LM 201 - TD 11

24 novembre 2011

Exercice 12, feuille 4 (DM). f) Appelons f la fonction considérée. Son domaine de définition et de dérivabilité $\mathcal{D}$ sera la parite de $\mathbb{R}$ sur laquelle $\frac{x+1}{x-1}$ est définie et dérivable, c'est-à-dire $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Avant de calculer f' sur $\mathcal{D}$, on calcule la dérivée de la fraction rationnelle, qui interviendra dans l'expression de f. En écrivant, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, on a facilement que la dérivée voulue est donnée sur $\mathcal{D}$ par $x \mapsto -\frac{2}{(x-1)^2}$.

Ainsi, sur $\mathcal{D}$,

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} \arctan'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{2}{(x-1)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

après simplifications.

On remarque que c'est, au signe près, la dérivée d'arctan.

On ne peut toutefois en déduire que $f+\arctan$ est constante que sur des *intervalles* ; autrement dit, il existe $c_g, c_d \in \mathbb{R}$ telles que $f = c_g - \arctan$ sur $]-\infty, 1[$ et $f = c_d - \arctan$ sur $]1, +\infty[$. Pour déterminer ces constantes, on peut par exemple regarder $f(0)$, qui vaut $-\frac{\pi}{4}$ et c_g, d'où $c_g = -\frac{\pi}{4}$, et la limite de f en $+\infty$, qui vaut $\frac{\pi}{4}$ et $c_d - \frac{\pi}{2}$, d'où $c_d = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 13, feuille 4 (DM). b) Je donne un autre argument qu'en TD. On peut grâce au a) calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th} x = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{2\operatorname{th}(x/2)}{1+\operatorname{th}(x/2)^2}$, *i.e.* $(\operatorname{th} x)\operatorname{th}(x/2)^2 - 2\operatorname{th}(x/2) + \operatorname{th} x = 0$, et l'on est ramené à la résolution de $(\operatorname{th} x)r^2 - 2r + \operatorname{th} x = 0$. Remarquons que $\operatorname{th} x = 0$ *ssi* $x = 0$, auquel cas la formule demandée est immédiate ; on suppose donc $\operatorname{th} x \neq 0$, et l'on obtient pour racines de cette équation du second degré $r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x \pm 1}{\operatorname{sh} x}$ car $\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$. Il reste à déterminer si l'on garde le $+$ ou le $-$; on peut déjà remarquer par continuité de $x \mapsto \operatorname{th}(x/2)$ en un point non nul que ce signe (au moins de chaque côté de 0) ne dépend pas de x [1]. En outre, le $+$ est impossible, car $\frac{\operatorname{ch} x+1}{\operatorname{sh} x} \sim_0 \frac{2}{x}$, alors que $x \mapsto \operatorname{th}(x/2)$ est continue en 0. On a donc pour

1. supposons par exemple qu'en x_0 on ait $+$; si dans tout voisinage de x_0 on pouvait trouver un x associé à un $-$, alors on aurait une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ tendant vers x_0 telle que pour tout n, $\operatorname{th}(x_n/2) = \frac{\operatorname{ch} x_n - 1}{\operatorname{sh} x_n} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{\operatorname{ch} x_0 - 1}{\operatorname{sh} x_0} \neq \frac{\cosh x_0 + 1}{\sinh x_0} = \tanh(x_0/2)$, ce qui est absurde. Autour de tout point, il existe donc un voisinage tel que le signe considéré soit constant dans ce voisinage *i.e.* l'ensemble des points > 0 où l'on a un $+$ est ouvert ; il est également fermé par continuité de $x \mapsto \operatorname{th}(x/2)$, et s'il est non vide c'est donc $\mathbb{R}^{+*}$ par connexité...

tout $x \neq 0$, $\mathrm{th}(x/2) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{(\operatorname{ch} x-1)(\operatorname{ch} x+1)}{\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x+1)} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x+1)} = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh} x(\operatorname{ch} x+1)} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x+1}$, ce qui est encore vrai en $x = 0$ comme on l'a déjà remarqué.

Exercice 7, feuille 4. 6) (DM) On applique la méthode habituelle de résolution des équations du second ordre à coefficients constants — **à connaître sur le bout des doigts !** L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''+2y'+5y = 0$, $\lambda^2+2\lambda+5 = 0$, a pour solutions $\lambda_1 = -1 + 2i$ et $\lambda_2 = -1 - 2i$. La solution de l'équation homogène s'écrit donc $e^{-t}(a\cos t + b\sin t)$, avec a, $b \in \mathbb{C}$, et réels si l'on veut des solutions réelles.

Pour la solution particulière, puisque i et $-i$ ne sont pas racines de l'équation caractéristique, *i.e.* cos et sin ne sont pas solution de l'équation homogène, on sait qu'en calculant $y_p'' + 2y_p' + 5y_p$, avec $y_p = \alpha\cos + \beta\sin$, α, β à déterminer, on va obtenir quelque chose de non nul, somme de cos et de sin. En effet, tous calculs faits, $y_p'' + 2y_p' + 5y_p = (4\alpha + 2\beta)\cos + (4\beta - 2\alpha)\sin$, donc y_p est une solution particulière *ssi* $4\alpha + 2\beta = 10$ et $4\beta - 2\alpha = 0$, soit $\alpha = 2$ et $\beta = 1$. La solution générale de l'équation initiale s'écrit ainsi $y(t) = e^{-t}(a\cos 2t + b\sin 2t) + 2\cos t + \sin t$.

