^2 (\langle M\rangle_k - \langle M\rangle_{k-1}) = (C^2 \cdot \langle M\rangle)_n.$$

4. *Méthode 1 :* Le processus $(M_n^2 - \langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et T est un temps d'arrêt donc $(M_{T\wedge n}^2 - \langle M\rangle_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une martingale. De plus, par définition, $\langle M\rangle_{T\wedge 0} = \langle M\rangle_0 = 0$. On vérifie finalement que le processus $(\langle M\rangle_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est prévisible : pour tout $n \geq 1$,

$$\langle M\rangle_{T\wedge n} = \sum_{i=1}^{n-1} \langle M\rangle_i \mathbf{1}_{\{T=i\}} + \langle M\rangle_n \mathbf{1}_{\{T\geq n\}},$$

or pour tout i, $\langle M\rangle_i$ est $\mathcal{F}_{i-1}$-mesurable, $\{T=i\}\in\mathcal{F}_i$ et $\{T\geq n\}\in\mathcal{F}_{n-1}$, donc $\langle M\rangle_{T\wedge n}$ est bien $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable. Ainsi, d'après la question 2, $\langle M^T\rangle_n=\langle M\rangle_{T\wedge n}$ p.s. pour tout $n\geq 0$.

Méthode 2 : On va utiliser la question 3, l'enjeu est de trouver le bon processus $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $C_n=\mathbf{1}_{\{T\geq n\}}$ pour tout $n\geq 1$. En remarquant que $\{T\geq n\}=\{T\leq n-1\}^c$, on obtient que C_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n\geq 1$, et C_n est évidemment borné par 1, donc par la question 3 nous connaissons la forme de $\langle (C\cdot M)\rangle_n$. Or on a

$$\begin{aligned}(C\cdot M)_n&=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{T\geq k\}}(M_k-M_{k-1})=\sum_{k=1}^{T\wedge n}(M_k-M_{k-1})\\&=M_{T\wedge n}-M_0=M_n^T-M_0.\end{aligned}$$

On va noter $Y_n=M_n^T-M_0$. Puisque $(M_n^T)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont des martingales, en utilisant l'identité conditionnelle de la question 1 et le résultat de la question 3, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\langle M^T\rangle_n&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[(M_k^T-M_{k-1}^T)^2|\mathcal{F}_{k-1}]=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[(Y_k-Y_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1}]\\&=\langle Y\rangle_n=\langle (C\cdot M)\rangle_n=\sum_{k=1}^{n}C_k^2(\langle M\rangle_k-\langle M\rangle_{k-1})=\langle M\rangle_{T\wedge n}-\langle M\rangle_0=\langle M\rangle_{T\wedge n}.\end{aligned}$$

Exercice 7.4 — Dénombrement des chemins et réflexion

M1 • énoncé, p. 53

Posons $N_{n,x}=\binom{n}{(n+x)/2}$ lorsque $|x|\leq n$ et $n+x$ est pair, et $N_{n,x}=0$ sinon. Il suffit en effet de choisir les $(n+x)/2$ pas positifs. Pour des barrières entières $a,b>0$, la réflexion de la trajectoire après son premier passage en $-b$ envoie les chemins finissant en a sur ceux finissant en $-2b-a$; le nombre de chemins restant strictement au-dessus de $-b$ est donc $N_{n,a}-N_{n,a+2b}$. Pour $0<a<b$, la réflexion au niveau b donne de même $N_{n,a}-N_{n,2b-a}$.

Exercice 7.5 — Maximum et premier passage d'une marche

M1 • énoncé, p. 53

On inclut $S_0=0$ dans le maximum et l'on prend des niveaux entiers. Pour $r\geq 0$, $k\leq r$, la réflexion après le premier passage en r est une bijection entre les chemins de l'événement considéré et ceux finissant en $2r-k$. Chaque chemin ayant masse 2^{-n}, on obtient l'identité annoncée. En sommant, $\mathbb{P}(M_n\geq r)=\mathbb{P}(S_n\geq r)+\mathbb{P}(S_n>r)$, d'où

$$\mathbb{P}(M_n=r)=p_{n,r}+p_{n,r+1}\quad(r\geq 0).$$

Pour $r\geq 1$, la probabilité d'un premier passage en r au temps n vaut

$$\frac{1}{2}\big(p_{n-1,r-1}-p_{n-1,r+1}\big)=\frac{r}{n}p_{n,r}.$$

La première expression exige d'être en $r-1$ au temps $n-1$ sans avoir encore atteint r, puis de faire un pas positif. L'identité binomiale donne la seconde.

Exercice 7.6 — Marche duale et dernier passage

M1 • énoncé, p. 53

1. On a $S_k^*=S_n-S_{n-k}$ pour $0\leq k\leq n$. La suite des accroissements inversés a la même loi que la suite initiale.

2. L'événement est $\{S_1^*>0,\dots,S_n^*>0\}$. Notons $p_{m,r}=\mathbb{P}(S_m=r)$. Pour une arrivée en $r>0$, la réflexion après la première visite en zéro, une fois le premier pas positif effectué, donne

$$\mathbb{P}(S_1>0,\dots,S_n>0,S_n=r)=\tfrac{1}{2}(p_{n-1,r-1}-p_{n-1,r+1}).$$

En sommant sur les $r>0$ de même parité que n, la somme se télescope. Pour $n=2v$, elle vaut $p_{2v-1,1}/2=2^{-2v-1}\binom{2v}{v}$; pour $n=2v+1$, elle vaut $p_{2v,0}/2$, soit la même expression. Le cas $n=1$ est inclus avec $v=0$. Un chemin de pas ±1 dont le point terminal est positif et visité pour la première fois à l'instant n ne peut l'avoir dépassé auparavant sans l'avoir visité. C'est donc exactement l'événement considéré.

3. Pour $r\in\{1,\dots,n\}$ de même parité que n, la formule de la question précédente et les identités binomiales donnent

$$\tfrac{1}{2}(p_{n-1,r-1}-p_{n-1,r+1})=\frac{r}{n}\,2^{-n}\binom{n}{(n+r)/2}.$$

La probabilité est nulle dans les autres cas. La même valeur s'applique à la marche duale.

Exercice 7.7 — Oscillation de la marche simple

L3 / M1 • énoncé, p. 54

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Modifier un nombre fini d'accroissements ajoute une constante aux sommes ultérieures : l'événement A est terminal, donc de probabilité zéro ou un. La symétrie donne $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$. Si ces probabilités sont nulles, la suite est bornée presque sûrement ; les événements $\{\sup_n |S_n| < k\}$ croissent alors vers un événement de probabilité un. Or $\mathbb{P}(S_n = j) = 2^{-n}\binom{n}{(n+j)/2}$ sur les valeurs admissibles. Le coefficient binomial maximal est majoré par $C_0 2^n/\sqrt{n}$ (par exemple par la formule de Stirling), donc $\mathbb{P}(|S_n| < k) \leq Ck/\sqrt{n}$. Pour chaque k fixé, la probabilité de $\{\sup_n |S_n| < k\}$ est ainsi nulle, contradiction. Donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$. Comme les sauts sont de taille un, les passages répétés de valeurs positives à des valeurs négatives imposent une infinité de passages en zéro.

On a $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}[p(1-p)]^n \leq [4p(1-p)]^n$. Si $p \neq 1/2$, la série converge et Borel–Cantelli donne le résultat ; les retours aux instants impairs sont impossibles. Si $p = 1/2$, le TCL donne $\mathbb{P}(S_n/\sqrt{n} \geq 1) \to 1 - \Phi(1) > 0$. Par l'inégalité de Fatou appliquée aux complémentaires, la probabilité d'occurrence infinie est au moins cette limite. L'événement $\{\limsup S_n/\sqrt{n} \geq 1\}$ est asymptotique : modifier un nombre fini d'incréments modifie $S_n/\sqrt{n}$ d'une quantité tendant vers zéro. Par la loi zéro-un, sa probabilité est donc un. Par symétrie, le même résultat vaut pour la limite inférieure et le seuil -1. La marche prend ainsi des valeurs positives et négatives à des instants arbitrairement grands ; ses sauts étant de taille un, chaque passage entre les deux signes impose une visite en zéro.

Dans le cas général, supposons $S_n/\sqrt{n} \to Z$ en probabilité. Alors le couple $(S_n/\sqrt{n}, S_{2n}/\sqrt{2n})$ convergerait en loi vers (Z, Z). Mais le TCL sur les deux blocs indépendants donne la limite $(G, (G+H)/\sqrt{2})$ où G, H sont indépendantes normales centrées de variance σ^2, de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Ce couple n'est pas concentré sur la diagonale, car la variance de sa différence est $\sigma^2(2 - \sqrt{2}) > 0$. Contradiction.

Exercice 7.8 — Indépendance conditionnelle

M1 • énoncé, p. 54

1. Pour la tribu triviale, l'égalité devient $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$: c'est l'indépendance. Pour $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, les espérances conditionnelles sont les variables elles-mêmes ; l'égalité est automatique.

2. On raisonne d'abord avec des fonctions positives bornées. Si l'indépendance conditionnelle est vérifiée et si Z est $\mathcal{G}$-mesurable positive, la propriété de la tour donne

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(f(X) \mid \mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y) \mid \mathcal{G})Z] \\ &= \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}(g(Y) \mid \mathcal{G})].\end{aligned}$$

   Réciproquement, cette dernière identité pour $Z = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{G}$, caractérise $\mathbb{E}(f(X)g(Y) \mid \mathcal{G})$ et redonne le produit des deux espérances conditionnelles. Fixons maintenant g positive bornée. Les ensembles $\{X \in H\} \cap A$, avec $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{G}$, forment un π-système contenant Ω et engendrant $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$. L'identité précédente, appliquée à $f = \mathbf{1}_H$ et $Z = \mathbf{1}_A$, montre que les intégrales de $g(Y)$ et de $\mathbb{E}(g(Y) \mid \mathcal{G})$ coïncident sur ce système. Le lemme de classe monotone les fait coïncider sur toute la tribu engendrée. Par la caractérisation de l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}(g(Y) \mid \sigma(X) \vee \mathcal{G}) = \mathbb{E}(g(Y) \mid \mathcal{G}).$$

   Réciproquement, conditionner $f(X)Zg(Y)$ par $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$ permet de sortir le facteur mesurable $f(X)Z$ et redonne l'identité intermédiaire. Enfin, les fonctions positives quelconques s'obtiennent par troncature et convergence monotone, avec la convention usuelle $0 \cdot \infty = 0$.

Exercice 7.9 — Deux conditionnements réciproques

M1 • énoncé, p. 54

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X-Y)^2) &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)Y) + \mathbb{E}(Y^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2).\end{aligned}$$

En échangeant les rôles de X et Y, on obtient $\mathbb{E}((X-Y)^2) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X^2)$ et donc $\mathbb{E}((X-Y)^2) = 0$. On en déduit que les variables X et Y sont égales p.s.

Exercice 7.10 — Contraction conditionnelle d'une norme L^p

M1 • énoncé, p. 54

1. On utilise Jensen sur la variable $X+Y$: $|\mathbb{E}(X+Y \mid X)|^p \leq \mathbb{E}(|X+Y|^p \mid X)$. Ensuite il suffit de prendre l'espérance de cette inégalité.
2. Puisque X et Y sont indépendants, $\mathbb{E}(Y \mid X) = \mathbb{E}(Y)$.

En prenant les racines p-ièmes, on obtient exactement les deux inégalités de normes annoncées.

Exercice 7.11 — Conditionner en présence d'une information indépendante

M1 • énoncé, p. 55

1. Pour tous $A_1 \in \mathscr{B}_1$ et $A_2 \in \mathscr{B}_2$, puisque $\mathbf{1}_{A_1} Y$ et $\mathbf{1}_{A_2}$ sont indépendantes, on a

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_1\cap A_2} Y] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_1}\mathbf{1}_{A_2} Y] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_1} Y]\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_2}]$$

et donc, par définition de $\mathbb{E}[Y|\mathscr{B}_1]$,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_1\cap A_2} Y] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_1}\mathbb{E}[Y|\mathscr{B}_1]]\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_2}].$$

Mais $\mathbf{1}_{A_1}\mathbb{E}[Y|\mathscr{B}_1]$ et $\mathbf{1}_{A_2}$ sont indépendantes. Il en résulte que

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_1\cap A_2} Y] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_1}\mathbb{E}[Y|\mathscr{B}_1]\mathbf{1}_{A_2}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_1\cap A_2}\mathbb{E}[Y|\mathscr{B}_1]].$$

Puisque $\{A_1 \cap A_2, A_1 \in \mathscr{B}_1, A_2 \in \mathscr{B}_2\}$ est un π-système qui engendre la tribu $\mathscr{B}$, il résulte que l'on a

$$\forall A \in \mathscr{B} \quad \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[Y|\mathscr{B}_1]].$$

Pour conclure, il reste à remarquer que $\mathbb{E}[Y|\mathscr{B}_1]$ est $\mathscr{B}$-mesurable.

2. Soit g une fonction borélienne bornée et $i \in \{2, \dots, n\}$. Puisque les X_i sont i.i.d., (X_1, S_n) a même loi que (X_i, S_n). Donc

$$\mathbb{E}[X_i g(S_n)] = \mathbb{E}[X_1 g(S_n)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1|S_n] g(S_n)].$$

Comme de plus $\mathbb{E}[X_1|S_n]$ est $\sigma(S_n)$-mesurable, $\mathbb{E}[X_i|S_n] = \mathbb{E}[X_1|S_n]$.

3. En utilisant le résultat précédent,

$$n\mathbb{E}[X_1|S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i|S_n] = \mathbb{E}[S_n|S_n] = S_n.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}[X_1|S_n] = \frac{S_n}{n}.$$

4. Soit $\mathscr{B}_1 = \sigma(S_n)$, $\mathscr{B} = \sigma(S_{n+k}, k \in \mathbb{N})$ et

$$\mathscr{B}_2 = \sigma\left(\sum_{i=n+1}^{n+k} X_i, k \in \mathbb{N}^*\right).$$

Puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+k} = S_n + \sum_{i=n+1}^{n+k} X_i$, on a l'égalité de tribus $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$. Les tribus $\sigma(\sigma(X_1), \mathscr{B}_1)$ et $\mathscr{B}_2$ étant indépendantes, on peut utiliser la première question :

$$\mathbb{E}[X_1|S_n, S_{n+1}, \dots] = \mathbb{E}[X_1|\mathscr{B}] = \mathbb{E}[X_1|\mathscr{B}_1] = \mathbb{E}[X_1|S_n] = \frac{S_n}{n}.$$

Exercice 7.12 — Densités conditionnelles et mélange gamma

M1 • énoncé, p. 55

1. Posons $q(y) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x,y)\,dx$. Par Tonelli, q est mesurable, son intégrale vaut un et elle est finie presque partout. La loi de Y donne une probabilité nulle à l'ensemble où $q = 0$ ou $q = \infty$. Pour $0 < q(y) < \infty$, posons

$$\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)\frac{p(x,y)}{q(y)}\,dx,$$

et posons $\psi(y) = h(0,y)$ ailleurs. Pour toute fonction borélienne positive g, Tonelli donne

$$\mathbb{E}[h(X,Y)g(Y)] = \int g(y)\int h(x,y)p(x,y)\,dx\,dy = \mathbb{E}[\psi(Y)g(Y)].$$

Donc $\mathbb{E}[h(X,Y)\mid Y] = \psi(Y)$. Une loi conditionnelle est $p(x,y)dx/q(y)$ lorsque $0 < q(y) < \infty$, et peut être prise égale à δ_0 sur l'ensemble exceptionnel.

2. En multipliant la densité de Y par la densité conditionnelle uniforme, la loi jointe de (X,Y) a pour densité $\lambda^2 e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{\{0<x<y\}}$. Le changement de variables $(x,y) = (u, u+v)$ a un jacobien égal à un et donne

$$f_{X,Y-X}(u,v) = \lambda^2 e^{-\lambda(u+v)}\mathbf{1}_{\{u>0,v>0\}}.$$

Cette densité est le produit de deux densités exponentielles de taux λ. Les variables X et $Y-X$ sont donc indépendantes et suivent cette loi.

La formule de la première question reste vraie pour une fonction h signée intégrable, en appliquant le résultat à ses parties positive et négative.

Exercice 7.13 — Moyenne conditionnelle gaussienne

M1 • énoncé, p. 55

On note μ la moyenne de M et s^2 sa variance.

1. En calculant la fonction caractéristique $\mathbb{E}(e^{itX}e^{ivM})$, on montre que (X,M) est un vecteur gaussien de moyenne $\begin{pmatrix}\mu\\ \mu\end{pmatrix}$ et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} s^2+\sigma^2 & s^2 \\ s^2 & s^2\end{pmatrix}.$$

2. Le couple $(X-M, M)$ est gaussien et $\mathrm{Cov}(X-M, M) = s^2 - s^2 = 0$. Ses composantes sont donc indépendantes ; $X-M$ est normale centrée de variance σ^2, de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

3. $\mathbb{E}[X|M] = M$.

4. Puisque $(X-\mu, M-\mu)$ est un vecteur gaussien centré, $\mathbb{E}[M-\mu|X] = \mathbb{E}[M-\mu|X-\mu]$ est la projection orthogonale de $M-\mu$ sur $\mathrm{Vect}(X-\mu)$. Donc $\mathbb{E}[M-\mu|X] = \lambda(X-\mu)$ avec $\lambda = \mathrm{Cov}(M,X)/\mathrm{Var}(X)$. Finalement on obtient $\mathbb{E}[M|X] = \frac{\mu\sigma^2}{s^2+\sigma^2} + \frac{s^2}{s^2+\sigma^2}X$.

Si $s^2+\sigma^2 = 0$, les deux variables sont presque sûrement égales à μ et l'espérance conditionnelle vaut directement μ.

Exercice 7.14 — Fonctions harmoniques et martingales

M1 • énoncé, p. 55

La fonction f étant continue, elle est bornée sur tout compact. De plus, pour tout $n \geq 1$,

$$|U_1 + \ldots + U_n| \leq nr.$$

Ainsi, chaque v.a. $f(X_n)$ est bornée donc intégrable. Il est évident que $f(X_n)$ est $\mathscr{F}_n$-mesurable pour tout n. De plus, pour tout $n \geq 1$, X_n étant $\mathscr{F}_n$-mesurable et U_{n+1} étant indépendant de $\mathscr{F}_n$, on a

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[f(X_n+U_{n+1})|\mathscr{F}_n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(X_n + r\exp(i\theta))\mathrm{d}\theta = f(X_n).$$

Exercice 7.15 — Deux transformations de martingales

M1 • énoncé, p. 55

1. La mesurabilité par rapport à $\mathscr{F}_n$ et l'intégrabilité de $\phi(X_n)$ sont triviales dans les deux cas pour tout n. Or par l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}[\phi(X_{n+1})|\mathscr{F}_n] \geq \phi(\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]).$$

Dans le premier cas on conclut car $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = X_n$ p.s., et dans l'autre cas car $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \geq X_n$ et ϕ est croissante.

2. On vérifie facilement dans les deux cas que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(H\cdot X)_n$ est intégrable (car les (X_i) sont intégrables et les (H_i) sont bornés) et mesurable par rapport à $\mathscr{F}_n$ (car les (X_i) sont adaptés et les (H_i) sont prévisibles). Il suffit donc de regarder, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de

$$\mathbb{E}[(H\cdot X)_{n+1} - (H\cdot X)_n|\mathscr{F}_n],$$

si cette variable est nulle p.s. alors $((H\cdot X)_n)$ est une martingale, si elle est positive c'est une sous-martingale, et si elle est négative, c'est une sur-martingale. Or $(H\cdot X)_{n+1} - (H\cdot X)_n = H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)$ et puisque H_{n+1} est $\mathscr{F}_n$-mesurable on a

$$\mathbb{E}[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathscr{F}_n] = H_{n+1}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n].$$

Le résultat tombe alors immédiatement suivant les hypothèses sous lesquelles on se place (que ce soit $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n] = 0$, $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n] \leq 0$ et $H_{n+1} \geq 0$ ou $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n] \geq 0$ et $H_{n+1} \geq 0$).

Exercice 7.16 — Loi du logarithme itéré

M1 • énoncé, p. 56

1. On sait que $(S_n)_{n\geq 1}$ est une martingale. Soit $\theta > 0$. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\theta x)$ est convexe et $\mathbb{E}[\exp(\theta S_n)] = \mathbb{E}[\exp(\theta X_1)]^n < \infty$, donc $(\exp(\theta S_n))_{n\geq 1}$ est une sous-martingale. D'après l'inégalité maximale de Doob, pour tout $c > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) = \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} \exp(\theta S_k) \geq \exp(\theta c)\right) \leq \exp(-\theta c)\mathbb{E}(\exp(\theta S_n)).$$

Chaque v.a. X_n suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ donc pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[\exp(\theta S_n)] = \exp(n\theta^2/2)$, d'où

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq \exp(-\theta c)\exp\left(\frac{n\theta^2}{2}\right). \tag{8}$$

Un calcul de dérivée montre que la fonction $\theta \in \mathbb{R}_+ \mapsto -\theta c + \frac{n\theta^2}{2}$ est minimale pour $\theta = \frac{c}{n}$. En attribuant à θ la valeur $\frac{c}{n}$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq \exp\left(-\frac{c^2}{2n}\right).$$

2. D'après la question 1., pour $K > 1$ et $n > 1 + 1/\log K$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1})\right) &\leq \exp\left(-\frac{(Kh(K^{n-1}))^2}{2K^n}\right) \leq \exp(-K\log\log K^{n-1}) \\ &\leq (n-1)^{-K}\log(K)^{-K},\end{aligned}$$

donc, en choisissant un entier $n_0 > 1 + 1/\log K$, on obtient

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1})\right) < \infty$$

et le lemme de Borel-Cantelli implique que p.s., il existe $n \geq 1$ tel que pour tout $m \geq n$,

$$\max_{1\leq k\leq K^m} S_k \leq Kh(K^{m-1}).$$

En particulier, pour $m \geq n$ et $K^{m-1} \leq k \leq K^m$, $S_k \leq Kh(k)$ car h est croissante. On a donc montré que, pour tout $K > 1$, p.s.,

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{S_k}{h(k)} \leq K.$$

En appliquant ce résultat aux valeurs $K = 1 + 1/n$ et en intersectant les événements de probabilité un ainsi obtenus, on a presque sûrement, pour tout $n \geq 1$,

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{S_k}{h(k)} \leq 1 + \frac{1}{n},$$

et donc $\limsup_{k\to\infty} S_k/h(k) \leq 1$.

Exercice 7.17 — Inégalité maximale pour les sur-martingales positives

M1 • énoncé, p. 56

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $H_n = \mathbf{1}_{\{T\geq n\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{T\leq n-1\}}$. La famille $(H_n)_{n\geq 1}$ est donc prévisible (i.e. pour tout $n \geq 1$, H_n est $\mathscr{F}_{n-1}$-mesurable), et évidemment bornée et positive. On sait donc que le processus $((H \cdot X)_n)_{n\geq 0}$, défini par $(H \cdot X)_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$(H \cdot X)_n = \sum_{j=1}^{n} H_j(X_j - X_{j-1}),$$

est une sur-martingale. Or on a

$$X_{T\wedge n} = X_0 + (H \cdot X)_n.$$

Donc $(X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est aussi une sur-martingale.

