UPMC 2011-2012
LM 201
Feuille d'exercices n°5

Exercice 1. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n \sin x}{1+x^2} dx$.

Exercice 2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt$. Montrer que (I_n) tend vers 0 (on tâchera d'utiliser l'hypothèse de régularité sur f, en tentant par exemple une intégration par parties).

Exercice 3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x\,dx$.

a) Montrer que (I_n) tend vers 0.

b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

c) En déduire que $e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 4. Pour tout $n \geq 0$ on pose $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2.

b) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

c) Montrer que cette suite tend vers 1.

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.

e) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = 0$, et en déduire un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 5. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,dt$.

a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.

c) Achever la résolution de cette équation.

Exercice 6, intégrales de Wallis (1616-1703). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$ et que $I_n > 0$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

c) Donner pour tout entier n une expression de I_n à l'aide de factorielles, en distinguant les cas n pair et n impair.

d) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ et $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$.

e) Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 7. Calculer :

a) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

b) $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$

Exercice 8. Donner une primitive de $\sin \circ \ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On pourra choisir celle qui s'annule en 1, *i.e.* $x \mapsto \int_1^x \sin(\ln t)\, dt$, et procéder à un changement de variable à $x > 0$ fixé pour le calcul de l'intégrale.

Exercice 9. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{4\cos x - 5} dx$.

a) Calculer a_0 et a_1.

b) Calculer, pour $n \geq 0$, $a_n + a_{n+2}$. En déduire une relation de récurrence pour (a_n).

c) Déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Calculer une primitive de F, où $F(t) = \frac{t^6 + +2t^5 + 2t^4 + t^3 - t^2 + 16t + 4}{(t-1)(t-2)^2(t^2+2t+2)^2}$ pour tout $t \neq 1$, 2.

Exercice 11. Donner une primitive de $\frac{1}{\cos \sin^3}$, en précisant l'intervalle d'étude.

Exercice 12. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $F(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

a) Démontrer que F est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire F.

b) En exploitant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, retrouver l'expression de F.

Exercice 13, intégrale de Poisson. Soit a un nombre réel différent de ± 1. Montrer que la fonction qui à $t \in [0, \pi]$ associe $\ln(1 - 2a\cos t + a^2)$ est continue. On pose

$$I(a) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2a\cos t + a^2\right) dt.$$

Pour tout $a \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$, calculer $I(-a)$, $I(a^2)$, et $I(1/a)$ lorsque a n'est pas nul.
Prouver que I est bornée sur tout segment contenu dans $[0, 1[$. En déduire que

$$I(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1, \\ 2\pi \ln |a| & \text{si } |a| > 1. \end{cases}$$

Exercice 14. Pour tout entier naturel n on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t\, dt$.

1. Étudier la suite (I_n) ; prouver en particulier qu'elle tend vers 0.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir l'encadrement

$$I_{n+2} \leq \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n$$

Déduire de ce qui précède un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 15. Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt.$$

Montrer que si $x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$, alors $\ln 3 \cos(3x) \leq f(x) \leq \ln 3 \cos x$. En déduire que f se prolonge par continuité en 0 ; on appelle encore f la fonction prolongée. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$, puis justifier que f est deux fois dérivable à droite en 0.