Enfin, pour la solution vérifiant les conditions initiales, on a $1 = y(0) = a + 2$, soit $a = -1$, et

$$y(t) = e^{-t}(-1\cos 2t + b\sin 2t) + 2\cos t + \sin t.$$

Par suite,

$$y'(t) = e^{-t}\big[(2-b)\sin 2t + (2b+1)\cos 2t\big] - 2\sin t + \cos t,$$

d'où $0 = y'(0) = 2b + 2$, soit $b = -1$, et la solution recherchée est donnée par $y(t) = -e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t) + 2\cos t + \sin t$.

3) Étudions d'abord l'équation homogène $xy' + y = 0$. Pour déterminer les solutions autres que $y(x) = 0$, on l'écrit comme $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{\pm *}$, ce qui entraîne que $\ln|y| = -\ln|x| + c_\pm$, où $c_\pm$ est un nombre réel quelconque dépendant de l'intervalle considéré, *i.e.* $|y| = \frac{e^{c_\pm}}{|x|}$, ou encore, $y(x) = \frac{C_\pm}{x}$ avec $C_\pm \in \mathbb{R}^*$. Ces fonctions ne sont pas prolongeables sur $\mathbb{R}$ entier ; la solution nulle est en revanche prolongeable (en tant que solution) sur $\mathbb{R}$ entier.

Une solution particulière de l'équation initiale est simplement $y = 1$ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'équation initiale n'admet qu'une seule solution sur $\mathbb{R}$ qui est $y = 1$, et les autres solutions sont de la forme $y(x) = 1 + \frac{C_\pm}{x}$ sur $\mathbb{R}^{\pm *}$, où C_+ et C_- sont des nombre réels quelconques dont un au moins est non nul, et elles sont définies sur $\mathbb{R}^*$.

8) Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, on peut construire par composition une fonction $z : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ qui est de la même classe par la formule $z := y \circ \tan$. Si l'on suppose à présent que y est une solution de l'équation différentielle proposée, disons (E), alors on dispose d'une relation entre les dérivées de y ; pour obtenir de même une relation entre les dérivées de z dans le but de déterminer cette dernière, on calcule ses dérivées en fonction de celles de y avant de réinterpréter (E) en termes de ces dérivées

de z. Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{aligned} z'(t) &= \tan' t \cdot y'(\tan t) = (1+\tan^2 t)y'(\tan t)\,; \\ z''(t) &= (1+\tan^2)'(t)y'(\tan t) + (1+\tan^2 t)^2 y''(\tan t) \\ &= 2(1+\tan^2 t)\tan t \cdot y'(\tan t) + (1+\tan^2 t)^2 y''(\tan t) \end{aligned}$$

pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, en substituant $\tan t$ à x (lorsque t parcourt $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan t$ parcourt $\mathbb{R}$) dans (E), on obtient l'équation équivalente :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ z''(t) + 1 = 0.$$

Ceci équivaut encore à l'existence de deux constantes réelles quelconques c_1 et c_2 telles que $z(t) = -\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, soit, puisque $y = z \circ \arctan$, $y = -\frac{1}{2}\arctan^2 + c_1 \arctan + c_2$.

Exercice 1, feuille 5. Remarquons tout d'abord que pour $x = 1$, on a $\frac{x^n \sin x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\sin 1 \neq 0$ pour tout $n \geq 0$, tandis que si $x \in [0,1[$, $\frac{x^n \sin x}{1+x^2}$ tend vers 0 ; si l'on avait convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite des $x \mapsto \frac{x^n \sin x}{1+x^2}$, qui sont continues, la fonction limite serait elle-même continue, et valant 0 sur $[0,1[$, elle serait aussi nulle en 1, ce qui est absurde. On est donc sûr qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$ (ou même sur $[0,1[$, puisque le sup sur $[0,1[$ d'une fonction continue sur $[0,1]$ est le même que le sup sur $[0,1]$). On ne peut donc pas appliquer le théorème de permutation limite/intégrale standard, *i.e.* celui qui utilise la convergence uniforme. Deux options se présentent donc : utiliser d'autres théorèmes, très puissants, comme les théorèmes de convergence monotone (Beppo-Levi) ou de convergence dominée (Lebesgue), que vous n'avez pas encore l'air de maîtriser, ou bien procéder par encadrements.

On va prendre la seconde option. On veut donc démontrer directement que la suite des intégrales $I_n := \int_0^1 \frac{x^n \sin x}{1+x^2} dx$ tend vers 0 ; la manière la plus simple de le faire est de majorer cette suite (positive) par une suite tendant vers 0. Or pour tout $n \geq 0$, l'intégrande de I_n est $\leq x^n$ (ici ma notation est abusive, mais je contourne le problème en disant que x désigne l'identité sur $[0,1]$, et n'est pas ici un nom de variable), donc $I_n \leq \int_0^1 t^n\ dt = \frac{1}{n+1}$, d'où l'on déduit en effet que (I_n) converge vers 0.