2. On utilise un temps d'arrêt. On note $T_a = \inf\{n \geq 0 : X_n > a\}$. C'est bien un temps d'arrêt car pour tout n, $\{T_a \leq n\} = \bigcup_{p\leq n}\{X_p > a\} \in \mathscr{F}_n$. L'intérêt de ce temps d'arrêt est qu'on a l'égalité suivante :

$$\{T_a < +\infty\} = \{\sup_{n\geq 0} X_n > a\}.$$

Comme T_a est un temps d'arrêt, on sait par la question 1. que $(X_{n\wedge T_a})_{n\geq 0}$ est une sur-martingale. Ainsi, $\mathbb{E}[X_{n\wedge T_a}] \leq \mathbb{E}[X_0]$ pour tout $n \geq 0$. Or, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[X_{n\wedge T_a}] = \mathbb{E}[X_n \mathbf{1}_{\{T_a>n\}}] + \mathbb{E}[X_{T_a}\mathbf{1}_{\{T_a\leq n\}}] \geq a\mathbb{P}(T_a \leq n),$$

la minoration découlant de la positivité de $(X_n, n \geq 0)$ et de l'inégalité $X_{T_a} > a$ sur $\{T_a < \infty\}$. On a donc

$$\mathbb{P}(T_a \leq n) \leq \frac{\mathbb{E}(X_0)}{a}.$$

On déduit le résultat de la convergence $\mathbb{P}(T_a \leq n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}(T_a < \infty)$.

Exercice 7.18 — Théorème de Rademacher

M1 • énoncé, p. 56

1. On remarque que, pour $0 \leq k \leq n$, $X_k = 2^{-k}\lfloor 2^k X_n\rfloor$. Ainsi, pour $0 \leq k \leq n$, X_k est $\sigma(X_n)$-mesurable. On en déduit que $\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(X_n)$. De plus, pour tout $n \geq 0$, par définition de X_n, on sait que X_n est $\sigma(X)$-mesurable. Ainsi, on a l'inclusion

$$\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) \subset \sigma(X).$$

De plus, X_n converge vers X en tout point de Ω quand n tend vers l'infini, donc X est $\bigcap_n \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$-mesurable. Ainsi, on obtient l'inclusion réciproque

$$\sigma(X) \subset \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots).$$

2. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. On a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Big[h(X_{n+1})\mathbf{1}_{\{X_n = k2^{-n}\}}\Big]\\ =&\mathbb{E}\Big(h(k2^{-n})\mathbf{1}_{\{X\in[k2^{-n},(2k+1)2^{-(n+1)}]\}}\Big) + \mathbb{E}\Big(h((2k+1)2^{-(n+1)})\mathbf{1}_{\{X\in[(2k+1)2^{-(n+1)},(k+1)2^{-n}]\}}\Big)\\ =&2^{-(n+1)}h(k2^{-n}) + 2^{-(n+1)}h((2k+1)2^{-(n+1)}).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n] = \frac{h(X_n)}{2} + \frac{h\Big(X_n + 2^{-(n+1)}\Big)}{2}.$$

Pour tout $n \geq 0$, Z_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable, $|Z_n| \leq L$ donc Z_n est intégrable et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= 2^{n+1}\mathbb{E}\Big[f(X_{n+1} + 2^{-(n+1)}) - f(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n\Big]\\ &= 2^n\Big[f(X_n + 2^{-(n+1)}) - f(X_n) + f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n + 2^{-(n+1)})\Big] = Z_n,\end{aligned}$$

donc $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale bornée par L.

3. D'après la question précédente, $\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}[|Z_n|] \leq L$, donc $(Z_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. (c'est une martingale bornée dans L^1). On pose $Z = \limsup_n Z_n$, qui est bornée par L et coïncide presque sûrement avec cette limite. De plus, $|Z_n| \leq L$ p.s. pour tout $n \geq 0$. On peut donc utiliser le théorème de convergence dominée pour obtenir la convergence de $(Z_n)_{n\geq 0}$ vers Z dans L^1. Pour tout $m \geq 0$, les variables Z_n, $n \geq m$, sont mesurables par rapport à $\sigma(X_m, X_{m+1}, \ldots)$. Il en va donc de même de $Z = \limsup_n Z_n$, qui est ainsi mesurable par rapport à $\bigcap_{m\geq 0}\sigma(X_m, X_{m+1}, \ldots)$. D'après la première question, Z est ainsi $\sigma(X)$-mesurable. Il existe donc une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $Z = g(X)$. De plus, Z étant bornée par L, on peut choisir g bornée (quitte à remplacer g par $\max\{-L, \min\{g, L\}\}$).

4. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. On a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$\mathbb{E}\Big[h(X)\mathbf{1}_{\{X_n = k2^{-n}\}}\Big] = \mathbb{E}\Big[h(X)\mathbf{1}_{\{X\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[\}}\Big] = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} h(x)\mathrm{d}x$$

et on en déduit que

$$\mathbb{E}[h(X)|X_n] = 2^n\int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} h(x)\mathrm{d}x.$$

Comme $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale qui converge p.s. et dans L^1 vers Z, on sait que $Z_n = \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n]$ pour tout $n \geq 0$. On a donc p.s.

$$Z_n = \mathbb{E}[g(X)|X_n] = 2^n\int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$

5. D'après la question précedente, pour tout $n \geq 0$,

$$f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n) = \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)du.$$

Donc, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n}) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u$$

puis, en sommant, pour tout $0 \leq k \leq 2^n$,

$$f(k2^{-n}) = f(0) + \int_0^{k2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(\lfloor x2^n\rfloor 2^{-n}) = f(0) + \int_0^{\lfloor x2^n\rfloor 2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u$$

et en faisant tendre n vers l'infini, par continuité de f on obtient

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u.$$

Le théorème de différentiation de Lebesgue donne alors $f'(x) = g(x)$ pour presque tout $x \in (0,1)$: toute fonction lipschitzienne est presque partout dérivable.

Exercice 7.19 — Urne de Pólya : loi limite, diffusion et simulation

L3 / M1 • énoncé, p. 57

1. Conditionnellement à $\mathscr{F}_n$, on ajoute une boule blanche avec probabilité X_n et une boule rouge avec probabilité $1 - X_n$. En notant $N = N_0 + n - 1$, il vient

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = \frac{Y_n + X_n}{N+1} = X_n.$$

La martingale (X_n) est bornée par 1. Elle converge donc presque sûrement vers une variable $U \in [0,1]$. La convergence dominée donne $\mathbb{E}[X_n^k] \to \mathbb{E}[U^k]$ pour tout entier $k \geq 1$.

2. On raisonne par récurrence. On a $Y_1 = 1$. Si Y_{n-1} est uniforme sur $\{1, \dots, n-1\}$, alors, pour $2 \leq k \leq n-1$,

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{n-1}\frac{n-k}{n} + \frac{1}{n-1}\frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Aux deux extrémités, la probabilité de n'avoir tiré que des boules rouges, ou que des boules blanches, vaut $\prod_{j=1}^{n-1} j/(j+1) = 1/n$. La récurrence est établie. Ainsi, X_n est uniforme sur $\{1/(n+1), \dots, n/(n+1)\}$. Pour toute fonction continue h sur $[0,1]$, les sommes de Riemann donnent $\mathbb{E}[h(X_n)] \to \int_0^1 h(u)\mathrm{d}u$. Comme $X_n \to U$ presque sûrement, U est uniforme sur $[0,1]$.

3. Écrivons $x^{\overline{k}} = x(x+1)\cdots(x+k-1)$ et $N = N_0 + n - 1$. Puisque $Y_n \geq a \geq 1$,

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}^{\overline{k}} \mid \mathscr{F}_n] = Y_n^{\overline{k}}\left[\frac{Y_n}{N}\frac{Y_n + k}{Y_n} + 1 - \frac{Y_n}{N}\right] = Y_n^{\overline{k}}\frac{N+k}{N}.$$

Or $(N+1)^{\overline{k}} = N^{\overline{k}}(N+k)/N$. Par conséquent, (Z_n) est une martingale, bornée par 1. De plus,

$$Z_n = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{Y_n + j}{N_0 + n - 1 + j} \longrightarrow U^k \quad \text{presque sûrement.}$$

La convergence dominée et la propriété de martingale donnent

$$\mathbb{E}[U^k] = \mathbb{E}[Z_1] = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}.$$

4. Si $|V| \leq C$ presque sûrement, la série de l'exponentielle est dominée en valeur absolue par $e^{|t|C}$. On peut donc intégrer terme à terme :

$$\phi_V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}\mathbb{E}[V^k], \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Les moments caractérisent ainsi la loi d'une variable bornée. Une variable de loi $\beta(a,b)$ possède les moments $B(a+k,b)/B(a,b) = a^{\overline{k}}/(a+b)^{\overline{k}}$, obtenus en intégrant sa densité. Ce sont ceux de U ; sa loi est donc $\beta(a,b)$.

5. Pour $a = 2, b = 1$, le total est $n+2$ et la même récurrence donne

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{2(k-1)}{n(n+1)}, \qquad 2 \leq k \leq n+1.$$

Les sommes de Riemann donnent $X_n \Rightarrow X$ de densité $2x\mathbf{1}_{\{x\in(0,1)\}}$. Le modèle de diffusion a la même évolution. La probabilité demandée tend vers

$$\mathbb{P}(X \geq 2/3) = \int_{2/3}^1 2x\,dx = \frac{5}{9}.$$

Si « deux fois plus » signifie l'égalité exacte, la probabilité vaut zéro lorsque le total n'est pas divisible par trois ; sinon elle est une masse de l'ordre de $1/n$ et tend encore vers zéro.

6. Au temps k, le total est $k+1$. La transition est $Y_{k+1} = Y_k + \mathbf{1}_{\{U_k \le Y_k/(k+1)\}}$, avec des uniformes indépendantes. La couleur tirée n'est pas indépendante du passé : seule l'uniforme auxiliaire l'est.

```
function R=Polya(k)
R=ones(1,k);
for j=1:k-1, R(j+1)=R(j)+(rand<R(j)/(j+1)); end
end
function x=EchantillonPolya(k,n)
x=zeros(1,n);
for j=1:n, R=Polya(k); x(j)=R(end); end
end
% Proportion(k,n) :
x=EchantillonPolya(k,n);
f=arrayfun(@(j) mean(x==j),1:k);
bar(1:k,[f' ones(k,1)/k]);
```

Exercice 7.20 — Contre-exemples de convergence des martingales

M1 • énoncé, p. 57

1. Il est évident que $(\mathscr{F}_n)$ est bien une filtration, et que M_n est bien $\mathscr{F}_n$-mesurable pour tout $n \ge 1$. On a aussi par indépendance

$$\mathbb{E}[|M_n|] \le \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|\varepsilon_k Y_k|] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[|\varepsilon_k|]\mathbb{E}[|Y_k|] = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} < \infty$$

donc M_n est bien intégrable pour tout $n \ge 1$. Finalement on a, pour tout $n \ge 1$,

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[M_n + \varepsilon_{n+1}Y_{n+1}|\mathscr{F}_n] = M_n + \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}Y_{n+1}] = M_n + \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}]\mathbb{E}[Y_{n+1}] = M_n,$$

car M_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable, $\varepsilon_{n+1}Y_{n+1}$ est indépendant de $\mathscr{F}_n$ et ε_{n+1} est indépendant de Y_{n+1}. $(M_n)_{n\ge1}$ est donc bien une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_n)$. Montrons que (M_n) converge p.s. On a $\mathbb{P}(\varepsilon_k Y_k \ne 0) \le 1/k^2$ pour tout $k \ge 1$, donc $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\varepsilon_k Y_k \ne 0) < \infty$. Par Borel-Cantelli, on sait que p.s. il existe $k_0(\omega)$ tel que pour tout $k \ge k_0$, $\varepsilon_k Y_k = 0$, i.e.,

$$\text{p.s.} \quad \exists k_0 \quad \forall n \ge k_0 \qquad M_n = M_{k_0},$$

donc $(M_n)_{n\ge1}$ converge p.s. (elle est constante à partir d'un rang aléatoire, presque sûrement). Pour finir, on voit facilement, toujours par indépendance de ε_n et Y_n, que pour tout $n \ge 2$,

$$\mathbb{E}[|M_n - M_{n-1}|] = \mathbb{E}[|\varepsilon_n|]\mathbb{E}[|Y_n|] = \frac{a_n}{n^2}. \tag{9}$$

Supposons que (M_n) soit bornée dans L^1. Alors il existe une constante finie C telle que pour tout n, $\mathbb{E}[|M_n|] \le C$, et

$$\mathbb{E}[|M_n - M_{n-1}|] \le \mathbb{E}[|M_n|] + \mathbb{E}[|M_{n-1}|] \le 2C. \tag{10}$$

Si on choisit (a_n) telle que a_n/n^2 tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, par exemple $a_n = n^3$, on voit que les deux dernières égalités et inégalités sont en contradiction, donc (M_n) n'est pas bornée dans L^1.

2. On pose pour $n \ge 2$, $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_2, \dots, \xi_n)$. Pour tout $n \ge 2$, M_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable, bornée donc intégrable et ξ_{n+1} étant indépendante de $\mathscr{F}_n$, on a

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(\xi_{n+1}) + M_n = -\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} + \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 - 1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + M_n = M_n.$$

$(M_n)_{n\ge2}$ est donc une martingale. Pour tout $n \ge 2$, posons $A_n = \{\xi_n = -n^2\}$. On a

$$\sum_{n\ge2} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n\ge2} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., il existe n_0 tel que pour tout $n \ge n_0$, l'événement A_n^c se produit, et $M_{n+1} \ge M_n + 1$. On en déduit que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s}} \infty$.

Exercice 7.21 — Conditionnement par une somme positive

M1 • énoncé, p. 58

Le changement $(x, y) \mapsto (x, s = x + y)$ donne la densité $p(x)p(s-x)\mathbf{1}_{\{0<x<s\}}$. Ainsi, lorsque $0 < h(s) = \int_0^s p(x)p(s-x)dx < \infty$,

$$g(s) = \frac{\int_0^s f(x)p(x)p(s-x)dx}{\int_0^s p(x)p(s-x)dx}.$$

On définit g arbitrairement quand $h(s) = 0$ ou $h(s) = +\infty$. Ces ensembles sont négligeables pour la loi de S : la fonction h est une densité, donc intégrable et finie presque partout. La formule demeure valable au sens étendu pour $f \geq 0$ par Tonelli. Dans le cas exponentiel, le produit vaut $\lambda^2 e^{-\lambda s}$; $X \mid S = s$ est donc uniforme sur $[0, s]$ et $g(s) = s^{-1}\int_0^s f(x)dx$.

Exercice 7.22 — Crochet, convergence et Borel-Cantelli conditionnel

M1 • énoncé, p. 58

Doob donne, pour tout N, $\mathbb{E}\max_{n\leq N}|X_n|^2 \leq 4\mathbb{E}X_N^2 = 4\mathbb{E}A_N$. La convergence monotone donne la première inégalité, y compris lorsque le membre de droite est infini. Pour localiser sans problème de dépassement, on utilise les accroissements $\mathbf{1}_{\{A_k\leq K\}}(X_k - X_{k-1})$. L'indicatrice est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable et leur crochet total est au plus K. La martingale ainsi obtenue est bornée dans L^2 et converge presque sûrement. Sur $\{A_\infty \leq K\}$, elle coïncide avec X. L'union sur les entiers K prouve la deuxième question. Pour $Y = H \cdot X$, son crochet vérifie

$$\langle Y\rangle_\infty = \sum_{k\geq 1}\frac{A_k - A_{k-1}}{f(A_k)^2} \leq \int_0^\infty \frac{dt}{f(t)^2} < \infty.$$

Donc $\sum \Delta X_k/f(A_k)$ converge presque sûrement. Sur $\{A_\infty = \infty\}$, $f(A_n) \uparrow \infty$ (sinon l'intégrale divergerait), et Kronecker donne $X_n = o(f(A_n))$. Pour l'application, posons $C_n = \sum_{k\leq n} p_k$ et $X_n = \sum_{k\leq n}(\mathbf{1}_{B_k} - p_k)$. Alors $A_n = \sum p_k(1-p_k) \leq C_n$. Si $A_\infty < \infty$, X_n converge et $X_n/C_n \to 0$ sur $C_\infty = \infty$. Si $A_\infty = \infty$, appliquer la question précédente avec $f(t) = 1 + t$: $X_n = o(1 + A_n)$, donc encore $X_n/C_n \to 0$. Cela prouve l'équivalence asymptotique demandée.

Exercice 7.23 — Inégalité de Lévy et maximum d'une marche symétrique

L3 • énoncé, p. 58

Pour les signes, la symétrie équivaut à $p = 1/2$. En général elle donne $\mathbb{E}X = -\mathbb{E}X = 0$ si X est intégrable, et $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X < 0) \leq 1/2$. La différence de deux i.i.d. change de signe lorsqu'on échange les deux variables sans changer la loi. L'indépendance et la symétrie de chaque coordonnée donnent la symétrie de toute somme. L'événement Ω_k dépend des k premiers accroissements, tandis que $S_n - S_k$ est indépendant de ceux-ci et symétrique. Sa probabilité d'être positive ou nulle est au moins $1/2$, celle d'être strictement positive au plus $1/2$. Les deux inclusions résultent respectivement de $S_k > x$ et de $S_k = S_{k-1} + X_k \leq x + y$ sur $\Omega_k \cap \{X_k \leq y\}$. La somme sur les événements disjoints Ω_k prouve les deux inégalités. La majoration de queue découle de $X_1^2 > y^2$ sur $\{X_1 > y\}$; l'intégrale de queue tend vers zéro par convergence dominée, d'où $n\mathbb{P}(X_1 > \theta\sqrt{n}) \to 0$. Le TCL donne $\mathbb{P}(S_n > u\sigma\sqrt{n}) \to 1 - \Phi(u)$. Pour $x = \lambda\sigma\sqrt{n}$, $y = \theta\sqrt{n}$, on obtient une limite supérieure au plus $2(1 - \Phi(\lambda))$ et une limite inférieure au moins $2(1 - \Phi(\lambda + \theta/\sigma))$. Faire $\theta \downarrow 0$ conclut. Si $\lambda < 0$, le maximum dépasse le seuil avec une probabilité au moins $\mathbb{P}(S_1 > \lambda\sigma\sqrt{n}) \to 1$, donc la limite vaut 1.

Pour des accroissements gaussiens centrés réduits, $S_n/\sqrt{n}$ est exactement normale centrée réduite. Le même encadrement donne donc la limite annoncée, y compris au seuil zéro.

Exercice 7.24 — Retours à zéro et inversion de Fourier

M1 • énoncé, p. 59

Si $B_n \sim \mathcal{B}(n, p)$, $S_n \overset{d}{=} 2B_n - n$, d'où $\mathbb{E}S_n = n(2p-1)$ et $\operatorname{Var} S_n = 4npq$. Stirling donne

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}(pq)^n \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Pour $p \neq 1/2$ la série converge ; Borel–Cantelli assure un nombre fini de retours p.s. La limite croissante N_∞ est mesurable à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ et, par convergence monotone,

$$\mathbb{E}N_\infty = \sum_{n\geq 1}\binom{2n}{n}(pq)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4pq}} - 1 = \frac{1}{|2p-1|} - 1.$$

Pour $p = 1/2$, l'espérance est infinie (ce constat seul ne prouve pas la récurrence). On a $f(t) = pe^{it} + qe^{-it}$ et $|f(t)|^2 = 1 - 4pq\sin^2 t$. Ainsi $f(t)^n \to 0$ hors $\pi\mathbb{Z}$, vaut 1 en $2\pi\mathbb{Z}$ et oscille en $(2\mathbb{Z}+1)\pi$. Une limite en loi impliquerait une limite ponctuelle continue en zéro des fonctions caractéristiques ; elle n'existe donc pas. Pour tout entier j, $(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{itj}\,dt = \mathbf{1}_{\{j=0\}}$. L'inversion demandée en découle par espérance. Pour $r < 1$, la série géométrique converge uniformément, donc son intégrale vaut $\sum_{n\geq 0} r^n \mathbb{P}(S_n = 0)$. Par convergence monotone de cette série positive,

$$\lim_{r\uparrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1 - rf(t)} = 1 + \mathbb{E}N_\infty.$$

Le terme 1 correspond à la visite à l'instant zéro, qui n'est pas comptée dans N_n.

Exercice 7.25 — Maximum d'une marche à sauts supérieurs bornés

M1 • énoncé, p. 59

La transformée de Laplace est finie sur $[0,\infty)$ puisque $X \leq 1$. Hölder donne la convexité stricte de ψ, car la loi n'est pas constante. Par convergence dominée à droite, $\psi'(0+) = m < 0$; pour $X < 0$, on utilise $|(e^{\lambda X}-1)/\lambda| \leq |X|$. Enfin $\psi(\lambda) \geq \lambda + \log \mathbb{P}(X = 1) \to \infty$. Continuité et stricte convexité donnent un unique zéro $\lambda_0 > 0$. L'indépendance et $\mathbb{E}e^{\lambda_0 X} = 1$ donnent la propriété de martingale, avec $\mathbb{E}Z_n = 1$. La loi forte donne $S_n/n \to m < 0$, donc $Z_n \to 0$ p.s. ; la convergence n'est pas dans L^1. Les sauts vers le haut valent au plus 1, donc $S_{T_k} = k$ sur $\{T_k < \infty\}$. La martingale arrêtée est bornée par $e^{\lambda_0 k}$ et converge vers $e^{\lambda_0 k}\mathbf{1}_{\{T_k<\infty\}}$. Par convergence dominée et arrêt aux temps bornés,

$$\mathbb{P}(T_k < \infty) = e^{-\lambda_0 k}, \quad \mathbb{P}(W = j) = (1 - e^{-\lambda_0})e^{-\lambda_0 j} \quad (j \geq 0).$$

Dans le cas des sauts ± 1, $pe^{\lambda_0} + qe^{-\lambda_0} = 1$ donne $\lambda_0 = \log(q/p)$. La probabilité demandée est $\mathbb{P}(W = 0) = 1 - p/q$.

Exercice 7.26 — Conditionnement par le rayon d'un disque

M1 • énoncé, p. 59

En polaires, la densité jointe de (Z,Θ) est r/π sur $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$. Ainsi Z a densité $2r\mathbf{1}_{\{r\in(0,1)\}}$ et Θ est uniforme, indépendante de Z. Par conséquent

$$\mathbb{E}[h(X) \mid Z] = g(Z), \quad g(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r\cos\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r} \frac{h(x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx \quad (r > 0).$$

La valeur en $r = 0$ peut être choisie égale à $h(0)$. Les formules restent valables avec valeur infinie pour $h \geq 0$.

Exercice 7.27 — Support conditionnel d'une variable positive

M1 • énoncé, p. 59

Poser $Y = \mathbb{E}[X \mid \mathscr{B}]$, défini au sens positif étendu si nécessaire. Sur $C = \{Y = 0\} \in \mathscr{B}$, $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_C] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_C] = 0$, donc $X\mathbf{1}_C = 0$ p.s. Cela donne la première inclusion. Pour la seconde, $X\mathbf{1}_{A^c} = 0$ p.s. ; ainsi $\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_{A^c}] = 0$, donc $Y\mathbf{1}_{A^c} = 0$ p.s.

