EI-SE3 / Probabilités / Contrôle 1-bis

10 mai 2016

Exercice 1 [5 points]

(a) Montrer les propriétés suivantes quand elles sont vraies ; dans le cas contraire, construire un contre-exemple. [3]

1. $\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\bar{A}|B) = 1$
2. $\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(A|\bar{B}) = 1$
3. $\mathrm{P}(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$

Solution :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\bar{A}|B) &= \frac{1}{\mathrm{P}(B)}(\mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(\bar{A} \cap B) \text{ (définition)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{P}(B)} P(B) \text{ (théorème des probabilités totales avec } A, \bar{A}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ensuite on prend $\Omega = [\![1, 6]\!]$, ensemble des résultats possibles d'un lancer de dé à 6 faces. On choisit (naturellement) $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathrm{P}(\omega \in \Omega) = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{6}$. Posons A l'évènement “obtenir 2” et B l'évènement “obtenir un nombre pair”.
On vérifie alors que

$$\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(A|\bar{B}) = \frac{1}{3} \neq 1\,, \text{ et}$$

$$\mathrm{P}(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{4}{3} \neq 1\,.$$

Alternative possible : prendre $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(\bar{B}) = \frac{1}{2}$ pour 2., et $A = B$ pour 3. ;
on obtient respectivement $2\mathrm{P}(A)$ et 2.

(b) L'étudiant X vient en TD deux fois sur trois ; quand il vient il arrive une fois sur deux à l'heure, les autres fois il a au moins vingt minutes de retard. Il est 8h40, le TD commence à 8h30. Quelle chance a le professeur de voir encore arriver X ? [2]

Solution :
On note A l'évènement “X vient en TD” et B l'évènement “X est à l'heure”. L'énoncé donne $\mathrm{P}(A) = \frac{2}{3}$ et $\mathrm{P}(B|A) = \frac{1}{2}$. On cherche alors la probabilité pour que X vienne en TD sachant qu'il est en retard (le TD est commencé depuis 10 minutes). Cela s'écrit

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A|\bar{B}) &= \frac{\mathrm{P}(\bar{B}|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(\bar{B})} \text{ (formule de Bayes)} \\
&= \frac{(1-\mathrm{P}(B|A))\mathrm{P}(A)}{(1-\mathrm{P}(B|A))\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\bar{B}|\bar{A})(1-\mathrm{P}(A))} \text{ (formule des probas totales)} \\
&= \frac{1/2\times 2/3}{1/2\times 2/3+1\times 1/3} \text{ (s'il ne vient pas, il est en retard avec proba 1)} \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

soit une chance sur deux de voir X arriver.

Remarque : $B \subset A$ car $B \Rightarrow A$. Donc $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}$; on obtient $\mathrm{P}(B)$ (puis $\mathrm{P}(\bar{B})$) directement sans passer par la formule des probabilités totales.

Exercice 2 [5 points]

Considérons deux boîtes identiques A et B dont l'une contient deux fois plus de pièces d'or que l'autre, mais vous ignorez laquelle. La situation est donc totalement symétrique.

Notons n le nombre de pièces d'or dans la boîte A ; alors la boîte B en contient soit $2n$, soit $\frac{n}{2}$ avec à chaque fois une probabilité de $\frac{1}{2}$. On peut donc déterminer combien de pièces d'or se trouvent dans la boîte B en moyenne.

(a) Que donne le calcul suggéré par l'analyse en italique ? Pourquoi y a-t-il un problème ? [1]

Solution :
On obtient (mais c'est faux) $\frac{1}{2}\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \times 2n = \frac{5n}{4} > n$, ce qui suggérerait qu'il y a un avantage − en moyenne de $\frac{n}{4}$ − à choisir la boîte B. Mais l'énoncé étant complètement symétrique, il y aurait le même avantage en choisissant la boîte A.

Cette analyse est fausse car elle suppose qu'à chaque tirage A contient le même nombre de pièces, constant égal à n. Sous cette hypothèse alors le calcul est juste et il vaut mieux choisir B. Mais il n'y a aucune raison de faire cette hypothèse ; en tout cas l'énoncé ne la suggère pas.

(b) Définir un espace probabilisé adéquat pour cette expérience, puis exprimer X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces d'or dans la boîte B. Calculer alors son espérance ; est-ce conforme à l'intuition ? [4]

Solution :

L'expérience se déroule en deux temps :

1. On choisit un nombre de pièces n que l'on place dans chaque boîte ;
2. On choisit une boîte dans laquelle on ajoute encore n pièces.

Il est donc naturel de prendre pour espace fondamental $\Omega = \mathbb{N}^* \times \{0, 1\}$, 0 codant la boîte A et 1 la boîte B. L'énoncé n'écartant aucune situation, tout singleton de Ω est à considérer : il faut donc prendre $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. Ensuite, on ne peut pas choisir la loi uniforme car Ω est infini. On considère alors une loi discrète quelconque P_1 sur $\mathbb{N}^*$, ainsi que la loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$ de loi notée P_2, et on pose $\mathrm{P} = P_1 \times P_2$ la loi de probabilité produit (les deux choix étant indépendants).