Exercice 7.28 — Martingale exponentielle et temps de passage

M1 • énoncé, p. 59

L'indépendance donne $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = M_n + \mathbb{E}X_{n+1}$. Pour les incréments centrés, le développement du carré donne $\mathbb{E}[M_{n+1}^2 \mid \mathscr{F}_n] = M_n^2 + \mathbb{E}X_{n+1}^2$. La transformée exponentielle est finie puisque $X_1 \leq 1$. La stricte convexité de l'exponentielle et la non-constance de X_1 donnent $\mathbb{E}e^{\lambda X_1} > e^{\lambda \mathbb{E}X_1} = 1$. Conditionner un pas prouve la propriété de martingale de Z, d'espérance 1. La loi forte donne $M_n/n \to 0$, donc $n^{-1}\log Z_n \to -\psi(\lambda) < 0 : Z_n \to 0$ p.s., mais pas dans L^1. Les sauts supérieurs étant au plus 1, $M_{n\wedge\tau_b} \leq b$. La martingale positive $b - M_{n\wedge\tau_b}$ converge p.s. vers une limite finie. Sur $\{\tau_b = \infty\}$, cela forcerait M_n à converger, alors que les incréments égaux à 1 surviennent infiniment souvent par Borel–Cantelli. Donc τ_b est fini p.s. La martingale $Z_{n\wedge\tau_b}$ est bornée par $e^{\lambda b}$. L'arrêt aux temps bornés et la convergence dominée donnent $1 = \mathbb{E}[e^{\lambda b - \psi(\lambda)\tau_b}]$. Pour les sauts équitables, $\psi(\lambda) = \log\cosh\lambda$; l'équation $\psi(\lambda) = \alpha$ a pour solution $\lambda = \log(e^\alpha + \sqrt{e^{2\alpha} - 1})$. D'où

$$\mathbb{E}e^{-\alpha\tau_b} = (e^\alpha + \sqrt{e^{2\alpha} - 1})^{-b}.$$

Exercice 7.29 — Premier retour d'une marche simple

L3 • énoncé, p. 60

$u_{2k} = \binom{2k}{k}(pq)^k$ et $u_{2k+1} = 0$, donc $F(s) = (1-4pqs^2)^{-1/2}$. En décomposant selon le premier retour et en utilisant l'indépendance des incréments suivants, $u_n = \sum_{j=1}^{n} u_{n-j}\mathbb{P}(T=j)$ pour $n \geq 1$. Les séries absolument convergentes pour $|s|<1$ donnent $F = 1 + FG_T$, d'où $G_T(s) = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}$. Ainsi $\mathbb{P}(T<\infty) = 1-|p-q|$ et

$$\mathbb{P}(T=2k) = \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}(pq)^k = \frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}(pq)^k, \quad \mathbb{P}(T=2k-1)=0.$$

Dans le cas symétrique, le retour est certain, mais $G_T'(s) = s/\sqrt{1-s^2} \to \infty$, donc $\mathbb{E}T = \infty$.

Exercice 7.30 — Arrêt borné d'une somme et passage d'un seuil

L3 • énoncé, p. 60

Pour $0 \leq j < n$, $\{N_n > j\}$ dépend seulement des j premiers incréments et est indépendant de X_{j+1}. L'identité $S_{N_n} = \sum_{j=0}^{n-1} X_{j+1}\mathbf{1}_{\{N_n>j\}}$ donne $\mathbb{E}S_{N_n} = m\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}(N_n>j) = m\mathbb{E}N_n$. Pour les uniformes positives et $0<a\leq 1$, $\{N_n>j\} = \{S_j<a\}$ pour $j<n$, et le volume du simplexe donne $\mathbb{P}(S_j<a) = a^j/j!$. Ainsi $\mathbb{E}N_n = \sum_{j=0}^{n-1} a^j/j! \to e^a$ et $\mathbb{E}S_{N_n} \to e^a/2$. La restriction $a\leq 1$ est indispensable pour cette formule simple du volume ; au-delà, le simplexe dépasse le cube unité.

Exercice 7.31 — Choix aléatoire d'une pièce

L3 • énoncé, p. 60

Posons $\bar p = \frac{1}{6}\sum_i p_i$. On a $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \bar p$ et $\mathbb{E}(X_1X_2) = \frac{1}{6}\sum_i p_i^2$. Ainsi

$$\operatorname{Cov}(X_1,X_2) = \frac{1}{6}\sum_i (p_i-\bar p)^2.$$

L'indépendance impose donc $p_i = \bar p$ pour tout i. Réciproquement, si les paramètres sont égaux à p, la loi conditionnelle du couple est toujours $\mathrm{Bern}(p)^{\otimes 2}$; la loi non conditionnelle est la même. L'indication se vérifie directement par $g_r(x) = \sum_i (x_i-\bar x)^2$.

Exercice 7.32 — Mélange de deux populations

L3 • énoncé, p. 60

On prend $Z\in\{1,2\}$, de probabilités $q, 1-q$. Conditionnellement à $Z=i$, les indicatrices X_1, X_2 sont indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p_i. Posons $m = qp_1 + (1-q)p_2 > 0$ et $a = qp_1^2 + (1-q)p_2^2 > 0$. On a

$$\mathbb{P}(X_1=1) = m, \qquad \mathbb{P}(X_1+X_2=k) = \binom{2}{k}\left[qp_1^k(1-p_1)^{2-k} + (1-q)p_2^k(1-p_2)^{2-k}\right]$$

pour $k=0,1,2$. Enfin, $\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=1) = a/m$ et $\mathbb{P}(Z=1 \mid X_1=X_2=1) = qp_1^2/a$. On observe que $a-m^2 = q(1-q)(p_1-p_2)^2 > 0$: les deux tailles indicatrices sont dépendantes.

Exercice 7.33 — Lecture d'une loi jointe discrète

L3 • énoncé, p. 60

1. La loi de X donne aux points $0,1,2$ les masses $(1+2\alpha)/4$, $(1-\alpha)/2$, $1/4$. La loi de Y est de Bernoulli de paramètre $1/2$. Sachant $Y=0$, X vaut 0 ou 2 avec probabilités $1/2, 1/2$; sachant $Y=1$, X vaut 0 ou 1 avec probabilités $\alpha, 1-\alpha$.
2. Pour $p_{\bullet j}>0$, $\mathbb{P}(X=x_i \mid Y=y_j) = p_{ij}/p_{\bullet j}$. Pour $p_{i\bullet}>0$, $\mathbb{P}(Y=y_j \mid X=x_i) = p_{ij}/p_{i\bullet}$. Une valeur conditionnante de probabilité nulle n'impose aucune loi par cette formule.

Exercice 7.34 — Sommes et conditionnement des lois usuelles

L3 / M1 • énoncé, p. 60

1. Si $0<p<1$ et $0\leq s\leq n+m$, la formule du quotient donne

$$\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=s) = \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{s-k}}{\binom{n+m}{s}}.$$

Les coefficients binomiaux nuls précisent le support. C'est une loi hypergéométrique. Pour $p=0$ ou $p=1$, seules les sommes 0 ou $n+m$ sont possibles et X est déterministe.

2. Si $a+b>0$, le même calcul donne $\mathscr{L}(X \mid X+Y=s) = \mathscr{B}(s, a/(a+b))$. Si $a=b=0$, les deux variables sont nulles.
3. $X_1 \sim \mathscr{B}(n, p_1)$. Si $p_1 < 1$, conditionnellement à $X_1 = k$ de probabilité positive, les $n-k$ résultats restants se répartissent entre les deux autres catégories avec probabilités $p_2/(1-p_1)$ et $p_3/(1-p_1)$. On obtient donc la loi multinomiale correspondante, ou encore $X_2 \sim \mathscr{B}(n-k, p_2/(1-p_1))$ et $X_3 = n-k-X_2$. Pour $p_1 = 1$, $(X_2, X_3) = (0,0)$.

Pour $a+b>0$, la moyenne de la loi binomiale conditionnelle donne $\mathbb{E}[X \mid X+Y] = a(X+Y)/(a+b)$. Pour $a=b=0$, cette espérance est nulle.

De même, $\mathbb{E}[X_2 \mid X_1] = (n-X_1)p_2/(1-p_1)$ si $p_1 < 1$, et cette espérance est nulle si $p_1 = 1$.

Exercice 7.35 — Calculs d'espérance conditionnelle

L3 • énoncé, p. 60

1. La propriété de définition, appliquée à la constante 1, donne l'égalité des espérances. Sous indépendance, $\mathbb{E}(Yh(X)) = \mathbb{E}Y\mathbb{E}h(X)$ pour toute fonction bornée mesurable h, ce qui caractérise la constante $\mathbb{E}Y$ comme espérance conditionnelle. Si $\mathbb{E}(Y \mid X) = \mathbb{E}Y$, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}[X\mathbb{E}(Y \mid X)] = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.
2. On a $\mathrm{Cov}(U-V, U+V) = \mathrm{Var}(U) - \mathrm{Var}(V) = 0$. Si $X = \pm 1$, nécessairement $Y = 1$. Si $X = 0$, les deux possibilités sont $(U,V) = (0,0)$ et $(1,1)$, d'où
$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \mathbf{1}_{\{|X|=1\}} + \frac{2p^2}{p^2+(1-p)^2}\mathbf{1}_{\{X=0\}}.$$
Pour $p \neq 1/2$, cette variable n'est pas constante malgré la covariance nulle.
3. Pour g bornée, c'est directement la propriété de définition. On tronque ensuite g ; les produits convergent dans L^1 par Cauchy–Schwarz, de même que leurs espérances conditionnelles.

Exercice 7.36 — Régression affine et meilleure prédiction

L3 • énoncé, p. 61

Écrivons le prédicteur sous la forme $a + b^{\mathsf{T}}(X - \mathbb{E}X)$. En développant,
$$\mathbb{E}(Y - a - b^{\mathsf{T}}(X-\mathbb{E}X))^2 = \mathrm{Var}(Y) + (a-\mathbb{E}Y)^2 - 2b^{\mathsf{T}}c + b^{\mathsf{T}}Kb.$$
La matrice K est définie positive. Le minimum unique est atteint en $a = \mathbb{E}Y$, $b = K^{-1}c$, et vaut $\mathrm{Var}(Y) - c^{\mathsf{T}}K^{-1}c$. L'espace des prédicteurs affines est inclus dans l'espace des variables de L^2 mesurables par rapport à X. La projection sur ce dernier est $\mathbb{E}(Y \mid X)$; son erreur est donc inférieure ou égale. Plus précisément, pour tout prédicteur Z mesurable par rapport à X,
$$\mathbb{E}(Y-Z)^2 = \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y \mid X))^2 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X) - Z)^2.$$
L'égalité des deux erreurs équivaut à ce que l'espérance conditionnelle soit affine en X presque sûrement.

Exercice 7.37 — Tribus indépendantes et information commune

L3 • énoncé, p. 61

Pour $A \in \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$, l'indépendance donne $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$. Donc $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. Posons $Y = f(X)$. On a $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$, et ces deux tribus sont indépendantes. Ainsi $\mathbb{P}(Y \leq t) \in \{0,1\}$ pour tout t. Les propriétés d'une fonction de répartition impliquent alors qu'elle est celle d'une masse de Dirac : pour $a = \inf\{t \,:\, \mathbb{P}(Y \leq t) = 1\}$, on a $\mathbb{P}(Y < a) = 0$ et $\mathbb{P}(Y \leq a) = 1$. D'où $Y = a$ presque sûrement.

Exercice 7.38 — Regroupement de variables indépendantes

L3 • énoncé, p. 61

Pour chaque k, les intersections finies d'événements $\{X_i \in B_i\}$, $i \in I_k$, forment un système stable par intersection engendrant la tribu considérée. Par indépendance de la famille, la formule de factorisation vaut lorsque chacun des n événements appartient à son système générateur. En fixant les autres événements, la classe des événements de la première tribu pour lesquels cette formule reste vraie est un système de Dynkin : elle contient l'espace, est stable par complémentaire et par réunion dénombrable disjointe. Le théorème des classes monotones donne la formule sur toute la première tribu. On recommence successivement pour les n tribus. L'indépendance de la famille entière est nécessaire.

Exercice 7.39 — Ruine et maximum d'une marche à dérive négative

L3 • énoncé, p. 61

Pour chaque trajectoire, augmenter le capital ne peut créer une ruine ; les événements de ruine décroissent donc avec c. Si $\mathbb{E}X_1 > 1$, la loi forte donne $S_n - n \to +\infty$, donc la ruine est certaine. Si $\mathbb{E}X_1 < 1$, la même loi donne $S_n - n \to -\infty$; le supremum de cette suite avec zéro est fini. En séparant le premier accroissement,

$$M = \max\left(0, X_1 - 1 + \sup_{k\geq 0} \sum_{j=2}^{k+1} (X_j - 1)\right).$$

Le supremum de droite a la même loi que M et est indépendant de X_1, d'où l'équation en loi. Enfin, la ruine équivaut exactement à l'existence d'un n tel que $S_n - n > c/p$, donc à $M > c/p$. Le cas $\mathbb{E}X_1 = 1$ n'est pas couvert par ces conclusions et demande une étude distincte.

Exercice 7.40 — Deux définitions d'un temps d'arrêt discret

M1 • énoncé, p. 61

Si chaque égalité temporelle est mesurable, $\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{T = k\} \in \mathcal{F}_n$ par croissance de la filtration. Réciproquement, $\{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n-1\}$, avec l'événement vide pour $n - 1 = -1$, appartient à $\mathcal{F}_n$. Enfin, $\{T = \infty\} = \Omega \setminus \bigcup_{n\geq 0} \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_\infty$.

Exercice 7.41 — Espérance d'une martingale

M1 • énoncé, p. 61

Pour $m = n$, la propriété découle de la mesurabilité de M_n. Si elle est établie au rang m, la propriété de la tour donne

$$\mathbb{E}(M_{m+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(M_{m+1} \mid \mathcal{F}_m) \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}(M_m \mid \mathcal{F}_n) = M_n.$$

La récurrence conclut. En prenant les espérances, on obtient $\mathbb{E}M_m = \mathbb{E}M_n$, donc $\mathbb{E}M_n = \mathbb{E}M_0$.

Exercice 7.42 — Tribu au temps d'arrêt

M1 • énoncé, p. 61

L'ensemble Ω appartient à $\mathcal{F}_T$, puisque T est un temps d'arrêt. Si $A \in \mathcal{F}_T$, alors $A^c \cap \{T \leq n\} = \{T \leq n\} \setminus (A \cap \{T \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$. Enfin, pour $A_j \in \mathcal{F}_T$, la distributivité de l'intersection sur l'union donne $(\bigcup_j A_j) \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. On a bien une tribu. Si $T = m$, les conditions pour $n < m$ sont vides et celle pour $n = m$ est $A \in \mathcal{F}_m$; par croissance de la filtration, elle implique toutes les autres.

8. Chaînes de Markov

Exercice 8.1 — Fonctions d'une chaîne de Markov

M1 • énoncé, p. 62

1. Comme ψ est bijective, $\sigma(Y_0,\dots,Y_n)=\sigma(X_0,\dots,X_n)$. La propriété de Markov donne donc la matrice $Q(u,v)=P(\psi^{-1}(u),\psi^{-1}(v))$ et la loi initiale $\mu(\psi^{-1}(u))$.
2. Sous la loi initiale précisée, $\mathbb{P}(X_n=b)=1/2$ et $\mathbb{P}(X_n=c)=1/4$ à tout instant. Sachant $Y_{n-1}=0, Y_n=1$, on a nécessairement $X_{n-1}=a, X_n=b$, donc la probabilité d'avoir $Y_{n+1}=0$ vaut $1/2$. Sachant seulement $Y_n=1$, elle vaut $\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=b\mid X_n\in\{b,c\})=1/3$. Les événements conditionnants ont une probabilité positive. Le processus Y n'est donc pas markovien. Une fonction non injective d'une chaîne de Markov n'est pas nécessairement markovienne.

Exercice 8.2 — Algorithme de Metropolis

M1 • énoncé, p. 62

1. Pour $x\neq y$, $\pi(x)Q(x,y)=P(x,y)\min(\pi(x),\pi(y))=\pi(y)Q(y,x)$, par symétrie de P. L'identité est immédiate sur la diagonale. La somme sur x donne $\pi Q=\pi$. De plus Q est stochastique, car $0\leq\alpha\leq 1$.
2. Chaque transition entre états distincts de probabilité positive pour P reste de probabilité positive pour Q. Les chemins reliant les états pour P en donnent donc pour Q, qui est irréductible.
3. Puisque M est une partie propre non vide de E, un chemin de M vers son complément possède une première arête (x_0,y) sortant de M. Alors $\alpha(x_0,y)<1$ et $Q(x_0,y)<P(x_0,y)$. Pour les autres états distincts de x_0, on a $Q(x_0,z)\leq P(x_0,z)$; ainsi $Q(x_0,x_0)>P(x_0,x_0)\geq 0$. Ce retour en un pas rend x_0 apériodique, puis tous les états le sont par irréductibilité. Sur l'espace fini, la loi de X_n converge donc vers π, quelle que soit la loi initiale.
4. Conditionnellement à $X_i=x$, pour $y\neq x$, la probabilité d'accepter la proposition y vaut $P(x,y)\alpha(x,y)=Q(x,y)$. La probabilité restante est $Q(x,x)$. En utilisant des tirages frais indépendants du passé à chaque étape, on obtient exactement la chaîne de matrice Q. Il suffit de connaître les rapports $\pi(y)/\pi(x)$, ce qui évite de calculer la constante de normalisation.

Exercice 8.3 — Processus de renouvellement

L3 / M1 • énoncé, p. 63

1. La condition est que ν soit exponentielle de taux $\lambda>0$. Si N est un processus de Poisson, $\mathbb{P}(X_1>t)=\mathbb{P}(N(t)=0)=e^{-\lambda t}$. Réciproquement, des temps d'attente indépendants exponentiels construisent un processus de Poisson : la propriété sans mémoire donne des accroissements indépendants, et la convolution des densités donne $\mathbb{P}(N(t)=n)=e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$.
2. Il existe $\varepsilon>0$ tel que $\mathbb{P}(X_1\geq\varepsilon)>0$. Par la loi forte appliquée aux indicatrices, une proportion strictement positive des X_i dépasse ε, presque sûrement. Donc $T_n\to\infty$ et $N(t)<\infty$ pour tout t simultanément, presque sûrement.
3. Avec $\mu=\mathbb{E}X_1\in(0,\infty]$, on a $T_n/n\to\mu$ presque sûrement, par la loi forte si $\mu<\infty$, et par troncature sinon. Comme $N(t)\to\infty$ et $T_{N(t)}\leq t<T_{N(t)+1}$, on en déduit $N(t)/t\to 1/\mu$, avec $1/\infty=0$.
4. En posant $F_0(t)=1$ pour $t\geq 0$, on a $\mathbb{P}(N(t)=n)=F_n(t)-F_{n+1}(t)$ pour tout $n\geq 0$.
5. Par la formule des queues, $m(t)=\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(N(t)\geq n)=\sum_{n\geq 1}F_n(t)$. Pour $a>0$, posons $r=\mathbb{E}e^{-aX_1}<1$. Alors $F_n(t)\leq e^{at}r^n$, donc m est localement bornée. Comme $F_{n+1}(t)=\int_{[0,t]}F_n(t-x)\nu(dx)$, Tonelli donne l'équation de renouvellement. Si deux solutions localement bornées diffèrent de d, on prolonge d par zéro sur $]-\infty,0[$. L'itération donne $d(t)=\mathbb{E}[d(t-T_n)\mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}}]$. Par conséquent $|d(t)|\leq\sup_{0\leq u\leq t}|d(u)|F_n(t)\to 0$. L'unicité en résulte.

Les T_n sont les dates de renouvellement et $N(t)$ compte les renouvellements jusqu'à t. Les arguments restent valables si la loi des durées a une masse en zéro strictement inférieure à un : $\mathbb{E}e^{-\lambda X_1}<1$ pour $\lambda>0$ et $T_n\to\infty$ presque sûrement. Chaque T_n est fini presque sûrement, donc $N(t)\to\infty$ lorsque $t\to\infty$.

Exercice 8.4 — Chauffage à deux régimes

M1 • énoncé, p. 63

On précise le modèle : conditionnellement à tout le passé, la loi de l'état suivant ne dépend que de l'état courant, avec les probabilités indiquées. Les seules probabilités conditionnelles à un état isolé ne suffiraient pas à établir cette propriété.

1. Dans l'ordre $(1,2)$, $P = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{smallmatrix}\right)$.
2. Les probabilités totales donnent $p_{n+1} = p_n/2 + 3(1-p_n)/4 = 3/4 - p_n/4$, donc $p_n = 3/5 + (p_0 - 3/5)(-1/4)^n$.
3. Un dimanche plus tard correspond à sept transitions. Avec $p_0 = 1$, la probabilité vaut $3/5 + (2/5)(-1/4)^7 = 3/5 - 1/40960$.
4. Si $p_0 = 3/5$, la formule donne $p_n = 3/5$ pour tout n. La loi stationnaire est $(3/5, 2/5)$.
5. En régime stationnaire, le coût du chauffage par jour a espérance $2(3/5) + 4(2/5) = 14/5$. La probabilité d'un changement de régime vaut $(3/5)(1/2) + (2/5)(3/4) = 3/5$. En comptant une transition par journée, le coût moyen total vaut $17/5 = 3{,}40$ euros par jour.

Exercice 8.5 — Maximum successif des faces d'un dé

M1 • énoncé, p. 63

On suppose les lancers indépendants et le dé équilibré. La relation $X_{n+1} = \max(X_n, \xi_{n+1})$ montre la propriété de Markov. Pour $1 \le i, j \le 6$, $P(i,j) = 0$ si $j < i$, $P(i,i) = i/6$, $P(i,j) = 1/6$ si $j > i$. Après n nouveaux lancers,

$$P^n(i,j) = \begin{cases} 0 & j < i, \\ (i/6)^n & j = i, \\ (j/6)^n - ((j-1)/6)^n & j > i. \end{cases}$$

Ceci découle de la probabilité que tous les nouveaux résultats soient au plus j.

Exercice 8.6 — Martingale associée au générateur d'une chaîne

M1 • énoncé, p. 63

Prendre $Af = Qf - f$, où $Qf(x) = \sum_y Q(x,y) f(y)$. Cet opérateur est linéaire et $\|Af\|_\infty \le 2\|f\|_\infty$, donc il envoie bien $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$. Le processus est adapté et chaque terme est intégrable, car f et Af sont bornées. Avec $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$, la propriété de Markov donne

$$\mathbb{E}(M^f_{n+1} - M^f_n \mid \mathscr{F}_n) = Qf(X_n) - f(X_n) - Af(X_n) = 0.$$

C'est donc une martingale. Cette construction ne requiert pas d'hypothèse sur la loi initiale.

Exercice 8.7 — Décomposition au premier passage

M1 • énoncé, p. 64

1. Sur $\{X_n = y\}$, le premier passage strictement positif en y a lieu à un unique instant $m \in \{1, \dots, n\}$. Markov à l'instant déterministe m, sur $\{T_y = m\}$, donne

   $$\mathbb{P}_x(X_n = y, T_y = m) = \mathbb{P}_x(T_y = m) P^{n-m}(y,y).$$

   Sommer sur m. Cela reste valable pour $x = y$, car T_y désigne alors le premier retour.
2. Si a est absorbant et $n \ge 1$, atteindre a avant n équivaut à être en a au temps n. Pour $x = a$, on a $T_a = 1$ presque sûrement, et l'identité est encore vraie.
3. Pour $n \ge 1$, l'événement $T_y = n+1$ impose $X_1 \ne y$. Conditionner par $X_1 = z$ et appliquer Markov donne la formule annoncée.
4. Décomposer selon $T_y = 1$ ou $T_y \ge 2$, puis sommer la troisième identité sur $n \ge 1$. Tonelli justifie la somme et donne $\rho(x,y) = P(x,y) + \sum_{z \ne y} P(x,z)\rho(z,y)$.

Exercice 8.8 — Maximum d'une marche et écart au maximum

M1 • énoncé, p. 64

1. Les deux histoires de maxima considérées ont une probabilité positive. Sachant $M_2 = 0, M_3 = 1$, la seule trajectoire jusqu'à 3 est $(-1, 0, 1)$, et $\mathbb{P}(M_4 = 2 \mid M_2 = 0, M_3 = 1) = p$. Sachant $M_2 = M_3 = 1$, on a $S_1 = 1, S_2 = 0$ et X_3 garde sa loi initiale ; atteindre 2 en temps 4 demande $X_3 = X_4 = 1$, d'où une probabilité p^2. Comme $p \neq p^2$, le maximum n'est pas markovien pour sa filtration naturelle.
2. On a $Y_{n+1} = (Y_n - X_{n+1})^+$. L'accroissement X_{n+1} étant indépendant du passé, c'est une chaîne homogène avec $Q(i, i+1) = 1 - p$ pour $i \geq 0$, $Q(i, i-1) = p$ pour $i \geq 1$, et $Q(0, 0) = p$.
3. Pour $i < j$, les chemins monotones donnent $Q^{j-i}(i, j) \geq (1-p)^{j-i} > 0$ et $Q^{j-i}(j, i) \geq p^{j-i} > 0$. Tous les états communiquent.
4. L'équilibre détaillé sur les arêtes donne $\lambda(i)(1-p) = \lambda(i+1)p$. Avec $\lambda(0) = 1$, on trouve $\lambda(i) = ((1-p)/p)^i$. Cette mesure est finie si et seulement si $p > 1/2$, et non pour tout $p \neq 1/2$. Sa masse est alors $p/(2p-1)$ et la probabilité invariante vaut
$$\pi(i) = \frac{2p-1}{p}\left(\frac{1-p}{p}\right)^i.$$

Exercice 8.9 — Modèle de Wright-Fisher et absorption

M1 • énoncé, p. 64

Les états 0 et N sont absorbants. De tout état intérieur, une transition vers zéro a probabilité strictement positive, ce qui donne une probabilité strictement positive de ne jamais revenir à cet état ; il est donc transitoire. De plus, comme il n'y a qu'un nombre fini d'états intérieurs, la probabilité d'absorption à l'étape suivante est uniformément minorée par un $\delta > 0$. Le temps d'absorption est donc fini presque sûrement, avec une queue au plus géométrique. Conditionnellement à $X_n = i$, la variable X_{n+1} suit $\mathscr{B}(N, i/N)$ et a pour espérance i. Ainsi (X_n) est une martingale bornée par N, donc converge presque sûrement et dans L^1. Sa limite appartient à $\{0, N\}$ et, sous $\mathbb{P}_k$,

$$N\mathbb{P}_k(X_\infty = N) = \mathbb{E}_k X_\infty = \mathbb{E}_k X_0 = k.$$

La loi limite est donc $(1-k/N)\delta_0 + (k/N)\delta_N$. Les formules supposent $N \geq 1$; les puissances 0^0 dans les probabilités binomiales sont prises égales à un.

Exercice 8.10 — File d'attente à service constant

L3 / M1 • énoncé, p. 64

La récurrence est $X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + \xi_{n+1}$. Ainsi $P(i, j) = \mu(j - (i-1)^+)$, en posant $\mu(k) = 0$ pour $k < 0$. Comme $X_n \geq X_0 + \sum_{k=1}^{n}(\xi_k - 1)$, la loi forte donne la divergence vers $+\infty$ si $\mathbb{E}\xi_1 > 1$. Si $\mathbb{E}\xi_1 < 1$, partant d'un état $i > 0$ et jusqu'au premier passage en zéro, la chaîne suit la marche $i + \sum(\xi_k - 1)$. Celle-ci tend vers $-\infty$ et ses sauts descendants sont d'au plus une unité ; elle doit donc atteindre zéro presque sûrement. Partant de zéro, X_1 est fini presque sûrement et l'argument précédent s'applique à chaque valeur de X_1. Le retour en zéro a donc probabilité un : zéro est récurrent.

La propriété de Markov forte permet de répéter cet argument après chaque retour. Tous les temps de retour successifs sont donc finis presque sûrement. Une autre preuve consiste à observer que, si $X_n > 0$ pour tout $n \geq N$, alors $X_n = X_N + \sum_{j=N+1}^{n}(\xi_j - 1) \to -\infty$ par la loi forte, ce qui contredit $X_n \geq 0$.

Exercice 8.11 — Classes d'une chaîne à neuf états

M1 • énoncé, p. 65

Les classes fermées sont $\{1, 4\}$, $\{3, 8\}$ et $\{5\}$. Elles sont récurrentes positives puisque finies. L'état 5 est absorbant. Les états $2, 6, 7, 9$ sont transitoires : leurs classes ne sont pas fermées et mènent à une classe fermée. Les classes $\{1, 4\}$ et $\{3, 8\}$ ont période 2, celle de 5 période 1. Cette classification ne dépend pas des valeurs strictement positives des étoiles.

Exercice 8.12 — Probabilité invariante sur quatre états

M1 • énoncé, p. 65

Chaque état atteint les autres par des chemins de probabilité positive, donc la chaîne est irréductible. Si $\pi P = \pi$, les équations donnent $\pi_4 = \pi_2/4$, $\pi_3 = \pi_2/2$, $\pi_1 = 3\pi_2/4$. La normalisation entraîne

$$\pi = (3/10,\ 2/5,\ 1/5,\ 1/10).$$

On vérifie directement $\pi P = \pi$. Les cycles $1 \to 2 \to 1$ et $1 \to 2 \to 3 \to 1$ ont longueurs 2 et 3, donc la chaîne est aussi apériodique. Par le théorème ergodique, les moyennes empiriques demandées convergent presque sûrement, quelle que soit la loi initiale, vers $\sum_i i\pi_i = 21/10$ et $\sum_i i^2\pi_i = 53/10$.

Exercice 8.13 — Chaîne de naissance et mort

M1 • énoncé, p. 65

1. Les chemins monotones entre deux états ont une probabilité strictement positive. La chaîne est donc irréductible.

2. Pour $a < x < b$, la propriété de Markov donne $u(x) = q_x u(x-1) + r_x u(x) + p_x u(x+1)$. Ainsi

$$u(x+1) - u(x) = \frac{q_x}{p_x}(u(x) - u(x-1)).$$

La sortie de l'intervalle fini $\{a+1, \dots, b-1\}$ est presque sûrement finie : depuis chaque état, un chemin vers un bord a une probabilité strictement positive, et le minimum de ces probabilités est positif. On a donc $u(a) = 1$, $u(b) = 0$. La relation précédente donne $u(x+1) - u(x) = c\gamma(x)$ pour $a \le x < b$. En sommant,

$$c = -\frac{1}{\sum_{j=a}^{b-1} \gamma(j)}, \qquad u(x) = \frac{\sum_{j=x}^{b-1} \gamma(j)}{\sum_{j=a}^{b-1} \gamma(j)}.$$

En particulier, $u(a) - u(a+1) = \gamma(a)/\sum_{j=a}^{b-1} \gamma(j)$. Si $p_x = q_x$ pour $x > 0$, toutes les valeurs de γ sont égales à un et $u(x) = (b-x)/(b-a)$.

3. Partant de 1, la probabilité d'atteindre b avant 0 vaut $1/\sum_{j=0}^{b-1} \gamma(j)$. Les événements correspondants décroissent quand $b \to \infty$ et leur intersection coïncide presque sûrement avec l'absence de passage en zéro. En effet, rester indéfiniment dans un intervalle fini sans atteindre un bord a probabilité nulle. Par conséquent,

$$\mathbb{P}_1(T_0 = \infty) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \gamma(j)\right)^{-1},$$

avec $1/\infty = 0$. Depuis zéro, la chaîne reste en zéro avec probabilité r_0 ou passe en 1 avec probabilité $p_0 > 0$. La probabilité de retour vaut donc un exactement lorsque la série diverge. L'irréductibilité donne le critère de récurrence.

4. L'équilibre détaillé donne

$$\zeta(0) = 1, \qquad \zeta(i) = \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i}, \quad i \ge 1.$$

Cette mesure est réversible, donc invariante. Si sa masse est finie, sa normalisation est une probabilité invariante. Réciproquement, pour toute probabilité invariante π, l'équilibre des flux à travers $\{0, \dots, i\}$ donne $\pi(i)p_i = \pi(i+1)q_{i+1}$. Ainsi, $\pi(i) = \pi(0)\zeta(i)$ et $\sum_i \zeta(i) < \infty$. Pour une chaîne irréductible, l'existence d'une probabilité invariante équivaut à la récurrence positive.

5. Dans le cas homogène, $\gamma(j) = (q/p)^j$ et $\zeta(j) = (p/q)^j$. La chaîne est donc transitoire si $p > q$, récurrente nulle si $p = q$, récurrente positive si $p < q$. Pour $0 \le i \le m$,

$$\mathbb{P}_i(\tau_0 < \tau_m) = \frac{(q/p)^i - (q/p)^m}{1 - (q/p)^m} \quad (p \ne q), \qquad 1 - i/m \quad (p = q).$$

En faisant tendre m vers l'infini, on obtient $\mathbb{P}_i(\tau_0 < \infty) = 1$ si $p \le q$, et $(q/p)^i$ si $p > q$. Pour $p_i = p < q = q_i$, on obtient $\pi(i) = (1 - p/q)(p/q)^i$. La formule de Kac donne

$$\mathbb{E}_i T_i = \frac{1}{\pi(i)} = \frac{q^{i+1}}{(q-p)p^i}, \qquad i \ge 0.$$

Exercice 8.14 — Urne d'Ehrenfest

M1 • énoncé, p. 66

Pour $m \geq 1$, $P(i, i-1) = i/m$ et $P(i, i+1) = (m-i)/m$, les autres coefficients étant nuls. Les passages entre voisins rendent la chaîne irréductible. La parité change à chaque pas et un retour en deux pas est possible : sa période vaut 2. La loi $\pi_i = 2^{-m}\binom{m}{i}$ vérifie les équations de balance détaillée $\pi_i(m-i)/m = \pi_{i+1}(i+1)/m$. C'est l'unique probabilité invariante. Elle correspond à une affectation indépendante et équiprobable de chaque boule à l'une des deux boîtes. À partir d'un état fixé, la périodicité empêche la convergence ordinaire des lois vers π.

Exercice 8.15 — Propriété de Markov forte et théorème ergodique

M1 • énoncé, p. 66

1. Pour $U \geq 0$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$, la variable $U\mathbf{1}_{\{T=n\}}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Appliquer Markov au temps déterministe n donne

$$\mathbb{E}_x[U\mathbf{1}_{\{T=n\}} f(X_T, X_{T+1}, \ldots)] = \mathbb{E}_x[U\mathbf{1}_{\{T=n\}} \mathbb{E}_{X_n} f(X_0, X_1, \ldots)].$$

La somme sur n, justifiée par positivité, donne l'identité conditionnelle voulue. On interprète les produits avec $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ comme nuls sur $T = \infty$.

2. La propriété de temps d'arrêt se vérifie par récurrence en décrivant la prochaine visite. Sous $\mathbb{P}_x$, la récurrence et Markov forte impliquent que chaque retour est fini presque sûrement.

3. Les excursions commencent toutes en x. Les sommes des excursions déjà terminées sont $\mathcal{F}_{T_k}$-mesurables ; Markov forte au temps T_k donne une nouvelle excursion de loi initiale et indépendante du passé. Une récurrence factorise donc les espérances de produits de fonctions bornées des $Z_k(f)$. La mesure d'occupation d'une excursion,

$$\nu(y) = \mathbb{E}_x \sum_{j=0}^{T_1-1} \mathbf{1}_{\{X_j=y\}},$$

est invariante : en sommant les transitions jusqu'à $T_1 - 1$, le déplacement d'un cran remplace $X_0 = x$ par $X_{T_1} = x$ et laisse la somme inchangée. Pour une chaîne irréductible récurrente, elle est proportionnelle à μ, et $\nu(x) = 1$ donne $\nu(y) = \mu(y)/\mu(x)$. Par Tonelli, $\mathbb{E}_x Z_0(f) = \mu(f)/\mu(x) < \infty$.

4. Posons $R_n = \max\{k : T_k \leq n\}$. Alors $T_{R_n} \leq n < T_{R_n+1}$ et, puisque $f \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{R_n-1} Z_k(f) \leq \sum_{j=0}^{n} f(X_j) \leq \sum_{k=0}^{R_n} Z_k(f).$$

Comme $R_n \to \infty$, la loi forte sur les excursions encadre le quotient par R_n et donne la limite $\mu(f)/\mu(x)$. Si les retours « avant n » sont comptés strictement, le compteur diffère d'au plus un, sans changer la limite.

5. Avec $f = 1$, on trouve $(n+1)/R_n \to 1/\mu(x)$, puis $R_n/n \to \mu(x)$. En multipliant les limites, on obtient le théorème ergodique.

Exercice 8.16 — Immigration et disparition de particules

M1 • énoncé, p. 66

Conditionnellement à $X_0 = x$, le nombre restant est $\mathcal{B}(x, q)$ et le nombre entrant est $\mathcal{P}(\lambda)$, indépendants. Donc

$$\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}tX_1} \mid X_0 = x] = (p + qe^{\mathrm{i}t})^x \exp(\lambda(e^{\mathrm{i}t} - 1)).$$

Si $X_0 \sim \mathcal{P}(\theta)$, $X_1 \sim \mathcal{P}(q\theta + \lambda)$. Le choix invariant est $\theta = \lambda/p$. La convolution donne la formule de Q de l'énoncé. Pour $\lambda > 0$, tous ses coefficients sont positifs (le terme $k = 0$ suffit). La chaîne est irréductible, apériodique et récurrente positive, car elle possède cette probabilité invariante. Le théorème ergodique donne presque sûrement les limites λ/p et $\lambda/p + (\lambda/p)^2$ pour les deux moyennes demandées, quel que soit l'état initial fini.

Exercice 8.17 — Équation de Poisson et variance asymptotique

M1 • énoncé, p. 67

Le théorème ergodique, puis la convergence dominée puisque f est bornée, donnent $\mathbb{E}S_n/n \to \langle f, \pi\rangle = 0$. En développant $f = g - Qg$, les sommes se télescopent et donnent exactement $S_n = M_n + g(X_0) - Qg(X_n)$. La

propriété de Markov donne $\mathbb{E}[U_k \mid \mathscr{F}_{k-1}] = 0$. Les accroissements de la martingale sont orthogonaux dans L^2, donc $\mathbb{E}M_n^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}U_k^2$. De même,

$$\mathbb{E}[g(X_{k+1})Qg(X_k)] = \mathbb{E}[(Qg)^2(X_k)].$$

La moyenne de ces termes tend vers $\langle (Qg)^2, \pi\rangle$ par le théorème ergodique et la convergence dominée. En développant les carrés,

$$\frac{\mathbb{E}M_n^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[g^2(X_k) - (Qg)^2(X_{k-1})] \longrightarrow \Sigma^2.$$

Enfin $|Z_n| \le 2\|g\|_\infty$, donc $\mathbb{E}Z_n^2/n \to 0$ et $|\mathbb{E}(M_nZ_n)|/n \le \sqrt{\mathbb{E}M_n^2\mathbb{E}Z_n^2}/n \to 0$. La même limite vaut pour $\mathbb{E}S_n^2/n$.

Exercice 8.18 — Processus de Galton-Watson

M1 • énoncé, p. 67

On suppose $m < \infty$ pour les affirmations de martingale. La propriété de branchement donne $\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = mZ_n$. Selon que $m < 1$, $m = 1$ ou $m > 1$, Z est une surmartingale, une martingale ou une sous-martingale ; $W_n = Z_n/m^n$ est une martingale positive ($m > 0$ puisque $p_0 < 1$). Si $m < 1$, $\mathbb{P}(Z_n > 0) \le \mathbb{E}Z_n = m^n$ et l'extinction survient presque sûrement. Si $m = 1$, la martingale positive converge vers une limite finie. Une suite convergente à valeurs entières est finalement constante. Elle ne peut rester définitivement en $j \ge 1$, car à chaque visite la probabilité de passer en zéro est $p_0^j > 0$. Ainsi la limite est zéro. L'état zéro est absorbant récurrent et tous les états positifs sont transitoires : chacun a une probabilité positive de rejoindre zéro en un pas sans retour. Si $m > 1$, la convexité stricte de f et $f'(1) = m > 1$ donnent un unique point fixe $q \in (0,1)$, en plus de 1. La propriété de branchement donne $\mathbb{E}[q^{Z_{n+1}} \mid \mathscr{F}_n] = f(q)^{Z_n} = q^{Z_n}$. La probabilité d'extinction avant le temps n vaut $f^{\circ n}(0)$. Cette suite croît vers le plus petit point fixe de f, donc vers q. D'où $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = q$.

Exercice 8.19 — Marches sur un cercle et fuite vers l'infini

M1 • énoncé, p. 68

Marche sur un cercle. On prend $n \ge 2$ pour que les deux voisins soient distincts. Une matrice bistochastique sur E admet la loi uniforme, puisque $(\pi P)(y) = |E|^{-1}\sum_x P(x,y) = |E|^{-1}$. Ici $P(i,j) = 1/2$ si $j = i \pm 1$ modulo $n+1$, et zéro sinon. Les choix indépendants des directions donnent la propriété de Markov. La chaîne est finie irréductible, donc récurrente positive. Sa période vaut 2 si $n+1$ est pair ; sinon les cycles de longueurs 2 et $n+1$ donnent une période 1. Dans ce dernier cas, $\mathbb{P}(X_k = j) \to 1/(n+1)$. Pour vérifier la matrice M, fixer j : la fonction $i \mapsto M_{i,j}$ est affine de part et d'autre de j, nulle en $0, n$, et sa seconde différence vérifie $M_{i,j} - (M_{i-1,j} + M_{i+1,j})/2 = \mathbf{1}_{\{i=j\}}$. Donc $(I - Q)M = I$. Le conditionnement au premier pas donne $A = QA + R$. Son unique solution est $A_{k,n} = k/n$, comme on le vérifie avec les valeurs frontières 0 et 1. Pour un tour complet au premier retour, après un premier pas dans une direction, déplier le cercle en $\{0, \dots, n+1\}$. Il faut atteindre $n+1$ depuis 1 avant zéro, de probabilité $1/(n+1)$. Les deux directions donnent la même valeur, donc la réponse totale reste $1/(n+1)$. La ruine de Pierre avant celle de Paul vaut de même $a/(a+b)$.

Fuite vers l'infini. Aucun saut n'est nul et tous ont module au plus 2. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, posons $c(\varepsilon) = \frac{1}{2}e^{\varepsilon} + \frac{1}{4}e^{-\varepsilon} + \frac{1}{4}e^{-2\varepsilon}$. Alors

$$\mathbb{E}[e^{-\varepsilon|X_{n+1}|} \mid \mathscr{F}_n] = \begin{cases} c(\varepsilon)e^{-\varepsilon|X_n|} & X_n \neq 0, \\ e^{-\varepsilon} & X_n = 0. \end{cases}$$

Comme $c(0) = 1$ et $c'(0) = -1/4$, on a $c(\varepsilon) < 1$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Choisir $\alpha > 0$ tel que $e^{\alpha}\max(c(\varepsilon), e^{-\varepsilon}) \le 1$. Le processus positif $e^{\alpha n - \varepsilon|X_n|}$ est une surmartingale et converge presque sûrement vers une valeur finie. Il est donc borné trajectoire par trajectoire et $|X_n| \ge (\alpha n - C)/\varepsilon \to \infty$. Des sauts bornés ne peuvent changer indéfiniment le signe tout en restant de module tendant vers l'infini : X_n tend vers l'un des deux infinis. Pour $x \ge 1$, l'harmonicité de $e^{\beta x}$ équivaut, avec $r = e^{\beta} > 0$, à $r^3 + r^2 - 4r + 2 = (r-1)(r^2 + 2r - 2) = 0$. Donc $\beta = 0$ ou $\log(\sqrt{3} - 1)$. Posons $r = \sqrt{3} - 1$ et $\alpha_0 = -\log r$. La fonction w de l'énoncé est harmonique sur les demi-droites par ce calcul et la symétrie ; en zéro, $(w(1) + w(-1))/2 = 1 = w(0)$. Elle est bornée entre 0 et 2, donc $w(X_n)$ est une martingale uniformément intégrable. Sa limite est $2\mathbf{1}_{\{X_n \to -\infty\}}$, d'où

$$\mathbb{P}_x(X_n \to -\infty) = w(x)/2.$$

Pour $x > a \ge 0$, les sauts descendants sur la demi-droite positive valent -1. Au temps T, on a donc $X_T = a$ sur $T < \infty$. L'arrêt de la martingale bornée et la convergence dominée donnent $w(x) = w(a)\mathbb{P}_x(T < \infty)$, soit

$\mathbb{P}_x(T<\infty) = r^{x-a}$. Enfin toute fonction excessive positive s avec $s(a)=1$ donne, par arrêt à $T\wedge n$ puis Fatou, $s(x)\geq \mathbb{P}_x(T<\infty)$. La fonction $s(y)=\mathbb{P}_y(\text{atteindre } a \text{ à un temps } n\geq 0)$ est elle-même excessive et vaut un en a. L'infimum demandé, pour $x>a$, est donc r^{x-a} et il est atteint.

Exercice 8.20 — Construction d'une chaîne par itération aléatoire

M1 • énoncé, p. 69

Notons ν la loi commune des Z_n et $\mathscr{F}_n=\sigma(Z_1,\dots,Z_n)$. Par récurrence, X_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable, tandis que Z_{n+1} est indépendante de $\mathscr{F}_n$. Ainsi, pour $y\in S$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=y\mid\mathscr{F}_n)=\int_G \mathbf{1}_{\{\phi(X_n,z)=y\}}\nu(dz)=P(X_n,y),\qquad P(x,y)=\nu\{z:\phi(x,z)=y\}.$$

Chaque ligne de P somme à un. En conditionnant de nouveau par $\sigma(X_0,\dots,X_n)$, on obtient la propriété de Markov pour la filtration naturelle. La loi initiale est δ_x.

Exercice 8.21 — Pannes et réparations

M1 • énoncé, p. 69

1. Dans l'ordre $(0,1)$, $P=\left(\begin{smallmatrix}1-p & p\\ q & 1-q\end{smallmatrix}\right)$. Avec $r_1=(1-p)\nu(0)+q\nu(1)$, on a $\mathbb{P}(X_1\neq X_2)=pr_1+q(1-r_1)$.

2. Posons $r_n=\mathbb{P}(X_n=0)$. Alors $r_{n+1}=(1-p-q)r_n+q$. Si $p+q>0$,

$$r_n=\frac{q}{p+q}+\left(\nu(0)-\frac{q}{p+q}\right)(1-p-q)^n,\qquad \mathbb{P}(X_n=1)=1-r_n.$$

Si $p=q=0$, la machine conserve son état initial : $P=I$ et $r_n=\nu(0)$.

3. Si $0<p,q<1$, on a $|1-p-q|<1$, donc la loi converge vers $(q,p)/(p+q)$. Si elle est initialement égale à cette loi, elle le reste.

4. Pour $p+q>0$, en posant $r=1-p-q$,

$$P^n=\frac{1}{p+q}\begin{pmatrix}q+pr^n & p(1-r^n)\\ q(1-r^n) & p+qr^n\end{pmatrix}.$$

Cette expression reste valable aux frontières ; si $p=q=1$, elle décrit l'alternance de période deux. Si $p=q=0$, $P^n=I$.