On définit deux variables aléatoires Y et Z correspondant respectivement aux choix 1 et 2 ci-dessus. On peut alors exprimer X :

$$X = Y + YZ = Y(1 + Z)\,,$$

puis son espérance, Y et Z étant indépendantes :

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] \times (1 + \mathrm{E}[Z]) = \frac{3}{2}\mathrm{E}[Y]\,.$$

Donc en moyenne B contient $\frac{3}{2}$ fois la plus petite valeur placée dans les boîtes. C'est en accord avec l'intuition qui nous dit que si on gagne $2Y$ une fois sur deux et Y le reste du temps, on devrait gagner “à peu près $\frac{2+1}{2}Y = \frac{3Y}{2}$”, ce qui se traduit mathématiquement par $\frac{3}{2}\mathrm{E}[Y]$.

Remarque : on peut aussi écrire X comme suit

$$X = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{Y=n}(n\mathbb{1}_{Z=0} + 2n\mathbb{1}_{Z=1})\,,$$

menant au même résultat (c'est la même variable aléatoire).

Exercice 3 [5 points]

On jette 2 dés. Soient X la variable aléatoire égale au plus petit des deux nombres obtenus, Y la variable aléatoire égale au plus grand des deux, et Z la différence en valeur absolue des points obtenus.

(a) Déterminer la loi de X. Tracer sa fonction de répartition (renormaliser les valeurs). [2]

Solution :

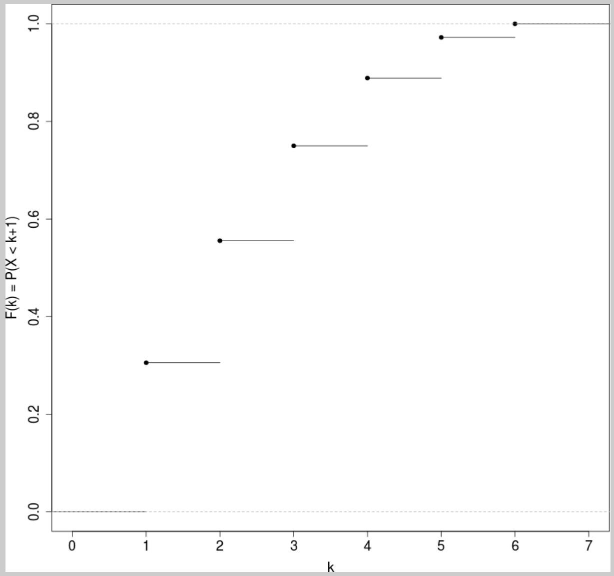
Notons D_1 et D_2 les nombres obtenus respectivement au premier et second lancer. En l'absence d'indications on suppose que ces variables aléatoires sont iid. de loi uniforme. X a pour support $[\![1,6]\!]$. Soit $k \in [\![1,6]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=k) &= \mathrm{P}((D_1 = k \cap D_2 \geq k) \cup (D_2 = k \cap D_1 \geq k)) \\
&= \mathrm{P}(D_1 = k \cap D_2 \geq k) + \mathrm{P}(D_2 = k \cap D_1 \geq k) \\
&\quad - \mathrm{P}(D_1 = k \cap D_2 \geq k \cap D_2 = k \cap D_1 \geq k) \\
&= 2\mathrm{P}(D_1 = k \cap D_2 \geq k) - \mathrm{P}(D_1 = k \cap D_2 = k) \text{ (symétrie des rôles)} \\
&= 2\mathrm{P}(D_1 = k)\mathrm{P}(D_2 \geq k) - \mathrm{P}(D_1 = k)\mathrm{P}(D_2 = k) \text{ (indépendance)} \\
&= \frac{2}{6}\frac{7-k}{6} - \frac{1}{6}\frac{1}{6} \text{ (hypothèses sur } D_i\text{)} \\
&= \frac{13-2k}{36}
\end{aligned}$$

Afin de tracer la fonction de répartition à la main on calcule les valeurs de $F(k) = \mathrm{P}(X \leq k)$, égales respectivement à $\frac{11}{36}$, $\frac{20}{36}$, $\frac{27}{36}$, $\frac{32}{36}$, $\frac{35}{36}$ et 1 pour k allant de 1 à 6. On multiplie ensuite tout par $\frac{36}{10}$ (par exemple) pour compter en doubles-carreaux sur un cahier (ou en centimètres éventuellement, sur une feuille blanche). Il suffit alors de tracer la fonction en escaliers valant 0 de 0 à 1 (exclu), puis 1.1 carreaux de 1 à 2 (exclu), ...etc jusqu'à 3.5 carreaux de 5 à 6 (exclu) puis 3.6 carreaux à partir de 6 (inclus).