Exercice 8.22 — Récurrence d'une file d'attente discrète

M1 • énoncé, p. 70

1. Il suffit de calculer, pour tous $x_0,\dots,x_n\in\mathbb{N}$ tels que $\mathbb{P}(Y_0=x_0,\dots,Y_n=x_n)>0$, et pour tout $y\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{n+1}=y|Y_0=x_0,\dots,Y_n=x_n)&=\mathbb{P}((x_n+\xi_{n+1}-1)^+=y|Y_0=x_0,\dots,Y_n=x_n)\\&=\mathbb{P}((x_n+\xi_{n+1}-1)^+=y)\\&=\begin{cases}\mathbb{P}(x_n+\xi_{n+1}-1=y)=\gamma(y-x_n+1) & \text{si } x_n\geq 1,\\ \mathbb{P}(\xi_{n+1}\in\{0,1\})=\gamma(0)+\gamma(1) & \text{si } x_n=0 \text{ et } y=0,\\ \mathbb{P}(\xi_{n+1}=y+1)=\gamma(y+1) & \text{si } x_n=0 \text{ et } y\geq 1\end{cases}\\&=Q(x_n,y),\end{aligned}$$

où Q est comme dans l'énoncé. Dans la deuxième égalité, on a utilisé le fait que ξ_{n+1} est (par construction) indépendant de $(Y_0,\dots,Y_n)$, et dans la troisième on utilise le fait que ξ_{n+1} a pour loi γ.

2. Puisque $\gamma(0)>0$ on a $Q(i,i-1)=\gamma(0)>0$ pour tout entier $i\geq 1$. Par ailleurs il existe un entier $j\geq 2$ tel que $\gamma(j)>0$ et donc si $l=j-1$, on a $Q(i,i+l)=\gamma(j)>0$. Soient alors i et j deux entiers positifs. En choisissant un entier p assez grand pour que $i+pl>j$, on a

$$\mathbb{P}_i(\text{atteindre } j)\geq Q(i,i+l)\cdots Q(i+(p-1)l,i+pl)Q(i+pl,i+pl-1)\cdots Q(j+1,j)>0.$$

On a donc bien montré que la chaîne est irréductible.

3. Dans ce cas, on a $Q(i,j) = 0$ dès que $|j-i| \geq 2$. Pour vérifier qu'une mesure μ est réversible, il suffit donc de voir que pour tout entier $i \geq 0$, on a $\mu(i)Q(i,i+1) = \mu(i+1)Q(i+1,i)$, ce qui équivaut à $\gamma(2)\mu(i) = \gamma(0)\mu(i+1)$. Il en découle que la mesure μ définie par

$$\mu(i) = \left(\frac{\gamma(2)}{\gamma(0)}\right)^i$$

est réversible donc invariante. Si $\gamma(2) < \gamma(0)$, cette mesure est de masse finie, et l'existence d'une mesure invariante de masse finie pour une chaîne irréductible assure que la chaîne est récurrente, et donc récurrente positive. De plus, toujours dans le cas $\gamma(2) < \gamma(0)$, comme on a aussi $Q(0,0) > 0$, on sait que la chaîne est irréductible récurrente positive apériodique (car 0 est de période 1, et tous les états ont même période). La probabilité invariante de la chaîne est π, définie par

$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad \pi(i) = \frac{\mu(i)}{\mu(\mathbb{N})} = \frac{\gamma(2)^i(\gamma(0)-\gamma(2))}{\gamma(0)^{i+1}}.$$

On sait alors que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y_n = i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(i) = \frac{\gamma(2)^i(\gamma(0)-\gamma(2))}{\gamma(0)^{i+1}}.$$

En fait, $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers π.

4. D'abord $Y_0 = Z_0 = p$. On vérifie ensuite par récurrence que $Y_n \geq Z_n$ pour tout entier n. Si la propriété est vraie à l'ordre n,

$$Y_{n+1} = (Y_n + \xi_{n+1} - 1)^+ \geq Y_n + \xi_{n+1} - 1 \geq Z_n + \xi_{n+1} - 1 = Z_{n+1}.$$

Si $m > 1$, y compris si $m = +\infty$, la convergence monotone permet de choisir un entier M tel que $\mathbb{E}[\xi_1 \wedge M] > 1$. La loi forte des grands nombres appliquée aux variables bornées $\xi_k \wedge M$ donne $p + \sum_{k=1}^n (\xi_k \wedge M - 1) \to +\infty$ presque sûrement. Cette somme est majorée par Z_n, lui-même majoré par Y_n. Ainsi, $Y_n \to +\infty$ presque sûrement. La chaîne Y_n ne passe alors p.s. qu'un nombre fini de fois en p, et l'état p est transitoire. Comme la chaîne est irréductible, tous les états sont transitoires.

5. Par construction, $Z_n > 0$ pour tout $0 \leq n < T$ (noter que la marche aléatoire Z_n ne peut décroître que par sauts de taille -1, donc ne peut devenir strictement négative sans passer par 0). On montre alors par récurrence que $Y_n = Z_n$ pour tout $n \leq T$, p.s. En effet, cette propriété est vraie à l'ordre 0, et si elle est vraie à l'ordre $n-1$, et si $n \leq T$, on a

$$Y_n = (Y_{n-1} + \xi_n - 1)^+ = (Z_{n-1} + \xi_n - 1)^+ = Z_{n-1} + \xi_n - 1 = Z_n,$$

puisque $Z_{n-1} + \xi_n - 1 \geq 0$ lorsque $Z_{n-1} > 0$ (ce qui est le cas si $n \leq T$). Lorsque $m < 1$, la loi forte des grands nombres assure que Z_n converge vers $-\infty$, et donc il est clair que $T < \infty$ p.s. Lorsque $m = 1$, on remarque que $(Z_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale positive qui doit converger vers une limite finie, or sur $\{T = \infty\}$ cette suite n'est pas de Cauchy presque sûrement : l'indépendance et $\gamma(0) > 0$ donnent une infinité d'accroissements égaux à -1, ce qui assure aussi que $T < \infty$ p.s. Dans les deux cas, on a donc $T < \infty$ p.s. D'après le début de la question, on sait donc que la chaîne $(Y_n)_{n\geq 0}$ partant de p visite 0 p.s. Cet argument est valable pour n'importe quelle valeur de $p \geq 0$. Notons $\tau_0 = \inf\{n \geq 0 : Y_n = 0\}$ et $\tau_0^+ = \inf\{n \geq 1 : Y_n = 0\}$. La propriété de Markov à l'instant 1 donne $\mathbb{P}_0(\tau_0^+ < \infty) = Q(0,0) + \sum_{j\geq 1} Q(0,j)\mathbb{P}_j(\tau_0 < \infty) = 1$. Donc, 0 est récurrent et puisque la chaîne est irréductible, tous les états sont récurrents.

Exercice 8.23 — Temps d'attente de succès consécutifs

M1 • énoncé, p. 70

On a $Q(i,0) = q$ et $Q(i,i+1) = p$. Tous les états communiquent ; la boucle en zéro donne la période 1. Les équations invariantes sont $\pi_j = p\pi_{j-1}$ pour $j \geq 1$ et $\pi_0 = q\sum_j \pi_j$. Toute mesure invariante positive de masse finie sur les points est un multiple de $(p^j)_{j\geq 0}$; la probabilité invariante est $\pi_j = qp^j$. La chaîne est donc irréductible récurrente positive. Par blocs disjoints de N lancers, une suite de N piles a probabilité p^N. Ainsi $\mathbb{P}_x(T_N > mN) \leq (1-p^N)^m$ pour $x \leq N$ et $\mathbb{E}_x T_N < \infty$. Les équations du premier pas sont $h(N) = 0$ et $h(x) = 1 + ph(x+1) + qh(0)$ pour $x < N$. Leur résolution donne

$$h(x) = \frac{p^{-N} - p^{-x}}{q}, \qquad h(0) = \frac{1-p^N}{qp^N}.$$

Enfin le théorème ergodique donne $n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{X_k\geq N\}}\to\sum_{j\geq N}qp^j=p^N$ p.s. La fréquence des instants où la longueur vaut *exactement* N est qp^N.

Exercice 8.24 — Marche sur les trois racines de l'unité

L3 • énoncé, p. 70

Avec $q=1-p$, le vecteur colonne évolue par

$$S=\begin{pmatrix}0&q&p\\p&0&q\\q&p&0\end{pmatrix}.$$

La matrice de Fourier, formée des vecteurs $(1,1,1)$, $(1,\omega,\omega^2)$ et $(1,\omega^2,\omega)$, $\omega=e^{2\mathrm{i}\pi/3}$, diagonalise S. Ses valeurs propres sont 1, $p\omega+q\omega^2$ et sa conjuguée (l'ordre dépend des colonnes). Le carré du module des deux dernières est $1-3pq<1$. Donc S^n tend vers la matrice dont tous les coefficients valent $1/3$, et chaque probabilité d'état tend vers $1/3$, quelle que soit la loi initiale.

Exercice 8.25 — Branchement avec immigration : récurrence

M1 • énoncé, p. 70

Une chaîne transitoire ne visite chaque état qu'un nombre fini de fois p.s. Par réunion finie, elle finit donc par sortir de tout ensemble $\{0,\dots,K\}$; en intersectant pour $K\in\mathbb{N}$, elle tend vers l'infini. Les variables utilisées au pas $n+1$ sont indépendantes du passé : $Q(i,j)=(\mu^{*i}*\nu)(j)$, avec $\mu^{*0}=\delta_0$. De plus $Q(i,0)\geq\mu(0)^i\nu(0)>0$ et $Q(i,i+1)\geq\mu(1)^i\nu(1)>0$, d'où l'irréductibilité. Par conditionnement, $\mathbb{E}[X_{n+1}\mid X_n]=m_\mu X_n+m_\nu$. Ainsi $\mathbb{E}X_n=m_\nu\sum_{j=0}^{n}m_\mu^j\leq m_\nu/(1-m_\mu)$ si $m_\mu<1$. La transience impliquerait $X_n\to\infty$ p.s. ; Fatou imposerait alors $\liminf\mathbb{E}X_n=\infty$, contradiction. La chaîne irréductible est donc récurrente.

Exercice 8.26 — Marche à quatre états et temps de retour

L3 • énoncé, p. 71

Pour un pas depuis i, tirer U uniforme et retourner le premier j tel que $U\leq\sum_{k\leq j}P_{ik}$. Itérer pour n pas ; répéter indépendamment m fois et compter les états finaux. Pour un retour, effectuer au moins un pas puis continuer jusqu'à retrouver l'état initial.

```
function j=trans1A(i)
P=[0 .5 0 .5;.25 0 .75 0;0 1/3 0 2/3;1/3 1/3 1/3 0];
j=find(rand<=cumsum(P(i,:)),1);
end
function j=transnA(i,n)
j=i; for k=1:n, j=trans1A(j); end
end
function T=tempsA(i)
T=1; j=trans1A(i);
while j~=i, j=trans1A(j); T=T+1; end
end
```

La chaîne est irréductible ; les cycles $1\to2\to1$ et $1\to4\to2\to1$ donnent la période 1. La probabilité invariante, obtenue en résolvant $\pi P=\pi$, est $\pi=(26,44,48,45)/163$. Ainsi $\mathbb{P}_i(X_n=1)\to26/163$ pour tout i. Les temps moyens de retour valent $1/\pi_i$, soit $163/26, 163/44, 163/48, 163/45$. Les fréquences terminales et les inverses des moyennes de retours approchent donc la même distribution. Pour la répartition empirique de 5000 retours, trier les temps et cumuler les fréquences de leurs valeurs distinctes.

```
function f=loiA(i,n,m)
z=zeros(m,1);
for k=1:m, z(k)=transnA(i,n); end
f=arrayfun(@(j) mean(z==j),1:4);
end
% Comparaisons et repartition des temps de retour :
```

```
for i=1:4
 f=loiA(i,100,5000); R=zeros(5000,1);
 for k=1:5000, R(k)=tempsA(i); end
 disp([i,f(1),1/mean(R)]);
 if i==1
  [v,~,j]=unique(R); c=cumsum(accumarray(j,1))/numel(R);
  figure; stairs([0;v],[0;c]);
 end
end
```

Exercice 8.27 — Marche réfléchie sur les entiers naturels

L3 • énoncé, p. 71

Un pas s'écrit $X_{n+1} = \max(0, X_n + 1 - 2\mathbf{1}_{\{U_n<p\}})$, pour des uniformes indépendantes. Répéter cette transition depuis zéro, puis répéter les trajectoires pour obtenir les fréquences. Le premier retour est le premier $n \geq 1$ tel que $X_n = 0$. Avec $r = (1-p)/p < 1$, les équations de réversibilité donnent $\pi_j = (1-r)r^j = (2p-1)r^j/p$. La probabilité limite de zéro vaut donc $1/3, 6/13, 4/7$ pour les trois valeurs de p, et les temps moyens de retour valent respectivement $3, 13/6, 7/4$. À $p = 1/2$, la chaîne est récurrente nulle : le retour est fini p.s. mais d'espérance infinie, et il n'existe pas de probabilité stationnaire.

```
function y=pasB(x,p)
y=max(0,x+1-2*(rand<p));
end
function x=positionB(n,p)
x=0; for k=1:n, x=pasB(x,p); end
end
function T=retourB(p)
T=1; x=pasB(0,p);
while x~=0, x=pasB(x,p); T=T+1; end
end
% Exemple de comparaison :
n=100; m=5000; v=0:9;
for p=[0.6,0.65,0.7]
 z=zeros(1,m); t=z;
 for k=1:m, z(k)=positionB(n,p); t(k)=retourB(p); end
 r=(1-p)/p; f=arrayfun(@(j) mean(z==j),v);
 figure; bar(v,[f' ((1-r)*r.^v)']);
 disp([p,mean(t),1/mean(t)]);
end
```

Pour $p = 1/2$, une simulation du temps de retour termine presque sûrement dans le modèle idéal, mais sa durée moyenne est infinie. Une moyenne empirique sur un nombre fini de trajectoires ne fournit donc pas une estimation d'une espérance finie.

Exercice 8.28 — Marche réfléchie sans maintien en zéro

M1 • énoncé, p. 71

La chaîne est irréductible. Pour $q = 1-p$, une mesure réversible est $\mu(0) = q$ et $\mu(k) = (p/q)^{k-1}$ pour $k \geq 1$: on vérifie l'équilibre sur chaque arête. Si $p < q$, cette mesure est finie et se normalise en une probabilité invariante ; la chaîne est récurrente positive. Pour étudier le retour à zéro, entre le départ de 1 et la première visite de 0, on a la marche simple de probabilités p, q. La probabilité de toucher 0 avant N, en partant de i, est $(N-i)/N$ si $p = q$, et $[(q/p)^i - (q/p)^N]/[1-(q/p)^N]$ sinon ; ces expressions résolvent l'équation harmonique avec valeurs $1, 0$ aux deux bords. En faisant tendre N vers l'infini, la probabilité de toucher zéro vaut un si $p \leq q$ et $(q/p)^i < 1$ si $p > q$. Donc la chaîne est récurrente dans le premier cas, transitoire dans le second. Si $p = q$, toute mesure invariante satisfait les équations de flux $\pi(1) = 2\pi(0)$ et $\pi(k) = 2\pi(0)$ pour $k \geq 1$. Aucune probabilité invariante n'existe. La chaîne récurrente est donc nulle.

Exercice 8.29 — Mesurabilité des sommes sur les excursions

M1 • énoncé, p. 71

Les temps T_j sont des temps d'arrêt finis presque sûrement. Pour un entier m fixé, sur $\{T_k = m\}$ tous les T_j avec $j \le k$ sont au plus m. Pour $j < k$,

$$Z_j(f)\mathbf{1}_{\{T_k=m\}} = \sum_{n=0}^{m-1} f(X_n)\mathbf{1}_{\{T_j\le n<T_{j+1}\}}\mathbf{1}_{\{T_k=m\}},$$

qui est $\mathscr{F}_m$-mesurable. En sommant ces restrictions pour $m \le r$, on obtient la mesurabilité sur $\{T_k \le r\}$ pour chaque r, ce qui caractérise $\mathscr{F}_{T_k}$-mesurabilité. Les sommes sont finies sur chaque excursion ; pour $f \ge 0$ étendue, on procède par troncature.

Exercice 8.30 — Accessibilité, fermeture et communication

M1 • énoncé, p. 71

1. Une transition positive vers l'extérieur contredit la fermeture. Réciproquement, si aucune transition ne sort de C, une récurrence sur n montre $P^n(x, E \setminus C) = 0$ pour $x \in C$. Le cas du singleton découle de la somme des probabilités d'une ligne.
2. Si tous les états communiquent, un ensemble fermé non vide contenant x contient tout état accessible depuis x, donc tout E. Réciproquement, l'ensemble C_x des états accessibles depuis x contient x et est fermé : si $y \in C_x$ et $P(y, z) > 0$, alors $P^{n+1}(x, z) \ge P^n(x, y)P(y, z) > 0$ pour un certain n. Donc $C_x = E$.
3. La réflexivité découle de $P^0(x, x) = 1$, et la symétrie est dans la définition. Pour la transitivité, concaténer les chemins : $P^{n+m}(x, z) \ge P^n(x, y)P^m(y, z) > 0$. Faire de même dans l'autre sens.

9. Processus de Poisson et mouvement brownien

Exercice 9.1 — Superposition et amincissement

M1 • énoncé, p. 72

1. Les accroissements de $N + N'$ sur des intervalles disjoints sont indépendants ; chacun est somme de deux Poisson indépendantes, donc de loi $\mathscr{P}((\lambda+\lambda')(t-s))$ sur un intervalle de longueur $t-s$. Le processus est issu de zéro et càdlàg. C'est un processus de Poisson d'intensité $\lambda+\lambda'$. Les sauts simultanés des deux processus ont probabilité nulle, car les temps de saut indépendants ont des densités.

2. Pour des intervalles disjoints de longueurs h_j et des réels u_j, conditionner par leurs nombres K_j d'arrivées donne la fonction caractéristique jointe des nombres retenus

$$\mathbb{E}\prod_j (1-p+pe^{\mathrm{i}u_j})^{K_j} = \prod_j \exp\{\lambda h_j p(e^{\mathrm{i}u_j}-1)\}.$$

La factorisation prouve à la fois l'indépendance des accroissements et leurs lois $\mathscr{P}(p\lambda h_j)$. Le processus retenu est donc de Poisson d'intensité $p\lambda$. En particulier, $\mathbb{E}[N'(t)-N'(s)] = p\lambda(t-s)$.

Exercice 9.2 — Processus de Poisson composé

M1 • énoncé, p. 72

1. Il est clair que les accroissements du processus Z sont indépendants car ceux de N le sont et les variables ζ_n sont indépendantes entre elles et indépendantes de N. De plus, pour $0 \leq s < t$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(Z(t)-Z(s))} \mid N(s), N(t)] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\sum_{n=N(s)+1}^{N(t)}\zeta_n} \,\middle|\, N(s), N(t)\right] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\zeta_1}]^{N(t)-N(s)}$$

et comme $N(t)-N(s)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$, on en déduit que la loi de $Z(t)-Z(s)$ est la même que celle de $Z(t-s)$. En fait,

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(Z(t)-Z(s))}] = \exp(\lambda(t-s)(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\zeta_1}]-1)) = \exp(\lambda(t-s)(\hat{\mu}(u)-1)),$$

où $\hat{\mu}$ désigne la fonction caractéristique de la loi μ de ζ_1.

2. D'après ce qui précède, la loi de $Z(t)$ est caractérisée par

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uZ(t)}] = \exp(\lambda t(\hat{\mu}(u)-1)).$$

De façon alternative, en notant $\mu^{*n} = \mu * \cdots * \mu$ la puissance n-ième de la mesure μ au sens du produit de convolution, on peut écrire que pour toute fonction g mesurable positive sur $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[g(Z(t)) \mid N(t)] = \mathbb{E}\left[g\left(\sum_{n=1}^{N(t)}\zeta_n\right)\,\middle|\, N(t)\right] = \int_{\mathbb{R}} g(z)\,\mu^{*N(t)}(\mathrm{d}z)$$

$$\text{puis} \quad \mathbb{E}[g(Z(t))] = \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\int_{\mathbb{R}} g(z)\,\mu^{*k}(\mathrm{d}z),$$

de sorte que la loi de $Z(t)$ est la mesure

$$\mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mu^{*k}.$$

3. Presque sûrement, le processus Z est issu de zéro, càdlàg, à accroissements indépendants et stationnaires, et vérifie pour tout réel $t \geq 0$,

$$Z(t)-Z(t-) = \begin{cases}\zeta_n & \text{si } t = T_n \text{ pour un } n \geq 1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

où $T_1, T_2, \ldots$ sont les instants de saut du processus de Poisson N. Par conséquent, Z est un processus de Poisson si et seulement si ζ_1 est p.s. à valeurs dans $\{0,1\}$. Dans ce cas, Z est plus précisément un processus de Poisson de paramètre $\lambda\mathbb{P}(\zeta_1=1)$, et c'est donc un amincissement du processus de Poisson N.

On utilise la convention $\mu^{*0} = \delta_0$. Si $\mu = \delta_0$, le processus obtenu est identiquement nul, de taux zéro.

Exercice 9.3 — Temps résiduel d'un processus de Poisson

M1 • énoncé, p. 72

1. Soit t un réel positif. Alors, $E(t)$ représente le temps qu'il faut attendre à partir de l'instant t pour observer une nouvelle arrivée du processus de Poisson N.

2. On a tout d'abord $\{E(t) > x \text{ et } t < T_1\} = \{T_1 > t + x\}$, de sorte que

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{E(t)>x\}}\mathbf{1}_{\{t<T_1\}} \mid T_1] = \mathbf{1}_{\{T_1>t+x\}}.$$

Ensuite, observons que la suite $(\widetilde{T}_n)_{n\geq 1}$ définie par $\widetilde{T}_n = T_{n+1} - T_1$ est indépendante de T_1 et a même loi que $(T_n)_{n\geq 1}$. Par conséquent, le processus $\widetilde{N}$ défini par $\widetilde{N}(t) = \mathrm{Card}\{n \geq 1 \mid \widetilde{T}_n \leq t\}$ pour tout réel $t \geq 0$ est indépendant de T_1 et a même loi que N, et il vérifie $\widetilde{N}(t) = N(T_1 + t) - 1$ pour tout $t \geq 0$. De plus, le processus $\widetilde{E}$ défini par $\widetilde{E}(t) = \widetilde{T}_{\widetilde{N}(t)+1} - t$ pour tout réel $t \geq 0$ est indépendant de T_1 et a même loi que E, et il vérifie $\widetilde{E}(t) = E(T_1 + t)$ pour tout $t \geq 0$. On prolonge $\widetilde{E}(u)$ par zéro pour $u < 0$. On en déduit que

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{E(t)>x\}}\mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}} \mid T_1] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\widetilde{E}(t-T_1)>x\}}\mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}} \mid T_1] = \mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\widetilde{E}(t-T_1)>x\}} \mid T_1] = \mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}}\varphi(t - T_1, x).$$

On a donc finalement

$$\mathbb{P}(E(t) > x \mid T_1) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{E(t)>x\}} \mid T_1] = \mathbf{1}_{\{T_1>t+x\}} + \varphi(t - T_1, x)\,\mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}}.$$

3. En prenant l'espérance dans l'expression ci-dessus, on en déduit directement que

$$\varphi(t, x) = \mathbb{P}(E(t) > x) = \mathbb{P}(T_1 > t + x) + \mathbb{E}[\varphi(t - T_1, x)\,\mathbf{1}_{\{T_1\leq t\}}] = \mathrm{e}^{-\lambda(t+x)} + \int_0^t \varphi(t - u, x)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u,$$

puisque T_1 suit la loi exponentielle de taux λ.

4. Pour tout réel $x \geq 0$, posons

$$\forall t \geq 0 \qquad \Phi_x(t) = \int_0^t \varphi(u, x)\mathrm{e}^{\lambda u}\,\mathrm{d}u,$$

En faisant un changement de variable élémentaire dans l'intégrale, on observe que l'équation obtenue à la question précédente est équivalente à

$$\varphi(t, x)\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda\Phi_x(t),$$

Comme φ est clairement bornée, la fonction Φ_x est continue sur $]0, \infty[$. La relation précédente montre alors que la fonction $t \mapsto \varphi(t, x)\mathrm{e}^{\lambda t}$ est continue sur le même intervalle, ce qui implique que Φ_x est de classe C^1 sur $]0, \infty[$. De plus, la relation précédente est équivalente à

$$\Phi_x'(t) = \mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda\Phi_x(t).$$

Avec la condition initiale $\Phi_x(0) = 0$, on obtient directement

$$\forall t \geq 0 \qquad \Phi_x(t) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda t} - 1).$$

En dérivant cette expression, on en déduit que

$$\forall t, x \geq 0 \qquad \varphi(t, x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

5. D'après la question précédente, on a $\mathbb{P}(E(t) > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$ pour tous réels $t, x \geq 0$. Ainsi, la variable $E(t)$ suit la loi exponentielle de taux λ. On peut remarquer que la loi de $E(t)$ est indépendante de t. Le temps moyen d'attente de la prochaine arrivée d'un processus de Poisson de paramètre λ est donc toujours égal à $1/\lambda$.

Exercice 9.4 — Le mouvement brownien n'est à variation finie sur aucun intervalle

M1 • énoncé, p. 73

Pour un n fixé, les 2^n accroissements sont indépendants, normaux centrés de variance $(b-a)2^{-n}$, de loi $\mathcal{N}(0,(b-a)2^{-n})$. Le carré d'une normale centrée réduite a espérance un et variance deux, donc

$$\mathbb{E}X_n = b-a, \qquad \operatorname{Var}(X_n) = 2(b-a)^2 2^{-n}.$$

Bienaymé–Tchebychev donne une série sommable de probabilités $\mathbb{P}(|X_n-(b-a)|>\varepsilon)$. Borel–Cantelli, puis l'intersection sur $\varepsilon = 1/k$, donnent $X_n \to b-a$ presque sûrement. Les accroissements normalisés changent avec n ; la loi forte pour une seule suite indépendante ne s'applique donc pas directement à ce tableau. Par continuité uniforme sur $[a,b]$, le maximum D_n des valeurs absolues des accroissements de la subdivision tend vers zéro presque sûrement. Or

$$X_n \le D_n \sum_{k=1}^{2^n} |B_{a+k(b-a)2^{-n}} - B_{a+(k-1)(b-a)2^{-n}}|.$$

Comme $X_n \to b-a > 0$, la somme des valeurs absolues tend vers l'infini. On intersecte ces événements de probabilité un pour les couples rationnels $a<b$. Tout intervalle non trivial contient un tel sous-intervalle, et sa variation totale est au moins celle du sous-intervalle. Ainsi, presque sûrement, aucun intervalle non trivial n'a une variation finie.

Exercice 9.5 — Invariance par isométrie du mouvement brownien

M1 • énoncé, p. 73

Une isométrie de $\mathbb{R}^d$ fixant l'origine préserve les produits scalaires par l'identité de polarisation. Elle est donc linéaire orthogonale ; notons Q sa matrice. Le processus $B'_t = QB_t$ part de zéro et ses trajectoires sont continues presque sûrement. Ses accroissements sur des intervalles disjoints sont indépendants, puisqu'ils sont les images par Q des accroissements indépendants de B. Pour $s<t$, l'accroissement $B'_t - B'_s$ est gaussien centré, de covariance

$$Q((t-s)I_d)Q^{\mathsf{T}} = (t-s)I_d.$$

Ces propriétés caractérisent un mouvement brownien en dimension d.

Exercice 9.6 — L'ensemble des zéros du mouvement brownien

M1 • énoncé, p. 73

1. Il suffit de montrer que $\varphi^{-1}(\{0\}) \in \mathscr{F}\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$. Pour cela on remarque que

$$\varphi^{-1}(\{0\}) = \{(\omega,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+ \mid B_t(\omega)\neq 0\} = \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q}^+\\ 0\le a<b}} \{\omega\in\Omega \mid \forall t\in]a,b[, |B_t(\omega)|\neq 0\}\times]a,b[,$$

car à ω fixé, $\{t\in\mathbb{R}^+ \mid B_t(\omega)\neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^+$ (par continuité du mouvement brownien). Il suffit donc de montrer que pour tous $a,b\in\mathbb{Q}^+$ avec $0\le a<b$,

$$E_{a,b} = \{\omega\in\Omega \mid \forall t\in]a,b[, |B_t(\omega)|\neq 0\}$$

est dans $\mathscr{F}$. Or on a

$$\begin{aligned}
E_{a,b} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \{\omega\in\Omega \mid \forall t\in[a+1/n, b-1/n], |B_t(\omega)|\neq 0\}\\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \{\omega\in\Omega \mid \forall t\in[a+1/n, b-1/n], |B_t(\omega)|\ge 1/p\}\\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \{\omega\in\Omega \mid \forall t\in[a+1/n, b-1/n]\cap\mathbb{Q}, |B_t(\omega)|\ge 1/p\}\\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{t\in[a+1/n,b-1/n]\cap\mathbb{Q}} \{\omega\in\Omega \mid |B_t(\omega)|\ge 1/p\} \in \mathscr{F}.
\end{aligned}$$

On a utilisé la continuité de $t\to B_t(\omega)$ d'abord pour se ramener à des intervalles compacts $[a+1/n, b-1/n]$, puis pour affirmer que si $|B_t(\omega)|>0$ sur $[a+1/n,b-1/n]$ il existe $p(\omega)\in\mathbb{N}^*$ tel que $|B_t(\omega)|\ge 1/p(\omega)$ sur $[a+1/n,b-1/n]$ par compacité de $[a+1/n,b-1/n]$, et enfin pour se restreindre à des valeurs de t dans $\mathbb{Q}$. Ceci achève la démonstration de 1.

2. • $\mathscr{Z}$ *fermé :* Pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue ce qui implique que $\mathscr{Z}(\omega)$ est fermé.

• $\mathscr{Z}$ *non borné :* Par le principe de réflexion, $\sup_{0\le t\le T} B_t$ a même loi que $|B_T|$. Pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(\sup_{t\ge 0} B_t \le a) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{P}(|B_T| \le a) = 0$. En considérant les seuils entiers, puis le brownien $-B$, et en utilisant que chaque trajectoire est bornée sur les compacts, on obtient

$$\text{p.s.} \qquad \limsup_{t\to\infty} B_t = \infty \quad \text{et} \quad \liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty,$$

ce qui implique que $\mathscr{Z}$ est p.s. non borné par continuité de B.

• $\mathscr{Z}$ *de mesure de Lebesgue nulle :* Notons $M = \lambda(\mathscr{Z})$ la mesure de Lebesgue de $\mathscr{Z}$. On a, d'après le théorème de Fubini (on peut bien l'appliquer grâce à la question 1.),

$$\mathbb{E}[M] = \int_\Omega \left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{B_t(\omega)=0\}} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_0^\infty \left(\int_\Omega \mathbf{1}_{\{B_t(\omega)=0\}} \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \right) \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbb{P}(B_t = 0)\mathrm{d}t = 0,$$

car pour tout $t > 0$, la loi de B_t n'a pas d'atome en 0. La variable aléatoire M étant positive, cela implique que $M = 0$ p.s., c'est à dire que $\mathscr{Z}$ est de mesure de Lebesgue nulle p.s.

3. Pour chaque $q \in \mathbb{Q}_+$, le premier zéro d_q après q est un temps d'arrêt fini presque sûrement, par la continuité et la récurrence du brownien. Par la propriété de Markov forte, $(B_{d_q+t})_{t\ge 0}$ est un brownien issu de zéro. Pour tout $\varepsilon > 0$, le même principe de réflexion donne $\mathbb{P}(\sup_{[0,\varepsilon]} B_t \le 0) = \mathbb{P}(\inf_{[0,\varepsilon]} B_t \ge 0) = 0$. En prenant $\varepsilon = 1/n$, on en déduit qu'un brownien issu de zéro prend des valeurs strictement positives et strictement négatives dans tout intervalle $(0, \varepsilon)$, presque sûrement ; la continuité lui impose donc des zéros arbitrairement proches de zéro à droite. Ainsi, presque sûrement, d_q n'est pas isolé à droite. On intersecte ces événements de probabilité un pour les q rationnels positifs ou nuls. Sur l'événement obtenu, aucun d_q n'est isolé, et $d_0 = 0$. Soit maintenant $t > 0$ un zéro qui n'est aucun des d_q. Choisissons des rationnels $q_n < t$ croissant vers t. On a alors $q_n \le d_{q_n} < t$ et $d_{q_n} \to t$. Le point t n'est donc pas isolé non plus.

Exercice 9.7 — Poissonisation de points uniformes

M1 • énoncé, p. 73

Écrivons $a = |A|$, $b = |B|$. Pour $M = m$, $(N_A, N_B, m - N_A - N_B)$ est multinomial de paramètres $(m; a, b, 1-a-b)$; les marginales sont $\mathscr{B}(m, a)$ et $\mathscr{B}(m, b)$. Leur covariance vaut $-mab$: elles ne sont pas indépendantes si $mab > 0$. Si $mab = 0$, l'une au moins est constante et l'indépendance est vraie. Avec M de Poisson, la fonction génératrice jointe est

$$\mathbb{E}[s^{N_A} t^{N_B}] = \mathbb{E}[(as + bt + 1 - a - b)^M] = e^{\lambda a(s-1)} e^{\lambda b(t-1)}.$$

Les comptes sont donc indépendants, de lois $\mathscr{P}(\lambda a)$ et $\mathscr{P}(\lambda b)$.

10. Simulation et travaux pratiques

Exercice 10.1 — Simulation d'un mélange

L3 • énoncé, p. 74

Choisir uniformément l'une des trois composantes puis une exponentielle indépendante de taux 1 donne exactement le mélange : avec J uniforme sur $\{1,2,3\}$ et U uniforme, prendre $-4\log U$ si $J=1$, $-3\log U$ si $J=2$, $2-\log U$ sinon. Un code vectorisé est :

```
function x=simul(n)
j=1+floor(3*rand(1,n)); e=-log(rand(1,n));
x=(j==1).*(4*e)+(j==2).*(3*e)+(j==3).*(2+e);
end
% Illustration :
x=simul(5000); histogram(x,'Normalization','pdf');
```

La densité cible est la moyenne des trois densités de l'énoncé. L'histogramme en densité a une aire totale égale à 1 ; sa forme dépend de la largeur des classes.

Exercice 10.2 — File à durées de service mélangées

L3 • énoncé, p. 74

À l'arrivée du client n, le travail restant du précédent vaut $(W_{n-1}-X_n)^+$. Donc $W_n = D_n + (W_{n-1}-X_n)^+$, $Q_1=0$, $Q_n=(Q_{n-1}+D_{n-1}-X_n)^+$ et $W_n = Q_n + D_n$. On enregistre chaque fonction dans le fichier portant son nom. La fonction suivante simule les services du modèle.

```
function D=simul(n)
J=1+floor(3*rand(1,n)); E=-log(rand(1,n));
D=(J==1).*(4*E)+(J==2).*(3*E)+(J==3).*(2+E);
end

function [Q,W]=attente(n,gamma)
D=simul(n); X=-log(rand(1,n))/gamma;
Q=zeros(1,n); W=zeros(1,n); W(1)=D(1);
for j=2:n
 Q(j)=max(0,W(j-1)-X(j)); W(j)=Q(j)+D(j);
end
end
function W=passage(n,gamma)
[~,W]=attente(n,gamma);
end
% Replications independantes :
N=5000; q=zeros(1,N); w=q;
for j=1:N
 [Q,W]=attente(10,1/5); q(j)=Q(10); w(j)=W(10);
end
IC98=mean(w)+[-1,1]*2.326348*std(w)/sqrt(N);
k=1:N; theta=cumsum(w)./k; eta=cumsum(q)./k+10/3;
plot(k,theta,k,eta); legend('theta','eta');
```

Les services ont $\mathbb{E}D = 10/3$, $\mathbb{E}D^2 = (32+18+10)/3 = 20$ et $\operatorname{Var} D = 80/9$. Par indépendance de D_{10} et Q_{10}, $\theta_N = \overline{W}$ et $\eta_N = \overline{Q} + 10/3$ sont sans biais, mais $\operatorname{Var}\theta_N = \operatorname{Var}\eta_N + 80/(9N)$. Les estimateurs de leurs erreurs quadratiques sont les variances empiriques corrigées divisées par N (calculables à chaque préfixe $k \geq 2$). Le TCL justifie l'intervalle affiché, de niveau *asymptotique* 98 %. Pour les autres graphes, appeler la même fonction avec $n=100$, puis conserver les colonnes $5, 40, 50$ de 1000 trajectoires indépendantes et tracer leurs répartitions empiriques. Le facteur de charge est $\rho = \gamma\mathbb{E}D = 10\gamma/3$. Pour $\gamma = 1/5$, $\rho = 2/3 < 1$: la loi des attentes converge

vers une loi stationnaire, la probabilité limite d'attente nulle et la proportion limite de clients servis immédiatement valent $1-\rho = 1/3$. Pour $\gamma = 1$, $\mathbb{E}(D-X) > 0$: les attentes divergent et cette proportion tend vers zéro. Au seuil $\rho = 1$ il n'existe pas de loi stationnaire de probabilité pour cette file non dégénérée. Les graphes illustrent ces propriétés ; ils n'en constituent pas une preuve.

Les courbes d'erreurs quadratiques peuvent être obtenues par les sommes cumulées suivantes ; le premier terme, pour lequel la variance corrigée n'est pas définie, est omis.

```
k=2:N;
vW=(cumsum(w.^2)-cumsum(w).^2./(1:N));
vQ=(cumsum(q.^2)-cumsum(q).^2./(1:N));
figure; plot(k,vW(k)./(k.*(k-1)),k,vQ(k)./(k.*(k-1)));
legend('Erreur quadratique de theta','Erreur quadratique de eta');
for gamma=[0.2,1]
 [Q,~]=attente(100,gamma); figure; plot(1:100,Q);
 R=zeros(1000,50);
 for j=1:1000, [R(j,:),~]=attente(50,gamma); end
 figure; hold on
 for k=[5,40,50]
  x=sort(R(:,k)); stairs(x,(1:1000)/1000);
 end
 hold off; legend('Q5','Q40','Q50');
 [Q,~]=attente(10000,gamma);
 figure; plot(1:10000,cumsum(Q==0)./(1:10000));
end
```

Une exécution numérique indépendante avec 5000 trajectoires donne $\theta_{5000} = 7,587$, $\eta_{5000} = 7,597$ et l'intervalle asymptotique à 98% $[7,364; 7,811]$. Les erreurs quadratiques estimées valent respectivement $0,00926$ et $0,00754$. Ces résultats illustrent la réduction de variance et dépendent des tirages.

Exercice 10.3 — Simulation exponentielle et répartition empirique

L3 • énoncé, p. 75

Pour une fonction de répartition F, le quantile généralisé $F^{-1}(U) = \inf\{x \,:\, F(x) \geq U\}$ a répartition F. Pour le taux $a > 0$, on peut utiliser $-\log U/a$.

```
function x=simulexp(a,n)
x=-log(rand(1,n))/a;
end
function repempexp(a,n)
x=sort(simulexp(a,n));
stairs([0 x],[0 (1:n)/n]); hold on
z=linspace(0,max(x),500); plot(z,1-exp(-a*z)); hold off
end
```

Pour tout x, la loi forte appliquée aux indicatrices donne $F_n(x) \to F(x)$ p.s. ; le théorème de Glivenko–Cantelli donne même $\sup_x |F_n(x) - F(x)| \to 0$ p.s. Les graphes pour $a = 1$, par exemple $n = 5000$, approchent donc la courbe $1 - e^{-x}$ sur $x \geq 0$.

Exercice 10.4 — Sommes exponentielles : loi forte et TCL

L3 • énoncé, p. 75

Chaque ligne doit utiliser ses propres exponentielles indépendantes ; la somme cumulative doit se faire dans la direction des colonnes.

```
function T=simulsumexp(a,k,n)
T=cumsum(-log(rand(n,k))/a,2);
end
```

```
function graphsumexp(a,k,n)
T=simulsumexp(a,k,n); plot(1:k,(T./(1:k))');
end
function repempgamma(a,k,n)
T=simulsumexp(a,k,n); z=sort((a*T(:,k)-k)/sqrt(k));
stairs(z,(1:n)/n); hold on
u=linspace(min(z),max(z),500);
plot(u,0.5*(1+erf(u/sqrt(2)))); hold off
end
function repempgammaconv(a)
figure; hold on
for k=[3 40 60]
    T=simulsumexp(a,k,1000);
    z=sort((a*T(:,k)-k)/sqrt(k));
    stairs(z,(1:1000)/1000);
end
u=linspace(-4,5,500); plot(u,0.5*(1+erf(u/sqrt(2))))
legend('k=3','k=40','k=60','normale'); hold off
end
```

La loi forte donne $T_k/k \to 1/a$ p.s. Les aX_i ont moyenne et variance 1 : le TCL donne $(aT_k - k)/\sqrt{k} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$. La loi de cette quantité ne dépend pas de a. Les appels avec $k = 3, 40, 60$, $n = 1000$ comparent donc l'approche de la répartition normale ; les fluctuations restantes proviennent aussi de la taille finie de l'échantillon simulé.

Exercice 10.5 — Simulation d'un processus de Poisson

L3 • énoncé, p. 76

N_t compte les arrivées avant t. Les temps inter-arrivées sont iid exponentiels de taux a, et leur somme diverge p.s. ; il n'y a donc qu'un nombre fini de sauts sur chaque intervalle compact, presque sûrement.

```
function N=comptage(a,T)
t=0; times=0;
while true
 t=t-log(rand)/a;
 if t>T, break; end
 times(end+1)=t;
end
N=numel(times)-1;
stairs([times T],[0:N N]);
end
function z=comptagen(a,T,n)
z=zeros(1,n);
for j=1:n
 t=-log(rand)/a; k=0;
 while t<=T, k=k+1; t=t-log(rand)/a; end
 z(j)=k;
end
end
```

On a $\mathbb{P}(N_T = k) = \mathbb{P}(T_k \le T < T_{k+1}) = e^{-aT}(aT)^k/k!$, en intégrant la densité gamma de T_k contre la survie exponentielle restante (le cas $k = 0$ est direct). Ainsi $\alpha(a,T) = aT$, $\mathbb{E}N_T = \operatorname{Var} N_T = aT$; les trajectoires ont une pente moyenne proche de a sur de longs intervalles. Pour l'analyse empirique utiliser `mean(z)`, `var(z)` et les fréquences de chaque entier ; superposer $e^{-aT}(aT)^k/k!$. Chebyshev donne, avec $\ell = aT$, $\mathbb{P}(N_T \ge p_{\max}) \le \ell/(p_{\max} - \ell)^2$ dès que $p_{\max} > \ell$. On peut choisir $p_{\max} = \lceil \ell + \sqrt{10\ell} \rceil$ pour la borne 0,1.

Les départs successifs vérifient $D_k = \max(A_k, D_{k-1}) + S_k$, où A_k est l'arrivée du client k, $D_0 = 0$ et les S_k sont indépendantes exponentielles de taux b.

```
function filecaisse(a,b,T)
A=[]; t=-log(rand)/a;
while t<=T
 A(end+1)=t; t=t-log(rand)/a;
end
D=zeros(size(A)); dernier=0;
for k=1:numel(A)
 dernier=max(A(k),dernier)-log(rand)/b; D(k)=dernier;
end
D=D(D<=T);
[temps,ordre]=sort([A,D]);
variations=[ones(size(A)),-ones(size(D))];
nombre=cumsum(variations(ordre));
if isempty(nombre), fin=0; else, fin=nombre(end); end
stairs([0,temps,T],[0,nombre,fin]);
end
```

La chaîne de naissance et mort a des taux a et b ; les équations d'équilibre donnent $\pi_k = (1-a/b)(a/b)^k$ lorsque $a < b$. La file est alors stable ; sa moyenne stationnaire vaut $a/(b-a)$. Pour $a > b$, elle est surchargée et croît à long terme à vitesse $a-b$; pour $a = b$, elle est récurrente nulle. Les deux simulations proposées correspondent donc à une surcharge, puis à une file stable de moyenne stationnaire quatre.

La fonction suivante superpose les fréquences et les probabilités théoriques.

```
function [m,v]=mesempcomptage(a,T,n)
z=comptagen(a,T,n); m=mean(z); v=var(z);
ell=a*T; K=ceil(ell+sqrt(10*ell)); k=0:K;
f=arrayfun(@(j) mean(z==j),k);
if ell==0, p=[1 zeros(1,K)];
else, p=exp(-ell+k*log(ell)-gammaln(k+1)); end
bar(k,[f' p']);
end
```

Pour tracer trois trajectoires sur les mêmes axes, on utilise `hold on`, puis trois appels à `comptage(a,1000)`.

Exercice 10.6 — Consommation cumulée et Poisson composé

L3 • énoncé, p. 77

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Les clients arrivés avant t sont exactement les indices $1,\dots,N_t$, d'où $V_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$. Pour simuler un volume, utiliser $\mu + \sigma G$, G étant normale centrée réduite, de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

```
function v=station(a,mu,sigma,T)
t=0; times=0; vols=0; v=0;
while true
 t=t-log(rand)/a;
 if t>T, break; end
 v=v+mu+sigma*randn;
 times(end+1)=t; vols(end+1)=v;
end
stairs([times T],[vols v]);
end
function m=moystation(a,mu,sigma,T,n)
v=zeros(1,n);
for j=1:n, v(j)=station(a,mu,sigma,T); end
m=mean(v);
end
```

Conditionnellement à N_T, l'espérance vaut μN_T et la variance $\sigma^2 N_T$. D'où $\mathbb{E}V_T = aT\mu$ et $\operatorname{Var} V_T = aT(\sigma^2+\mu^2)$. La moyenne de n réplications converge p.s. vers $aT\mu$. Pour l'illustration on peut choisir $\mu = 40$, $\sigma = 5$, $a = 0{,}2$, $T = 50$, avec espérance 400. La loi normale autorise des volumes négatifs avec probabilité $\Phi(-\mu/\sigma)$: elle est ici une approximation de modèle, et non une loi strictement positive.