Tracé de la fonction de répartition en utilisant le logiciel R :

```
#png("img/FX_graph.png", width=800, height=800)
par(mar=c(5,4.5,1,1))
plot(ecdf(c(
  rep(1,11),rep(2,9),rep(3,7),rep(4,5),rep(5,3),6)),
  main="", xlab="k", ylab="F(k) = P(X < k+1)",
  cex.lab=1.5, cex.axis=1.5)
#dev.off()
```



(b) Déterminer la loi de Z (c'est-à-dire les $\mathrm{P}(Z = k)$). [1]

Solution :

Z est à valeurs dans $[\![0, 5]\!]$; on procède alors par dénombrement (toutes les configurations (i, j) étant équiprobables) : à $k \in [\![1, 5]\!]$ fixé, combien y a-t-il de combinaisons (avec ordre) de D_1 et D_2 menant à $Y - X = k$? Il y en a exactement $2(6 - k)$. Le cas $k = 0$ est à traiter à part, il correspond aux doubles (double 1, double 2, etc) : il y a 6 possibilités menant à $k = 0$. On obtient donc la loi de Z :

$$\begin{cases} \mathrm{P}(Z = 0) = \dfrac{1}{6} \\ \mathrm{P}(Z = k \in [\![1, 5]\!]) = \dfrac{6 - k}{18} \end{cases}$$

(c) Calculer l'espérance et la variance de X [2]

Solution :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \sum_{k=1}^{6} k\mathrm{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{6} \frac{13k - 2k^2}{36} \\ &= \frac{13}{36} \sum_{k=1}^{6} k - \frac{1}{18} \sum_{k=1}^{6} k^2 \\ &= \frac{13}{36} \frac{6 \times 7}{2} - \frac{1}{18} \frac{6 \times 7 \times 13}{6} \\ &= \frac{91}{36} \text{ , soit environ } 2.5 \end{aligned}$$

Ensuite, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$. On calcule donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^2] &= \sum_{k=1}^{6} k^2 \mathrm{P}(X = k) \\
&= \frac{13}{36} \sum_{k=1}^{6} k^2 - \frac{1}{18} \sum_{k=1}^{6} k^3 \\
&= \frac{13}{36} \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - \frac{1}{18} 21^2 \\
&= \frac{7 \times 13^2 - 2 \times 21^2}{36} \\
&= \frac{1183 - 882}{36} = \frac{301}{36} \,,
\end{aligned}$$

puis

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{301 \times 36 - 91^2}{36^2} = \frac{2555}{1296} \text{ , soit environ } 2 \,.$$

Exercice 4 [5 points]

Soient X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et ε une variable aléatoire discrète indépendante de X telle que $\mathrm{P}(\varepsilon = 1) = \mathrm{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$. Déterminer la densité de $Y = \varepsilon X$, son espérance mathématique et sa variance.
(Cette loi est appelée loi exponentielle symétrique.)

Solution :
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. En utilisant la formule des probabilités totales, on écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y \leq x) &= \mathrm{P}(Y \leq x | \varepsilon = -1)\mathrm{P}(\varepsilon = -1) + \mathrm{P}(Y \leq x | \varepsilon = 1)\mathrm{P}(\varepsilon = 1) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{P}(-X \leq x) + \mathrm{P}(X \leq x)) \\
&= \frac{1}{2}(1 + 1 - e^{-\lambda x}) \\
&= 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{2} = F_+(x) \,.
\end{aligned}$$

De même pour $x \in \mathbb{R}^-$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y \leq x) &= \frac{1}{2}(\mathrm{P}(-X \leq x) + \mathrm{P}(X \leq x)) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{P}(X \geq -x) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \mathrm{P}(X \leq -x)) \\
&= \frac{e^{\lambda x}}{2} = F_{-}(x)\,.
\end{aligned}
$$

$F'_{+}(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{2}$ et $F'_{-}(x) = \frac{\lambda e^{\lambda x}}{2}$. Ces deux expressions sont égales à $f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$, qui est donc la densité de Y.

L'espérance est nulle car la densité est symétrique par rapport à zéro. On peut aussi le voir en écrivant $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[\varepsilon]\mathrm{E}[X] = 0$ par indépendance des variables aléatoires ε et X.

Enfin, $$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{E}[Y^2] &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\
&= 2\int_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda x^2}{2} e^{-\lambda x}dx \text{ (par symétrie)} \\
&= 2\left[-\frac{x^2}{2}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_{x=0}^{+\infty} x e^{-\lambda x}dx \text{ (intégration par parties)} \\
&= \frac{2}{\lambda}\mathrm{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

On peut aussi finir le calcul directement sans passer par la valeur (connue) de l'espérance d'une loi exponentielle :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[Y] &= 2\left(\left[\frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx\right) \text{ (IPP)} \\
&= \frac{2}{\lambda}\left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$