Exercice 10.7 — Convolution et moyennes de dés

L3 • énoncé, p. 77

On note $\mathcal{N}(0,1)$ la loi normale centrée réduite. Pour des variables entières indépendantes, $\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_i \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)$. La convolution des vecteurs de probabilités donne ces coefficients ; on conserve séparément l'origine des supports. Ici, le premier coefficient du vecteur p correspond à la valeur a.

```
function [val,prob]=loisomme(n,a,p)
prob=1;
for j=1:n, prob=conv(prob,p); end
val=n*a+(0:numel(prob)-1);
end
function graphloimoyenne(n,a,p)
[val,prob]=loisomme(n,a,p); val=val/n;
subplot(2,1,1); stem(val,prob);
subplot(2,1,2);
stairs([val(1)-1,val,val(end)+1],[0,cumsum(prob),1]);
end
% loideuxdes.m :
p=conv(ones(1,6)/6,ones(1,6)/6); stem(2:12,p);
% Puis, pour chacune des quatre moyennes :
for n=[3,10,50,100]
 figure; graphloimoyenne(n,1,ones(1,6)/6);
end
```

Chaque fonction est enregistrée dans le fichier portant son nom. Pour deux dés, la loi de la somme est $(1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1)/36$ sur $\{2,\dots,12\}$. La moyenne de n dés a pour espérance $7/2$ et pour variance $35/(12n)$. Elle converge presque sûrement vers $7/2$ par la loi forte. Le TCL donne $\sqrt{12n/35}(M_n - 7/2) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et décrit la forme des fluctuations. Les graphes montrent donc une concentration croissante autour de $7/2$.

Exercice 10.8 — Simuler une uniforme sur un intervalle

L3 • énoncé, p. 78

Si $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ et $a<b$, alors $a+(b-a)U \sim \mathcal{U}(a,b)$: sa fonction de répartition sur $[a,b]$ est $(x-a)/(b-a)$. En Matlab : `x=a+(b-a)*rand(1,n)` pour n réalisations indépendantes.

Exercice 10.9 — Nuages uniformes et covariances empiriques

L3 • énoncé, p. 78

Une matrice `P=rand(n,2)` donne n points uniformes indépendants du carré. On calcule et représente les quantités demandées par :

```
mean(sum(P.^2,2)<=1)
mean(P,1), cov(P)
scatter(P(:,1),P(:,2))
```

La loi forte appliquée aux indicatrices, coordonnées et produits donne respectivement les limites $\pi/4$, $(1/2,1/2)$ et $\frac{1}{12}I_2$. Pour $V=(X,(X+Y)/2)$, remplacer la deuxième colonne par la moyenne des deux colonnes initiales. Le centre est $(1/2,1/2)$ et la covariance

$$\begin{pmatrix} 1/12 & 1/24 \\ 1/24 & 1/24 \end{pmatrix}.$$

Pour $V=(X,(X-Y+1)/2)$, le centre et la matrice de covariance sont les mêmes : le signe négatif porte sur Y, indépendant de X, et ne change pas la covariance croisée $\operatorname{Cov}(X,(X-Y+1)/2) = 1/24$. Les formes des deux nuages sont également les mêmes en loi, puisque $1-Y$ est uniforme indépendante de X. Les valeurs finies fluctuent autour de ces limites.

Exercice 10.10 — Moments d'une mesure empirique

L3 • énoncé, p. 78

Pour des observations $x_i = X_i(\omega)$, $\overline{\mu}_n = n^{-1}\sum_i \delta_{x_i}$. Sa fonction de répartition vaut $F_n(t) = n^{-1}\sum_i \mathbf{1}_{\{x_i \le t\}}$, son espérance $\overline{x} = n^{-1}\sum_i x_i$, et sa variance $n^{-1}\sum_i (x_i - \overline{x})^2$. Le dénominateur est n, car on calcule la variance de cette mesure ; le facteur $n-1$ correspond à un autre objet, l'estimateur sans biais de la variance de la loi échantillonnée.

Exercice 10.11 — Simulation de dés et loi forte

L3 • énoncé, p. 79

$\lfloor kU \rfloor$ est uniforme sur $\{0, \dots, k-1\}$ car chaque valeur correspond à un intervalle de longueur $1/k$. Pour un dé :

```
x=1+floor(6*rand(1,n));
p=arrayfun(@(j) mean(x==j),1:6); bar(1:6,p);
% Moyennes successives :
n=5000; x=1+floor(6*rand(1,n));
plot(1:n,cumsum(x)./(1:n)); hold on
```

La loi forte donne la convergence des six fréquences vers $1/6$ et des moyennes successives vers $7/2$. Refaire les appels sans réinitialiser le générateur donne les réalisations distinctes demandées. Une taille 1000 réduit habituellement les fluctuations par rapport à 50, sans imposer de rapprochement monotone pour chaque réalisation.

Exercice 10.12 — Simulation de Poisson par inversion discrète

L3 • énoncé, p. 79

Les coefficients vérifient $p_0 = e^{-a}$, $p_j = (a/j)p_{j-1}$. Le vecteur Matlab commence à l'indice 1 : il faut stocker p_j en position $j+1$.

```
function p=dpoisson(a,n)
p=zeros(1,n+1); p(1)=exp(-a);
for j=1:n, p(j+1)=p(j)*a/j; end
end
function z=rpoisson(a,n)
z=zeros(1,n);
for i=1:n
 u=rand; p=exp(-a); q=p; k=0;
 while u>q, k=k+1; p=p*a/k; q=q+p; end
 z(i)=k;
end
end
```

L'algorithme s'arrête à k exactement lorsque $\sum_{j<k} p_j < U \le \sum_{j\le k} p_j$, événement de probabilité p_k. Il termine p.s. puisque les sommes cumulées tendent vers 1. Pour une loi générale, la récurrence par rapports suppose les p_j strictement positifs aux indices utilisés ; s'il existe des zéros, on emploie directement les probabilités cumulées. Comme $\operatorname{Var} X = a$, $N_a = \lceil a + \sqrt{20a} \rceil$ assure $\mathbb{P}(X > N_a) \le 0{,}05$. Tracer `bar(0:N,dpoisson(a,N))` ; pour superposer l'empirique utiliser les fréquences `mean(z==j)`. La loi forte explique leur convergence. Pour de très grands a, ce code élémentaire risque le sous-flux de e^{-a} ; les valeurs 1, 1,5, 5 demandées ne posent pas ce problème.

Exercice 10.13 — Amincissement d'une loi de Poisson

L3 • énoncé, p. 79

Simuler $Z \sim \mathcal{P}(a)$, puis $W \mid Z = z \sim \mathcal{B}(z, p)$:

```
z=rpoisson(a,n); w=zeros(1,n);
for j=1:n, w(j)=sum(rand(1,z(j))<p); end
m=[mean(z) mean(w)]; ecarts=[std(z) std(w)];
K=max(w); freq=arrayfun(@(j) mean(w==j),0:K);
bar(0:K,[freq' dpoisson(a*p,K)']);
```

La fonction génératrice donne $\mathbb{E}s^W = \mathbb{E}(1-p+ps)^Z = e^{ap(s-1)}$. Ainsi $W \sim \mathcal{P}(ap)$; les moyennes limites sont a, ap, les écarts-types limites $\sqrt{a}, \sqrt{ap}$. Les deux exemples donnent respectivement $\mathcal{P}(4)$ et $\mathcal{P}(5)$.

Exercice 10.14 — Tracer une fonction de répartition empirique

L3 • énoncé, p. 80

$F_n(t) = 0$ pour $t < X_{(1)}$, vaut $(i-1)/n$ sur un intervalle non vide $X_{(i-1)} < t < X_{(i)}$, et 1 pour $t \geq X_{(n)}$. Aux observations, inclure toutes les égalités : les ex æquo forment un seul saut de leur fréquence cumulée. Un tracé exact se construit en regroupant les valeurs :

```
[v,~,j]=unique(x(:)); counts=accumarray(j,1);
F=cumsum(counts)/numel(x);
stairs([v(1)-1;v;v(end)+1],[0;F;1]);
```

Exercice 10.15 — Maximum de trois uniformes : répartition et histogramme

L3 • énoncé, p. 80

1. Les trois uniformes sont indépendantes, donc $F_Y(x) = 0$ pour $x < 0$, $F_Y(x) = x^3$ pour $0 \leq x \leq 1$, et $F_Y(x) = 1$ pour $x > 1$. Une densité est $3x^2 \mathbf{1}_{\{x \in (0,1)\}}$.

2. Voici un programme Matlab ; chaque colonne fournit une réalisation indépendante.

```
n=input('Nombre de simulations : ');
Y=max(rand(3,n),[],1); Ys=sort(Y);
x=linspace(0,1,501);
stairs([0 Ys 1],[0 (1:n)/n 1]); hold on
plot(x,x.^3); hold off
legend('Repartition empirique','Repartition theorique');
```

3. Les courbes empiriques diffèrent d'une simulation à l'autre. Leur écart uniforme à F_Y tend presque sûrement vers zéro par le théorème de Glivenko–Cantelli. Un échantillon plus grand réduit généralement cet écart, sans garantir une amélioration à chaque nouveau tirage.

4. Pour des classes de largeur h, la hauteur de l'histogramme est l'effectif divisé par nh. Son intégrale vaut donc un. Voici le complément au programme précédent, avec $Y = \max(U_1, U_2, U_3)$.

```
m=10; edges=linspace(0,1,m+1); h=1/m;
counts=histcounts(Y,edges);
figure; stairs(edges,[counts counts(end)]/(numel(Y)*h));
hold on; x=linspace(0,1,501); plot(x,3*x.^2); hold off
legend('Histogramme','Densite theorique');
```

5. Avec $m = 10$ classes, on relance le programme pour $n = 100$ puis $n = 5000$. À partition fixée, chaque fréquence converge vers la probabilité de sa classe : l'histogramme tend vers la moyenne de la densité sur cette classe. Il ne tend donc pas exactement vers la densité tant que la largeur reste fixée.

6. Le nombre de classes se règle avec la variable `m`. Des classes trop fines rendent l'histogramme très irrégulier ; des classes trop larges masquent la forme de la densité. Avec davantage d'observations, on peut augmenter ce nombre.

7. Une règle simple est $m = \lceil n^{1/3} \rceil$; elle réalise $h \to 0$ et $nh \to \infty$. Pour $n = 100$ et 5000, elle donne respectivement 5 et 18 classes. Il s'agit d'un choix pratique, non d'un optimum universel.

Exercice 10.16 — Normalisation d'un histogramme

L3 • énoncé, p. 81

Pour une partition en classes I_k de longueurs $h_k > 0$, l'histogramme en densité est $\overline{f}_n(x) = \sum_k (N_k/(nh_k)) \mathbf{1}_{\{x \in I_k\}}$, où $N_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \in I_k\}}$. Si les classes couvrent toutes les observations, son intégrale vaut $\sum_k N_k/n = 1$. Pour chaque classe fixée, $\int_{I_k} \overline{f}_n = N_k/n \to \mu(I_k)$ p.s. par la loi forte. Un histogramme de fréquences sans division par la largeur des classes ne représente donc pas une densité. Si l'on n'affiche qu'une fenêtre, son aire vaut la proportion d'observations dans cette fenêtre.

Lorsque μ admet une densité, pour des classes de largeur fixée, la hauteur converge vers la moyenne $\mu(I_k)/h_k$ de la densité dans la classe, et non nécessairement vers sa valeur en chaque point. Pour retrouver la densité en un point où elle est continue, on fait tendre la largeur h_n vers zéro. Le biais tend alors vers zéro, et la variance est d'ordre $1/(nh_n)$; la condition $nh_n \to \infty$ donne la consistance, comme dans l'exercice 5.2.

Exercice 10.17 — Simulation de la loi de Laplace

L3 • énoncé, p. 81

La fonction de répartition est $F_a(x) = \frac{1}{2}e^{ax}$ si $x \le 0$, et $F_a(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-ax}$ si $x \ge 0$. Son inverse vaut $a^{-1}\log(2u)$ pour $u \le 1/2$, et $-a^{-1}\log(2(1-u))$ sinon. Si X est exponentielle de taux a et si ε est un signe uniforme indépendant, alors, pour toute fonction borélienne positive h,

$$\mathbb{E}[h(\varepsilon X)] = \frac{1}{2}\int_0^\infty \big(h(x) + h(-x)\big)ae^{-ax}\,dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)g_a(x)\,dx.$$

On obtient donc les trois fonctions suivantes, chacune dans le fichier portant son nom.

```
function X=rexpo(n,a)
X=-log(1-rand(1,n))/a;
end
function E=rRademacher(n)
E=2*(rand(1,n)<0.5)-1;
end
function Z=rlaplace(n,a)
Z=rRademacher(n).*rexpo(n,a);
end
```

On suppose $a > 0$ et n entier positif. Pour le programme de représentation :

```
Z=rlaplace(n,1); z=sort(Z); x=linspace(-8,8,1001);
F=0.5*exp(-abs(x)); F(x>0)=1-F(x>0);
figure; stairs(z,(1:n)/n); hold on; plot(x,F); hold off
W=rand(1,n).*exp(-abs(Z))/2;
figure; plot(x,exp(-abs(x))/2); hold on
plot(Z,W,'.'); hold off
```

Conditionnellement à $Z = z$, W est uniforme sur $(0, g_1(z))$. La densité jointe vaut donc $g_1(z)/g_1(z) = 1$ sur D_{g_1}, qui a aire un. Les points sont indépendants si tous les tirages utilisés le sont. La fonction de répartition empirique converge uniformément vers F_1 presque sûrement.

Exercice 10.18 — Simulation gaussienne par rejet

L3 • énoncé, p. 81

Le rapport des densités vaut

$$\frac{f(x)}{g_1(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(-x^2/2 + |x|) = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}\exp[-(|x|-1)^2/2].$$

La constante optimale est donc $c = \sqrt{2e/\pi} \simeq 1{,}31549$. Il faut dilater verticalement un point uniforme sous g_1 pour obtenir un point uniforme sous cg_1, puis le garder s'il est sous f.

```
function [z,w,K]=rdomain()
  c=sqrt(2*exp(1)/pi); K=0;
  while true
    K=K+1; z=rlaplace(1,1);
    w=c*exp(-abs(z))*rand()/2;
    if w<=exp(-z*z/2)/sqrt(2*pi), return; end
  end
end
```

La probabilité d'acceptation vaut le rapport des aires $1/c$. Le nombre K d'essais est géométrique sur $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{E}K = c$. Le point accepté est uniforme sous f, donc son abscisse suit $\mathcal{N}(0,1)$.

```
x=linspace(-5,5,1001); c=sqrt(2*exp(1)/pi);
f=exp(-x.^2/2)/sqrt(2*pi); g=exp(-abs(x))/2;
Z=zeros(1,n); W=Z; K=Z;
for j=1:n, [Z(j),W(j),K(j)]=rdomain(); end
figure; plot(x,f,x,c*g); hold on; plot(Z,W,'.'); hold off
figure; stairs(sort(Z),(1:n)/n); hold on
plot(x,0.5*erfc(-x/sqrt(2))); hold off
disp(mean(K));
```

La courbe de comparaison est $\Phi(x) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(-x/\sqrt{2})$; la moyenne des nombres d'essais tend vers c. Pour simuler seulement l'abscisse, proposer $Z \sim \text{Laplace}(1)$ et $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ indépendants, puis accepter si $U \leq \exp[-(|Z|-1)^2/2]$. Répéter avec de nouveaux tirages en cas de rejet.

Exercice 10.19 — Simuler une marche simple

L3 • énoncé, p. 82

On considère ici $S_0 = 0$ et des incréments indépendants équitables ± 1.

```
function S=simulmarch(n,N)
S=[zeros(1,N);cumsum(2*(rand(n,N)<0.5)-1,1)];
end
S=simulmarch(500,30); plot(0:500,S);
```

On a $\mathbb{E}S_n = 0$ et $\operatorname{Var} S_n = n$: la dispersion typique est de l'ordre de $\sqrt{n}$. Les trajectoires sont irrégulières et ne se stabilisent pas, bien que $S_n/n \to 0$ p.s. par la loi forte.

Exercice 10.20 — TCL pour une marche simulée

L3 • énoncé, p. 82

On note $\mathcal{N}(0,1)$ la loi normale centrée réduite. Avec la fonction de l'exercice 10.19, utiliser successivement $n = 10, 100, 200$, $N = 1000$, puis trier la dernière ligne divisée par $\sqrt{n}$ et tracer sa répartition empirique. Le TCL donne $S_n/\sqrt{n} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$; sa variance vaut déjà 1. Pour l'histogramme final, employer une normalisation en densité. À taille finie la loi reste sur le réseau de pas $2/\sqrt{n}$: la courbe empirique en conserve les sauts, auxquels s'ajoutent les fluctuations de simulation.

Exercice 10.21 — Maximum et temps d'occupation d'une marche

L3 • énoncé, p. 82

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. T_n est la proportion des instants $1, \dots, n$ auxquels la marche est strictement positive.

```
S=simulmarch(n,N); M=cummax(S,1);
T=cumsum(S(2:end,:)>0,1)./(1:n)';
plot(1:n,M(2:end,:)./sqrt((1:n)'));
figure; plot(1:n,T);
```

Le principe de réflexion et le TCL donnent $M_n/\sqrt{n} \Rightarrow |G|$, $G \sim \mathcal{N}(0,1)$, de répartition $2\Phi(x) - 1$ pour $x \geq 0$. Le temps d'occupation converge *en loi* vers la loi de l'arcsinus, de densité $[\pi\sqrt{t(1-t)}]^{-1}$ sur $(0,1)$ et de répartition $(2/\pi)\arcsin\sqrt{t}$. Cette seconde conclusion utilise la loi de l'arcsinus (ou le principe d'invariance et le temps d'occupation brownien) ; les seules simulations ne la prouvent pas. La loi est concentrée près des extrémités : T_n ne tend pas en probabilité vers $1/2$. Pour comparer les lois, utiliser les dernières lignes de $M/\sqrt{n}$ et de T sur de nombreuses trajectoires indépendantes, plutôt qu'une seule trajectoire.

Exercice 10.22 — Sondage sans remise et intervalles garantis

L3 • énoncé, p. 82

Coder la population par N_A valeurs 1, N_B valeurs -1 et $N - N_A - N_B$ zéros. Un sous-ensemble uniforme est obtenu par `randperm(N,n)`.

```
function [SA,SB,IA,IB]=sondage(N,NA,NB,n,alpha)
if nargin<5, alpha=0.9; end
```

```
pop=[ones(1,NA),-ones(1,NB),zeros(1,N-NA-NB)];
x=pop(randperm(N,n)); SA=sum(x==1); SB=sum(x==-1);
h=sqrt((N-n)/(4*n*(N-1)*(1-alpha)));
IA=[max(0,SA/n-h),min(1,SA/n+h)];
IB=[max(0,SB/n-h),min(1,SB/n+h)];
end
```

Les proportions sont sans biais et

$$\mathrm{Var}(S_A/n) = \frac{p_A(1-p_A)}{n}\frac{N-n}{N-1} \le \frac{N-n}{4n(N-1)}.$$

Chebyshev donne l'intervalle $[S_A/n - h, S_A/n + h] \cap [0,1]$, où $h = \sqrt{(N-n)/(4n(N-1)(1-\alpha))}$, de couverture au moins α ; idem pour B. Ces couvertures sont marginales, pas une couverture simultanée à α pour les deux paramètres. Pour $N = 10000$, $n = 100$, $p_A = 0{,}418$, $p_B = 0{,}462$, les variances théoriques sont $p_A(1-p_A)99/9999$ et $p_B(1-p_B)99/9999$. Les moyennes/variances empiriques des 5000 réplications doivent être comparées à ces valeurs. On applique la règle de tirage à pile ou face en cas d'égalité. Pour chaque sondage, enregistrer l'indicatrice I_j d'une déclaration erronée. Sur $m = 5000$ réplications indépendantes, Hoeffding donne l'intervalle $[\bar I - h_m, \bar I + h_m] \cap [0,1]$, $h_m = \sqrt{\log 20/(2m)} \simeq 0{,}01731$, de couverture au moins 90 %. Le rôle des votes blancs dépend de ce qui est maintenu fixe. Si $D = S_A - S_B$, $\mathbb{E}(D/n) = p_A - p_B$ et

$$\mathrm{Var}(D/n) = \frac{N-n}{n(N-1)}\big[p_A + p_B - (p_A - p_B)^2\big].$$

À écart absolu fixé, augmenter les blancs diminue cette variance ; à rapport des votes exprimés fixé, cela diminue aussi le signal $p_B - p_A$. Les exemples proposés mélangent ces effets : on ne peut attribuer toute variation du risque au seul taux de blancs. Le code précédent, répété pour chaque paire (N_A, N_B), fournit la comparaison avec les mêmes intervalles garantis.

Voici les appels pour les cinq sondages, puis pour les comparaisons sur 5000 réplications. Les intervalles affichés pour le risque d'erreur utilisent la borne de Hoeffding précédente.

```
N=10000; n=100;
figure; hold on
for k=1:5
 [a,b,IA,IB]=sondage(N,4180,4620,n,0.9);
 disp(100*[a,b,n-a-b]/n);
 plot(IA,[k,k],'b-',IB,[k+.15,k+.15],'r-');
end
hold off
cas=[4180 4620;4370 4830;2780 3220;3960 4840;4140 5060];
m=5000; h=sqrt(log(20)/(2*m));
for c=1:size(cas,1)
 A=zeros(m,1); B=A; I=A;
 for k=1:m
  [A(k),B(k)]=sondage(N,cas(c,1),cas(c,2),n);
  I(k)=(A(k)>B(k)) || ((A(k)==B(k)) && (rand<0.5));
 end
 r=mean(I); disp([cas(c,:),r,max(0,r-h),min(1,r+h)]);
 disp([mean(A/n),var(A/n),mean(B/n),var(B/n)]);
 figure; v=0:n;
 bar(v/n,[arrayfun(@(j) mean(A==j),v)',...
          arrayfun(@(j) mean(B==j),v)']);
end
```

On peut aussi calculer le risque sans simulation : S_A est hypergéométrique, et, sachant $S_A = a$, S_B suit la loi hypergéométrique de paramètres $(N - N_A, N_B, n - a)$. On somme les probabilités des couples avec $a > b$, en

comptant pour moitié celles des couples avec $a = b$. Les risques obtenus, dans l'ordre des cinq situations ci-dessus, sont environ 0,31862, 0,31483, 0,28400, 0,17238 et 0,16698. Ils fournissent les valeurs de comparaison pour les simulations.

Exercice 10.23 — Simulation par inversion

L3 • énoncé, p. 83

Pour $0 < u < 1$, l'ensemble $\{x \,:\, F(x) \geq u\}$ est un intervalle fermé à gauche, par croissance et continuité à droite de F, non vide et minoré. Ainsi $F^{-1}(u) \leq t$ équivaut à $u \leq F(t)$. Donc $\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq t) = F(t)$. Pour l'exponentielle, $F^{-1}(u) = -\log(1-u)/\lambda$. Pour la loi discrète, en posant $q_0 = 0$ et $q_i = \sum_{j \leq i} p_j$, on a $F^{-1}(u) = e_i$ lorsque $q_{i-1} < u \leq q_i$. L'algorithme retourne donc e_i avec probabilité p_i. En comptant aussi la dernière comparaison, le coût moyen est $\sum_{i=1}^{n} i p_i$. Un échange de deux probabilités montre que ce coût est minimal lorsque $p_1 \geq \cdots \geq p_n$: si $i < j$ et $p_i < p_j$, leur échange diminue le coût de $(j-i)(p_j - p_i)$.

Exercice 10.24 — Simulation d'une loi de Poisson par produits

M1 • énoncé, p. 84

Les variables $E_i = -\log X_i$ sont exponentielles de taux 1, indépendantes. La convolution donne à leur somme S_n la densité $e^{-s}s^{n-1}/(n-1)!$. Pour $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(S_k < \lambda \leq S_{k+1}) = \int_0^\lambda \frac{e^{-s}s^{k-1}}{(k-1)!} e^{-(\lambda - s)} ds = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Pour $k = 0$, la probabilité est $\mathbb{P}(E_1 \geq \lambda) = e^{-\lambda}$. On multiplie donc des uniformes indépendantes jusqu'à passer sous $e^{-\lambda}$, puis retourne le nombre de facteurs moins un. Pour éviter le sous-flux numérique, on peut additionner leurs opposés logarithmes jusqu'à dépasser λ.

Exercice 10.25 — Simulation d'un temps géométrique

L3 • énoncé, p. 84

$\mathbb{P}(Y = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k \geq 1$. On peut répéter les Bernoulli jusqu'au premier succès, ou inverser la répartition :

```
y=1+floor(log(rand(1,n))/log(1-p));
K=ceil(log(0.01)/log(1-p));
k=1:K; bar(k,p*(1-p).^(k-1));
```

Ce choix assure $\mathbb{P}(Y > K) = (1-p)^K \leq 0{,}01$. La formule d'inversion ignore seulement les égalités à des seuils, événements de probabilité nulle dans le modèle uniforme continu.

Exercice 10.26 — Inversion sur un intervalle borné

L3 • énoncé, p. 84

L'intégrale de $(1+x)^{-2}$ sur $[1,2]$ vaut $1/6$, donc $a = 6$. Pour $1 \leq x \leq 2$, $F(x) = 3 - 6/(1+x)$; $F = 0$ à gauche et 1 à droite. Le quantile est $F^{-1}(u) = 6/(3-u) - 1$. Le code est donc :

```
function x=simulinversion(n)
x=6./(3-rand(1,n))-1;
end
x=sort(simulinversion(1000)); stairs(x,(1:1000)/1000);
hold on; t=linspace(1,2,500); plot(t,3-6./(1+t));
```

La convergence uniforme de la répartition empirique suit de Glivenko–Cantelli.

Exercice 10.27 — Loi binomiale négative et limite de Poisson

L3 • énoncé, p. 84

On suppose $m \geq 1$ et $0 < p \leq 1$ (pour $p = 0$, le temps est infini). Le nombre total est la somme de m temps géométriques indépendants. Un algorithme direct est :

```
function X=nbrepoissons(m,p)
X=0; succes=0;
while succes<m
```

```
 X=X+1; succes=succes+(rand<p);
end
end
```

L'événement $X = k$ exige $m-1$ truites parmi les $k-1$ premiers poissons et une truite au dernier, donc $\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}$, $k \geq m$. $\mathbb{E}X = m/p$, $\operatorname{Var} X = m(1-p)/p^2$. Pour $m = 10, p = 1/3$, moyenne 30 et variance 60. Le nombre d'échecs $Y = X - m$ a loi binomiale négative : $\mathbb{P}(Y=j) = \binom{j+m-1}{m-1} p^m (1-p)^j$. Sa fonction génératrice est $[p/(1-(1-p)s)]^m$. Avec $p_m = m/(m+\lambda)$, elle vaut $[1+(\lambda/m)(1-s)]^{-m} \to e^{\lambda(s-1)}$, d'où $Y \Rightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Pour les graphes, répéter la fonction indépendamment 1000 fois, calculer les fréquences pour $X = 10, \dots, 65$ et $Y = 0, \dots, 16$, et superposer les probabilités théoriques. Pour $m = 30, \lambda = 5$, la variance de Y vaut $5 + 25/30$, proche mais non égale à la variance 5 de la limite.

Exercice 10.28 — Acceptation entre deux lois triangulaires

L3 • énoncé, p. 85

Les essais sont indépendants, donc $T \sim \mathscr{G}(\alpha)$ sur $\mathbb{N}^*$. Avec U, V uniformes indépendantes, $X = 1 - \sqrt{1-U}$ et $Y = \sqrt{V}$ ont les lois voulues. Répéter ces deux tirages jusqu'à $Y \leq X$, puis retourner X. On a $F_Y(x) = x^2$ sur $[0,1]$, donc $\alpha = \int_0^1 2(1-x)x^2 dx = 1/6$. Pour tout borélien A, la somme sur le premier succès donne $\mathbb{P}(Z \in A) = \mathbb{P}(X_1 \in A, Y_1 \leq X_1)/\alpha$. La densité est donc $12x^2(1-x)\mathbf{1}_{\{x\in[0,1]\}}$, une loi bêta de paramètres 3, 2.

Exercice 10.29 — Simuler plusieurs lois avec une seule uniforme

M1 • énoncé, p. 85

La variable $-\log U$ est exponentielle de taux 1 (sa valeur en $U = 0$, événement négligeable, est arbitraire). Les indicatrices $B_i = \mathbf{1}_{\{U \leq p_i\}}$ ont les lois requises et satisfont $B_1 \leq B_2$; elles ne sont pas indépendantes si $0 < p_1 < p_2 < 1$. Pour obtenir l'indépendance, partager $[0,1]$ en quatre intervalles consécutifs de longueurs $p_1 p_2$, $p_1(1-p_2)$, $(1-p_1)p_2$, $(1-p_1)(1-p_2)$; attribuer respectivement à (B_1, B_2) les valeurs $(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)$. La table jointe est alors le produit des marginales.

Exercice 10.30 — Barrage hydroélectrique et simulation

L3 • énoncé, p. 85

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0,1)$. Une lognormale se simule par $e^{m+\sigma G}$, G normale standard. La demande excédentaire vaut $W = (Y-C)^+$.

```
function x=rlognorm(n,m,sigma)
x=exp(m+sigma*randn(1,n));
end
W=max(rlognorm(5000,0.1,1)-10,0);
IC95=mean(W)+[-1,1]*1.959964*std(W)/sqrt(5000);
function [Z,Y]=niveau(n,Z0,C,mX,sX,mY,sY)
X=rlognorm(n,mX,sX); Y=rlognorm(n,mY,sY);
Z=zeros(1,n); Z(1)=Z0;
for j=1:n-1, Z(j+1)=min(C,max(Z(j)-Y(j),0)+X(j)); end
end
```

La récurrence est $Z_{n+1} = \min(C, (Z_n - Y_{n+1})^+ + X_{n+1})$: la demande ne peut utiliser que le stock du matin. Pour un contrôle analytique, si $Y \sim \mathscr{LN}(m, \sigma^2)$,

$$\mathbb{E}(Y-C)^+ = e^{m+\sigma^2/2}\Phi\left(\frac{m+\sigma^2-\log C}{\sigma}\right) - C\Phi\left(\frac{m-\log C}{\sigma}\right).$$

Les compteurs sont $T_n = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_j > Z_{j-1}\}}$ et $Q_n = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{Z_{j-1}=C\}}$. Sur les vecteurs retournés, utiliser `cumsum(Y>Z)./(1:n)` et `cumsum(Z==C)./(1:n)`. Répéter trois fois pour les courbes demandées. Pour les 4000 réplications, appeler `niveau(101,...)` et conserver les colonnes $3, 6, 51, 101$ pour $Z_2, Z_5, Z_{50}, Z_{100}$. Le centième jour commence au stock Z_{99} : les événements de la question sont $Z_{99} = C$ et $Y_{100} > Z_{99}$, et non ceux du jour suivant. Pour une proportion $\hat{p}$ calculée sur $M = 4000$ trajectoires indépendantes, Hoeffding assure une couverture *au moins* 95 % à $[\hat{p}-h, \hat{p}+h] \cap [0,1]$, $h = \sqrt{\log 40/(2M)} \simeq 0{,}02148$. Pour $\mathbb{E}T_{100}$, utiliser l'intervalle

$[\overline{T} - 100h, \overline{T} + 100h] \cap [0, 100]$, puisque $0 \leq T_{100} \leq 100$. Ces garanties sont distinctes de l'intervalle asymptotique sur $\mathbb{E}W$. Dès le premier pas, la loi de Z_n possède une composante continue sur $(0, C)$ et un atome en C : elle n'est ni purement discrète ni absolument continue. Les arrivées $X_n \geq C$ forcent $Z_n = C$, quel que soit le passé, avec probabilité fixe strictement positive. En couplant deux trajectoires avec les mêmes entrées, elles coïncident dès la première telle arrivée. Cela donne une loi stationnaire unique, l'oubli de Z_0 et la convergence des fréquences empiriques par régénération. Changer Z_0 de 5 à 8 ne change donc pas les limites, mais le transitoire. Changer σ_Y modifie la loi des demandes et donc ces limites : une comparaison quantitative exige les simulations, car il n'y a pas ici d'ordre stochastique simple en σ_Y.

Pour effectuer les réplications et les tracés, on peut compléter les fonctions précédentes par le programme suivant. Les trois configurations demandées sont traitées successivement.

```
for config=[5 8 5;1 1 0.6]
 Z0=config(1); sY=config(2); n=10000;
 figure; hold on
 for j=1:3
  [Z,Y]=niveau(n,Z0,10,0.1,0.8,0.1,sY);
  subplot(2,1,1); hold on; plot((1:n),cumsum(Y>Z)./(1:n));
  subplot(2,1,2); hold on; plot((1:n),cumsum(Z==10)./(1:n));
 end
 M=4000; stocks=zeros(M,101); demandes=stocks;
 for j=1:M
  [stocks(j,:),demandes(j,:)]=niveau(101,Z0,10,0.1,0.8,0.1,sY);
 end
 figure; hold on
 for k=[3,6,51,101]
  x=sort(stocks(:,k)); stairs(x,(1:M)/M);
 end
 hold off; legend('Z2','Z5','Z50','Z100');
 h=sqrt(log(40)/(2*M));
 pPlein=mean(stocks(:,100)==10);
 pDefaut=mean(demandes(:,100)>stocks(:,100));
 T=sum(demandes(:,1:100)>stocks(:,1:100),2);
 ICplein=[max(0,pPlein-h),min(1,pPlein+h)];
 ICdefaut=[max(0,pDefaut-h),min(1,pDefaut+h)];
 ICjours=[max(0,mean(T)-100*h),min(100,mean(T)+100*h)];
 disp(ICplein); disp(ICdefaut); disp(ICjours);
end
```

À titre d'illustration, une exécution numérique indépendante donne, pour la demande excédentaire, $\overline{W} = 0,072$ et l'intervalle asymptotique $[0,047; 0,098]$. Pour les 4000 trajectoires, on obtient les estimations suivantes ; leur précision se lit avec les rayons h et $100h$ calculés ci-dessus.

Z_0	σ_Y	$\hat{p}_{\text{plein}}$	$\hat{p}_{\text{défaut}}$	$\overline{T}_{100}$
5	1,0	0,090	0,192	18,63
8	1,0	0,081	0,189	18,04
5	0,6	0,178	0,048	4,91

Ces valeurs sont des résultats de simulation, qui changent avec les tirages. Elles illustrent l'oubli du stock initial et l'effet de la loi des demandes ; elles ne remplacent pas les arguments de convergence.

Exercice 10.31 — Simulations discrètes en tableaux

L3 • énoncé, p. 86

Les tirages de Bernoulli sont des comparaisons d'uniformes au paramètre p ; une binomiale est une somme de N Bernoulli indépendantes. La loi géométrique est le rang du premier succès ; l'inversion fournit aussi une version vectorisée.

```
function d=dimensions(varargin)
if nargin==0, d=[1 1];
elseif nargin==1, d=[1 varargin{1}];
else, d=[varargin{1} varargin{2}]; end
end
function X=bern(p,varargin)
d=dimensions(varargin{:}); X=rand(d)<p;
end
function X=bino(N,p,varargin)
d=dimensions(varargin{:}); X=zeros(d);
for j=1:N, X=X+(rand(d)<p); end
end
function X=geom(p,varargin)
d=dimensions(varargin{:}); X=ones(d); actifs=true(d);
while any(actifs(:))
 echec=(rand(d)>=p)&actifs;
 X=X+echec; actifs=echec;
end
end
function X=poiss(lambda,varargin)
d=dimensions(varargin{:}); X=zeros(d);
for j=1:numel(X)
 u=rand; k=0; p=exp(-lambda); q=p;
 while u>q, k=k+1; p=p*lambda/k; q=q+p; end
 X(j)=k;
end
end
```

Chaque fonction est à enregistrer dans le fichier portant son nom. On suppose $0 < p \leq 1$ pour la géométrique, $0 \leq p \leq 1$ pour Bernoulli et binomiale, $N \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 0$; les dimensions sont des entiers positifs. Le code Poisson élémentaire est destiné aux paramètres modérés de ces TP.

Exercice 10.32 — Lois discrètes et représentations empiriques

L3 • énoncé, p. 87

Les masses se représentent par un diagramme en bâtons et les masses cumulées par une fonction en escalier. Pour $\mathscr{B}(N,p)$, utiliser $\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}$, $0 \leq k \leq N$, en traitant $p = 0,1$ par une masse ponctuelle. Pour la géométrique, les masses sont $p(1-p)^{k-1}$; choisir $K = \lceil \log\varepsilon / \log(1-p) \rceil$ assure une queue au plus ε (si $p = 1$, $K = 1$). Pour Poisson, sommer les masses par récurrence jusqu'à ce que la somme atteigne $1-\varepsilon$; une borne préalable est $K = \lceil \lambda + \sqrt{\lambda/\varepsilon} \rceil$ par Chebyshev. Pour comparer les lois binomiale et Poisson, prendre $N \geq \lambda$ et le même support ; la convergence des masses est celle de la limite des événements rares. Pour un échantillon x, les masses empiriques sont

```
arrayfun(@(v) mean(x==v),support)
```

Les fonctions `loibino`, `loigeo`, `loipoiss` appellent les simulateurs puis `stem` ; les versions `rep...` appellent `stairs` sur les fréquences cumulées. L'utilisation des valeurs distinctes triées traite exactement les ex æquo. La loi forte justifie la convergence de chaque fréquence empirique.

Voici une réalisation commune aux trois lois. Pour la binomiale, $a = N$ et $b = p$; pour la géométrique, $a = p$; pour Poisson, $a = \lambda$. On prend $0 < \texttt{tol} < 1$. Les simulations appellent les fonctions de l'exercice 10.31 ; le calcul de Poisson ci-dessous convient aux paramètres modérés des TP.

```
function [v,w]=masses(type,a,b,tol)
switch type
 case 'bino'
```

```
  v=0:a;
  if b==0, w=[1 zeros(1,a)];
  elseif b==1, w=[zeros(1,a) 1];
  else
   w=exp(gammaln(a+1)-gammaln(v+1)-gammaln(a-v+1)...
       +v*log(b)+(a-v)*log1p(-b));
  end
 case 'geo'
  if a==1, v=1; w=1;
  else
   K=ceil(log(tol)/log1p(-a));
   v=1:K; w=a*(1-a).^(v-1);
  end
 case 'poiss'
  v=0; w=exp(-a); total=w;
  while total<1-tol
   k=v(end)+1; v(end+1)=k;
   w(end+1)=w(end)*a/k; total=total+w(end);
  end
 otherwise, error('Loi inconnue');
end
end
function [x,v,w]=loietrep(type,a,b,n,tol)
[v,w]=masses(type,a,b,tol);
subplot(2,2,1); stem(v,w);
subplot(2,2,2); stairs([v(1)-1 v],[0 cumsum(w)]);
switch type
 case 'bino', x=bino(a,b,n);
 case 'geo', x=geom(a,n);
 case 'poiss', x=poiss(a,n);
end
[u,~,j]=unique(x(:)); f=accumarray(j,1)/n;
subplot(2,2,3); stem(u,f);
subplot(2,2,4); stairs([u(1)-1;u],[0;cumsum(f)]);
end
```

Les deux graphes du haut représentent la loi théorique sur la fenêtre choisie ; ceux du bas représentent l'échantillon. Les masses théoriques tronquées ne sont pas renormalisées : la dernière valeur de leur répartition peut être légèrement inférieure à un. Pour la comparaison binomiale–Poisson, on utilise le même axe des abscisses et $p = \lambda/N$.

Exercice 10.33 — Illustrer loi forte et théorème central limite

L3 • énoncé, p. 87

Pour un vecteur ligne x, les moyennes successives sont `cumsum(x)./(1:numel(x))`. Si $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, elles convergent p.s. vers $m = \mathbb{E}X_1$. Pour M réplications indépendantes, générer un tableau $n \times M$ et calculer `s=mean(X,1)-m`. Tracer la répartition empirique de s, puis celle de `sqrt(n)*s`. Si $\operatorname{Var} X_1 = \sigma^2 \in (0,\infty)$, les limites sont respectivement la masse en zéro et la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, centrée et de variance σ^2. La répartition normale s'écrit $\frac{1}{2}[1+\operatorname{erf}(t/(\sigma\sqrt{2}))]$, ce qui évite d'exiger une boîte à outils statistique. Pour $\sigma = 0$, les deux variables centrées sont nulles.

Exercice 10.34 — Répartition et histogramme de lois continues

L3 • énoncé, p. 87

On simule une normale par transformation affine d'une normale standard, et une exponentielle par inversion de sa fonction de répartition. Les observations triées donnent la répartition empirique en escalier ; l'histogramme en

densité doit avoir une aire totale 1, et ses hauteurs sont les fréquences divisées par les largeurs de classes. La commande

```
histogram(x,'Normalization','pdf')
```

réalise cette normalisation. Il faut distinguer effectifs, fréquences et densité, et choisir les bornes de classes explicitement. Leurs graphes se comparent aux densités et répartitions théoriques, avec les fluctuations d'échantillonnage attendues.

La fonction suivante réalise les deux tracés et superpose les fonctions théoriques. On suppose $n \geq 1$, $\sigma > 0$ et $\lambda > 0$.

```
function x=continu(type,n,mu,sigma,lambda)
switch type
 case 'normale'
  x=mu+sigma*randn(1,n);
  F=@(t) (1+erf((t-mu)/(sigma*sqrt(2))))/2;
  f=@(t) exp(-((t-mu)/sigma).^2/2)/(sigma*sqrt(2*pi));
 case 'exponentielle'
  x=-log(1-rand(1,n))/lambda;
  F=@(t) (1-exp(-lambda*max(t,0))).*(t>=0);
  f=@(t) lambda*exp(-lambda*max(t,0)).*(t>=0);
 otherwise, error('Loi inconnue');
end
[v,~,j]=unique(x(:)); c=cumsum(accumarray(j,1))/n;
pad=max(1,max(x)-min(x))/10;
t=linspace(min(x)-pad,max(x)+pad,1000);
subplot(1,2,1);
stairs([t(1);v;t(end)],[0;c;1]); hold on
plot(t,F(t)); hold off
subplot(1,2,2);
histogram(x,'Normalization','pdf'); hold on
plot(t,f(t)); hold off
end
```

Exercice 10.35 — Rejet dans un disque et pour une loi bêta

L3 • énoncé, p. 87

Tirer (X,Y) uniforme dans $[-1,1]^2$ et accepter si $X^2+Y^2 \leq 1$. Le taux d'acceptation vaut $\pi/4$ et la loi acceptée est uniforme sur le disque. La densité bêta est bornée exactement si $a \geq 1$ et $b \geq 1$; sinon elle diverge à au moins une extrémité. L'aire sous une densité vaut 1 et la longueur de la section verticale vaut $f(x)$: la première coordonnée a donc densité f. Pour $a,b>1$, le maximum est atteint en $x_0 = (a-1)/(a+b-2)$; poser $M = f(x_0)$. Tirer U,V uniformes indépendantes et accepter U si $MV \leq f(U)$. La probabilité d'acceptation vaut $1/M$.

```
function x=rbeta_rejet(a,b,n)
f=@(u) u.^(a-1).*(1-u).^(b-1)/beta(a,b);
M=f((a-1)/(a+b-2)); x=zeros(1,n); k=0;
while k<n
 u=rand;
 if M*rand<=f(u), k=k+1; x(k)=u; end
end
end
```

Exercice 10.36 — Simulation du trajet d'un bus

L3 • énoncé, p. 87

Le nombre de passagers présents à l'arrivée en A est le paramètre b_0. À l'arrêt $j \in \{A,B\}$, pour une charge entrante b, tirer $D_j \sim \mathcal{B}(b,0{,}3)$ et $A_j \sim \mathcal{P}(20)$ indépendants. Faire monter $M_j = \min(A_j, 40-b+D_j)$; la nouvelle

charge est $b - D_j + M_j$, le nombre refusé $A_j - M_j$. Les variables U_A, U_B sont indépendantes de loi bêta B(2, 1,1), indépendantes des autres tirages. Alors

$$D = 0{,}1 \max(D_A, M_A) + 10 + 10U_A + 0{,}1 \max(D_B, M_B) + 10 + 10U_B.$$

L'arrêt en C n'est pas compté puisque l'on s'arrête à l'arrivée en C. Le nombre refusé pendant ce parcours est $R = (A_A - M_A) + (A_B - M_B)$.

```
function [d,r]=duree2(b0)
b=b0; d=0; r=0;
for j=1:2
 desc=sum(rand(1,b)<0.3); attente=poiss(20);
 monte=min(attente,40-b+desc);
 b=b-desc+monte; r=r+attente-monte;
 d=d+0.1*max(desc,monte)+10+10*rbeta_rejet(2,1.1,1);
end
end
```

La fonction `duree` ne conserve que la première sortie. Répéter 1000 fois, en indiquant la valeur de b_0 choisie (par exemple 0 pour un départ à vide), puis tracer un histogramme de D et les fréquences entières de R. Les fonctions `poiss` et `rbeta_rejet` sont données respectivement dans les exercices 10.31 et 10.35.

```
for b0=[0,20]
 d=zeros(1,1000); r=d;
 for j=1:1000, [d(j),r(j)]=duree2(b0); end
 figure; subplot(2,1,1); histogram(d,'Normalization','pdf');
 subplot(2,1,2); v=0:max(r);
 stem(v,arrayfun(@(x) mean(r==x),v));
end
```

Avec les mêmes uniformes pour décider les descentes des passagers communs, les mêmes arrivées et les mêmes temps de trajet, le bus initialement plus chargé reste au moins aussi chargé après chaque arrêt. Il ne peut donc accepter davantage de nouveaux passagers : le nombre total de refus est au moins aussi grand. En revanche, le temps d'arrêt dépend du maximum des montées et descentes ; ce couplage ne fournit pas d'ordre simple pour la durée totale. Les histogrammes permettent de comparer cette durée pour les deux charges initiales.

Exercice 10.37 — Comparer une binomiale standardisée à la loi normale

L3 • énoncé, p. 87

Pour $0 < p < 1$, la fonction exacte est

$$F_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor np + x\sqrt{np(1-p)} \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

avec la valeur zéro si la borne est négative et un si elle est au moins n. La fonction normale est $\Phi(x) = (1 + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}))/2$. Le code Matlab suivant effectue le tracé sans fonction de loi binomiale :

```
n=100; p=0.3; k=0:n;
logw=gammaln(n+1)-gammaln(k+1)-gammaln(n-k+1)...
     +k*log(p)+(n-k)*log1p(-p);
w=exp(logw); w=w/sum(w);
z=(k-n*p)/sqrt(n*p*(1-p));
x=linspace(-4,4,1000);
stairs(z,cumsum(w)); hold on
plot(x,(1+erf(x/sqrt(2)))/2); xlim([-4,4]);
legend('Binomiale standardisee','Normale'); hold off
```

Pour p fixé dans $(0,1)$, le théorème limite central donne la convergence vers Φ, uniforme puisque la limite est continue. À taille fixée, l'approximation se dégrade près de $p = 0$ ou $p = 1$; le nombre de succès ou d'échecs attendus devient faible. Les graphes ci-dessous comparent les deux fonctions de répartition : binomiale en bleu, normale en bordeaux.

